**Математический институт им. В.А. Стеклова
Российской академии наук
Лаборатория алгебраической геометрии и ее приложений
Национального исследовательского университета
"Высшая школа экономики"
Лаборатория комплексного анализа и дифференциальных
уравнений Сибирского федерального университета
Российский фонд фундаментальных исследований
Фонд некоммерческих программ "Династия"
Филиал Северного (Арктического) федерального
университета им. М.В. Ломоносова в г. Коряжме
Архангельской области**

V ШКОЛА-КОНФЕРЕНЦИЯ
по алгебраической геометрии
и комплексному анализу
для молодых математиков России

**г. Коряжма Архангельской области,
Филиал С(А)ФУ им. М.В. Ломоносова,
17-22 августа 2015 года**

Оргкомитет школы-конференции

А.Н. Паршин, доктор физ.-мат. наук, академик РАН, заведующий отделом алгебры и теории чисел МИАН (председатель оргкомитета);

И.В. Кузнецова, кандидат пед. наук, директор Филиала С(А)ФУ в г. Коряжме Архангельской области (сопредседатель оргкомитета);

Ф.А. Богомолов, доктор физ.-мат. наук, научный руководитель лаборатории алгебраической геометрии и ее приложений НИУ ВШЭ;

Вик.С. Куликов, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник МИАН;

Д.В. Осипов, доктор физ.-мат. наук, ведущий научный сотрудник МИАН;

А.К. Цих, доктор физ.-мат. наук, зав. кафедрой теории функций СФУ;

И.В. Нетай, кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник ИППИ РАН;

С.А. Тихомиров, кандидат физ.-мат. наук, доцент ЯГПУ;

А.С. Трепалин, кандидат физ.-мат. наук, научный сотрудник ИППИ РАН;

А.В. Щуплев, кандидат физ.-мат. наук, заведующий лабораторией комплексного анализа и дифференциальных уравнений СФУ

Оглавление

ЧАСТЬ I. ЛЕКЦИИ

ПУЧКИ БЕЗ КРУЧЕНИЯ НА МНОГООБРАЗИЯХ И ИНТЕГРИРУЕМЫЕ СИСТЕМЫ

А. Б. Жеглов[1] (Москва)
azheglov@math.msu.su

В теории интегрируемых систем есть две классические проблемы, появившиеся и впервые исследовавшиеся еще в работах алгебраистов Шура и Бурхнала-Чаунди, и заслуживающие внимания алгебраических геометров: это проблема построения в явном виде наборов коммутирующих дифференциальных операторов с определенными свойствами, и проблема классификации колец коммутирующих дифференциальных операторов в частных производных. С современной точки зрения такие кольца являются квантованиями колец коммутирующих относительно стандартной скобки Пуассона функций на кокасательном расслоении; кроме того, явные примеры коммутирующих операторов позволяют строить точные решения ряда нелинейных уравнений в частных производных.

Один из подходов к решению этих проблем — исследование геометрических спектральных данных таких колец, важнейшей частью которых являются пучки без кручения с фиксированным полиномом Гильберта на спектральном многообразии. Изучению модулей полустабильных расслоений или полустабильных не локально свободных пучков над алгебраическими многообразиями посвящена большая часть алгебраической геометрии, но в данном случае особое значение имеют модули полустабильных пучков без кручения с фиксированным полиномом Гильберта на особых алгебраических многообразиях, иногда почти целиком состоящие из не локально свободных пучков. В своих лекциях я планирую рассказать как о ставших уже классическими, так и о новых подходах к решению упомянутых проблем.

Краткое содержание лекций таково.

1. Коммутативные подалгебры обыкновенных дифференциальных операторов. Теорема классификации Кричевера. Переизложение классификации по Дринфельду и Мамфорду. Классификация в терминах точек большой клетки грассманиана Сато.

2. Методы построения явных примеров коммутирующих обыкновенных дифференциальных операторов. Точные формулы Кричеве-

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты № 14-01-00178-а, № 13-01-00664) и Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-581.2014.1)

ра, Вилсона и Сато. Точные решения уравнений КП и КдФ. Явные примеры. Коммутирующие обыкновенные дифференциальные операторы с полиномиальными коэффициентами и гипотеза Диксмье.

3. Геометрические спектральные данные коммутативных подалгебр дифференциальных операторов в частных производных. Общие геометрические свойства спектрального многообразия и пучка. Геометрические свойства алгебраически интегрируемых коммутативных колец дифференциальных операторов в частных производных. Методы построения явных примеров. Явные примеры: квантовые системы Калоджеро-Мозера и их деформации. Гипотеза о классификации коммутативных подалгебр дифференциальных операторов в частных производных в терминах спектральных данных.

Литература

[1] Burchnall J.L., Chaundy T.W., *Commutative ordinary differential operators*, Proc. London Math. Soc. Ser. 2, **21** (1923) 420-440; Proc. Royal Soc. London Ser. A, **118** (1928) 557-583.

[2] Демидов Е. Е. *Иерархия Кадомцева–Петвиашвили и проблема Шоттки*, Фундамент. и прикл. матем., 1998, 4:1, 367–460.

[3] Дринфельд В., *О коммутативных подкольцах некоторых некоммутативных колец*, Функц. анализ и его прил. 11:1 (1977), 11-14.

[4] P. Etingof, *Lectures on Calogero-Moser systems*, arXiv:math/0606233

[5] P. Etingof, V. Ginzburg, *On m-quasi-invariants of a Coxeter group*, Mosc. Math. J. **2** (2002), 555–566.

[6] Кричевер И.М., *Методы алгебраической геометрии в теории нелинейных уравнений*, УМН **32**, 6 (1977), 183-208

[7] Кричевер И.М., *Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов*, Функц. анализ и его прил., 12:3, 1978, 20–31

[8] I. Krichever, S. Novikov, *Holomorphic bundles over algebraic curves and nonlinear equations*, Russian Math. Surveys, **35**:6 (1980), 47–68.

[9] H. Kurke, D. Osipov, A. Zheglov, *Commuting differential operators and higher–dimensional algebraic varieties*, Selecta Math. **20** (2014), 1159–1195.

[10] H. Kurke, A. Zheglov,*Geometric properties of commutative subalgebras of partial differential operators*, MPIM preprint **33**, 1–32, 2014, to appear in Sb. Math., 2015

[11] Manin Y., *Algebraic aspects of nonlinear differential equations*, Itogi Nauki Tekh., Ser. Sovrem. Probl. Mat. 11, 5-152 (1978).

[12] A. Mironov, A. Zheglov, *Commuting ordinary differential operators with polynomial coefficients and automorphisms of the first Weyl algebra*, arXiv:1503.00485.

[13] Mulase M., *Algebraic theory of the KP equations*, Perspectives in Mathematical Physics, R.Penner and S.Yau, Editors, (1994), 151-218

[14] Mumford D., *An algebro-geometric constructions of commuting operators and of solutions to the Toda lattice equations, Korteweg-de Vries equations and related non-linear equations*, In Proc. Internat. Symp. on Alg. Geom., Kyoto 1977, Kinokuniya Publ. (1978) 115-153.

[15] Parshin A. N., *Integrable systems and local fields*, Commun. Algebra, 29 (2001), no. 9, 4157-4181.

[16] Previato E., *Multivariable Burchnall-Chaundy theory*, Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, in "30 years of finite-gap integration"compiled by V. B. Kuznetsov and E. K. Sklyanin, (2008) 366, 1155-1177.

[17] Sato M., *Soliton equations and universal Grassmann manifold*, Kokyuroku, Res. Inst. Math. Sci., Kyoto Univ. **439** (1981) 30-46.

[18] Schur I., *Über vertauschbare lineare Differentialausdrc̆ke*, Sitzungsber. der Berliner Math. Gesel. **4** (1905) 2-8.

[19] Segal G., Wilson G., *Loop Groups and Equations of KdV Type*, Publ. Math. IHES, n. 61, 1985, pp. 5-65.

[20] A. Zheglov, *On rings of commuting differential operators*, St. Petersburg Math. J. **25** (2014), 775–814.

ТОПОЛОГИЯ ВЕЩЕСТВЕННЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПЛОСКИХ КРИВЫХ

С.Ю. Оревков (Москва)
orevkov@mi.ras.ru

1. Состояние предмета на конец 19 века: неравенство Харнака и его точность, классификация кривых степени не выше 5.

2. Основные ограничения на кривые произвольных степеней: неравенства Петровского, Арнольда, сравнение Гудкова-Рохлина (без доказательства), формулы комплексных ориентаций.

3. Гибкие и псевдоголоморфные кривые. Связь с квазиположительными косами.

4. Тригональные кривые и техника dessins d'enfant.

5. Методы, используемые в классификации для малых степеней. Построения методом Виро и его обобщения, построение циклов на двулистном накрытии при помощи пучков прямых, применение теории узлов и теории кос.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ АРИФМЕТИКА АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

А. Н. Паршин (Москва)
parshin@mi.ras.ru

Лекции будут посвящены дзета-функциям, появляющимся в связи с задачами теории чисел. Так, дзета-функция Римана связана с задачей о распределении простых чисел, дзета-функции алгебраических кривых (и, более общо, многообразий) над конечными полями с задачей о подсчете числа решений сравнений в конечных полях. Дзета-функции возникают обычно как функции комплексной переменной, определенные в правой полуплоскости комплексной плоскости. Мы расскажем общую конструкцию схем Гротендика, позволяющую объединить различные типы дзета-функций в единое целое и сформулировать основные проблемы, с ними связанные. К ним относятся вопросы аналитического продолжения на всю комплексную плоскость, исследования полюсов и нулей, наличие симметрий относительно инволюций плоскости. Будет дан обзор имеющихся классических подходов к этим проблемам (еще далеко не решенным) и рассказано о недавних продвижениях в этой области и имеющихся перспективах.

Литература

[Par11] А. Н. Паршин, Заметки о формуле Пуассона, Алгебра и анализ, 2011, 23:5, 1–54.

[Par06] A. N. Parshin, Numbers as functions: the development of an idea in the Moscow school of algebraic geometry, Mathematical events of the twentieth century, Springer, Berlin, 2006, 297—332.

СФЕРИЧЕСКИЕ МНОГООБРАЗИЯ

Д. А. Тимашёв (Москва)
timashev@mccme.ru

Сферические многообразия — одновременно и классические и современные объекты математики. Классическими их можно назвать потому, что многие пространства и многообразия, активно изучавшиеся в классической, дифференциальной и алгебраической геометрии с XIX века и даже раньше (начиная со сферы и проективного пространства, переходя к грассманианам и многообразиям флагов, и заканчивая многообразиями квадрик, симметрическими пространствами, детерминантными и торическими многообразиями) можно отнести к сферическим многообразиям. В то же время единство свойств сферических многообразий и методов их изучения было осознано сравнительно недавно, за последние 30 лет, что привело к активной разработке их теории, развивающейся и поныне.

Сферические многообразия обладают важным качеством интересного математического объекта — они аккумулируют в себе свойства разной природы, происходящие из алгебраической, дифференциальной и симплектической геометрии, гармонического анализа, теории представлений и пр. Взаимодействие этих свойств и делает сферические многообразия столь интересным объектом изучения и позволяет плодотворно применять их теорию в самых разных областях математики.

В данном миникурсе лекций будет сделана попытка обзора основ теории сферических многообразий, наряду с последними достижениями и некоторыми интересными приложениями. Более детально познакомиться с этой теорией и её приложениями можно по статьям, обзорам и монографиям [Kn], [Bri1], [Bri2], [Tim1], [Tim2], [Per].

Мы начнём *первую лекцию* с рассмотрения двух модельных классических задач. Первая из них — разложение тензорного произведения двух неприводимых рациональных представлений алгебраической группы $SL_2(\mathbb{C})$, решение которой даётся хорошо известной формулой Клебша–Гордана. Мы рассмотрим эту задачу и её решение с геометрической точки зрения, реализуя неприводимые представления в пространствах сечений линейных расслоений над проективной прямой $\mathbb{CP}^1$, а их тензорные произведения — в пространствах сечений линейных расслоений над $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$.

Вторая задача — это знаменитая задача о пяти кониках: сколько гладких коник (т.е. кривых 2-го порядка) на проективной плоскости $\mathbb{CP}^2$ касаются пяти данных коник в общем положении. Задача была поставлена Я. Штейнером в 1848 году и решена им неверно с использованием теоремы Безу на проективном пространстве $\mathbb{CP}^5$, компактифицирующем многообразие плоских проективных коник. Верное решение предложил М. Шаль (1864), использовавший теорию пересечений на более «удачной» компактификации многообразия плоских коник — так называемом многообразии полных коник.

Затем мы напомним необходимые сведения о редуктивных комплексных алгебраических группах и их линейных представлениях, после чего рассмотрим одно из центральных понятий нашего курса — *сферические однородные пространства*. Мы дадим несколько эквивалентных определений сферического однородного пространства G/H (где G — связная редуктивная группа, а H — её алгебраическая подгруппа):

- *с точки зрения геометрии групп преобразований*: борелевская подгруппа $B \subset G$ имеет на G/H открытую плотную орбиту;

- *с точки зрения гармонического анализа*: представление группы G в пространстве сечений любого линейного расслоения над G/H имеет простой спектр (свободно от кратностей);

- *с точки зрения симплектической геометрии*: типичные G-орбиты на кокасательном расслоении $T^*(G/H)$ коизотропны относительно естественной симплектической структуры;

- *с точки зрения дифференциальной алгебры и геометрии*: алгебра G-инвариантных дифференциальных операторов на G/H коммутативна;

- и некоторые другие формулировки.

При этом мы рассматриваем все фигурирующие объекты с точки зрения алгебраической геометрии (регулярные функции и сечения алгебраических линейных расслоений, алгебраические дифференциальные операторы и т.п.), но можно рассматривать их и в комплексно-аналитическом контексте, а также вещественные версии этих определений в рамках дифференциальной геометрии и теории групп Ли (*коммутативные однородные пространства* [Вин]).

Затем мы определим *сферические многообразия* как нормальные алгебраические G-многообразия, содержащие сферическое однородное пространство в качестве открытой плотной орбиты, и рассмотрим примеры сферических однородных пространств и сферических многообразий.

Во *второй лекции* мы определим некоторые комбинаторно-геометрические инварианты сферических однородных пространств и многообразий (решётка весов, конус инвариантных нормирований, сферические корни, краски, цветные конусы и цветные вееры). Эти инварианты близки по природе используемым в геометрии торических многообразий (и обобщают последние). Они позволяют эффективно описывать объекты геометрической природы на сферическом многообразии (орбиты, дивизоры и т.п.) и исследовать их свойства (например, можно строить серии сферических многообразий Фано).

Кроме того, в терминах этих инвариантов можно дать классификацию сферических многообразий. Классификация сферических многообразий с заданной открытой орбитой G/H известна с 80-х годов XX века, а окончательная классификация сферических однородных пространств G/H была получена совсем недавно.

Третью лекцию мы посвятим приложениям теории сферических многообразий. Из всех возможных приложений мы для иллюстрации выберем те, к которым относятся рассмотренные на первой лекции две модельные задачи, а именно — теорию представлений редуктивных групп и исчислительную геометрию.

В теории представлений полупростых алгебр Ли или, что примерно то же самое, редуктивных алгебраических групп одной из фундаментальных проблем является разложение на неприводимые слагаемые тензорного произведения двух неприводимых представлений. Существуют общие формулы для таких разложений, однако на практике они малоэффективны. Разумно ставить задачу получения эффективных формул не для всех, а для некоторых «хороших» серий неприводимых представлений.

Геометрический подход к этой задаче таков. Неприводимые представления редуктивной группы G реализуются в пространствах сечений линейных расслоений над обобщёнными многообразиями частичных флагов G/P (где $P \subset G$ — параболическая подгруппа). Если $P = B$, то можно реализовать все неприводимые представления, а при $P \supset B$ — некоторое их подмножество. Соответственно, тензорные произведения неприводимых представлений можно реализовывать в пространствах сечений линейных расслоений над *двойными многообразиями флагов* $G/P \times G/Q$. Оказывается, если двойное многообразие флагов сферично, то задача разложения такого пространства сечений на неприводимые слагаемые имеет красивое решение.

В рамках исчислительной геометрии рассмотрим следующую задачу. Пусть G/H — однородное пространство, а $Z_1, \ldots, Z_s \subset G/H$ — его подмногообразия суммарной коразмерности $n = \dim(G/H)$. Если многообразия Z_i находятся в общем положении друг относительно друга, то их пересечение конечно, и возникает вопрос о числе точек пересечения.

По теореме Клеймана о трансверсальности действием подходящих элементов $g_1, \dots, g_s \in G$ можно привести любой набор подмногообразий $Z_1, \dots, Z_s \subset G/H$ в общее положение, причём ясно, что для типичных наборов $(g_1, \dots, g_s)$ мощность $|g_1 Z_1 \cap \dots \cap g_s Z_s|$ будет постоянна — её естественно назвать *индексом пересечения* подмногообразий $Z_1, \dots, Z_s$.

Если однородное многообразие G/H компактно, то вычисление индексов пересечения сводится к перемножению циклов $[Z_i]$ в кольце когомологий (или кольце Чжоу) $H^*(G/H)$. Возникает мысль, что и в некомпактном случае ситуация управляется подходящим кольцом пересечений. Де Кончини и Прочези показали (1985), что на сферическом однородном пространстве действительно существует такое кольцо (*кольцо условий* или *кольцо Альфана*) $C^*(G/H)$, причём

$$C^*(G/H) = \varinjlim H^*(X)$$

по всем G-эквивариантным компактификациям $X \supset G/H$. Вычисление колец Альфана сферических однородных пространств — очень интересная задача, решённая к настоящему времени лишь в нескольких частных случаях.

Частный случай задачи о нахождении индексов пересечения — когда Z_i являются гиперповерхностями — может быть решён на любом сферическом однородном пространстве в комбинаторно-геометрических терминах: формула для индекса самопересечения (к чему сводится общий случай) выглядит как интеграл некоторого полинома по так называемому *многограннику Ньютона* гиперповерхности.

Литература

[Вин] Э. Б. Винберг, *Коммутативные однородные пространства и коизотропные симплектические действия*, Успехи матем. наук **56**:1 (2001), 3–62.

[Bri1] M. Brion, *Spherical varieties: an introduction*, Topological methods in algebraic transformation groups (H. Kraft, T. Petrie, G. Schwarz, eds.), Progress in Math., vol. 80, pp. 11–26, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1989.

[Bri2] M. Brion, *Variétés sphériques*, Notes de la session de la S. M. F. "Opérations hamiltoniennes et opérations de groupes algébriques", p. 59, Grenoble, 1997, `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~mbrion/spheriques.pdf`.

[Kn] F. Knop, *The Luna–Vust theory of spherical embeddings*, Proc. Hyderabad Conf. on Algebraic Groups (S. Ramanan, ed.), pp. 225–249, Manoj Prakashan, Madras, 1991.

[Per] N. Perrin, *On the geometry of spherical varieties*, Transformation Groups **19** (2014), issue 1, 171–223.

[Tim1] D. A. Timashev, *Equivariant embeddings of homogeneous spaces*, Surveys in geometry and number theory: reports on contemporary Russian mathematics, London Math. Soc. Lect. Note Ser., no. 338, pp. 226–278, Cambridge University Press, London, 2007.

[Tim2] D. A. Timashev, *Homogeneous spaces and equivariant embeddings*, Invariant Theory and Algebraic Transformation Groups VIII (R. V. Gamkrelidze, V. L. Popov, eds.), Encyclopædia Math. Sci., vol. 138, Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 2011.

О ГИПОТЕЗАХ МОРДЕЛЛА И ВЕЙЛЯ

Г. Б. Шабат (Москва)
george.shabat@gmail.com

В курсе будет кратко рассказано о двух замечательных теоремах двадцатого века, касающихся алгебраических кривых над полями конечного типа. Обе были сформулированы в качестве гипотех задолго до того, как были доказаны, и их обычно продолжают называть *гипотезами*.

Гипотеза Морделла касается кривых, определённых над полями алгебраических чисел, а гипотезы Вейля – произвольных многообразий над конечными полями; мы, однако, над конечными полями тоже ограничимся (в основном) рассмотрением кривых. Обе теоремы касаются *количеств* точек на кривых.

Лекция 1
Необходимые сведения. Формулировки теорем

Фиксируем поле $\mathbb{k}$, которое будем называть *полем констант* или *основным полем*. На протяжении каждой из лекций 2 и 3 оно будет оставаться неизменным.

Предполагаются известными основные понятия теории расширений полей и, в частности, *основная теорема теории Галуа* (например, в объёме [Ленг1968]). Через $\overline{\mathbb{k}}$ обозначается *алгебраическое замыкание* поля $\mathbb{k}$.

Для поля $\mathbb{K}$ и натурального числа $n \in \mathbb{N}$ предполагается известным понятие *n-мерного проективного пространства* $\mathbf{P}_n(\mathbb{K})$ *над полем* $\mathbb{K}$, его *подпространств* и *однородных полиномиальных уравнений* в нём.

Для любого расширения $\mathbb{K}' \supseteq \mathbb{K}$ подразумевается вложение $\mathbf{P}_n(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathbf{P}_n(\mathbb{K}')$. В частности, если $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{k}$ – *алгебраическое* расширение, то подразумевается вложение $\mathbf{P}_n(\mathbb{K}) \hookrightarrow \mathbf{P}_n(\overline{\mathbb{k}})$.

Определение. *Подмножество проективного пространства* $\mathbf{P}_n(\mathbb{K})$, *определённое системой однородных полиномиальных уравнений, называется проективным многообразием.*

В дальнейшем мы будем предполагать, что **коэффициенты всех полиномиальных уравнений лежат в основном поле** $\mathbb{k}$.

Поскольку решения систем полиномиальных уравнений можно рассматривать в проективном пространстве над любым полем $\mathbb{K}$, содержащим основное поле $\mathbb{k}$, любая такая система определяет *класс* проективных многообразий $\mathbf{V}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbf{P}_n(\mathbb{K})$.

Введённое сопоставление $\mathbb{K} \mapsto \mathbf{S}(\mathbb{K})$ определяет *функтор* из категории расширений основного поля в категорию множеств. Такого рода функторы можно считать основными объектами алгебраической геометрии, но мы в этих лекциях будем по возможности придерживаться более элементарной точки зрения.

Тем не менее, нашими главными действующими лицами будут не отдельные многообразия $\mathbf{V}(\mathbb{K})$, а именно процедуры сопоставления множеств (точек) *переменным* полям.

