

1. Язык и аксиомы арифметики Пеано PA . Системы MA , Q , их простейшие нестандартные модели: добавление бесконечно большого элемента (модель слабых аксиом порядка), определение сложения и умножения. Вложение стандартной модели в нестандартные модели MA .
2. Дискретно упорядоченные коммутативные кольца и их неотрицательные части. Теория PA^- и выводимость её аксиом в арифметике Пеано. Нестандартная модель PA^- на основе неотрицательной части кольца $Z[X]$. Пример арифметического предложения, выводимого в PA , но ложного в этой модели. Модель PA^- , в которой ложна теорема об иррациональности корня из двух.
3. Выразимость предикатов и функций в стандартной модели арифметики. Арифметическая иерархия. Разрешимость Δ_0 -предикатов и перечислимость Σ_1 -предикатов в стандартной модели арифметики. Разрешимость Δ_0 -формул в теории. Σ_1 -полнота MA . Вспомогательные леммы и доказательство теоремы о Σ_1 -полноте минимальной арифметики.
4. Кодирование слов в конечном алфавите. Выразимость конкатенации слов и экспоненты в языке арифметики. Σ_1 -определимость длины слова при r -ичном кодировании.
5. Машины Тьюринга, их конфигурации и протоколы вычислений. Кодирование машин Тьюринга, их конфигураций и вычислений. Эквивалентность перечислимости предиката и Σ_1 -определимости в стандартной модели арифметики.
6. Представимость перечислимых предикатов в теории MA . Алгоритмическая неразрешимость MA и чистого исчисления предикатов. Первая теорема Гёделя о неполноте (синтаксическая формулировка). Формулировка Гёделя, ω -непротиворечивость и Σ_1 -корректность теории.
7. Представимость предикатов и функций в арифметике. Доказуемая Σ_1 -полнота арифметики Робинсона. Теорема о представимости вычислимых функций в арифметике Робинсона.
8. Рекурсивно неотделимые пары множеств, теорема Гёделя-Россера. Теорема о существовании неотделимых пар перечислимых множеств. Минимальная арифметика MA' и ее свойства. Лемма о двойном представлении пар в арифметике MA' . Доказательство теоремы Гёделя-Россера. Доказательство леммы о двойном представлении.
9. Представимость функций в данной теории. Представимость вычислимых функций в арифметике MA' .
10. Кодирование конечных последовательностей. Гёделева нумерация синтаксиса формальной арифметики.
11. Формула доказуемости, лемма о неподвижной точке. Условия Бернайса-Лёба (формулировка).
12. Вторая теорема Гёделя о неполноте (недоказуемость непротиворечивости), теорема Лёба, теорема Тарского о невозможности определения истинности.

Теорема Чёрча об алгоритмической неразрешимости арифметики и чистой логики предикатов.

13. Неподвижная точка Россера. Второе доказательство теоремы Россера. Лемма (трюк) Крейга.
14. Доказуемая тотальность функции конкатенации последовательности. Доказуемо рекурсивные функции. Доказуемая однозначность функции. Прimitивно рекурсивные функции. Теорема Парсонса-Минца-Такеути (формулировка). Теорема о доказуемой рекурсивности всех примитивно рекурсивных функций в теории $I\Sigma_1$. Идея доказательства. Схема Σ_1 -ограниченности и ее выводимость в $I\Sigma_1$.
15. Доказуемость схемы Σ_1 -ограниченности из Σ_1 -индукции. Эквивалентные формы схем индукции и ограниченности.
16. Построение предиката доказуемости, удовлетворяющего условиям Леба (обсуждение условий).
17. Примитивно рекурсивная формализация синтаксиса. Доказуемая Σ_1 -полнота и третье условие Лёба. Формализуемость синтаксиса в теории множеств.
18. Язык модальной логики, арифметическая интерпретация, логика доказуемости в данной теории относительно метатеории, аксиоматизация логики доказуемости, правило и аксиома Лёба, их эквивалентность.
19. Примеры неэквивалентных предикатов доказуемости для одной и той же теории.
20. Прогрессии Тьюринга. Условие непротиворечивости теорий прогрессии. Построение теории любого конечного ранга.
21. Пример Нибергалля неперечислимой теории, в которой выразимо, но недоказуемо утверждение о собственной непротиворечивости.