Определение. *Проективным многообразием* $\mathbf{V}$, определённым над полем $\mathbb{k}$, называется система однородных полиномиальных уравнений с коэффициентами из $\mathbb{k}$, сопоставляющая каждому расширению $\mathbb{K} \supseteq \mathbb{k}$ многообразие $\mathbf{V}(\mathbb{K})$, называемое множеством $\mathbb{K}$-*точек* многообразия $\mathbf{V}$.

В случае *алгебраических* расширений $\mathbb{K} \supset \mathbb{k}$ в соответствии с приведёнными выше замечаниями все многообразия $\mathbf{V}(\mathbb{K})$ можно считать подмножествами "универсального" множества $\mathbf{P}_n(\overline{\mathbb{k}})$, зависящего только от количества неизвестных в системе уравнений. Точнее, имеет место важное включение

$$\mathbf{V}(\mathbb{K}) \subseteq \mathbf{V}(\overline{\mathbb{k}}),$$

позволяющее связать проективные многообразия над алгебраически незамкнутыми полями с многообразиями над замкнутыми.

На всех проективных пространствах $\mathbf{P}_n(\overline{\mathbb{k}})$ *покоординатно* действует группа автоморфизмов $\mathrm{Aut}\overline{\mathbb{k}}$. Мы будем пользоваться *левоэкспрненциальным* обозначением действия этой группы на различных объектах: ${}^{\gamma}x := \gamma(x)$.

Введём обычное обозначение групп Галуа

$$\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{k}}, \mathbb{K}) := \{\gamma \in \mathrm{Aut}\overline{\mathbb{k}} \mid \forall x \in \mathbb{K},\ {}^{\gamma}x = x\} \subseteq \mathrm{Aut}\overline{\mathbb{k}}.$$

Напомним, что для алгебраических расширений $\{\mathbb{K} \mid \Bbbk \subseteq \mathbb{K} \subseteq \overline{\Bbbk}\}$ соответствие

$$\mathrm{Gal}(\overline{\Bbbk}, \mathbb{K}) \leftrightarrow \mathbb{K}$$

взаимно однозначно и что при этом *конечным* расширениям соответствуют подгруппы группы $\mathrm{Aut}\overline{\Bbbk}$ конечного индекса.

Для любого действия $G : X$ группы G на множестве X введём обозначение для множества неподвижных точек этого действия:

$$\mathrm{Fix}(G : X) := \{x \in X \mid G \cdot x = \{x\}\}.$$

Теорема. *Для любого проективного многообразия* $\mathbf{V}$ *над полем* $\Bbbk$ *и любого алгебраического расширения* $\mathbb{K} \supset \Bbbk$ *множество* $\mathbf{V}(\mathbb{K})$ *его* $\mathbb{K}$*-точек совпадает с множеством неподвижных точек соответствующей группы Галуа, действующей на множестве его* $\overline{\Bbbk}$*-точек,*

$$\mathbf{V}(\mathbb{K}) = \mathrm{Fix}(\mathrm{Gal}(\overline{\Bbbk}, \mathbb{K}) : \mathbf{V}(\overline{\Bbbk})).$$

Пример. В случае $\Bbbk = \mathbb{R}$ вещественные алгебраические многообразия $\mathbf{V}(\mathbb{R})$ плодотворнее всего изучаются как подмножества точек $\mathbf{V}(\mathbb{C})$, неподвижных относительно комплексного сопряжения. Отметим, что теория вещественных многообразий существенно сложнее теории комплексных; например, *топологическая* классификация комплексных гладких проективных кривых завершена (и вскоре будет напомнена), тогда как в теории вещественных алгебраических кривых остаётся много открытых вопросов.

Наша следующая задача – выделить из определённого выше класса проективных многообразий интересующие нас более узкие классы. На основании вышесказанного мы будем выражать свойства проективных многообразий через свойства содержащих их многообразий над алгебраически замкнутым полем, в наших обозначениях – свойства *всевозможных* многообразий $\mathbf{V}(\mathbb{K})$ через свойства *одного* многообразия $\mathbf{V}(\overline{\Bbbk})$.

Определение. *Проективное многообразие* $\mathbf{V}$ *называется неприводимым*, если многообразие $\mathbf{V}(\overline{\Bbbk})$ непредставимо в виде объединения двух непустых не содержащих друг друга проективных многообразий.

Замечание. Сформулированное свойство часто называют *абсолютной* неприводимостью, чтобы подчеркнуть сохранение неприводимости при расширениях основного поля. Без учёта расширений пришлось бы признать неприводимым многообразие, заданное в $\mathbf{P}_2(\mathbb{R})$ уравнением $(x+y)^2+z^2=0$.

Определение. *Размерностью* неприводимого проективного многообразия $\mathbf{V}$ называется максимально возможная длина d цепочек

$$\mathbf{V}(\overline{\Bbbk}) = \mathbf{V}_0(\overline{\Bbbk}) \supsetneqq \mathbf{V}_1(\overline{\Bbbk}) \supsetneqq \cdots \supsetneqq \mathbf{V}_d(\overline{\Bbbk})$$

строго убывающих неприводимых проективных многообразий.

Эта длина обозначается $d =: \dim \mathbf{V}$.

Неприводимые многообразия размерности 1 называются *кривыми.*

Изучение кривых – основная цель нашего курса; однако наряду с ними нам придётся рассматривать и многообразия высших размерностей. Сейчас мы бегло затронем *грассманианы*; нам они нужны для кратких формулировок ещё нескольких определений, однако эти многообразия представляют значительный самостоятельный интерес, см., например, [Хар2005].

Определение. *Точка грассманиана* – это проективное подпространство[2] фиксированной размерности в фиксированном проективном пространстве,

$$\mathbf{Gr}_{n,m}(\overline{\Bbbk}) := \{m - \text{мерные проективные подпространства в } \mathbf{P}_n(\overline{\Bbbk})\}.$$

Теорема. *На множестве $\mathbf{Gr}_{n,m}(\overline{\Bbbk})$ имеется каноническая структура проективного многообразия.*

См. [Хар2005]. Нам потребуется ещё одна конструкция, связанная с грассманианами.

Определение. *Пусть $P \in \mathbf{P}_n(\overline{\Bbbk})$ – произвольная точка. Назовём P-циклом m-мерных подпространств в $\mathbf{P}_n(\overline{\Bbbk})$* множество соответствующих подпространств, проходящих через P

$$\mathbf{Gr}_m(\mathbf{P}_n(\overline{\Bbbk}))_P := \{\Pi \in \mathbf{Gr}_{n,m}(\overline{\Bbbk}) \mid \Pi \ni P\}.$$

[2]наше определение и обозначение не является общепринятым, но оно удобно для наших текущих целей, а в дальнейшем применяться не будет

Теорема. *Для любой точки $P \in \mathbf{P}_n(\overline{\Bbbk})$ имеет место естественная биекция*

$$\mathbf{Gr}_m(\mathbf{P}_n(\overline{\Bbbk}))_P \simeq \mathbf{Gr}_{m-1}(\mathbf{P}_{n-1}(\overline{\Bbbk})).$$

Для наших нужд достаточно гораздо более слабого утверждения – *каждый* P-цикл наделяем структурой неприводимого проективного многообразия.

Основа геометрии проективных многообразий – изучение их пересечений с различными подпространствами, особенно *дополнительной* размерности.

Определение. *Некоторое свойство точки $P \in \mathbf{V}(\overline{\Bbbk}) \subseteq \mathbf{P}_n(\overline{\Bbbk})$ неприводимого проективного многообразия называется выполненным для его общей* точки, если оно выполнено для *любой* точки $P \in \mathbf{V}(\overline{\Bbbk}) \setminus \mathbf{V}_0(\overline{\Bbbk})$ дополнения до некоторого собственного проективного подмногообразия.

Теорема. *Пусть $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{P}_n(\overline{\Bbbk})$ – неприводимое проективное многообразие, а $\Pi \in \mathbf{Gr}_{n,m}(\overline{\Bbbk})$ – подпространство. Тогда*

(а) Если $m + \dim \mathbf{V} > n$, то $\Pi \bigcap \mathbf{V}$ непусто и бесконечно;
(б) Если $m + \dim \mathbf{V} = n$, то $\Pi \bigcap \mathbf{V}$ непусто и для общей Π конечно;
(б) Если $m + \dim \mathbf{V} < n$, то $\Pi \bigcap \mathbf{V}$ для общей Π пусто.

Замечание. Определение размерности неприводимого проективного многообразия можно было бы дать и на основе этой теоремы.

Количество пересечений неприводимого проективного многообразия с подпространствами *дополнительной* размерности уточняется следующим фактом.

Теорема. *Пусть $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{P}_n(\overline{\Bbbk})$ – неприводимое проективное многообразие размерности d. Существует такое натуральное число $\delta \in \mathbb{N}$, что для общего подпространства $\Pi \in \mathbf{Gr}_{n,n-d}(\overline{\Bbbk})$*

$$\#(\Pi \bigcap \mathbf{V}) = \delta.$$

Это число δ называется *степенью* многообразия $\mathbf{V}$ и обозначается

$$\deg \mathbf{V} := \delta.$$

Мы введём понятие *гладкости* проективных многообразий, не вводя касательных пространств. Соответствующее определение можно найти в классических учебниках по алгебраической геометрии, например, в [SemRot1949].

Определение. *Пусть* $P \in \mathbf{V}(\overline{\Bbbk}) \subseteq \mathbf{P}_n(\overline{\Bbbk})$ *– точка неприводимого проективного многообразия размерности* d *и степени* δ. *Предположим, что многообразие* $\mathbf{V}(\overline{\Bbbk})$ *не лежит ни в каком проективном подпространстве, строго содержащемся в* $\mathbf{P}_n(\overline{\Bbbk})$*; отсюда следует, что* $\delta \geq 2$. *Точка* P *называется гладкой* точкой многообразия $\mathbf{V}$, если общее подпространство дополнительной размерности, проходящее через P, пересекается с $\mathbf{V}$ ещё по $\delta - 1$ точке, то есть для общей $\Pi \in \mathbf{Gr}_m(\mathbf{P}_n(\overline{\Bbbk}))_P$

$$\#((\Pi \bigcap \mathbf{V}) \setminus \{P\}) = \delta - 1.$$

Пример. На проективном *декартовом листе,* заданном на проективной плоскости $\mathbf{P}_2(\Bbbk)$ уравнением $y^2 z = x^3 - x^2 z$, точка $(x : y : z) = (0 : 0 : 1)$ не гладка: любая прямая, проходящая через эту точку, пересекает декартов лист ещё в единственной точке. Нетрудно проверить, что остальные точки кривой гладки.

Определение. *Неприводимое многообразие* $\mathbf{V} \subseteq \mathbf{P}_n(\Bbbk)$ *называется гладким,* если гладка каждая точка *большего* многообразия $\mathbf{V}(\overline{\Bbbk}) \subseteq \mathbf{P}_n(\overline{\Bbbk})$.

Мы ввели главные объекты курса: **неприводимые гладкие проективные кривые над основным полем $\Bbbk$.** Если эпитеты ясны из контекста, будем называть их просто *кривыми.*

Для формулировки основных теорем остаётся ввести понятие *рода* кривой. В случае $\Bbbk = \mathbb{C}$ род кривой $\mathbf{C}$ – это количество *ручек* её топологической модели, или половина первого числа Бетти

$$g = \frac{1}{2} \dim \mathrm{H}^1(\mathbf{C}, \mathbb{Q}).$$

Для кривых над произвольным полем нам, однако, необходимо *алгебраическое* определение рода. Мы дадим его через *теорему Римана-Роха.*

***

Принятое нами определение алгебраических многообразий традиционно, но архаично; по существу, это определение *вложенных* многообразий, то есть многообразий с дополнительной структурой. В современной математике предпочтительнее давать определения в терминах только *внутренних* структур объектов. Для алгебраических многообразий произвольной размерности (а также их разнообразных обобщений...) сделать это можно, но довольно сложно; см. [Шаф2007]. В случае же кривых введение инвариантных определений значительно проще; мы следуем [Серр1968].

Инвариант, связанный с алгебраической кривой – это *поле рациональных функций* на ней.

Определение. *Расширение $\mathcal{K} \supset \Bbbk$ алгебраического замыкания основного поля будет называться функциональным*, если оно конечно порождено и имеет степень трансцендентности 1.

Каждая кривая $\mathbf{C} \subset \mathbf{P}_n(\overline{\Bbbk})$ определяет функциональное поле

$$\mathcal{K} = \overline{\Bbbk}(\mathbf{C}),$$

состоящее из *почти* функций $\mathbf{C} \dashrightarrow \overline{\Bbbk}$, то есть функций на дополнении к конечным множествам, представимых в виде ограничений на $\mathbf{C}$ *частичных* функций $\frac{p}{q} : \mathbf{P}_n(\overline{\Bbbk}) \dashrightarrow \overline{\Bbbk}$, где p и q – многочлены одинаковых степеней, причём $q|_{\mathbf{C}} \not\equiv 0$.

Наоборот, для любого функционального поля $\mathcal{K}$ можно построить его *модель*, то есть такую проективную кривую $\mathbf{C} \subset \mathbf{P}_n(\overline{\Bbbk})$, что $\overline{\Bbbk}(\mathbf{C}) \simeq \mathcal{K}$. Для этого надо взять произвольный элемент $x \in \mathcal{K} \setminus \overline{\Bbbk}$; по определению функционального поля $(\mathcal{K} : \overline{\Bbbk}) < \infty$. Если расширение $\mathcal{K} \supset \overline{\Bbbk}(x)$ *сепарабельно*, то можно воспользоваться *теоремой о примитивном элементе* и найти такой $y \in \mathcal{K} \setminus \overline{\Bbbk}$, что $\mathcal{K} = \overline{\Bbbk}(x, y)$; элементы x и y связаны нетривиальным полиномиальным соотношением $F(x, y) = 0$, где $F \in \overline{\Bbbk}[x, y]$ может быть выбран неприводимым. Остаётся взять за $\mathbf{C}_1$ *аффинную* кривую, определённую уравнением $F = 0$, а за $\mathbf{C}$ – *десингуляризацию* проективизации кривой $\mathbf{C}_1$, см. [SemRot1949]. В случае несепарабельного расширения $\mathcal{K} \supset \overline{\Bbbk}(x)$ надо проделать некоторые дополнительные действия.

Определение. *Пусть* $\mathcal{K} = \overline{\Bbbk}(\mathbf{C})$. *Любая точка* $P \in \mathbf{C}$*, сопоставляя функции* $x \in \mathcal{K}^\times := \mathcal{K} \setminus \{0\}$ *порядок* $\mathrm{ord}_P(x)$ *её нуля или полюса в* P*, задаёт нормирование*

$$\mathrm{v}_P :\in \mathcal{K}^\times \longrightarrow \mathbb{Z} : x \mapsto \mathrm{ord}_P(x)$$

являющееся, очевидно, эпиморфизмом групп.

Определение. *Для кривой* $\mathbf{C}$ *группа дивизоров*

$$\mathrm{Div}(\mathbf{C}) := \bigoplus_{P \in \mathbf{C}} \mathbb{Z}P.$$

Она рассматривается как *частично упорядоченная* с поточечным порядком $\leq$.

Определение. *Пусть* $\mathcal{K} = \overline{\Bbbk}(\mathbf{C})$*. Морфизм групп*

$$\mathrm{div} : \mathcal{K}^\times \longrightarrow \mathrm{Div}(\mathbf{C}) : x \mapsto \sum_{P \in \mathbf{C}} \mathrm{v}_P(x) P$$

сопоставляет ненулевым функциям главные дивизоры.

Определение. *Пусть* $\mathcal{K} = \overline{\Bbbk}(\mathbf{C})$*. Для* $D \in \mathrm{Div}(\mathbf{C})$ *пространством Римана-Роха* называется

$$\mathrm{L}(D) := \{x \in \mathcal{K}^\times \mid \mathrm{div}(x) + D \geq 0\} \bigcup \{0_\mathcal{K}\}.$$

Теорема. *Пусть* $\mathcal{K} = \overline{\Bbbk}(\mathbf{C})$ *и* $D \in \mathrm{Div}(\mathbf{C})$*. Множество* $\mathrm{L}(D)$ *является конечномерным векторным пространством над* $\overline{\Bbbk}$*. Его размерность обозначается*

$$\ell(D) := \dim_{\overline{\Bbbk}} \mathrm{L}(D).$$

Определение. *Пусть* $\mathbf{C}$ *– кривая. Морфизм групп*

$$\deg : \mathrm{Div}(\mathbf{C}) \longrightarrow \mathbb{Z} : \sum_{P \in \mathbf{C}} n_P P \mapsto \sum_{P \in \mathbf{C}} n_P$$

сопоставляет дивизорам их степени.

Теорема. (Риман-Рох). *Пусть* $\mathbf{C}$ *– кривая. Существует такое натуральное число* $g \in \mathbb{N}$*, что для любого дивизора* $D \in \mathrm{Div}(\mathbf{C})$

$$\deg D \geq 2g - 1 \Longrightarrow \ell(D) = \deg D - g + 1.$$

Это число g *и называется* родом *кривой* $\mathbf{C}$*.*

***

Теорема. (Гипотеза Морделла, доказанная Фальтингсом [Fal1983]). *Пусть* $\mathbf{C}$ *– кривая рода* $g > 1$*, определённая над полем алгебраических чисел* $\Bbbk$*. Тогда множество* $\mathbf{C}(\mathbb{K})$ *конечно для любого конечного расширения* $\mathbb{K} \supseteq \Bbbk$*.*

Теорема. (Гипотезы Вейля, доказанные Дворком [Dwo1960], Гротендиком [Gro1965], Делинем [Del1984], ...). *Пусть* $\mathbf{V}$ *– гладкое проективное d-мерное многообразие, определённое над конечным полем $\mathbb{F}_q$. Введём производящую функцию*

$$\zeta_{\mathbf{V}}(s) := \exp \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\#\mathbf{V}(\mathbb{F}_{q^m}) q^{-ms}}{m}.$$

Она обладает следующими свойствами.

1. Рациональность. *Замена переменной $T := q^{-s}$ превращает $\zeta_{\mathbf{V}}$ в рациональную функцию*

$$\mathrm{Z}_{\mathbf{V}}(T) := \zeta_{\mathbf{V}}(-\log_q T)$$

вида

$$\mathrm{Z}_{\mathbf{V}} = \frac{P_1 \dots P_{2d-1}}{P_0 \dots P_{2d}},$$

где $P_0(T) = 1 - T$, $P_{2d}(T) = 1 - q^{2d}T$ и для $1 \le i \le 2d-1$

$$P_i(T) = \prod_{j=1}^{\beta_i(\mathbf{V})} (1 - \alpha_{ij} T)$$

для некоторых $\alpha_{ij} \in \mathbb{C}$.

2. Функциональное уравнение.

$$\mathrm{Z}_{\mathbf{V}}(\frac{1}{q^d T}) \equiv \pm q^{\frac{d \cdot \mathrm{e}(\mathbf{V})}{2}} T^{\mathrm{e}(\mathbf{V})} \mathrm{Z}_{\mathbf{V}}(T),$$

где

$$\mathrm{e}(\mathbf{V}) := \sum_{i=0}^{2d} (-1)^i \beta_i(\mathbf{V})$$

–"эйлерова характеристика" многообразия.

3. Гипотеза Римана. *Для всех $i \in \{1, \dots, 2d\}$*

$$|\alpha_{ij}| = q^{\frac{i}{2}}.$$

4. Числа Бетти. *Если*[3] $\mathbf{V} = \mathbf{V}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{F}_q)$ *для некоторого многообразия $\mathbf{V}_{\mathbb{Z}}$, определённого над целыми числами, и при этом многообразие*

[3] Здесь мы пользуемся очевидным обобщением конструкций начала лекции, согласно которому многообразия, заданные уравнениями с *целыми* коэффициентами можно рассматривать над любым полем

$\mathbf{V}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})$ *гладко, то для всех* $i \in \{1, \dots, 2d\}$

$$\beta_i(\mathbf{V}) = \mathrm{b}_i(\mathbf{V}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C})) := \dim_{\mathbb{Q}} \mathrm{H}^i(\mathbf{V}_{\mathbb{Z}}(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$$

Лекция 2
О гипотезе Морделла

Фактически Фальтингс в работе [Fal1983] доказал три другие гипотезы, хорошо известные в арифметической геометрии: гипотезу *конечности* Шафаревича [Шаф1962] и гипотезы Тейта *о морфизмах абелевых многообразий над числовыми полями* и *о полупростоте модуля Тейта* ([Tate1965] и [Тейт1965]). То, что из этих гипотез следует гипотеза Морделла [Mor1922], было установлено Паршиным [Par1970].

В рамках краткого курса лекций невозможно сколько-нибудь полно изложить доказательства упомянутых весьма глубоких и трудных результатом. Мы ограничимся формулировкой центрального из них и скажем несколько слов об общем плане доказательства, следуя обзору [ЗарПар1986].

В теории чисел определяется понятие *кольца целых* числового поля, обобщающее понятие $\mathbb{Z}$ как подкольца поля $\mathbb{Q}$. Любое проективное многообразие, определённое над числовым полем, может быть задано уравнениями с целыми коэффициентами. Это позволяет определить *редукцию* многообразия над числовым полем по простому модулю.

Определение. *Кривая называется имеющей хорошую редукцию* по простому модулю, если она при редукции остаётся гладкой (над конечным полем) или, что равносильно, если её род при редукции не падает.

Теорема. (Конечности Шафаревича) *Пусть* $\mathbb{K}$ *– поле алгебраических чисел,* B *– конечное множество простых чисел, и дано натуральное число* $g \geq 2$. *Существует лишь конечное число определённых над* $\mathbb{K}$ *кривых рода* g*, имеющих хорошую редукцию вне множества* B.

Определение. *Абелевым многообразием* называется проективное многообразие, допускающее групповую структуру, групповые операции в которой задаются рациональными функциями.

Нетрудно доказать, что группы, реализуемые абелевыми многообразиями, коммутативны, и что над полем комплексных чисел все абелевы многообразия реализуются как факторы пространств $\mathbb{C}^g$ по решёткам максимального ранга.

Каждой кривой рода g можно сопоставить её *якобиан*, являющийся g-мерным абелевым многообразием. Над полем комплексных чисел процедура сопоставления кривой её якобиана содержит в себе классическую теорию интегрирования голоморфных дифференциалов на римановых поверхностях; однако эта процедура может быть определена чисто алгебраически, и якобиан кривой, определённой над числовым полем, тоже может быть определён над числовым полем.

Определение. *Два абелевых многообразия называются изогенными*, если их сязывает эпиморфизм групп (задаваемый рациональными функциями) с *конечным* ядром.

Нетрудно понять, что отношние изогенности симметрично.

Паршин обобщил гипотезу конечности Шафаревича на случай абелевых многообразий, и гипотеза распалась на две: конечности множества классов изогенности абелевых многообразий с заданными инвариантами и конечности множества абелевых многообразий внутри данного класса изогенности.

Используя связи между накрытиями кривых и морфизмами абелевых многообразий и известные теоремы конечности, касающиеся множеств накрытий кривых, Паршин свёл гипотезу Морделла к гипотезе конечности для абелевых многообразий.

Фальтингсу же удалось, скомбинировав большое количество идей и результатов многочисленных авторов и добавив к ним свои, завершить на этом пути доказательство гипотзы Морделла.

Лекция 3
О гипотезах Вейля для кривых

В случае кривых гипотезы были доказаны самим Андре Вейлем в [Weil1948]. Мы будем следовать выложенным в Сети конспектам Раскина лекций Бейлинсона, прочитанных в Чикаго в 2007 году.

Во введённых выше обозначениях с помощью стандартных средств теории алгебраических кривых доказывается

Теорема. *Для любой кривой* $\mathbf{C}$ *над конечным полем*

$$\mathrm{Z}_{\mathbf{C}}(T) = \sum_{D \in \mathrm{Div}_{\geq 0}(\mathbf{C}} T^{\mathrm{deg} D}.$$

Пусть род кривой $\mathbf{C}$ равен g. Разбив суммирование на участки $0 \leq \mathrm{deg} D \leq 2g-2$ и $\mathrm{deg} > 2g-2$, с помощью *двойственности Серра* можно установить следующий результат:

Теорема. *Для любой кривой* $\mathbf{C}$ *рода* g *над полем* $\mathbb{F}_q$

$$\mathrm{Z}_{\mathbf{C}}(T) = \frac{f(T)}{(1-T)(1-qT)},$$

где $f \in \mathbb{Q}[T]$ *– многочлен степени* $\leq 2g$ *со свободным членом 1.*

В тех же обозначениях функциональное уравнение имеет следующий вид.

Теорема.

$$\mathrm{Z}_{\mathbf{C}}(\frac{1}{qT}) \equiv q^{1-g} T^{2-2g} \mathrm{Z}_{\mathbf{C}}(T).$$

Из этой формулы выводятся все требуемые утверждения, и, в частности,

$$f(T) = \prod_{i=1}^{g} [(1-\alpha_i T)(1-\overline{\alpha_i} T)],$$

причём $|\alpha_i| = \sqrt{q}$.

Литература

[Del1984] P. Deligne, *La conjecture de Weil I,* Publ. Math. IHES **43** (1974), p. 273-307.

[Dwo1960] B. Dwork, *On the rationality of the zeta-function of an algebraic variety,* American Journal of Mathematics, 1960, Vol. 82, No. 3, 631-648.

[Fal1983] G. Faltings, *Endlichkeitssatze fur abelsche Varietaten uber ZahlKorpern,* Invent. Math., 1983, v. 73, p. 349-366; Erratum: 1984, v. 75, p. 381.

[Gro1965] A. Grothendieck, *Formule de Lefschetz et rationalité,* Séminaire Bourbaki **279** (1965).

[Mor1922] L.J. Mordell, *On the rational solutions of the indeterminate equations of the 3rd and the 4th degrees,* Proc. Camb. Phil. Soc. 21(1922), 179-192.

[Par1970] A.N. Parshin, *Quelques conjecture de finitude en Géométrie Diophantienne,* Actes Congress Intern. Math., 1970, t. I, p. 467-471.

[SemRot1949] J.G. Semple, L. Roth, *Introduction to algebraic geometry*, Oxford University Press, 1949.

[Tate1965] J. Tate, *Algebraic cycles and poles of zeta functions*, in Arithmetic Algebraic Geometry, Conference held at Purdue University, Harper & Row, New York, 1965.

[Weil1948] A. Weil, *Sur les courbes algébriques et les variétés qui s'en déduisent*, Hermann et Cie., Paris, 1948.

[ЗарПар1986] Ю.Г. Зархин, А.Н. Паршин, *Проблемы конечности в Диофантовой Геометрии,* Приложение к книге С. Ленга *Основы Диофантовой Геометрии*, М., "Мир", 1986.

[Ленг1968] С. Ленг, *Алгебра*, М., "Мир", 1968.

[Серр1968] Ж.-П. Серр, *Алгебраические группы и поля классов*, М., "Мир", 1968.

[Тейт1965] Дж. Тейт, *Алгебраические классы когомологий,* УМН, 1965, т. **20**, №6, с. 27-40.

[Хар2005] Дж. Харрис, *Алгебраическая геометрия. Начальный курс*, МЦНМО, 2005.

[Шаф1962] И.Р Шафаревич, *Поля алгебраических чисел*, Int. Congr. Math. Stockholm, 1962, p. 163-176.

[Шаф2007] И.Р Шафаревич, *Основы алгебраической геометрии*, МЦНМО, 2007.

ЧАСТЬ II. ТЕЗИСЫ ДОКЛАДОВ

О СТАНДАРТНЫХ МОДЕЛЯХ РАССЛОЕНИЙ НА КОНИКИ

А. А. Авилов[4] **(Москва)**
v07ulias@gmail.com

Пусть k – произвольное поле характеристики нуль. Далее все многообразия рассматриваются над этим полем.

Определение. *Тройка* (X, Y, f)*, где* X *– геометрически неприводимое трёхмерное многообразие,* Y *– геометрически неприводимая поверхность, а* $f : X \dashrightarrow Y$ *– рациональное отображение, общий слой которого является геометрически неприводимой рациональной кривой над* $k(Y)$*, называется* расслоением на рациональные кривые *над базой* Y*. Будем называть расслоение* (X, Y, f) расслоением на коники*, если многообразие* Y *неособо, отображение* f *является проективным морфизмом, а схемный слой* f *над произвольной замкнутой точкой* Y *изоморфен конике в* $\mathbb{P}^2$ *(возможно, вырожденной).*

С этого момента будем считать, что все многообразия снабжены действием конечной группы G, а все отображения являются эквивариантными.

Определение. *Расслоение на коники* (X, Y, f) *называется* стандартным*, если* X *и* Y *проективны, отображение* f *является плоским морфизмом неособых многообразий, а также является* G*-расслоением Мори.*

Определение. G*-расслоения на рациональные кривые* (X, Y, f) *и* (X', Y', f') *называются* эквивалентными*, если существуют такие бирациональные* G*-эквивариантные отображения* $\lambda : X \dashrightarrow X'$ *и* $\mu : Y \dashrightarrow Y'$*, что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, dashed, "\lambda"] \arrow[d, dashed, "f"] & X' \arrow[d, dashed, "f'"] \\ Y \arrow[r, dashed, "\mu"] & Y' \end{tikzcd}$$

Следующая теорема о существовании стандартных моделей для расслоений на коники произвольной размерности над алгебраически замкнутым полем без действия группы принадлежит Саркисову:

[4]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 15-01-02158 и 15-01-02164, а также гранта МК-696.2014.1

Теорема. (см. [1, Теорема 1.13]) *У любого расслоения на рациональные кривые* (X, Y, f) *над алгебраически замкнутым полем существует стандартная модель* (X', Y', f'), *т.е. стандартное расслоение на коники, эквивалентное исходному.*

Мы докажем следующий аналог этой теоремы:

Теорема. *[2]Пусть* k *– произвольное поле характеристики нуль. Пусть* X *– геометрически неприводимое трёхмерное алгебраическое многообразие над* k, *и пусть* $f : X \dashrightarrow Y$ *– доминантное рациональное отображение с общим слоем, являющимся рациональной кривой над полем* $k(Y)$. *Предположим, что конечная группа* G *действует на* X *и* Y *бирациональными автоморфизмами так, что отображение* f *является эквивариантным. Тогда у* f *существует* стандартная модель.

Мы надеемся, что данная работа будет полезна для задачи бирациональной классификации трёхмерных многообразий над алгебраически незамкнутыми полями и для изучения конечных подгрупп в группе Кремоны $\mathrm{Cr}_3(k)$.

Литература

[1] В.Г. Саркисов О структурах расслоений на коники Изв. АН СССР. Сер. мат., 46, 2, 371–408 (1982)

[2] А.А. Авилов Существование стандартных моделей расслоений на коники над алгебраически незамкнутыми полями Матем. сб., 205, 12, 3–16, (2014)

ЯВЛЕНИЕ СТОКСА В ИРРЕГУЛЯРНЫХ СИСТЕМАХ ГЕЛЬФАНДА-КАПРАНОВА-ЗЕЛЕВИНСКОГО

Д. В. Артамонов (Москва)
artamonov.dmitri@gmail.com

Пусть имеется одномерная пфаффова система

$$dy(z) = \omega y(z), \;\; y(z) \in \mathbb{C}^n, \;\; \omega = A(z)dz, \tag{1}$$

при этом пусть $z = 0$ - особая точка для $A(z)$. Говорят, что эта точка особая регулярная, если все решения в окрестности этой точки имеют степенной рост. Иначе особая точка называется иррегулярной. Решение вблизи особой точки является, вообще говоря, многозначной аналитической функцией.

Говорят, что системы калибровочно эквиваленты, если одна получается из другой линейной заменой неизвестной функции

$$y_1(z) \mapsto y_2(z) = B(z)y_1(z).$$

В случае регулярной особенности пфаффова система с точностью до калибровочной эквивалентности определяется матрицей монодромии решения. В случае иррегуляной системы этого инварианта недостаточно. Необходимы еще дополнительные инварианты - матрицы Стокса.

Аналог в многомерной ситуации (т.е. для многомерных пфаффовых систем) этой теории был разработан относительно недавно. Имеются понятия регулярной и иррегулярных систем. Регулярный случай был разобран Кашиварой, а иррегулярный - в работах Б. Мальгранжа, К. Сабба, Т. Мочезуки [1], [2]. Стоит отметить, что в многомерной ситуации для описание данных монодромии используется язык фильтраций в пучках.

Даже в одномерной ситуации имеется очень мало примеров систем, для которых приводится полное явное вычисление данных монодромии, полное описание формальных и аналитических решений. В многомерной же ситуации такие вообще примеры отсутствуют. Более, того, не очень широк набор примеров многомерных пфаффовых систем не очень большой.

Один из таких примеров - система Гельфанда-Капранова-Зелевинского. Она традиционно записывается в следующем виде. Пусть $B \subset \mathbb{Z}^N$ - решётка. Система ГКЗ, связанная с B - это система

$$\sum_{i=1}^{N} a_i x_i \frac{\partial}{\partial x_i} y - \beta y = 0, \ \ a = (a_1, ..., a_n) \in annL \tag{2}$$

$$(\frac{\partial}{\partial x_i})^c y = (\frac{\partial}{\partial x_i})^{c'} y \ \ \Leftrightarrow c - c' \ \ \in B \tag{3}$$

L - это подпространство, натянутое на B. Эта система регулярна $\Leftrightarrow \ \ B \perp (1, 1, ..., 1)$.

В докладе будет полностью исследован некоторый класс таких систем. Для них будет явно описан пучок, который описывает степень иррегулярности таких систем, также будет в явном виде представлен пучок и фильтрация в нём, которые будут многомерным аналогом матрицы монодромии и матриц Стокса.

Литература

[1] T. Mochezuki, Wild harmonic bundles and wild pure twistor D-modules, arXiv:0803.1344

[2] C. Sabbah, Introduction to Stokes structures, Lecture Notes in Mathematics, 2013, Springer

НЕПРИВОДИМЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ДИСКРЕТНЫХ КОНЕЧНО ПОРОЖДЕННЫХ ГРУПП

И. В. Белошапка [5](Москва)
i – beloshapka@yandex.ru

Определение. *Представление π называется* представлением с конечным весом или π удовлетворяет условию конечности веса*, если существует такая подгруппа $H \subset G$ и такой характер χ этой подгруппы, что пространство*

$$V(\chi, H) = \{v \in V \mid \pi(h)v = \chi(h)v \quad \forall h \in H\}$$

нетривиально и конечномерно.

В случае, если группа G — односвязная комплексная или вещественная группа Ли, а представления унитарные, верно следующее утверждение ([3]):

Теорема. *(А.А. Кириллов). Всякое унитарное неприводимое представление комплексной или вещественной нильпотентной односвязной группы Ли мономиально, то есть индуцировано с одномерного представления некоторой своей подгруппы.*

По-прежнему в классе унитарных представлений, но уже для дискретных нильпотентных конечно порожденных групп, верна следующая теорема ([2]):

Теорема. *(I. Brown). Неприводимое унитарное представление дискретной нильпотентной конечно порожденной группы мономиально тогда и только тогда, когда оно является представлением с конечным весом.*

Появляется естественный вопрос, есть ли вообще представления, не удовлетворяющие условию конечности веса (в противном случае все неприводимые унитарные представления дискретных нильпотентных конечно порожденных групп должны быть мономиальными, как и в случае групп Ли), и Браун приводит пример немономиального неприводимого унитарного представления группы Гейзенберга с целыми коэффициентами.

[5]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 14-01-00178 А, 14-01-00160 А и гранта Президента Российской Федерации МК-5215.2015.1

Пусть теперь G - дискретная нильпотентная конечно порожденная группа, $\pi : G \to End(V)$ — ее неприводимое представление в счетномерном комплексном пространстве V (без каких-либо топологических условий на гомоморфизм).

Гипотеза. *(А.Н. Паршин). Неприводимое неунитарное представление π группы G мономиально тогда и только тогда, когда оно является представлением с конечным весом.*

Техника доказательства теоремы Брауна по существу использует факт того, что из $\mathrm{Hom}_G(ind_H^G(\chi), ind_H^G(\chi)) = \mathbb{C}$ следует неприводимость $ind_H^G(\chi)$, а именно отсутствие инвариантных подпространств. В случае, если мы не ограничиваемся унитарными представлениями, а из-за нильпотентности группы инвариантного скалярного произведения нет, из отсутствия сплетающих операторов неприводимость представления не следует.

Если группа G — это группа Гейзенберга с целыми коэффициентами (класс нильпотентности 2), гипотеза верна, это сделано в работе А.Н. Паршина и С.А. Арналь ([1]).

Мы докажем гипотезу для класса нильпотентности 3, первого нетривиального после группы Гейзенберга случая унипотентных матриц 4×4 с целыми коэффициентами. Вероятно, пользуясь техникой, развитой для этого класса нильпотентности, удастся доказать гипотезу и для остальных классов.

Литература

[1] С. А. Арналь, А. Н. Паршин, “О неприводимых представлениях дискретных групп Гейзенберга”, Матем. заметки, 92:3 (2012), 323–330.

[2] I. Brown, “Representation of finitely generated nilpotent groups”, Pacific J. Math. Volume 45, Number 1 (1973), 13-26.

[3] A. A. Kirillov, “Unitary representations of nilpotent Lie groups”, Russian Mathematical Surveys, 1962, 17:4, 53–104.

ТРОПИКО-ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА НУЛЕЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

Д. В. Богданов (Москва), Т. М. Садыков [6](Москва)
bogdv@rambler.ru, Sadykov.TM@rea.ru

Распределения нулей многих специальных функций одного и нескольких комплексных переменных известны своим разнообразием и сложной зависимостью от параметров функции [1]. В докладе будет дан обзор классических и современных результатов о распределении нулей функций гипергеометрического типа одного и многих переменных.

Зафиксируем выпуклый целочисленный многогранник $P \subset \mathbb{R}^n$.

Определение. *Многочлен с неприводимым носителем $P \cap \mathbb{Z}^n$ называется гипергеометрическим, если он удовлетворяет регулярной голономной системе гипергеометрических дифференциальных уравнений наименьшего возможного голономного ранга [4].*

Основные результаты будут посвящены описанию тропико-геометрических свойств нулей и особенностей решений резонансных и максимально резонансных систем дифференциальных уравнений в частных производных гипергеометрического типа [4]. В докладе будет также сформулировано экстремальное свойство гипергеометрических многочленов нескольких комплексных переменных в терминах ассоциированных с ними тропических алгебраических гиперповерхностей [2, 3].

Литература

[1] D. Dominici, D.J. Johnston, and K. Jordaan. *Real zeros of ${}_2F_1$ hypergeometric polynomials,* Journal of Computational and Applied Mathematics **247** (2013), 152-161.

[6]Работа выполнена при поддержке гранта Правительства Российской Федерации для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор № 14.Y26.31.0006).

[2] G. Mikhalkin. *Real algebraic curves, the moment map and amoebas,* Ann. Math. (2) **151**, (2000) 309-326.

[3] T. Theobald and T. de Wolff. *Amoebas of genus at most one,* Advances in Mathematics **239** (2013), 190-213.

[4] Т.М. Садыков, А.К. Цих. *Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных*, М.: Наука, 2014.

ПРОИЗВЕДЕНИЯ БЛЯШКЕ И КВАЗИ-СИММЕТРИИ ДЕТЕРМИНАНТНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ПРОЦЕССОВ, ОТВЕЧАЮЩИХ ГИЛЬБЕРТОВЫМ ПРОСТРАНСТВАМ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

А. И. Буфетов (Москва), Я. Шиу (Марсель)
bufetov@mi.ras.ru, yqi.qiu@gmail.com

В докладе будет доказано, что детерминантные точечные процессы, отвечающие классическим пространствам голоморфных функций (пространства Бергмана, пространства Фока) квазиинвариантны относительно группы диффеоморфизмов с компактным носителем. Производные Радона-Никодима явно найдены: например, в случае пространств Бергмана – в виде произведений Бляшке.

Доклад основан на препринте [B-Q].

Литература

[B-Q] A. I. Bufetov, Y. Qiu, Blaschke products and palm distributions of the determinantal point process with the Bergman kernel, http://arxiv.org/abs/1411.4951.

СТЕПЕНИ КОГОМОЛОГИЧЕСКИХ КЛАССОВ НА СТРАТАХ ДИСКРИМИНАНТА ПРОСТРАНСТВА ГУРВИЦА

Б. С. Бычков [7](Москва)
boris.bychkov@gmail.com

Пусть $f\colon X \to \mathbb{C}P^1$ — мероморфная функция на кривой X рода g. Критическое значение функции f степени d называется *невырожденным*, если оно достигается в $d-1$ различной точке, одна из которых критическая с кратностью два, а остальные — не критические. В противном случае критическое значение называется *вырожденным.*

Через $P\overline{\mathcal{H}}_{0;k_1,\ldots,k_n}$ обозначим проективизацию пополненного пространства мероморфных функций на кривых рода 0 с n прообразами кратностей $k_1,\ldots,k_n$ над критическим значением ∞ и остальными невырожденными критическими значениями. Пространство $P\overline{\mathcal{H}}_{0;k_1,\ldots,k_n}$ называется *пространством Гурвица.* Количество невырожденных критических значений определяется по формуле Римана–Гурвица и для общей функции равно $2d+2g-2$. *Дискриминант* пространства Гурвица состоит из функций с меньшим числом невырожденных критических значений.

В работе [KL] получены универсальные формулы для степеней стратов дискриминанта пространства $P\overline{\mathcal{H}}_{0;k_1,\ldots,k_n}$ небольших коразмерностей через естественные классы в кольце когомологий $H^*(P\overline{\mathcal{H}}_{0;k_1,\ldots,k_n})$. Я расскажу о новых формулах для степеней классов когомологий стратов дискриминанта и о методе вычисления степеней самих стратов на основе применения универсальных формул к стратам с меньшим числом вырожденных критических значений.

Литература

[KL] М. Э. Казарян, С. К. Ландо, К теории пересечений на пространствах Гурвица, Изв. Ран.,Сер. Матем., Т.68, №5, С.91-122 (2004)

[7]Работа выполнена при поддержке Лаборатории теории представлений и математической физики НИУ ВШЭ

СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ СЛОИ ПРОСТРАНСТВА МОДУЛЕЙ СТАБИЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЙ ХИГГСА

Д. О. Дегтярев (Москва)
degtyarev.d.o@gmail.com

Обозначим через Σ гладкую алгебраическую кривую рода $g \geqslant 2$. Пусть E – векторное расслоение ранга r и степени d на кривой, K – канонический класс. Хитчин, в работе [Hit87], ввел структуру интегрируемой системы на кокасательном расслоении пространства модулей стабильных векторных расслоений $\mathcal{N}(r,d)$.

Напомним, что расслоением Хиггса называется пара (E,φ), состоящая из векторного расслоения E на кривой Σ и сечения $\varphi \in H^0(\Sigma, \mathrm{End}(E) \otimes L)$, где $L := K(D)$ линейное расслоение на кривой Σ. На пространстве модулей стабильных расслоений Хиггса $\mathcal{M}(r,d)$ существует структура квазипроективного многообразия. Отметим, что кокасательное пространство $T^{\vee}\mathcal{N}(r,d)$ вкладывается в пространство модулей $\mathcal{M}(r,d)$, для случая $L = K$, открытым по Зарисскому подмножеством.

Маркман, в работе [Mar94], обобщил результаты Хитчина, определив структуру интегрируемой системы на пространстве модулей $\mathcal{M}(r,d)$:

Теорема ([Mar94, Глава 1])**.** *Пусть $L \geqslant K$, тогда*

i. *$\mathcal{M}(n,d)$ расслаивается, через морфизм индуцированный инвариантными полиномами $h : \mathcal{M}(r,d) \to B_L$, на якобианы спектральных кривых.*

ii. *для каждого ненулевого сечения $s \in H^0(\Sigma, L \otimes K^{-1})$ существует каноническая пуассонова структура, Ω_s, на $\mathcal{M}(r,d)$.*

iii. *морфизм $h_L : \mathcal{M}(r,d) \to B_L$ интегрируемая система.*

Следуя Маркману, мы введем каноническую пуассонову структуру на пространстве модулей стабильных G-расслоений Хиггса, где G – комплексная полупростая группа Ли. Опишем симплектические слои, соответствующие тем парам Хиггса, у которых вычет глобального сечения $\varphi \in H^0(\Sigma, \mathrm{ad}P \otimes L)$ в отмеченных точках $p_i \in D$ лежит в нильпотентной орбите алгебры Ли $\mathfrak{g}$ относительно коприсоединенного действия группы G.

Литература

[Hit87] N.J. Hitchin (1987), Stable bundles and integrable systems, Duke Math. J. 54, 1, 91-114.

[Mar94] E. Markman. "Spectral curves and integrable systems."Compositio Mathematica 93.3 (1994): 255-290.

Аддитивные базисы в алгебре Стинрода $\mathcal{A}_p$

Д.Ю. Емельянов (Москва)
emelyanov.d.yu@gmail.com

Пусть $p > 2$ простое, $\bar{\mathcal{A}}_p$ — подалгебра в алгебре Стинрода $\mathcal{A}_p$, мультипликативно порождённая всевозможными степенями Понтрягина P^i.

Определение. *Определим правое лексикографическое упорядочение на конечных последовательностях целых чисел стандартным образом: $I <_R J$, где $I = (i_1, \ldots, i_n)$ и $J = (j_1, \ldots, j_m)$, если выполнены следующие условия:*
(i) последовательность I пуста, J – нет;
(ii) $I, J \neq \emptyset$ и $i_n < j_m$,
(iii) $I, J \neq \emptyset, i_n = j_m$ и $(i_1, \ldots, i_{n-1}) <_R (j_1, \ldots, j_{m-1})$.

Левое лексикографическое упорядочение определятся аналогично.

Упорядочение конечных последовательностей целых чисел очевидным образом определяет упорядочение мономов $P^I = P^{i_1} \cdots P^{i_n}, P^{i_k} \in \mathcal{A}_p$.

Определение. *Пусть $Z_k^n = P^{p^k} \cdots P^{p^n}$, где $n \geq k \geq 0$. Определим $Z-$моном как произведение*

$$Z^I = Z_{k_1}^{n_1} \cdots Z_{k_r}^{n_r},$$

где I — последовательность пар $((n_1, k_1), \ldots, (n_r, k_r))$, удовлетворяющая следующим двум свойствам:
(1) $(n_1, k_1) \geqslant_L (n_2, k_2) \geqslant_L \cdots \geqslant_L (n_r, k_r)$
(2) если последовательность I содержит подпоследовательность одинаковых пар

$$(n_t, k_t) \geqslant_L (n_{t+1}, k_{t+1}) = \cdots = (n_{t+s}, k_{t+s}) \geqslant_L (n_{t+s+1}, k_{t+s+1}),$$

тогда $s < p$ для каждой такой последовательности.

Обращая все неравенства в определении и предполагая попрежнему, что индексы — неотрицательные целые числа, получаем определение $X-$*монома.*

Теорема. *Множество всевозможных $Z-$мономов образует аддитивный базис алгебры $\bar{\mathcal{A}}_p$. $Z-$мономы минимальны в смысле правого лексикографического упорядочения.*

Теорема. *Множество всевозможных $X-$мономов образует аддитивный базис алгебры $\bar{\mathcal{A}}_p$. $X-$мономы минимальны в смысле левого лексикографического упорядочения.*

Рассмотрим перестановку τ символов P^{p^j} в произведении $(Z_k^n)^r$, оставляющую на месте крайний справа элемент P^{p^n}. Обозначим результат через $\tau((Z_k^n)^r)$. Определим

$$\alpha_{(l),j}, l = 1, \dots, (n-k+1)r, j = k, \dots, n$$

как количество P^{p^j} среди l правых элементов произведения $\tau((Z_k^n)^r)$. Будем говорить, что перестановка τ (соответствующий моном $\tau((Z_k^n)^r)$), оставляющая крайний справа элемент P^{p^n} на месте, является $Z-$*допустимой*, если последовательность $\alpha_{(l)} = (\alpha_{(l),k}, \dots, \alpha_{(l),n})$ не убывает для каждого l, и *не является $Z-$допустимой*, если существует l, для которого это неверно.

Лемма. *Предположим, что P^{p^n} — крайний справа элемент монома $\tau((Z_k^n)^r), r < p$. Тогда в алгебре $\bar{\mathcal{A}}_p$ произведение $\tau((Z_k^n)^r)$ может быть приведено к виду $cP^{r(p^k+\dots+p^n)}$ с точностью до мономов, меньших в смысле правого лексикографического порядка, и $\tau \neq 0$ тогда и только тогда, когда перестановка τ допустима.*

Следствие. *Модифицируем некоторые элементы $Z-$базиса, заменяя подслова вида $(Z_k^n)^r$ на произвольные $Z-$допустимые $\tau((Z_k^n)^r)$. Некоторые подслова можно оставить без изменений, к различным подсловам можно применять различные перестановки. Новый набор $Z-$мономов образует базис в том и только в том случае, когда все перестановки τ $Z-$допустимы.*

Литература

[EP] Emelyanov D. Y., Popelensky T. Y. On monomial bases in the mod p Steenrod algebra //Journal of Fixed Point Theory and Applications. – 2014. – C. 1-13.

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕФЕКТОВ

М. О. Катанаев (Москва)
katanaev@mi.ras.ru

Дано описание дефектов – дислокаций и дисклинаций – в рамках геометрии Римана–Картана. Тензоры кривизны и кручения интерпретируются соответственно как поверхностные плотности векторов Франка и Бюргерса. Предложено новое выражение для свободной энергии, описывающее статическое распределение дефектов [1]. Уравнения нелинейной теории упругости использованы для фиксирования системы координат. Лоренцева калибровка приводит к уравнениям главного кирального $SO(3)$-поля [2]. При отсутствии дефектов геометрическая модель сводится к теории упругости для вектора смещений и модели главного кирального $SO(3)$-поля для спиновой структуры. На примере клиновой дислокации показано, что теория упругости воспроизводит только линейное приближение геометрической теории дефектов. Показано, что уравнения асимметричной теории упругости для среды Коссера также естественным образом вкладываются в геометрическую теорию дефектов как калибровочные условия.

Литература

[1] M. O. Katanaev and I. V Volovich. Theory of defects in solids and three-dimensional gravity, Ann. Phys, 1992, 216, 1–28.

[2] М. О. Катанаев. Геометрическая теория дефектов, УФН, 2005, 175, 705–733.

ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ КОРНЕЙ ОДНОГО КЛАССА ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

В. И. Кузоватов[8] **(Красноярск)**
kuzovatov@yandex.ru

Данная работа посвящена получению интегрального представления для дзета-функции корней некоторого класса целых функций.

Вопрос об интегральном представлении для дзета-функции, ассоциированной с некоторой целой функцией, был рассмотрен В.Б. Лидским и В.А. Садовничим в работе [1], в которой была рассмотрена целая функция $f(z)$ определенного вида.

Пусть $f(z)$ – целая функция нулевого порядка в $\mathbb{C}$. Рассмотрим уравнение

$$f(z) = 0. \tag{1}$$

Обозначим через $N_f = f^{-1}(0)$ множество всех корней уравнения (1), каждый корень считается столько раз, какова его кратность. Число корней не более чем счетно.

Наша цель – получить интегральное представление для дзета-функции $\zeta_f(s)$ уравнения (1), которая определяется следующим образом:

$$\zeta_f(s) = \sum_{a \in N_f} (-a)^{-s},$$

где $s \in \mathbb{C}$. Знак минус в определении дзета-функции взят только для удобства записи интегральных формул.

Пусть $z = x + iy$. Предположим, что функция f не равна нулю ни в одной точке множества $\mathbb{R}_+ := \{z \in \mathbb{C} : x \geq 0, y = 0\}$. Это означает, что $N_f \cap \mathbb{R}_+ = \emptyset$.

Теорема. *Предположим, что* $0 < Re\ s < 1$. *Тогда*

$$\zeta_f(s) = \frac{\sin \pi s}{\pi} \int\limits_0^\infty \left\{ \frac{f'(x)}{f(x)} - \omega_0 \right\} x^{-s}\, dx,$$

где ω_0 *есть предельное значение для выражения* $\dfrac{f'(x)}{f(x)}$ *на бесконечности.*

[8]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 15-01-00277, 15-31-20008)

Литература

[1] В. Б. Лидский, В. А. Садовничий, Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций, Функц. анализ и его прил., 1967, 1, 52–59.

О КЛАССИЧЕСКИХ ФОРМУЛАХ ПЛЮККЕРА

Вик. С. Куликов[9] (Москва)
kulikov@mi.ras.ru

1. Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – приведенная кривая, определенная над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Кривая C называется *каспидальной,* если все ее особые точки – это только обыкновенные каспы и нуды.

В современных учебниках по алгебраической геометрии утверждение о классических формулах Плюккера формулируется следующим образом (см. [1], [2]).

Классические формулы Плюккера. *Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – неприводимая каспидальная кривая рода g, степени $d \geq 2$, имеющая c обыкновенных капов и n обыкновенных ноудов. Предположим, что двойственная кривая $\hat{C}$ к C также является каспидальной. Тогда имеют место равенства:*

$$\hat{d} = d(d-1) - 3c - 2n; \tag{4}$$

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - c - n; \tag{5}$$

$$d = \hat{d}(\hat{d}-1) - 3\hat{c} - 2\hat{n}; \tag{6}$$

$$g = \frac{(\hat{d}-1)(\hat{d}-2)}{2} - \hat{c} - \hat{n}, \tag{7}$$

где $\hat{c}$ и $\hat{n}$ – числа обыкновенных каспов и ноудов кривой $\hat{C}$ и $\hat{d} = \deg \hat{C}$.

Пусть $V(d,c,n) \subset \mathbb{P}^{\frac{d(d+3)}{2}}$ – многообразие, параметризующее неприводимые каспидальные кривые степени d, имеющие c обыкновенных каспов и n обыкновенных ноудов. Очень часто, если для заданных значений d, c и n одно из чисел $\hat{c}$ или $\hat{n}$, полученных в качестве решений уравнений (4) – (7), является отрицательным числом, то утверждается, что этого достаточно для "доказательства" пустоты многообразия $V(d,c,n)$. Однако, верно или нет следующие утверждение: *"двойственная кривая $\hat{C}$ к кривой C, соответствующей общей точке многообразия $V(d,c,n)$, является каспидальной кривой",* до сих пор не известно. Следовательно, в общем случае мы не можем заключить, что не существует каспидальной кривой C с заданными инвариантами, если одно из чисел $\hat{c}$ или $\hat{n}$ является отрицательным числом. Конечно, чтобы устранить эту проблему, мы можем использовать общие формулы Плюккера, включающие в

[9]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 14-01-00160 и 15-01-02158

себя числа всех возможных типов особых точек кривой $\hat{C}$. Но, тогда в этом случае мы сталкиваемся с новой проблемой: мы должны принять во внимание слишком много неизвестных переменных.

Чтобы обойти возникающие проблемы, для любой плоской кривой C введем понятия *числа* ее *виртуальных каспов* c_v и *числа* ее *виртуальных ноудов* n_v. А именно, пусть $(C,p) \subset (\mathbb{P}^2,p)$ – росток приведенной плоской кривой. Он распадается на несколько неприводимых ростков: $(C,p) = (C_1,p) \cup \cdots \cup (C_k,p)$. Обозначим через m_j кратность особенности (C_j,p) в точке p и пусть δ_p – δ-инвариант особенности (C,p). Назовем целые числа

$$c_{v,p} := \sum_{i=1}^{k}(m_i - 1)$$

и

$$n_{v,p} := \delta_p - \sum_{i=1}^{k}(m_i - 1)$$

соответственно *числом виртуальных каспов* и *числом виртуальных ноудов* ростка кривой (C,p). Имеем $\delta_p = c_{v,p} + n_{v,p}$.

Лемма. *Пусть $(C,p) \subset (\mathbb{P}^2,p)$ – росток приведенной плоской кривой, $c_{v,p}$ – число ее виртуальных каспов и $n_{v,p}$ – число ее виртуальных ноудов. Имеем*

(i) $c_{v,p} \geq 0$, $n_{v,p} \geq 0$;

(ii) если (C,p) – обыкновенный касп, то $c_{v,p} = 1$ и $n_{v,p} = 0$;

(iii) если (C,p) – обыкновенный ноуд, то $c_{v,p} = 0$ и $n_{v,p} = 1$.

Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – приведенная кривая. Обозначим через $\operatorname{Sing} C$ множество ее особых точек и по определению положим

$$c_v := \sum_{p \in \operatorname{Sing} C} c_{v,p},$$

$$n_v := \sum_{p \in \operatorname{Sing} C} n_{v,p}$$

и назовем эти целые числа соответственно *числом виртуальных каспов* и *числом виртуальных ноудов* кривой C. Если C является неприводимой кривой степени d и геометрического рода g, то

$g = \dfrac{(d-1)(d-2)}{2} - \delta_C$, где $\delta_C = \sum\limits_{p\in \operatorname{Sing} C} \delta_p$ – это δ-инвариант кривой C. Следовательно,

$$g = \frac{(d-1)(d-2)}{2} - c_v - n_v. \tag{8}$$

Следующее предложение является простым следствием из леммы .

Предложение. *Пусть c_v – число виртуальных каспов и n_v – число виртуальных ноудов приведенной кривой $C \subset \mathbb{P}^2$. Имеем*

(i) $c_v \geq 0$ и $n_v \geq 0$,

(ii) если C является каспидальной кривой, то c_v и n_v равны соответственно числу c каспов и числу n ноудов кривой C.

Теорема. (**Формулы Плюккера**). *Пусть C и $\hat{C}$ – неприводимые двойственные кривые рода g, $\deg C = d \geq 2$, $\deg \hat{C} = \hat{d}$, и c_v, n_v, $\hat{c}_v$, $\hat{n}_v$ – числа их виртуальных каспов и ноудов соответственно. В этом случае имеют место следующие равенства:*

$$\hat{d} = d(d-1) - 3c_v - 2n_v; \tag{9}$$

$$2g = (d-1)(d-2) - 2c_v - 2n_v; \tag{10}$$

$$d = \hat{d}(\hat{d}-1) - 3\hat{c}_v - 2\hat{n}_v; \tag{11}$$

$$2g = (\hat{d}-1)(\hat{d}-2) - 2\hat{c}_v - 2\hat{n}_v. \tag{12}$$

2. Пусть $C \subset \mathbb{P}^2$ – неприводимая каспидальная кривая степени d с n ноудами и c каспами. Легко видеть, что имеет место равенство

$$\hat{c}_v = 3d + 6(g-1) - 2c_v. \tag{13}$$

Из формул (10) и (13) следует равенство

$$8c + 6n + \hat{c}_v = 3d(d-2). \tag{14}$$

Равенство (14) имеет следующую естественную интерпретацию. А именно, пусть кривая C задана уравнением $F(x_0, x_1, x_2) = 0$, где x_0, x_1, x_2 – однородные координаты в $\mathbb{P}^2$. Рассмотрим кривую Гессе $H_C \subset \mathbb{P}^2$ кривой C. Она задается уравнением $\det(\frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j}) = 0$. Имеем $\deg H_C = 3(d-2)$. Следовательно, индекс пересечения $(C, H_C)_{\mathbb{P}^2}$ равен

$3d(d-2)$. С другой стороны, хорошо известно (см., например, [1]), что кривые C и H_C пересекаются только в особых точках и точках перегиба кривой C. Следовательно, имеем

$$\Sigma'(C, H_C)_p + \Sigma''(C, H_C)_p + \Sigma'''(C, H_C)_p = (C, H_C)_{\mathbb{P}^2} = 3d(d-2), \quad (15)$$

где $(C, H_C)_p$ – это индекс пересечения кривых C и H_C в точке $p \in C$, сумма $\sum'$ взята по всем каспам кривой C, сумма $\sum''$ взята по всем ноудам кривой C и сумма $\sum'''$ – по всем точкам перегиба кривой C.

Коэффициенты, входящие в формулу (14) имеют следующее геометрическое значение: *формулы* (14) *и* (15) – *это одна и та же формула,* то есть коэффициент 8, входящий в (14) это индекс пересечения $(C, H_C)_p$ в каспе $p \in C$, коэффициент 6 – это индекс пересечения $(C, H_C)_p$ в ноуде $p \in C$ и $\hat{c}_v = \sum'''(C, H_C)_p$.

3. В [3], предполагая, что для общей каспидальной кривой с заданными численными инвариантами, двойственная кривая также является каспидальной, Лефшец получил следующие неравенства

$$c \leq \frac{3}{2}d + 3(g-1), \quad (16)$$

если d является четным числом, и

$$c \leq \frac{3d-1}{2} + 3(g-1), \quad (17)$$

если d нечетно. Из (13) следует, что эти неравенства имеют место для произвольной каспидальной кривой, так как $\hat{c}_v$ является неотрицательным целым числом.

Из равенства (14) вытекает следующее утверждение: *для плоской каспидальной кривой степени $d \geq 2$ выполнено следующее неравенство*:

$$8c + 6n \leq 3d(d-2) - \frac{1-(-1)^d}{2}. \quad (18)$$

Для полноты изложения напомним также следующие хорошо известные неравенства, которые имеют место в случае плоских каспидальных кривых:

$$3c + 2n < d(d-1) - \sqrt{d}, \quad (19)$$

$$2c + 2n \leq (d-1)(d-2), \quad (20)$$

$$d(d-2)(d^2-9) + (3c+2n)^2 + 27c + 20n \geq 2d(d-1)(3c+2n), \quad (21)$$

которые являются следствиями равенств (9) – (12) и неравенств $\hat{d} \geq \sqrt{d}$, $g \geq 0$, $\hat{n}_v \geq 0$, и

$$16c + 9n \leq d(5d - 6) \tag{22}$$

(*неравенство Хирцебруха – Ивинскиса* ([4])), которое имеет место в случае четного d.

Отметим также, что неравенства (18) – (21) выполнены для произвольной неприводимой плоской кривой, если подставить в них c_v и n_v вместо c и n.

Литература

[1] Brieskorn E., Knörrer H., *Plane algebraic curves,* Birkhäuser-Verlag, Basel-Boston-Stuttgart, (1986).

[2] Ф. Гриффитс и Дж. Харрис, *Принципы алгебраической геометрии.* Москва, "Мир 1982. Griffiths P. and Harris J., *Principles of algebraic geometry.* A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, New York Chichester Brisbane Toronto, 1978.

[3] Lefschetz S., *On the existence of loci with given singularities*, Transactions of Am. Math. Soc. **14** (1913), 23-41.

[4] Hirzebruch F., *Singularities of algebraic surfaces and characteristic numbers,* Contemp. Math., **58,I** (1986), 141-155.

ОБ УСЛОВИЯХ СХОДИМОСТИ ИНТЕГРАЛОВ МЕЛЛИНА-БАРНСА ДЛЯ СИСТЕМ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

В. Р. Куликов[10] (Красноярск)
v.r.kulikov@mail.ru

Рассмотрим систему n уравнений вида

$$y_j^{m_j} + \sum_{\lambda\in\Lambda^{(j)}} x_\lambda^{(j)} y^\lambda - 1 = 0,\ j = 1,\dots,n, \tag{23}$$

от n неизвестных $y = (y_1,\dots,y_n)$, где набор показателей $\Lambda^{(j)} \subset \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0} \setminus \{0, m_j\}$ фиксирован, а все коэффициенты $x_\lambda^{(j)}$ – переменные.

Обозначим N — число коэффициентов в системе (23). Показатели λ мономов $y^\lambda = y_1^{\lambda_1}\dots y_n^{\lambda_n}$ в системе (23) можно представить как $(n\times N)$-матрицу

$$\Phi = (\lambda^1,\dots,\lambda^N),$$

где λ^k — Это вектор-столбцы из $\bigsqcup\limits_{j=1}^{n} \Lambda^{(j)}$.

Заметим, что Φ естественным образом разбивается на блоки, соответствующие $\Lambda^{(j)}$:

$$\Phi = \left(\Lambda^{(1)},...,\Lambda^{(n)}\right),$$

поэтому каждую ее строку φ_i можно представить в виде последовательности векторов $\varphi_i^{(1)},\dots,\varphi_i^{(n)}$.

Моном y^μ решения системы (23) можно записать в виде интеграла

$$\frac{1}{(2\pi i)^N}\int\limits_{\gamma+i\mathbb{R}^N} \frac{\prod\limits_{j=1}^{n}\prod\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}}\Gamma\left(u_\lambda^{(j)}\right)\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j,u\rangle\right)}{\prod\limits_{j=1}^{n}\Gamma\left(\frac{\mu_j}{m_j}-\frac{1}{m_j}\langle\varphi_j,u\rangle+\sum\limits_{\lambda\in\Lambda^{(j)}}u_\lambda^{(j)}+1\right)} Q(u)x^{-u}du, \tag{24}$$

где вектор γ выбирается из многогранника

$$\left\{u\in\mathbb{R}^N_{>0}, \langle\varphi_j,u\rangle<\mu_j, j=1,...,n\right\},$$

а $Q(u)$ — многочлен, выражаемый определителем

$$Q(u) = \frac{1}{m_1\dots m_n}\det\left\|\delta_i^j\left(\mu_j-\langle\varphi_j,u\rangle\right)+\langle\varphi_j^{(i)},u^{(i)}\rangle\right\|_{i,j=1}^n.$$

[10]Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в сибирском федеральном университете (договор №14.Y26.31.0006)

Теорема ([2], необходимое условие сходимости). *Если интеграл* (24) *сходится, то в каждой матрице вида*

$$\begin{pmatrix} \lambda_1^{(1)} & \cdots & \lambda_1^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_n^{(1)} & \cdots & \lambda_n^{(n)} \end{pmatrix},$$

где вектор-столбцы $\lambda^{(j)} = \left(\lambda_1^{(j)} \dots \lambda_n^{(j)}\right)^T$ *пробегают соответствующие множества* $\Lambda^{(j)}$, *все диагональные миноры положительны.*

Кроме того, для $n=2$ и $n=3$ приведенное условие является также и достаточным.

Доказательство этого утверждения основано на алгоритме Нильсон-Пассаре-Циха для вычисления области сходимости кратного интеграла Меллина-Барнса [3].

Как мне стало известно, независимое доказательство достаточного условия для $n=3$ было получено А.В. Сенашовым.

Литература

[1] В. А. Степаненко, “О решении системы n алгебраических уравнений от n неизвестных с помощью гипергеометрических функций”, Вестник КрасГУ, 2003, № 1, 35–48.

[2] Vladimir R. Kulikov, “Conditions for convergence of the Mellin–Barnes integral for solution to system of algebraic equations”, Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ., 7:3 (2014), 339–346.

[3] L. Nilsson, Amoebas, Discriminants, and Hypergeometric Functions, Doctoral Thesis, Department of Mathematics, Stockholm University, Sweden, 2009

АБСОЛЮТНО ТРИАНАЛИТИЧЕСКИЕ ТОРЫ В ОБОБЩЁННОМ МНОГООБРАЗИИ КУММЕРА

Н. М. Курносов[11] (Москва)
nikon.kurnosov@gmail.com

Определение. *Риманово многообразие называется* **гиперкэлеровым**, *если существует тройка комплексных структур* I, J, K, *удовлетворяющих кватернионным соотношениям и Кэлеровых относительно метрики* g.

Определение. *Пусть* (M, I, J, K) *компактное гиперкэлерово многообразие и комплексное подмногообразие* $Z \subset (M, I)$ *– трианалитическое (комплексно-аналитическое относительно структур* I, J, K*) для любой индуцированной комплексной структуры, совместимой с* I. *Тогда* Z *называется* **абсолютно трианалитическим**.

Естественный вопрос заключается в существовании нетривиальных абсолютно трианалитических подмногообразий в гиперкэлеровых многообразиях. Положительный ответ был получен Вербицким и Калединым в случае обобщённого куммерового многообразия [KV], в котором содержится абсолютно трианалитическое подмногообразие, изоморфное схеме Гильберта точек на K3-поверхности. В дальнейшем Вербицкий и Солдатенков [SV] доказали, что в примерах О'Грэди гиперкэлеровых многообразий не содержится абсолютно трианалитическое подмногообразий, нормализацией которых является тор. В настоящей работе аналогичный результат был получен для обобщённого куммерового многообразия.

Теорема. *Пусть* $K_n(T)$ *обобщённая куммерова поверхность и* $Z \subset K_n(T)$ *абсолютно трианалитическое подмногообразие. Тогда* Z *не тор.*

[11]Работа подготовлена с использованием средств субсидии на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной НИУ ВШЭ. Автор частично поддержан грантом МК-1297.2014.1.

Литература

[KV] D. Kaledin, M. Verbitsky, *Partial resolutions of Hilbert type, Dynkin diagrams, and generalized Kummer varieties*, Preprint http://arxiv.org/abs/math/9812078.arXiv:9812078 [math.AG].

[SV] A. Soldatenkov, M. Verbitsky, k-symplectic structures and absolutely trianalytic subvarieties, Preprint http://arxiv.org/abs/alg-geom/1409.1100.arXiv:1409.1100v2 [math.AG].

О ВЫЧИСЛЕНИИ КОМПОНЕНТ ВЕДЕРНИКОВА СТАБИЛЬНЫХ 2-РАССЛОЕНИЙ НА ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{P}^3$

А.А.Кытманов (Красноярск), Н.Н.Осипов (Красноярск), С.А.Тихомиров (Ярославль), Т.Л.Трошина [12](Ярославль)
aakytm@gmail.com, nnosipov@rambler.ru, satikhomirov@mail.ru, ttroshina1961@mail.ru

Изучение пространств (многообразий, схем) модулей $M_{\mathbb{P}^3}(2;0,n)$ стабильных 2-расслоений с $c_1 = 0$ и $c_2 = n$ на трехмерном проективном пространстве является одним из важных вопросов современной алгебраической геометрии и смежных направлений. Ключевой, существенный аспект данной проблемы — всестороннее изучение компонент в указанных пространствах модулей.

В работе В.К.Ведерникова [Ved84] было доказано, что многообразия стабильных 2-расслоений с $c_1 = 0$ на $\mathbb{P}^3$, у которых неотрицательная часть (симметричного) спектра имеет вид

$$0^{k-2l+1}\dots(l-2)^{k-l-1}(l-1)^{k-l}l^{k-l+1}\dots(k-1)^2k^1$$

(где выражение p^q означает, что число p входит в спектр q раз), а целочисленные параметры k и l удовлетворяют свойству

$$0 < 2l < k+1, \tag{25}$$

являются гладкими, неприводимыми, рациональными компонентами размерности $\frac{2}{3}k^3+6k^2+(2l^2+\frac{52}{3})k-4l^3-6l^2-11l+8$ в пространствах $M_{\mathbb{P}^3}(2;0,n)$, где

$$n = (k+1)^2 - 2l^2. \tag{26}$$

Определение. *Назовем данные компоненты компонентами Ведерникова.*

Несмотря на доказанные геометрические свойства этих компонент, теоретико-числовые их свойства до сей поры оставались малоизученными, в частности, не было информации о том, сколько компонент Ведерникова находится в пространстве модулей 2-расслоений с $c_1 = 0$ и конкретным (произвольным) c_2.

[12] Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты 14-01-00283-а, 15-01-00277-а и 15-31-20008-мол_а_вед) и Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 гг. (проект № 365)

В системе компьютерной алгебры Maple был реализован алгоритм, позволяющий устанавливать точное число указанных компонент в пространстве модулей для конкретного (произвольного) пространства модулей, путем нахождения точного числа различных пар параметров l и k, удовлетворяющих (25) и (26).

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Для значений второго класса Черна $c_2 = n$ от 1 до 1000000 количество $V(m)$ пространств $M_{\mathbb{P}^3}(2;0,n)$, содержащих m компонент Ведерникова определяется таблицей:*

m	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*
$V(m)$	*807085*	*106910*	*69252*	*4757*	*10693*	*80*

m	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13 и более*
$V(m)$	*946*	*1*	*262*	*10*	*1*	*0*	*3*	*0*

Среднее значение числа компонент стремится к константе, равной $\frac{\sqrt{2}}{4}\ln(1+\sqrt{2})$.

Полученные результаты планируется использовать при дальнейшем изучении компонент в пространствах модулей $M_{\mathbb{P}^3}(2;0,n)$.

Литература

[Ved84] В. К. Ведерников, Модули стабильных расслоений ранга 2 на P_3 с фиксированным спектром, Известия АН СССР, Сер. матем., 1984, 48:5, 986–998.

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПРОИЗВОДЯЩЕЙ ФУНКЦИИ РЕШЕНИЯ МНОГОМЕРНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

А. П. Ляпин (Красноярск), А. А. Кытманов[13] (Красноярск)
LyapinAP@yandex.ru, aakytm@gmail.com

Теория разностных уравнений развивалась одновременно с теорией обыкновенных дифференциальных уравнений и в случае линейных уравнений от одного переменного имеет вполне законченный вид. В многомерном случае ситуация гораздо сложнее и сколько-нибудь общей теории разностных уравнений не создано. Тем не менее, разностные уравнения находят применение в теории дискретных динамических систем, в теории цифровой обработки многомерных сигналов для конструирования цифровых рекурсивных фильтров ([1]). В случае двух переменных задача об устойчивости цифрового рекурсивного фильтра решена в работе [2]. В работе [3] многомерные разностные уравнения изучались с точки зрения применения к задачам перечислительного комбинаторного анализа. В ней сформулирована задача Коши для многомерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами и доказана теорема о существовании и единственности решения такой задачи. В [4] приведена формула для решения задачи Коши с использованием понятия фундаментального решения.

В иерархии, предложенной Р. Стенли, рациональные функции являются простейшим классом производящий функций. Для одномерного случая А. Муавр в 1722 году доказал, что z-преобразование (производящая функция) является рациональной тогда и только тогда, когда эта последовательность удовлетворяет линейному разностному уравнению с постоянными коэффициентами. В многомерном случае, вообще говоря, это утверждение неверно. Многомерный аналог данного утверждения был доказан А.П. Ляпиным и Е.К. Лейнартасом в работе [5]. За последние годы появился еще ряд интересных результатов в данном направлении. В работах [6] и [7] сформулированы условия, обеспечивающие существование и единственность решения задачи Коши для многомерного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами в симплициальном конусе целочисленной решетки, найдены условия, достаточные условия алгебраичности и рациональности производящей функции решений таких уравнений. В работе [8] получено необходимое условие устойчивости однородной

[13]Оба автора поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований, проект 14-01-00283.

задачи Коши для многомерного разностного оператора и критерий ее асимптотической устойчивости в терминах, связанных с понятием амебы алгебраической гиперповерхности. В работе [9] сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия устойчивости задачи Коши для многослойной линейной разностной схемы.

В настоящем исследовании авторами предложен компьютерный алгоритм для нахождения производящей функции решения задачи Коши многомерного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами.

Литература

[1] Д. Даджион, О. Мерсеро. Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир, 1988. 488 с.

[2] А.К. Цих Условия абсолютной сходимости ряда из коэффициентов Тейлора мероморфной функции двух переменных. Мат. Сборник. 1981. Т. 182. №11. С. 1588-1612.

[3] M. Bousquet-Melou, M. Petkovsek. Linear recurrences with constant coefficient: the multivariate case. Discrete Mathematics. 2000. V. 225. P. 51-75.

[4] Е.К. Лейнартас. Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений. Сиб. Мат. Журнал. 2007. Т. 48. №2. С. 335-340.

[5] Е.К. Лейнартас, А.П. Ляпин. О рациональности многомерных возвратных степенных рядов. Журнал Сиб. Федер. Ун-та. 2009. Т.2. Вып.4. С. 449-455.

[6] Т.И. Некрасова. Задача Коши для многомерного разностного уравнения в конусах целочисленной решетки. Журнал Сиб. Федер. Ун-та. 2011. Т.5. Вып.4. С. 576-580.

[7] Т.И. Некрасова. Достаточные условия алгебраичности производящих функций решений многомерных разностных уравне-

ний. Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2013. Т.6. №3. С. 88-96.

[8] Е.К. Лейнартас. Критерий асимптотической устойчивости многомерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами. Журнал Сиб. Федер. Ун-та. 2011. Т.4. Вып.1. С. 112-117.

[9] М.С. Рогозина. Устойчивость многослойных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей. Журнал Сиб. Федер. Ун-та. 2012. Т.5. Вып.2. С. 256-263

РАВНОВЕСНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ ЛЕМНИСКАТЫ

А. Н. Марковский (Краснодар)
mark@kubsu.ru

Рассматриваются плоские кривые, определяемые как множество уровня комплексных произведений, допускающих неалгебраические особенности, так что классические лемнискаты составляют подмножество рассматриваемого класса. Доказывается представление равновесного потенциала (потенциала Робена, определенного на таких кривых; плотность такого потенциала вполне характеризует кривую, на которой он определен; так что некоторые свойства плотности оказываются полезными при изучении метрических свойств лемнискат [1, 2, 3].

1. Формальные произведения. Рассмотрим на $\mathbb{C}$ комплексные произведения

$$\pi_n^\alpha(z) := \prod_{j=1}^{n}(z - z_j)^{a_j}, \tag{27}$$

где z_j – различные точки на $\mathbb{C}$, а a_j – *действительные* положительные числа, такие что их сумма $a_1 + ... + a_n$ равна α, $n \in \mathbb{N}$. В случае, если a_j – натуральные числа, то $\pi_n^\alpha(z)$ – комплексный полином степени α с n различными нулями. В случае ненатуральных a_j в (27) будем иметь ввиду главные значения многозначных функций.

По аналогии с теорией полиномов, множество

$$L(\pi_n^\alpha, B) := \{z : |\pi_n^\alpha(z)| \leqslant B\} \tag{28}$$

будем называть лемнискатным множеством, а $\partial L(\pi_n^\alpha, B)$ – лемнискатой. Обозначим Θ – множество критических точек π_n^α и $B_2 = \max_{w\in\Theta} |\pi_n^\alpha(w)|$, тогда при $B > B_2$ лемнискатное множество $L(\pi_n^\alpha, B)$ – компакт со связной гладкой границей, содержащий все точки z_j, а также Θ. Несложно показать, что множество точек z_j и соответствующих им кратностей a_j, определяющее лемнискату $\partial L(\pi_n^\alpha, B)$ при $B > B_2$, единственно.

2. Равновесный потенциал. Пусть дана ограниченная область $Q \subset \mathbb{C}$ с гладкой границей S. Потенциал простого слоя

$$R(z) = \int_S \varphi_S^*(\zeta) \ln|z - \zeta|\, dS_\zeta,\ z \in \mathbb{C},$$

для которого выполняется

$$R(z)|_S = R_S \equiv \text{const},\ \int_S \varphi_S^*(\zeta) dS_\zeta = 1,$$

называется равновесным потенциалом или потенциалом Робена [4]; функция $\varphi_S^*(\zeta)$ и константа R_S называются соответственно плотностью и постоянной Робена.

3. Представление равновесного потенциала. Обозначим

$$U(z) = \ln|\pi_n^\alpha(z)| = \sum_{j=1}^{n} a_j \ln|z - z_j|\,,$$

и $\partial L = \partial L(\pi_n^\alpha, B)$. Справедливо интегральное тождество [5]:

$$\ln(B) = U(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial L} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}} U(\zeta)\ln|z-\zeta|\,dL_\zeta,\ z \in \partial L,$$

где $\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}}$ – операция дифференцирования по внешней нормали к L.

Отметим два следствия интегрального тождества в предположении, что π_n^α и $L(\pi_n^\alpha, B)$ определены равенствами (27) – (28) и $B > B_2$. При $\alpha = 1$, $\pi_n^1(z)$ будем обозначать $\pi_n(z)$. Отметим, что $L(\pi_n^\alpha, B) = L(\pi_n^1, B^{\frac{1}{\alpha}})$, так что случай $\alpha = 1$ не умаляет общности.

Лемма. *Если $\alpha = 1$, то при $z \in \partial L(\pi_n, B)$,*

$$\varphi_L^*(z) = \frac{1}{2\pi}\,|\lambda(z)|\,,$$

где

$$\lambda(z) = \frac{\pi_n'(z)}{\pi_n(z)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j}{z - z_j}.$$

Лемма.

$$cap(L(\pi_n^\alpha, B)) = B^{\frac{1}{\alpha}},$$

где cap – логарифмическая емкость множества.

Литература

[1] В. Н. Дубинин, Лемниската и неравенства для логарифмической емкости континуума // Мат. заметки, 2006, Т. 80, В. 1, С. 33–37.

[2] В. И. Данченко, Длины лемнискат. Вариация рациональных функций // Мат. сб., 2007, Т. 198, № 8, С. 51–58.

[3] О. Н. Косухин, Об оценке длин лемнискат // Мат. заметки, 2012, Т. 92, В. 6, С. 872–884.

[4] Н. С. Ландкоф, Основы современной теории потенциала. – М.: Наука, 1966. –516 с.

[5] А. Н. Марковский, Интегральное представление линейной комбинации фундаментальных решений уравнения Лапласа // Экологический вестник научных центров. Черноморского экономического сотрудничества. – 2011. №4. С. 49–54.

О МОНОДРОМИИ РЕШЕНИЯ ОБЩЕГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Е. Н. Михалкин[14] **(Красноярск)**
mikhalkin@bk.ru

Рассматривается общее алгебраическое уравнение степени n

$$y^n + x_{n-1}y^{n-1} + \ldots + x_1 y - 1 - 0. \tag{29}$$

Главным решением этого уравнения называется ветвь решения $y_0(x)$ с условием $y_0(0) = 1$. Несложно видеть, что остальные решения $y_j(x)$ получаются из главного по формуле

$$y_j(x) = \varepsilon_j y_0(\varepsilon_j x_1, \varepsilon_j^2 x_2, \ldots, \varepsilon_j^{n-1} x_{n-1}), \quad j = 1, \ldots, n-1.$$

Здесь $\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi i}{n} j}$ – первообразный корень из единицы степени n.

В 1921 г. Меллином [Mel] было получено интегральное представление для решения уравнения (29) в виде интеграла Меллина-Барнса. На основе этого представления в статье [Mikh] решение уравнения (29) представлено в виде интеграла от элементарной функции. А именно, справедлива

Теорема. *Ветвь $y_0(x)$ решения уравнения (29) представляется интегралом*

$$1 + \frac{1}{2\pi i n} \int\limits_0^1 t^{\frac{1-n}{n}} (1-t)^{-\frac{1+n}{n}} \left[e^{\frac{\pi i}{n}} \ln \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{-\frac{k}{n}\pi i} x_k t^{\frac{n-k}{n}} (1-t)^{\frac{k}{n}} \right) - \right.$$

$$\left. - e^{-\frac{\pi i}{n}} \ln \left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} e^{\frac{k}{n}\pi i} x_k t^{\frac{n-k}{n}} (1-t)^{\frac{k}{n}} \right) \right] dt,$$

сходящимся в области $\mathbb{C}^{n-1} \setminus (\Sigma_- \cup \Sigma_+)$, где $\Sigma_\mp = \bigcup\limits_{t \in [0;1]} \Sigma_\mp(t)$ – семейства гиперплоскостей

$$\Sigma_\mp(t) = \left\{ x \in \mathbb{C}^{n-1} : \sum_{k=1}^{n-1} e^{\mp \frac{n-k}{n}\pi i} x_k t^{\frac{n-k}{n}} (1-t)^{\frac{k}{n}} = 1 \right\}.$$

[14]Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор №14.Y26.31.0006), а также гранта РФФИ №14-01-31265 мол_а

Перейдем к параметризации дискриминанта уравнения (29). Согласно [Pass-Tsikh] дискриминантное множество ∇ уравнения (29) допускает n-значную параметризацию Горна-Капранова $\Psi : \mathbb{CP}_s^{n-2} \to \mathbb{C}_x^{n-1}$ по формуле

$$x_k = \Psi_k(s) = \frac{ns_k}{\langle \alpha, s\rangle}\left(-\frac{\langle \alpha, s\rangle}{\langle \beta, s\rangle}\right)^{\frac{k}{n}}, \;\; k = 1, \dots, n-1; \;\; s \in \mathbb{CP}_{n-2}. \quad (30)$$

Здесь $\alpha = (n-1, \dots, 2, 1)$ и $\beta = (1, 2, \dots, n-1)$ – целочисленные векторы, а $\langle \, , \rangle$ – знак скалярного произведения.

Определим для $\frac{\langle \alpha, s\rangle}{\langle \beta, s\rangle} > 0$, $s \in \mathbb{RP}_{n-2}$ ветви параметризации (30) условием

$$\Psi_k^{(j)}(s) = e^{-\frac{\pi k i}{n}(1+2j)}\frac{ns_k}{\langle \alpha, s\rangle}\left(\frac{\langle \alpha, s\rangle}{\langle \beta, s\rangle}\right)^{\frac{k}{n}}, \;\; k = 1, \dots, n-1,$$

где в качестве радикала степени $\frac{k}{n}$ берется арифметическое значение, а j по-прежнему принимает значения $0, 1 \dots, n-1$. Назовем *«струной»* поверхность

$$\mathcal{S}^{(j)} := \{\Psi^{(j)}(s) : \, s \in \mathbb{R}_+^{n-1}\} \subset \nabla, \;\; j = 0, \dots, n-1.$$

Область сходимости D гипергеометрического ряда (сходящегося в окрестности $x = 0$), представляющего решение уравнения (29), примыкает к дискриминантному множеству ∇ по части границы ∂D, состоящей из n определенных выше «струн» $\mathcal{S}^{(0)}, \mathcal{S}^{(1)}, \dots, \mathcal{S}^{(n-1)}$.

Используя указанную параметризацию, а также Теорему , доказана следующая теорема, описывающая характер ветвления решения $y(x)$ уравнения (29) при продолжении из области D вокруг «струн».

Теорема. *При продолжении через границу ∂D области D всякая ветвь $y_j(x)$ решения уравнения (29) имеет ветвление лишь в паре «струн» $\mathcal{S}^{(j)}$ и $\mathcal{S}^{(j-1)}$, причем второго порядка.*

Отметим, что в статье [Mikh] описана полная монодромия решения $y(x)$ для триномиального уравнения, т.е. уравнения с одним параметром

$$y^n + xy^m - 1 = 0 \quad (31)$$

(в случае, когда $(m, n) = 1$). На основе этого результата вычислена группа монодромии решения последнего уравнения. Она совпадает с симметрической группой подстановок S_n.

Литература

[Mel] H.J. Mellin, *Résolution de l'équation algébrique générale à l'aide de la fonction gamma* // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1921. V.172, P. 658–661.

[Mikh] Михалкин Е.Н. *О решении общих алгебраических уравнений с помощью интегралов от элементарных функций*// Сиб. матем. журн. 2006. Т. 47, №2. С. 365–371.

[Pass-Tsikh] Passare M., Tsikh A. *Algebraic equations and hypergeometric series*. In the book "The legacy of Niels Henrik Abel". Springer: Berlin-Heidelberg-New York. 2004. P. 653 – 672.

О ПРОДОЛЖИМОСТИ СТЕПЕННЫХ РЯДОВ, КОЭФФИЦИЕНТЫ КОТОРЫХ ИНТЕРПОЛИРУЮТСЯ МЕРОМОРФНЫМИ ФУНКЦИЯМИ

А. Д. Мкртчян[15] (Красноярск)
Alex0708@bk.ru

Один из способов идентификаций аналитической функции основан на разложении ее в степенной ряд. На языке коэффициентов ряда можно описывать свойство аналитической продолжимости ряда за пределы его области сходимости. Такая проблематика аналитического продолжения активно исследовалась в прошлом столетии в работах Адамара, Линделефа, Пойа и многих других известных математиков (см., например, [1], [2]). Наиболее эффективные и завершенные результаты были получены для задач, когда коэффициенты степенного ряда интерполируются значениями $\varphi(n)$ целой функции φ в точках $n \in N$.

Иногда целесообразно интерполировать коэффициенты другим классом функций, например, мероморфными функциями. В докладе будет идти речь об аналогах теорем Пойа и Аракеляна, касающихся аналитического продолжения степенного ряда через дуги из границы его области сходимости [3], [4].

Приведем точную формулировку результата о продолжимости степенного ряда в сектор.

Рассмотрим степенной ряд

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n \tag{32}$$

переменного $z \in \mathbb{C}$, имеющий своей областью сходимости единичный круг $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Говорят, что функция ψ *интерполирует* коэффициенты ряда (32), если

$$\psi(n) = f_n \ \text{ для всех } \ n \in \mathbb{N}.$$

В качестве интерполирующей функции мы будем брать мероморфную функцию вида

$$\psi(\zeta) = \phi(\zeta) \frac{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(a_j \zeta + b_j)}{\prod_{k=1}^{q} \Gamma(c_k \zeta + d_k)}, \tag{33}$$

[15]Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор №14.Y26.31.0006), а также при поддержке фонда «Династия»

где $\phi(\zeta)$ целая функция, $a_j \geq 0, \;\; j = 1, ..., p,$ и

$$\sum_{j=1}^{p} a_j = \sum_{k=1}^{q} c_k.$$

Напомним, что *индикатор* целой функции $\varphi(\zeta)$ называется верхний предел

$$h_\varphi(\theta) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ln|\varphi(re^{i\theta})|}{r}, \;\; \theta \in \mathbb{R}.$$

Пусть $\Delta_\sigma-$ сектор $\{z = re^{i\theta} \in \mathbb{C} : |\theta| \leq \sigma\}$, $\sigma \in [0, \pi)$.

Теорема 1. *Сумма ряда* (32) *аналитически продолжается в открытый сектор* $\mathbb{C} \setminus \Delta_\sigma$*, если существует интерполирующая коэффициенты* f_n *мероморфная функция* $\psi(\zeta)$ *вида* (33) *такая, что индикатор целой функции*

$$\varphi(\zeta) := \phi(\zeta) \frac{\prod_{j=1}^{p} {a_j}^{a_j \zeta}}{\prod_{k+1}^{q} |c_k|^{c_k \zeta}}$$

удовлетворяет условиям:

$$1)\; h_\varphi(0) = 0, \qquad 2)\; \max\{h_\varphi(-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} l, h_\varphi(\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} l\} \leq \sigma,$$

где

$$l = \sum_{k=1}^{q} |c_k| - \sum_{j=1}^{p} a_j.$$

В таких же терминах получается условия, при которых сумма ряда аналитически продолжается в $\mathbb{C}$ кроме быть может некоторой дуги на границе области сходимости, а также условия, при которых $\partial D_1 \setminus \Delta_\sigma$ является дугой регулярности для суммы ряда. Кроме того, приведется обобщение полученных результатов для кратных степенных рядов [5].

Литература

[1] Л. Бибербах, Аналитическое продолжение, Москва, Наука 1967.

[2] Н.У. Аракелян, И.А. Мартиросян, Степенные ряды: аналитическое продолжение и локализация особенностей. Ереван 1991.

[3] G. Polya Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen. Mathematische Zeitschrift. 1929. 29. pp. 549-640.

[4] N. Arakelian, W. Luh, J. Muller, On the localization of singularities of lacunar power series. Complex Variables and Elliptic Equations. 52(2007), no.7, pp 561-573.

[5] A. J. Mkrtchyan, On analytic continuation of multiple power series beyond the domain of convergence. Journal of Contemporary Mathematical Analysis 50.1 (2015): 22-31.

НЕКОТОРЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ СТЕПЕННЫХ СУММ КОРНЕЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ

Е. К. Мышкина[16] (Красноярск)
elfifenok@mail.ru

Рассмотрим систему уравнений $f_1(z),\ f_2(z),\dots,f_n(z)$ вида

$$f_i(z_1,\dots,z_n)=(1-a_{i1}z_1)^{m_{i1}}\cdot\ldots\cdot(1-a_{in}z_n)^{m_{in}}+Q_i(z_1,\dots,z_n), \quad (34)$$

где m_{ij} — натуральные числа, $a_{ij}\neq 0$ — комплексные числа, различные при каждом фиксированном j, $Q_i(z)$ — многочлены вида,

$$Q_i(z)=z_1\cdots z_n\sum_{|\alpha\|\geq 0}C^i_\alpha z^\alpha, \quad (35)$$

где α — мультииндекс, $z^\alpha=z_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot z_n^{\alpha_n}$, и $\deg_{z_j}Q_i\leq m_{ij},\ i,j=\overline{1,n}$.

Обозначим корни системы уравнений

$$q_i=(1-a_{i1}z_1)^{m_{i1}}\cdot\ldots\cdot(1-a_{in}z_n)^{m_{in}}=0,\quad i=\overline{1,n},$$

через $a_J=(\frac{1}{a_{1i_1}},\dots,\frac{1}{a_{ni_n}})$, где $J=(i_1,\dots,i_n)$ — мультииндекс, являющийся перестановкой $(1,\dots,n)$.

Делая замену в системе (34) $z_i=\dfrac{1}{w_i}$, $i=\overline{1,n}$, получаем

$$\widetilde{f}_i(w)=\widetilde{q}_i(w)+\widetilde{Q}_i(w), \quad (36)$$

где функции $\widetilde{q}_i(w)=(w_1-a_{i1})^{m_{i1}}\cdot\ldots\cdot(w_n-a_{in})^{m_{in}}$, многочлены $\widetilde{Q}_i=w^{m_{i1}}\cdot\ldots\cdot w^{m_{in}}\cdot Q_i\left(\dfrac{1}{w_1},\dots,\dfrac{1}{w_n}\right)$, при чем $\deg_{w_j}\widetilde{Q}_i<m_{ij},\ i,j=\overline{1,n}$.

Обозначим через $z_j=(z_{j1},\dots,z_{jn})$, $j=1,\dots p$ — корни системы (34) с функциями Q_i вида (35), не лежащими на координатных плоскостях.

Пусть $\widetilde{\Delta}$ — якобиан системы функций $\widetilde{f}_1(w),\dots,\widetilde{f}_n(w)$ из (36).

Теорема. *Для системы (34) с функциями f_j вида (34), Q_j вида (35) справедливы формулы*

$$\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{z_{j1}^{\gamma_1+1}\cdot z_{j2}^{\gamma_2+1}\cdots z_{jn}^{\gamma_n+1}}=\sum_{K\in\Re}(-1)^{||K||}\sum_J(-1)^{s(J)}\frac{1}{\beta(K,J)!}\times$$
$$\times\frac{\partial^{||\beta||}}{\partial w^\beta}\left[\widetilde{\Delta}\cdot w_1^{\gamma_1+1}\cdot\ldots\cdot w_n^{\gamma_n+1}\cdot\frac{\widetilde{Q}^K(J)}{\widetilde{q}^{K+I}(J)}\right]_{w=\widetilde{a}_J},$$

---

[16] Работа выполнена при поддержке РФФИ 15-01-00277, 15-31-20008

где множество индексов

$$\Re = \{K = (k_1, \ldots, k_n)| \quad \exists i : \gamma_i + 2 > \|K\|, \quad i = \overline{1, n}\},$$

$\widetilde{a}_J = (a_{1i_1}, \ldots, a_{ni_n})$, $(-1)^{s(J)} = 1$, когда J — четная перестановка и $(-1)^{s(J)} = -1$, когда J — нечетная перестановка,

$$\widetilde{q}^{K+I}(J) = \widetilde{q}_1^{k_1+1}[i_1] \cdot \ldots \cdot \widetilde{q}_n^{k_n+1}[i_n],$$

а $\widetilde{q}_j[i_j]$ — это произведение всех $(w_1 - a_{j1})^{m_{j1}} \cdot \ldots \cdot (w_n - a_{jn})^{m_{jn}}$ кроме $(w_{i_j} - a_{ji_j})^{m_{ji_j}}$,

$$\beta(K, J) = (m_{1i_1} \cdot (k_{i_1} + 1) - 1, \ldots, m_{ni_n} \cdot (k_{i_n} + 1) - 1),$$

$$\beta(K, J)! = \prod_j (m_{ji_j} \cdot (k_{i_j} + 1) - 1)!,$$

$$\frac{\partial^{||\beta||}}{\partial w^\beta} = \frac{\partial^{m_{1i_1} \cdot (k_{i_1}+1)-1+\ldots+m_{ni_n} \cdot (k_{i_n}+1)-1}}{\partial w_1^{m_{1i_1} \cdot (k_{i1}+1)-1} \cdot \ldots \cdot \partial w_n^{m_{ni_n} \cdot (k_{in}+1)-1}}.$$

Литература

[1] А. М. Кытманов, Е. К. Мышкина, О вычислении степенных сумм корней одного класса систем неалгебраических уравнений, Сибирские Электронные Математические Известия, 2015, т. 12, 190–209.

[2] А. К. Цих, Теорема Безу в пространстве теорий функций. О решении систем алгебраических уравнений, Сб. трудов «Некоторые вопросы многомерного комплексного анализа», Институт физики СО АН СССР, Красноярск, 1985, 185–196.

[3] А. К. Цих, Многомерные вычеты и их приложения, Н.:Наука, 1992.

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ХИРЦЕБРУХА И ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ УРОВНЯ N

И. В. Нетай[17] (Москва)
i.v.netay@gmail.com

Доклад основан на совместной работе с В. М. Бухштабером.

Рассмотрим формальный ряд $f(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} f_k x^{k+1}$ над кольцом R. Тогда симметрическую функцию $\prod_{i=0}^{m} \frac{x_i}{f(x_i)}$ можно выразить через элементарные симметрические при помощи некоторого многочлена $L_{f,m}(e_1, \ldots, e_m)$, где e_i — i-й элементарный симметрический многочлен. Тогда для любого расслоения ξ ранга m над базой B можно определить его *характеристический класс Хирцебруха*:

$$L_f(\xi) = L_{f,m}(c_1(\xi), \ldots, c_m(\xi)) \in \mathrm{H}^*(B, R).$$

Род Хирцебруха L_f называется *мультипликативным* относительно многообразия M, если $L_f(E) = L_f(B)L_f(M)$ для любого расслоения $E \to B$, слои которого изоморфны M.

Хирцебрух рассматривал роды ориентированных многообразий, соответствующих нечётным рядам $f(x)$. В частности, известно, что единственным нечётным родом, мультипликативным относительно $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ (а также относительно любого $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$), является род, задаваемый $f(t) = \frac{1}{\alpha}\tanh(\alpha t)$. Также, хорошо известно, что единственным родом, мультипликативным относительно $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ (и единственным, мультипликативным относительно $\mathbb{P}^{2n-1}_{\mathbb{C}}$ для любого n), задаваемым нечётным рядом $f(t)$, является род, задаваемый эллиптическим синусом Якоби sn.

Мы рассматриваем все роды Хирцебруха (а не только нечётные; это соответствует случаю стабильно комплексных многообразий) и классифицируем роды, мультипликативные относительно $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. Оказывается, что они все являются частными случаями функции Бейкера–Ахиезера, определяемой как

$$\Phi_s(t) = \frac{\sigma(s-t)}{\sigma(s)\sigma(t)} e^{\zeta(s)t},$$

где $\sigma(t)$ — σ-функция Вейерштрасса, $\frac{d}{dz}\ln\sigma(t) = \zeta(t)$.

Теорема. *Пусть род Хирцебруха является мультипликативным относительно $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$. Тогда он является одним из следующих:*

[17]Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14-50-00005) в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН

- *двупараметрический род Тодда, задаваемый* $f(t) = \frac{e^{\alpha t} - e^{\beta t}}{\alpha e^{\beta t} - \beta e^{\alpha t}}$*,*
- *эллиптический род, задаваемый эллиптическим синусом Якоби,*
- *эллиптический род уровня* 4.

Следствие. *Следующие условия эквивалентны:*

- *род Хирцебруха мультипликативен относительно* $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$*,*
- *род Хирцебруха мультипликативен относительно* $\mathbb{P}^{4n-1}_{\mathbb{C}}$ *для любого* n.

Литература

[1] F. Hirzebruch, Th. Berger, R. Jung Manifolds and Modular Forms A Publication of the Max-Planck-Institut für Mathematik, Bonn, 1992

АНАЛИТИЧЕСКАЯ СЛОЖНОСТЬ КЛАСТЕРНЫХ ДЕРЕВЬЕВ В ЗАДАЧАХ АНАЛИЗА ДАННЫХ

А. И. Нормов (Москва)
normch88@mail.ru

Анализ данных большого объёма требует, как правило, их систематизации и классификации. Формируемые классы (кластеры) объектов многочисленной генеральной совокупности данных, подлежащей изучению, могут сравниваться друг с другом путём их отождествления с элементами некоторой комбинаторной структуры (графа, дерева, матрицы и пр.). Эта группа методов анализа данных включает в себя, в числе прочих, дискриминантный анализ, кластеризацию и факторный анализ данных [2]. При этом возникает задача сравнения свойств и характеристик комбинаторных структур, сопоставляемых большим совокупностям исследуемых данных при помощи перечисленных методов. В частности, актуальной является задача сравнения структур кластерных деревьев, которые строятся при помощи кластерного анализа [2].

Если измерения выполнены с достаточно высокой точностью, а используемая метрика позволяет различать все параметры рассматриваемых объектов, то построенное по этим данным кластерное дерево будет двоичным. Действительно, повышение точности измерений соответствует малому возмущению набора данных, содержащего информацию об изучаемой совокупности объектов, а значит, и расстояний между ними в смысле используемой метрики. По теореме Сарда множество конфигураций, три или более элемента которых лежат на одинаковом расстоянии друг от друга (в смысле произвольной фиксированной достаточно гладкой функции расстояния) имеет нулевую меру. Это и означает, что соответствующее данной конфигурации кластерное дерево будет двоичным.

В докладе будет введено понятие аналитической сложности двоичного дерева. Аналитическая сложность функции $f(x,y)$ двух переменных — это её числовая характеристика со значениями в $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$, содержащая информацию о возможных представлениях $f(x,y)$ в виде суперпозиций функций одной переменной и фиксированной функции $s(x,y)$ двух переменных, в качестве которой всюду в дальнейшем используется сумма аргументов: $s(x,y) = x + y$ [1]. В докладе будут изложены свойства аналитической сложности двоичных деревьев и предложен алгоритм её вычисления. Под аналитической сложностью двоичного дерева понимается аналитическая сложность функции двух переменных, сопоставленной этому дереву некоторым каноническим образом. Полученные результаты применяются для анализа и сравнения структур кластерных деревьев.

Литература

[1] В.К. Белошапка. *Об аналитической сложности функций двух переменных,* Российский журнал математической физики. 2007. Т. 14. № 3. С. 243–249.

[2] Б.Г. Миркин. Методы кластерного анализа для поддержки принятия решений. М.: Изд. дом Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», 2011.

МНОГОМЕРНЫЙ СИМВОЛ КОНТУ-КАРРЕРА

Д. В. Осипов[18] **(Москва)**
d_osipov@mi.ras.ru

Доклад основан на совместных работах с С. О. Горчинским: [GO1, GO2, GO3].

Для любого коммутативного ассоциативного кольца с единицей A Конту-Каррер ввел в работе [CC] замечательное билинейное антисимметрическое спаривание между группами обратимых элементов кольца $A((t))$ рядов Лорана над кольцом A

$$A((t))^* \times A((t))^* \longrightarrow A^*\,, \tag{37}$$

которое функториально по отношению к кольцу A. Спаривание (37) называется теперь символом Конту-Каррера. Мы будем также называть его одномерным символом Конту-Каррера и обозначать как CC_1. Делинь, используя аналогию с аналитическим случаем, написал в работе [Del, § 2.9] следующую явную формулу для символа CC_1.

Отметим, что если A — поле, то символ Конту-Каррера совпадает с ручным символом. В частности, выполнено равенство $CC_1(t,t) = -1$. Для простоты изложения предположим далее, что кольцо A не является произведением двух колец. Тогда ряд Лорана $f = \sum\limits_{l \geqslant m} a_l t^l$, $a_l \in A$ обратим в кольце $A((t))$, если и только если существует целое число $l_0 \geqslant m$, такое что $a_{l_0} \in A^*$, и для любого целого числа $l < l_0$ коэффициент a_l нильпотентен. Обозначим число l_0 как $\nu(f)$. Для всех элементов $a \in A^*$ и $g \in A((t))^*$ выполнено равенство $CC_1(a,g) = a^{\nu(g)}$. По свойству билинейности и антисимметричности остается определить выражение $CC_1(f,g)$, если $\nu(f) = 0$ и свободный член a_0 ряда f равен 1, что является наиболее существенным случаем для символа Конту-Каррера. Явная формула Делиня для символа Конту-Каррера CC_1 над $\mathbb{Q}$-алгеброй A следующая:

$$CC_1(f,g) = \exp \operatorname{res} \left(\log(f)\, \frac{dg}{g} \right)\,, \tag{38}$$

где выполнено $f, g \in A((t))^*$, $\nu(f) = 0$, и $a_0 = 1$. Здесь выражения “log” и ”exp” определяются при помощи стандартных формальных рядов. Можно показать, что выражение, от которого берется функция exp, задает нильпотентный элемент из кольца A. Отсюда правая

[18]Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 14-01-00178, 13-01-12420

сторона формулы (38) корректно определяет элемент из кольца A^*. Все это полностью задает символ Конту-Каррера над $\mathbb{Q}$-алгебрами. Можно также показать, что формула (38) может быть расширена элементарными методами до спаривания над всеми кольцами, то есть не только над $\mathbb{Q}$-алгебрами (см., например, [OZ, § 2]).

Рассмотрим теперь многомерный случай, то есть случай итерированных рядов Лорана от n переменных для произвольного $n \geqslant 1$. Определим функтор $L^n\mathbb{G}_m(A) := A((t_1))\dots((t_n))^*$ и, как обычно, положим $\mathbb{G}_m(A) := A^*$.

Рассмотрим граничное отображение для алгебраических K-групп

$$\partial_{m+1} \ : \ K_{m+1}\big(R((t))\big) \longrightarrow K_m(R)\,, \qquad m \geqslant 0\,,$$

где R любое коммутативное кольцо. Отметим, что здесь важно, что кольцо R может быть нерегулярным, в частности, может иметь нильпотентные элементы. Конструкция отображений ∂_{m+1} основана на “локализационной теореме для проективных модулей”, см. [Gr].

Можно определить n-мерный символ Конту-Каррера CC_n как мультилинейный антисимметричный морфизм функторов $(L^n\mathbb{G}_m)^{\times(n+1)} \to \mathbb{G}_m$, задаваемый формулой:

$$CC_n \ : \ L^n\mathbb{G}_m(A)^{\times(n+1)} \longrightarrow K_{n+1}\big(A((t_1))\dots((t_n))\big) \xrightarrow{\partial_2\cdot\ldots\cdot\partial_{n+1}} K_1(A) \xrightarrow{\det} A^* \tag{39}$$

где первая стрелка есть произведение между алгебраическими K-группами. (Как показано в [OZ, § 7], для $n = 1$ это определение эквивалентно классическому определению символа Конту-Каррера, задаваемому явными формулами.) Также естественно ожидать, что если кольцо A является $\mathbb{Q}$-алгеброй, то отображение CC_n задается следующей явной формулой, которая обобщает формулу (38):

$$CC_n(f_1, f_2, \dots, f_{n+1}) = \exp\,\mathrm{res}\left(\log(f_1)\,\frac{df_2}{f_2} \wedge \ldots \wedge \frac{df_{n+1}}{f_{n+1}}\right)\,, \tag{40}$$

где выполнено $f_1, \dots, f_{n+1} \in L^n\mathbb{G}_m(A)$, на f_1 наложено дополнительное условие, связанное с тем, чтобы выражение $\log(f_1)$ было бы корректно определено, и отображение res есть n-мерный вычет.

Равенство между формулами (39) и (40) в случае $\mathbb{Q}$-алгебр и для произвольного натурального числа n — это один из главных результатов работ [GO1, GO3]. (Для $n = 1$ и $n = 2$ это было доказано в работе [OZ, § 7].) Методы работ [GO1, GO3] основаны на вычислении касательного пространства к K-функтору Милнора колец, что было сделано в работе [GO2].

Литература

[GO1] С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, Явная формула для многомерного символа Конту-Каррера, Успехи математических наук. 2015. Т. 68, № 1. С. 183–184.

[GO2] С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, Касательное пространство к K-группам Милнора колец, Труды Математического института им. В. А. Стеклова. 2015. Т. 290 (2015), принята к печати; e-print arXiv:1505.03780.

[GO3] С. О. Горчинский, Д. В. Осипов, Многомерный символ Конту-Каррера: локальная теория, Математический сборник. 2015, принята к печати; e-print arXiv:1505.03829.

[CC] C. Contou-Carrère, Jacobienne locale, groupe de bivecteurs de Witt universel, et symbole modéré, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math., **318**:8 (1994), 743–746.

[Del] P. Deligne, Le symbole modéré, Publ. Math. IHES, **73** (1991), 147–181.

[OZ] D. Osipov, X. Zhu, The two-dimensional Contou-Carrère symbol and reciprocity laws, to appear in J. Algebraic Geom. (2015); e-print arXiv:1305.6032v2.

[Gr] D. Grayson, Higher algebraic K-theory. II (after Daniel Quillen), Algebraic K-theory (Proc. Conf., Northwestern Univ., Evanston, Ill., 1976), Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, **551** (1976), 217–240.

ТЕОРИЯ ХОДЖА ДЛЯ ЭРМИТОВО СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Г. С. Папаянов[19] **(Москва)**
datel@mail.ru

Определение. *Эрмитово симплектическое многообразие это гладкое многообразие M, снабженное интегрируемой комплексной структурой I и симплектической формой ω такими, что $\omega(X, IX) > 0$ для любого векторного поля X.*

Главным вопросом в изучении эрмитово симплектических многообразий является следующая

Гипотеза. *Все эрмитово симплектические многообразия допускают кэлерову метрику.*

Эта гипотеза верна в комплексных размерностях 1 и 2. Мы покажем, что для трёхмерных эрмитово симплектических многообразий выполняется равенство $b^1 = 2h^{0,1}$, где b^1 — первое число Бетти, $h^{0,1}$ — размерность пространства голоморфных 1-форм. Выполнение этого равенства на комплексном многообразии является необходимым условием того, чтобы многообразие допускало кэлерову метрику.

[19]Работа подготовлена с использованием средств субсидии на государственную поддержку ведущих университетов Российской Федерации в целях повышения их конкурентоспособности среди ведущих мировых научно-образовательных центров, выделенной НИУ ВШЭ.)

ПРОБЛЕМА БАССА О ТРИАНГУЛИРУЕМОСТИ ПОДГРУПП ГРУПП КРЕМОНЫ

В. Л. Попов[20] (Москва)
popovvl@mi.ras.ru

Далее все алгебраические многообразия определены над алгебраически замкнутым полем k произвольной характеристики и отождествляются с множествами своих k-рациональных точек.

Напомним, что $\mathcal{C}_n := \mathrm{Aut}_k\, k(\mathbf{A}^n)$ и $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{A}^n]$ называются соответственно *группой Кремоны* и *аффинной группой Кремоны* (над k) ранга n. Далее мы естественно отождествляем эти группы с $\mathrm{Bir}\, \mathbf{A}^n$ и $\mathrm{Aut}\, \mathbf{A}^n$ соответственно, поле $k(\mathbf{A}^{n-1})$ — с подполем в $k(\mathbf{A}^n)$, алгебру $k[\mathbf{A}^{n-1}]$ — с подалгеброй в $k[\mathbf{A}^n]$, а группу $\mathcal{C}_{n-1}$ — с подгруппой в $\mathcal{C}_n$. Пусть далее $x_1, \ldots, x_n$ — стандартные координатные функции на $\mathbf{A}^n$. Мы полагаем $k(\mathbf{A}^0) = k[\mathbf{A}^0] := k$.

Подгруппа Жонкьера

$$\mathcal{J}_n := \{\varphi \in \mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{A}^n] \mid \varphi(x_i) = \alpha_i x_i + h_i,\ \alpha_i \in k^\times, h_i \in k[\mathbf{A}^{i-1}]\}$$

рассматривается некоторыми авторами [Ba 1984] как аналог борелевской подгруппы в $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{A}^n]$. В пользу этой точки зрения говорит то, что ее аффинные алгебраические подгруппы разрешимы [Po 2013, Thm. 3.1]. Имея в виду эту аналогию, Басс рассмотрел в [Ba 1984] вопрос о том, верно ли, что всякая связная разрешимая аффинная алгебраическая подгруппа G в $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{A}^n]$ сопряжена в $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{A}^n]$ подгруппе из $\mathcal{J}_n$. Он же получил в [Ba 1984] отрицательный ответ для $\mathrm{char}\, k = 0$, $n = 3$ и одномерной унипотентной группы $G = k^+$. В [Po 1987] затем это было сделано для $\mathrm{char}\, k = 0$, $G = k^+$ и любых $n > 2$. Так возникла

Проблема Басса о триангулируемости ([Ba 1984, Question 4]). Если унипотентная группа G действует на $\mathbf{A}^n$, может ли это действие быть рационально триангулировано, т. е. можно ли записать $k(x_1, \ldots, x_n) = k(y_1, \ldots, y_n)$ так, что каждое подполе $k(y_1, \ldots, y_i)$ является G-инвариантным?

Далее простые трансцендетные расширения полей называются их 1-*расширениями*. Подгруппа G в $\mathcal{C}_n$ называется *рационально триангулируемой*, если существует такой флаг

$$k(\mathbf{A}^n) =: K_n \supset K_{n-1} \supset \cdots \supset K_1 \supset K_0 := k \qquad (41)$$

[20] Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ 15-01-02158 и НШ-2998.2014.1

G-стабильных подполей в $k(\mathbf{A}^n)$, что K_i/K_{i-1} является 1-расширением для каждого $i > 0$.

В [Po 2015] получены следующие результаты по указанной проблеме.

Теорема 1. *[Инвариантные подполя 1-расширений] Пусть Q конечно порожденное расширение поля k, а P является 1-расширением поля Q. Пусть G — такая связная разрешимая аффинная алгебраическая подгруппа в $\mathrm{Aut}(P)$, что Q является G-стабильным. Тогда*

(i) $P^G = Q^G$, *если* $Q^G = Q$;

(ii) P^G *является 1-расширением поля* Q^G, *если* $Q^G \subsetneq Q$.

С помощью теоремы 1 доказывается следующий критерий триангулируемости:

Теорема 2. *[Критерий триангулируемости] Следующие свойства связной разрешимой аффинной алгебраической подгруппы G группы Кремоны $\mathcal{C}_n$ эквивалентны:*

(i) $k(\mathbf{A}^n)^G$ *чисто трансцендентно над* k;

(ii) G *рационально триангулируема.*

Теорема 2 обобщает [DF 1991, Thm. 3.1], где утверждение доказано для одномерных унипотентных алгебраических подгрупп в $\mathrm{Aut}_k\mathbf{A}^n$ в случае $\mathrm{char}\, k = 0$.

Следствие 1. *[Факторы малых размерностей] Связная разрешимая аффинная алгебраическая подгруппа G в $\mathcal{C}_n$ рационально триангулируема в любом из следующих случаев:*

(i) $\mathrm{tr}\deg_k k(\mathbf{A}^n)^G \leqslant 1$;

(ii) $\mathrm{tr}\deg_k k(\mathbf{A}^n)^G = 2$ *и* $\mathrm{char}\, k = 0$;

(iii) $G \subset \mathrm{Aut}\,\mathbf{A}^n$ *и*

   (a) $\dim G \cdot x \geqslant n - 1$ *для некоторой точки* $x \in \mathbf{A}^n$ *или же*

   (b) $\mathrm{char}\, k = 0$ *и* $\dim G \cdot x = n - 2$ *для некоторой точки* $x \in \mathbf{A}^n$.

Следствие 2. *[3-мерное аффинное пространство] Если* $\mathrm{char}\, k = 0$, *то каждая связная разрешимая аффинная алгебраическая подгруппа в* $\mathrm{Aut}\,\mathbf{A}^3$ *рационально триангулируема.*

Следствие 2 обобщает [DF 1991, Cor. 3.2], где утверждение доказано для одномерных унипотентных алгебраических подгрупп в $\mathrm{Aut}\,\mathbf{A}^3$ и $\mathrm{char}\, k = 0$.

Следствие 3. *[Торы] Следующие свойства аффинного алгебраического тора T в группе Кремоны $\mathcal{C}_n$ эквивалентны:*

(i) *T рационально триангулируем,*

(ii) *T линеаризуем, т. е. сопряжен в $\mathcal{C}_n$ подгруппе группы* GL_n.

Далее, в [Po 2015] доказано существование нетриангулируемых связных разрешимых аффинных алгебраических подгрупп в $\mathcal{C}_n$. В частности, из следующей теоремы вытекает, что в случае (ii) следствия 1 число 2 не может быть заменено на большее целое число.

Теорема 3. *[Нетриангулируемые подгруппы] Пусть n — целое число, большее 4. Каждая $(n-3)$-мерная связная разрешимая аффинная алгебраическая группа G изоморфна рационально нетриангулируемой алгебраической подгруппе группы Кремоны $\mathcal{C}_n$.*

Поскольку в формулировке теоремы 3 не утверждается, что подгруппа лежит в $\mathrm{Aut}_k\, k[\mathbf{A}^n]$, эта теорема не дает отрицательного ответа на проблему Басса о триангулируемости. Однако ее доказательство демонстрирует тесную связь между триангулируемостью и проблемой Зарисского о сокращении: оно показывает, что если существует такое *нерациональное* алгебраическое многообразие Z, что $\mathbf{A}^n$ изоморфно $\mathbf{A}^s \times Z$, то ответ на прблему Басса о триангулируемости является отрицательным (в этой связи отметим, что в положительной характеристике проблема Зарисского о сокращении решена отрицательно в [Gu 2014]); в [Po 2015] доказано, что на бирациональном уровне верно и обратное утверждение.

С другой стороны, на стабильном уровне мы получаем положительный ответ на проблему Басса о триангулируемости. А именно, следующая теорема показывает, что, несмотря на существование рационально нетриангулируемых связных разрешимых аффинных алгебраических подгрупп в $\mathcal{C}_n$, каждая такая подгруппа является стабильно рационально триангулируемой. Более точно, верно следующее:

Теорема 4. *[Стабильная триангулируемость] Всякая связная разрешимая аффинная алгебраическая подгруппа G группы Кремоны $\mathcal{C}_n$ рационально триангулируема в группе Кремоны $\mathcal{C}_m$ для любого*

$$m \geqslant 2n - \operatorname{tr}\deg_k k(\mathbf{A}^n)^G.$$

Теорема 4 обобщает [DF 1991, Thm. 3.1], где утверждение доказано для одномерных унипотентных алгебраических подгрупп в $\mathrm{Aut}_k \mathbf{A}^n$, когда $\operatorname{char} k = 0$.

В [Po 2015] дана общая конструкция всех рационально триангулируемых подгрупп в $\mathcal{C}_n$. В качестве приложения она дает классификацию (см. ниже следствие 4) рационально триангулируемых одномерных унипотентных алгебраических подгрупп в $\mathcal{C}_n$ с точностью до сопряженности. В этой классификации используется следующая терминология. Одномерная связная унипотентная подгруппа G в $\mathcal{C}_n$, отождествляемая с k^+ с помощью изоморфизма $G \to k^+$, называется *стандартной*, если $x_1, \ldots, x_{n-1} \in k[\mathbf{A}^n]^G$ и для каждого $t \in k^+$ выполнено следующее:

(i) при $\operatorname{char} k = 0$ мы имеем

$$t(x_n) = x_n + t$$

(в этом случае G называют также *сдвигом*);

(ii) при $\operatorname{char} k = p > 0$ мы имеем

$$t(f_n) = f_n + c_1 t^{p^{i_1}} + \cdots + c_d t^{p^{i_d}},$$

где все c_j's являются ненулевыми элементами поля $k(x_1, \ldots, x_{n-1})$, а $i_1 < \cdots < i_d$ — неотрицательные целые числа.

Следствие 4. *[Одномерные рационально триангулируемые унипотентные подгруппы] Одномерная связная унипотентная алгебраическая подгруппа в $\mathcal{C}_n$ рационально триангулируема тогда и только тогда, когда она сопряжена в $\mathcal{C}_n$ стандартной подгруппе.*

Следствие 4 обобщает [DF 1991, Thm. 2.2], где утверждение доказано в нулевой характеристике.

Следствие 5. *[Аффинные пространства малых размерностей] Пусть U — одномерная связная унипотентная алгебраическая подгруппа в $\mathcal{C}_n$.*

(i) *Если $n = 2$, то U сопряжена в $\mathcal{C}_2$ стандартной подгруппе.*

(ii) *Если $\operatorname{char} k = 0$ и $n = 3$, то U сопряжена в $\mathcal{C}_3$ сдвигу.*

Согласно [Re 1968], если $\operatorname{char} k = 0$, $n = 2$, а $U \subset \operatorname{Aut} \mathbf{A}^2$, то “сопряжена в $\mathcal{C}_2$” в следствии 5(i) можно заменить на “сопряжена в $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^2$”.

Согласно [Ka 2004], при $k = \mathbf{C}$, $n = 3$, $U \subset \operatorname{Aut} \mathbf{A}^3$, если U действует на $\mathbf{A}^3$ свободно, то U сопряжена в $\operatorname{Aut} \mathbf{A}^3$ сдвигу. Следствие 5(ii) показывает, что, допуская сопряжение в $\mathcal{C}_3$, предположение о свободности действия в этом результате можно опустить, т. е. утверждение о сопряженности сдвигу становится верным для любой U в $\mathcal{C}_3$.

Литература

[Ba 1984] H. Bass, *A non-triangular action of* $\mathbb{G}_a$ *on* $\mathbb{A}^3$, J. Pure Appl. Algebra **33** (1984), 1–5.

[DF 1991] J. K. Deveney, D. R. Finston, *Rationally triangulable automorphisms*, J. Pure Appl. Algebra **72** (1991), 1–4.

[Gu 2014] N. Gupta, *On Zariski's Cancellation Problem in positive characteristic*, Adv. in Math. **264** (2014), 296–307.

[Ka 2004] S. Kaliman, *Free* $\mathbb{C}_+$*-actions on* $\mathbb{C}^3$ *are translations*, Invent. Math. **156** (2004), no. 1, 163–173.

[Po 1987] V. L. Popov, *On actions of* $\mathbf{G}_a$ *on* $\mathbf{A}^n$, in: *Algebraic Groups* (Utrecht, 1986), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1271, Springer, Berlin, 1987, 237–242.

[Po 2013] V. L. Popov, *Some subgroups of the Cremona groups*, in: *Affine Algebraic Geometry*, Proceedings of the conference on the occasion of M. Miyanishi's 70th birthday (Osaka, Japan, 3–6 March 2011), World Scientific Publishing, Singapore, 2013, pp. 213–242.

[Po 2015] V. L. Popov, *Bass' triangulability problem*, 2015, `arXiv:1504.03867`.

[Re 1968] R. Rentschler, *Opérations du groupe additif sur le plan*, C. R. Acad. Sci. Paris **267** (1968), 384–387.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДИАГОНАЛИ РЯДОВ ТЕЙЛОРА РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Д. Ю. Почекутов[21] (Красноярск)
dpotchekutov@sfu – kras.ru

Пусть $F = P/Q$ есть рациональная функция n комплексных переменных, голоморфная в нуле, а

$$F(z) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n \cup \{0\}} f_\alpha z^\alpha \tag{42}$$

является ее рядом Тейлора с центром в нуле.

Определение. *Пусть $q \in \mathbb{Z}_+^n \setminus \{0\}$, тогда ряд*

$$d_q(t) = \sum_{l=0}^{\infty} f_{q \cdot l} t^l \tag{43}$$

называется q-диагональю ряда (42).

Необходимость рассматривать диагонали степенных рядов естественно возникает в различных областях математики.

В работе [Pol22] Полиа показал, что в случае двух переменных диагональ $d_q(t)$ является алгебраической функцией переменного t. Диагонали трех переменных, как правило, являются уже неалгебраическими.

В докладе мы обсуждаем исключительные случаи, в которых диагонали трех переменных являются алгебраическими.

Литература

[Pol22] G. Pólya, Sur les séries entières, dont la somme est une fonction algébrique, L'Enseignement Mathématique, 1921–1922, 22, 38–47

[21] Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения научных исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете, договор № 14.Y26.31.0006

ТЕОРЕМА ОБ ИНДЕКСЕ ДЛЯ САМОСОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НА КОМПАКТНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

М. Ф. Прохорова[22] (Екатеринбург)
pmf@imm.uran.ru

Пусть S – компактная поверхность с непустым краем, E – эрмитово векторное расслоение над S. Обозначим через $ELL(E)$ пространство самосопряжённых эллиптических дифференциальных операторов 1-го порядка с локальными краевыми условиями, действующих на сечениях E. Каждый элемент $D \in ELL(E)$ задаёт (неограниченный) самосопряжённый фредгольмов оператор на $L^2(X; E)$ с дискретным вещественным спектром, непрерывно зависящим от D.

У однопараметрических семейств самосопряжённых фредгольмовых операторов имеется целочисленный топологический инвариант – спектральный поток, который измеряет алгебраическое число (со знаком) собственных значений оператора, переходящих (при изменении параметра) из отрицательной полуоси в положительную и обратно.

Первая часть доклада будет посвящена вычислению спектрального потока вдоль путей в $ELL(E)$ таких, что начало и конец пути сопряжены унитарным автоморфзимом расслоения.

Вторая часть доклада будет посвящена обобщению этого результата на семейства элементов $ELL(E)$, параметризованные точками произвольного компактного клеточного пространства X. Обобщение оказывается теоремой об индексе для таких семейств операторов: мы определяем аналитический индекс и топологический индекс семейства (принимающие значения в группе $K^1(X)$) и показываем, что они совпадают.

Литература

[1] M. Prokhorova. The spectral flow for Dirac operators on compact planar domains with local boundary conditions. Communications

[22] Работа частично поддержана грантом РФФИ № 15-01-02352

in Mathematical Physics, 2013, Vol.322, 385-414.

[2] M. Prokhorova. The spectral flow for elliptic operators on compact surfaces. Современные проблемы математики и естественнонаучного знания: материалы международной научной конференции (Коряжма, 15 - 18 сентября 2014 г.), 2014, 78–80.

КОМПЛЕКС ДЕ РАМА–ВИТТА

С. Ю. Рыбаков (Москва)
rybakov.sergey@gmail.com

Комплекс де Рама-Витта вычисляет кристальные когомологии гладкого многообразия над совершенным полем положительной характеристики. Я расскажу как строить этот комплекс и работать с ним.

МАКСИМАЛЬНО РЕЗОНАНСНЫЕ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ТИПА

Т. М. Садыков[23] **(Москва)**
Sadykov.TM@rea.ru

Вычисление групп монодромии дифференциальных уравнений или их систем – трудная задача аналитической теории линейных дифференциальных уравнений. Для вычисления группы монодромии необходимо владение информацией о голоморфных решениях системы уравнений во всей ее полноте, включая размерность пространства решений, базис в этом пространстве, особенности решений, топологию их дополнения и умение аналитически продолжить базис вдоль любого замкнутого пути в дополнении к особенностям.

В докладе будут приведены результаты о структуре групп монодромии некоторых гипергеометрических систем с двумя независимыми переменными и их свойствах. В то время как группа монодромии классического гипергеометрического уравнения Гаусса была найдена еще Шварцем, а группа монодромии обыкновенного обобщенного гипергеометрического дифференциального уравнения была подробно изучена в работе [3], вычисление группы монодромии произвольной гипергеометрической системы уравнений (несмотря на значительные усилия исследователей и успешное вычисление этой группы во многих частных случаях, см. [1, 2] и ссылки на литературу в этих работах) является трудной нерешенной задачей.

Связь между гипергеометрическими системами уравнений Гельфанда-Капранова-Зелевинского (ГКЗ) и Горна [4] хорошо известна: для каждой системы ГКЗ существует каноническим образом определенная система Горна и естественная биекция между некоторым подпространством ее голоморфных решений и всем пространством решений системы ГКЗ. Решения системы Горна, не имеющие образа в пространстве решений системы ГКЗ, суть ее стойкие решения в классе многочленов Пюизо. Стойкие полиномиальные решения порождают коядро отображения из пространства решений системы ГКЗ в пространство решений связанной с ней системы Горна.

Размерность пространства нестойких многочленов Пюизо, удовлетворяющих заданной системе Горна, равна размерности пространства многочленов Пюизо, удовлетворяющих ассоциированной с ней системой Гельфанда-Капранова-Зелевинского. Для системы Горна с

[23] Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 15-31-20008 мол_а_вед.

двумя независимыми переменными в докладе будет дано исчерпывающее описание пространства ее стойких полиномиальных решений.

Литература

[1] F. Beukers. *Algebraic A-hypergeometric functions*, Invent. Math. **180**, no. 3 (2010), 589-610.

[2] F. Beukers. *Monodromy of A-hypergeometric functions*, arXiv.org 1101.0493v2 (2013), 27 pp.

[3] F. Beukers and G. Heckman. *Monodromy for the hypergeometric function* ${}_nF_{n-1}$, Invent. Math. **95**, no. 2 (1989), 325-354.

[4] Т.М. Садыков, А.К. Цих. *Гипергеометрические и алгебраические функции многих переменных*, М.: Наука, 2014.

НОВАЯ КОМПОНЕНТА СХЕМЫ МОДУЛЕЙ МАРУЯМЫ $M_{\mathbb{P}^3}(2;-1,4,0)$

А.С. Тихомиров (Москва), М.А. Заводчиков (Ярославль), С.А. Тихомиров [24](Ярославль)

astikhomirov@mail.ru, zav – mikhail@yandex.ru, satikhomirov@mail.ru

В работе рассматривается схема модулей Маруямы $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,4,0)$ стабильных когерентных пучков ранга два с классами Черна $c_1=-1$, $c_2=4$, $c_3=0$ на трехмерном проективном пространстве $\mathbb{P}^3$. Компоненты этой схемы, общие точки которых являются локально свободными пучками, составляют замкнутую подсхему $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,4)$ в схеме $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,4,0)$. К. Баника и Н. Манолахе (1985) доказали, что схема $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,4)$ состоит из двух неприводимых компонент размерности 27 и 28 соответственно. Вопрос о непустоте схемы $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,4,0) \smallsetminus \mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,4)$, то есть о наличии других компонент в $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,4,0)$, до настоящего времени оставался открытым.

Авторами найдена новая неприводимая компонента M схемы $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,4,0)$, лежащая в замыкании схемы $\mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(2;-1,4,0) \smallsetminus \mathrm{M}_{\mathbb{P}^3}(-1,4)$. Компонента M имеет размерность 33 и приведена в общей точке. Общий пучок из M строится как ядро сюръекции $E \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(4)$, где E - стабильный рефлексивный пучок ранга два с классами Черна $c_1=-1$, $c_2=3$, $c_3=7$ на $\mathbb{P}^3$, а $\mathbb{P}^1$ - общая проективная прямая в $\mathbb{P}^3$.

Литература

[Hart80] R. Hartshorne, Stable reflexive sheaves, Mathematische Annalen, 1980, 254, 121-176.

[Chang84] M.-C. Chang, Stable rank 2 reflexive sheaves on $\mathbb{P}^3$ with small c_2 and applications, Transactions of the American Mathematical Society, 1984, 284, 57-89.

[24] Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 гг. (проект № 365)

[Banica85] C. Bănică, N. Manolache, Rank 2 stable vector bundles on $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ with Chern classes $c_1 = -1$, $c_2 = 4$, Math. Z., 1985, Bd. 190, 315-339.

О СТАБИЛЬНЫХ 2-РАССЛОЕНИЯХ С НЕЧЕТНЫМ ПЕРВЫМ КЛАССОМ ЧЕРНА НА ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{P}^3$

С.А.Тихомиров (Ярославль), М.А.Заводчиков (Ярославль), Е.А.Болгова [25](Ярославль)
satikhomirov@mail.ru, zav – mikhail@yandex.ru, bolgova.katerina@mail.ru

Мы изучаем схему $M(-1, m)$ модулей стабильных векторных расслоений ранга 2 с классами Черна $c_1 = -1$ и $c_2 = m$ на проективном пространстве $\mathbb{P}^3$ над алгебраически замкнутым полем $\mathbf{k}$ характеристики 0. Как известно [A-R76], эта схема пуста при $m \neq 2n$. Кроме того, условие стабильности расслоения при $m = 2n$ влечет $n \geq 1$. Хартсхорн [Har78] построил серию $\{H_n\}_{n\geq 1}$ семейств векторных расслоений $H_n \subset M(-1, 2n)$ для всех $n \geq 1$, показав тем самым, что все a priori незапрещенные значения c_2 реализуются. Затем Хартсхорн и Сольс [H-S81] исследовали случай $n = 1$ и показали, что $M(-1, 2)$ - гладкая неприводимая схема размерности 11. При этом конструкция семейств H_n показывает, что H_1 - плотное открытое подмножество в $M(-1, 2)$. В работе Баники и Манолахе [B-M85] был рассмотрен случай $n = 2$. Ими доказано, что схема $M(-1, 4)$ состоит из двух неприводимых компонент - компоненты M' размерности 27, состоящей из расслоений с минимальным спектром (-1,-1,0,0), и компоненты M'' размерности 28, состоящей из расслоений с максимальным спектром (-2,-1,0,1).

Представляют интерес следующие случаи $n \geq 3$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Схема $M(-1, 6)$ содержит по крайней мере две неприводимые компоненты.*

Полученные результаты планируется использовать при дальней-

[25]Работа выполнена при поддержке Минобрнауки России в рамках государственного задания вузам в сфере научной деятельности на 2014–2016 гг. (проект № 365)

шем изучении компонент в $M(-1, 2n)$ при $n \geq 3$.

Литература

[A-R76] M. F. Atiyah, E. Rees, Vector bundles on projective 3-space, Invent. math., 1976, 35, 131–153.

[Har78] R. Hartshorne, Stable vector bundles of rank 2 on P_3, Math. Ann., 1978, 238, 229–280.

[H-S81] R. Hartshorne, I. Sols, Stable rank 2 vector bundles on $\mathbb{P}^3$ with $c_1 = -1$, $c_2 = 2$, J. Reine Angew. Math., 1981, 325, 145–152.

[B-M85] C. Bănică, N. Manolache, Rank 2 stable vector bundles on $\mathbb{P}^3(\mathbb{C})$ with Chern classes $c_1 = -1$, $c_2 = 4$, Math. Z., 1985, 190, 315–339.

ФАКТОРЫ КУБИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А. С. Трепалин[26] (Москва)
trepalin@mccme.ru

Определение. *Поверхность X, определённая над полем $\mathbb{k}$, называется $\mathbb{k}$-рациональной, если X бирационально эквивалентна $\mathbb{P}^2_{\mathbb{k}}$.*

Поверхность X, определённая над полем $\mathbb{k}$, называется рациональной, если $\overline{X} = X \otimes \overline{\mathbb{k}}$ бирационально эквивалентна $\mathbb{P}^2_{\overline{\mathbb{k}}}$.

Поверхность X, определённая над полем $\mathbb{k}$, называется $\mathbb{k}$-унирациональной, если существует доминантное рациональное отображение $\phi : \mathbb{P}^2_{\mathbb{k}} \dashrightarrow X$.

Из критерия Кастельнуово следует, что над алгебраически замкнутым полем всякая $\mathbb{k}$-унирациональная поверхность является $\mathbb{k}$-рациональной. Для алгебраически незамкнутых полей это неверно. Например, всякая минимальная поверхность Дель Пеццо степени 2, 3, 4 является $\mathbb{k}$-унирациональной, но не $\mathbb{k}$-рациональной.

Для определения является ли поверхность $\mathbb{k}$-рациональной или нет, важна следующая теорема:

Теорема ([Isk96, Глава 4]). *Минимальная рациональная поверхность X, определённая над совершенным полем $\mathbb{k}$, является $\mathbb{k}$-рациональной тогда и только тогда, когда выполнены следующие два условия:*

(i) $X(\mathbb{k}) \neq \varnothing$;

(ii) $K_X^2 \geq 5$.

Одним из важных примеров $\mathbb{k}$-унирациональных поверхностей являются факторы $\mathbb{k}$-рациональных поверхностей.

В случае факторов поверхностей дель Пеццо степеней 4 и больше верна следующая теорема.

Теорема ([Tr13, Theorem 1.1]). *Пусть $\mathbb{k}$ поле характеристики* 0*, X поверхность дель Пеццо над $\mathbb{k}$ такая, что $X(\mathbb{k}) \neq \varnothing$, а G — конечная группа автоморфизмов X. Если $K_X^2 \geqslant 5$, то фактормногообразие X/G является $\mathbb{k}$-рациональным. Если $K_X^2 = 4$ и порядок G не равен* 1, 2 *или* 4*, то X/G является $\mathbb{k}$-рациональной.*

Мы докажем следующий результат.

---

[26]Работа выполнена при поддержке Лаборатории алгебраической геометрии НИУ ВШЭ

Теорема. *Если X — поверхность дель Пеццо степени 3, $X(\Bbbk)$ не пусто, $G \subset \mathrm{Aut}(X)$, то X/G — $\Bbbk$-рациональна для всех случаев, кроме $d = 3$, $G \cong \{1\}$, C_3, где C_3 — циклическая группа порядка 3.*

Для группы порядка 3 мы явно построим примеры нерациональных факторов.

Доказанный результат может быть существенно использован для исследования группы Кремоны плоскости $\mathrm{Cr}(2, \Bbbk) = \mathrm{Bir}(\mathbb{P}^2_{\Bbbk})$. Например, если для двух поверхностей X и Y, на которых определённым образом действует группа G, факторы X/G и Y/G не являются бирационально эквивалентными, то группа G имеет два несопряжённых вложения в группу Кремоны.

Литература

[Isk96] V. A. Iskovskikh, Factorization of birational mappings of rational surfaces from the point of view of Mori theory, Uspekhi Mat. Nauk, 1996, 51, 3–72, (in Russian); translation in Russian Math. Surveys, 1996, 51, 585–652

[Tr13] A. Trepalin, Quotients of del Pezzo surfaces of high degree, Preprint, see http://arxiv.org/abs/1312.6904

СПЕЦИАЛЬНЫЕ БОР-ЗОММЕРФЕЛЬДОВЫ ЛАГРАНЖЕВЫ ПОДМНОГООБРАЗИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЙ

Н. А. Тюрин (Дубна)
ntyurin@theor.jinr.ru

Аннотация. *Вводится новое понятие специальности лагранжевых подмногообразий, удовлетворяющих условию Бора - Зоммерфельда, для алгебраических многообразий. Показывается, что такое условие позволяет строить конечномерные модули специальных бор - зоммерфельдовых лагранжевых подмногообразий относительно любого обильного линейного расслоения. Конструкция может быть использована в исследованиях зеркальной симметрии.*

Сущность зеркальной симметрии в наибольшей общности была выражена Ю.И. Маниным как "двойственность симплектической геометрии и комплексной кэлеровой геометрии" (см. [1]). Два алгебраических кэлеровых многообразия M, W понимаются как "зеркальные партнеры", если некоторые производные объекты, получаемые в рамках алгебраической и симплектической геометрий M, W перекрестно эквивалентны: например, в Гомологической зекральной симметрии М. Концевича (см. [2]) производная категория когерентных пучков M должна быть эквивалентна категории Фукая - Флоера W и наоборот.

А.Н. Тюрин, посвятивший много лет исследованию стабильных векторных расслоений, преполагал более геометрическое соответствие: соответствие между векторными расслоениями и лагранжевыми подмногообразиями (см., напр. [3]). А именно, для пары трифолдов M, W четномерные когомологии представляют классы Черна векторных расслоений, из которых составляются конечномерные многообразия модулей стабильных векторных расслоений, а средние нечетные когомологии можно реализовать лагранжевыми подмногообразиями, из которых необходимо формировать конечномерные многообразия модулей, и тогда появляется возможность сравнения этих двух серий многообразия модулей для определения той самой двойственности, которая составляет сущность зеркальной симметрии. При этом главная проблема — в "бесконечности" лагранжевой геометрии в противовес конечномерности геометрии алгебраической.

Эта проблема решается введением условий специальности на лагранжевы подмногообразия: развивая идею калиброванных лагранжевых циклов, Д. МакЛин и Н. Хитчин (см. [4]) предложили условие специальности на лагранжевы подмногообразия кэлеровых многообразий Калаби - Яу, которое приводило к конечномерным модулям. Сразу вслед за этим появилась SYZ - гипотеза для трифолдов Калаби - Яу (см. [5]), объясняющая зеркальную симметрию в терминах слоений на специальные лагранжевы торы, однако многолетные попытки построить специальные лагранжевы слоения на гладких многообразиях Калаби - Яу не увенчались успехом, что привело к постепенному спаду популярности SYZ - конструкции в кругах математических физиков, сконцентрировавшихся на гомологическом подходе М. Концевича. Д. Ору в [6] пытался несколько оживить "специальный" подход к зеркальной симметрии, обобщив понятие специального лагранжева подмногообразия на случай многообразий Фано, при этом специальность становится относительной — условие специальности зависит от выбора дивизора из антиканонической линейной системы на многообразии Фано (поэтому можно определить подход Ору как обобщение конструкции МакЛина и Хитчина на многообразия Калаби - Яу "с краем"). Для торической проективной плоскости исключение антиканонического дивизора, состоящего из трех прямых, позволяет построить специальной слоение в смысле Ору, которое просто совпадает со стандартным слоением Лиувилля; Д. Ору построил специальное лагранжево слоение при исключении приводимого дивизора — прямой и коники — и высказал гипотезу о существовании специального лагранжева слоения на дополнении к гладкой эллиптической кривой, однако до сих пор эта гипотеза доказана не была. Кроме примера из [7], где было построено специальное в смысле Ору лагранжево слоение на многообразии флагов F^3, больше ничего до сих пор в этом направлении сделано не было.

В работе [8] были развиты идеи лагранжева геометрического квантования, а именно — были исследованы модули лагранжевых подмногообразий, удовлетворяющих условию Бора - Зоммерфельда. По замечанию А.Н. Тюрина, условие Бора - Зоммерфельда "трансверсально" условию специальности в случае Калаби - Яу, откуда можно было бы определять конечные инварианты для трифолдов Калаби - Яу, зеркальные инвариантам Кассонса, см. [3]. Мы развиваем эту идею, вводя новое условие специальности на бор - зоммерфельдовы лагранжевы подмногообразия, что приводит к интересным наблюдениям.

Пусть (M, ω) — компактное односвязное сиплектическое многообразие, удовлетворяющее условию Бора - Зоммерфельда: класс

$[\omega] \in H^2(M, \mathbb{R})$ является целочисленным. Тогда зафиксируем данные предквантования: линейное расслоение $L \to M$ и эрмитову связность a на нем, такие что форма кривизны $F_a = 2\pi i \omega$, при этом такая связность последним условием определена однозначно с точностью до каибровочного преобразования. Лагранжево подмногообразие $S \subset M$ удовлетворяет условию Бора - Зоммерфельда (BS для краткости), если ограничение $(L, a)|_S$ допускает ковариантно постоянное сечение σ_S. Пусть $s \in \Gamma(M, L)$ — произвольное гладкое сечение L.

Определение. *Назовем BS- лагранжево подмногообразие S специальным относительно сечения s, если $s|_S$ нигде не обращается в нуль на S и коэффициент пропорциональности $\alpha(s, S)$, определяемый из равенства $s|_S = \alpha(S, s)\sigma_S$, имеет постоянный аргумент.*

Так как это определение не зависит от домножений сечения s на любую ненулевую константу, то на самом деле мы определели соотношение, выделяющее "цикл инциденции" в прямом произведении

$$\mathcal{U}_{SBS} \subset \mathbb{P}(\Gamma(M, L)) \times \mathcal{B}_S,$$

где последним символом обозначается многообразие модулей бор - зоммерфельдовых циклов фиксированного топологического типа, см. [8]. А именно, пара (p, S) принадлежит $\mathcal{U}_{SBS}$, если S является специальным бор - зоммерфельдовым относительно сечения s, класс точкой p проективизации пространства сечений. Естественным образом определены проекции p_1, p_2 на первый и второй прямые сомножители.

"Конечность" множества специальных бор - зоммерфельдовых подмногообразий отражена в следующем факте:

Основная теорема. *Слои проекции $p_1 : \mathcal{U}_{SBS} \to \mathbb{P}(\Gamma(M, L))$ дискретны.*

Таким образом, можно ожидать, что пространство $\mathcal{U}_{SBS}$ обладает кэлеровой структурой, поднятой с $\mathbb{P}(\Gamma(M, L))$, и это пространство можно использовать в обобщении квантования Сурьо - Костанта в самом широком случае.

Однако нас интересует случай очень конкретный: пусть наше симплектическое многообразие (M, ω) обладает интегрируемой комплексной структурой I, согласованной с ω. Это значит, что M есть алгебраическое многообразие с главной поляризацией, задаваемой голоморфным расслоением L. Тогда мы получаем конечномерное подпространство $\mathbb{P}(H^0(M_I, L)) \subset \mathbb{P}(\Gamma(M, L))$ голоморфных сечений и редуцированный цикл инциденции

$$\mathcal{M}_{SBS} \subset \mathbb{P}(H^0(M_I, L)) \times \mathcal{B}_S$$

вместе с двумя естественными проекциями на прямые сомножители, которые мы снова обозначаем как p_i.

Тогда **Основная теорема** может быть дополнена следующими утверждениями:

(1) образ $p_1(\mathcal{M}_{SBS}) \subset \mathbb{P}(H^0(M_I, L))$ есть открытое подмножество в $\mathbb{P}(H^0(M_I, L))$;

(2) слои p_1 конечны;

(3) многообразие модулей $\mathcal{M}_{SBS}$ гладкое в общей точке многообразие, допускающее существование кэлеровой структуры.

Пример. Возьмем в качестве M простешее возможное компактное односвзяное симплектическое многообразие — комплексную проективную прямую $\mathbb{CP}^1$ со стандартной комплексной структурой и кэлеровой формой, класс которой двойствен по Пуанкаре удвоенному классу точки (это минимальный целочисленный класс, допускающий бор - зоммерфельдовы лагранжевы подмногообразия). Тогда расслоение L изоморфно $\mathcal{O}(2)$, любое голоморфное сечение с точностью до умножения на константу определяется парой точек (возможно совпадающих), в которых это сечение обращается в нуль. Гладкая петля $\gamma \subset \mathbb{CP}^1$ автоматически лагранжева из соображений размерности, и она удовлетворяет условию Бора - Зоммерфельда если и только если она делит $\mathbb{CP}^1$ на две области равной симплектической площади. В этом случае $\mathcal{M}_{SBS}$ естественно изоморфно $\mathbb{CP}^2 \backslash Q$, где коника Q есть образ $\mathbb{CP}^1$ при вложении Веронезе. Более точно, в этом случае: (1) образом $p_1(\mathcal{M}_{SBS}) \subset \mathbb{P}(H^0(M_I, L)) = \mathbb{CP}^2$ будут сечения с некратными нулями; (2) слои p_1 состоят из единственных точек; (3) кэлерова структура с $\mathbb{CP}^2$ поднимается до кэлеровой структуры на $\mathcal{M}_{SBS}$.

Доказательство **Основной теоремы**, детали теории специальных бор - зоммерфельдовых циклов и прочие примеры могут быть найдены в [9].

Литература:

[1] **Ю.И. Манин**, *"Предисловие ко третьему тому"*, Сборник избранных трудов А.Н. Тюрина в трех томах, Институт компьютерных технологий, Москва - Ижевск 2004;

[2] **M. Kontsevich**, *"Homological algebra of mirror symmetry"*, Proceedings of ICM (Zurich, 1994), Birkhouser, Basel 1995, pp. 120 - 139;

[3] **A.N. Tyurin**, *"Geometric quantization and mirror symmetry"*, arXiv: math/9902027v1;

[4] **N. Hitchin**, *"Lectures on special lagrangian submanifolds"*, Winter school on Mirror Symmetry (Cambridge MA, 1999), AMS/IP Stud. Adv. Math, 23, AMS 2001, Providence, pp. 151 - 182;

[5] **A. Strominger, S.-T. Yau, E. Zaslow**, *"Mirror symmetry is T - duality"*, Winter school on Mirror Symmetry (Cambridge MA, 1999), AMS/IP Stud. Adv. Math, 23, AMS 2001, Providence, pp. 333 - 347;

[6] **D. Auroux**, *"Mirror symmetry and T - duality in the complement of an anticanonical divisor"*, J. Gokova Geom. Topol. (2007), pp. 51 - 91;

[7] **Н.А. Тюрин**, *"Специальные лагранжевы слоения многообразия флагов F3"*, Теор. Мат. Физ. 167: 2 (2011), стр. 193 - 205;

[8] **А.Л. Городенцев, А.Н. Тюрин**, *"Абелева лагранжева алгебраическая геометрия"*, Известия РАН, сер. мат. 65: 3 (2001), стр. 15 - 50;

[9] **Н.А. Тюрин**, *"Специальная геометрия лагранжевых циклов Бора - Зоммерфельда в алгебраических многообразиях"*, готовится к печати.

ПРИНЦИП РАЗДЕЛЯЮЩИХ ЦИКЛОВ ДЛЯ МНОГОМЕРНЫХ ВЫЧЕТОВ

Р. В. Ульверт[27] (Красноярск)
ulvertrom@yandex.ru

Пусть $\chi_1, \dots, \chi_N$ — функции, голоморфные в области $D \subset \mathbb{C}^n$, $N \geqslant n$, и $D_1, \dots, D_N$ — плоские области с кусочно-гладкими границами, причем $D_i \subset \chi_i(D)$, $i = 1, \dots, N$. Рассмотрим *аналитический полиэдр* $\Delta = \{z \in D\colon \chi_i(z) \in D_i, i = 1, \dots, N\}$. Будем предполагать, что Δ — связный, и его грани $\sigma_i = \{z \in D\colon \chi_i(z) \in \partial D_i,\ \chi_j(z) \in D_j, i \neq j\}$ пересекаются в общем положении. Объединение всех n-мерных граней $\sigma_{i_1} \cap \ldots \cap \sigma_{i_n}$ назовем *остовом* полиэдра Δ и обозначим σ. Вначале будем предполагать, что $N = n$.

Сформулируем в следующей теореме одну из версий «принципа разделяющих циклов», разработанного А. К. Цихом. Пусть $F_1, \dots, F_n$ — набор дивизоров в $\mathbb{C}^n$. Назовем этот набор *согласованным* с аналитическим полиэдром Δ, если

$$F_i \cap \sigma_i = \varnothing \quad \text{для всех} \quad i = 1, \dots, n.$$

Теорема. *Если набор дивизоров $F_1, \dots, F_n$ согласован с полиэдром Δ, то для остова σ как цикла в $\Delta \setminus (F_1 \cup \ldots \cup F_n)$ справедливо разложение*

$$\sigma \sim \sum \Gamma_a,$$

где Γ_a — локальный цикл в точке $a \in F_1 \cap \ldots \cap F_n$, имеющий вид $\Gamma_a = \{z \in U_a\colon |f_i(z)| = \varepsilon,\ i = 1, \dots, n\}$, $F_i \cap U_a = \{f_i = 0\}$, и суммирование распространяется на все изолированные точки пересечения дивизоров, принадлежащие Δ.

Условие согласованности набора дивизоров и полиэдра в частности означает, что остов σ *разделяет* данный набор дивизоров в том смысле, что $\sigma \sim 0$ в дополнении к объединению любого $(n-1)$-поднабора из исходных дивизоров. В случае многообразий Штейна А. К. Цихом было показано, что любой n-цикл Γ, разделяющий набор n дивизоров, представим в виде

$$\Gamma \sim \sum n_a \Gamma_a,$$

где n_a — целые числа, а суммирование распространяется на все изолированные точки из $F_1 \cap \ldots \cap F_n$.

[27] Работа выполнена при поддержке Лаборатории комплексного анализа и дифференциальных уравнений ИМиФИ СФУ

Ряд результатов, распространяющих утверждение о представимости разделяющего цикла в виде линейной комбинации локальных циклов на ситуацию, когда число дивизоров превышает размерность пространства, был получен А. П. Южаковым [Yu88]. Сформулируем теорему, в которой несколько усиливаются результаты Южакова.

Теорема. *Пусть $F_1, \ldots, F_N$ — набор дивизоров в Штейновом многообразии X размерности n, $N > n$, и n-цикл Γ разделяет данный набор дивизоров. Тогда Γ представляется в виде линейной комбинации локальных циклов в каждом из следующих случаев:*
(1) $F^I = F_{i_1} \cap \ldots \cap F_{i_n}$ состоит лишь из изолированных точек для любого $I = \{i_1, \ldots, i_n\} \subset \{1, \ldots, N\}$, и выполняется условие: если $F^I \cap F^J \neq \varnothing$, то $F^I = F^J$;
(2) X — достаточно малая штейнова окрестность точки $a \in \mathbb{C}^n$, и $N = n + 1$.

Рассмотрим мероморфную n-форму ω с полярным множеством $F_1 \cup \ldots \cup F_N$. Если n-цикл Γ гомологичен линейной комбинации локальных циклов, то интеграл $\int_\Gamma \omega$ представляется в виде линейной комбинации многомерных вычетов (вычетов Гротендика). В связи с этим принцип разделяющих циклов и более общая задача о выяснении топологических условий представимости цикла в виде суммы локальных циклов находят применения в таких задачах, как вычисление кратных интегралов Меллина-Барнса и изучение условий алгебраичности интегралов, зависящих от параметра.

Литература

[Yu88] A. P. Yuzhakov, The separating subgroup and local residues, Siberian Mathematical Journal, 1988, 29, 1028–1033.

ДВОЙСТВЕННОСТЬ НА МНОГОМЕРНЫХ АДЕЛЯХ

Д. Ю. Щедрина (Москва)
daryaschedrina@gmail.com

Определение. *Назовем топологическим векторным пространством векторное пространство (X, Σ) над k с топологией Σ, согласованной с операциями векторного пространства, то есть морфизмы сложения $X \times X \to X$ и умножения $k \times X \to X$ непрерывны. Мы будем рассматривать только хаусдорфовы топологические пространства с линейной топологией. Будем называть полными пространства, в которых сходится любая сеть Коши.*

Пусть X — нетерова схема размерности $\dim(X) = n$. Будем обозначать $S(X)_n$ — множество всех флагов на X, пусть $K \subset S(X)_n$. Пусть $\mathcal{F}$ — когерентный пучок на X. Тогда можно определить адели $\mathbb{A}_X(\mathcal{F}, K)$.

Лемма. *На аделях $\mathbb{A}_X(\mathcal{F}, K)$ существеут структура полного топологического хаусдорфового векторного пространства.*

Для данного топологического векторного пространства X можно рассматривать двойственное топологическое векторное простанство $D(X) = \underline{Hom}(X, k)$. Где поле k — пространство с дискретной топологией.

Теорема. *Пусть X — гладкая поверхность. Тогда двойственное топологическое векторное пространство к пространству аделей для структурного пучка — пространство аделей для пучка дифференциальных форм $\mathbb{A}(\mathcal{O}_X, K)^\vee \simeq \mathbb{A}(\Omega^2_X, K)$.*

Литература

[1] Gottfried Koethe, *Topological vector spaces*, Springer-Verlag (1969).

[2] Nicolas Bourbaki, *Topological vector spaces Chapters 1-5*, Springer (1981).

[3] С. О. Горчинский, *Адельная резольвента для пучков гомологий* (2008).

[4] Osipov D. V., *n-dimensional local fields and adeles on n-dimensional schemes*, (2005).

СТЕПЕННЫЕ МИНОРАНТЫ КВАЗИЭЛЛИПТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

А. В. Щуплев[28] (Красноярск)
alexey.shchuplev@gmail.com

Определение ([1]). *Многочлен Лорана* $P(x) = \sum_{\gamma\in\Delta} c_\gamma x^\gamma$ *от* n *вещественных переменных называется квазиэллиптическим, если все его срезки*

$$P_\Gamma(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} c_\gamma x^\gamma$$

на собственные грани многогранника Ньютона Δ *не обращаются в нуль в торе* $(\mathbb{R}\setminus\{0\})^n$.

Теорема ([2]). *Многочлен* $P(x)$ *является квазиэллиптическим тогда и только тогда, когда для каждого* $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \Delta^\circ$ *найдется компакт* K *и константы* c, $k > 0$ *такие, что*

$$\forall x \notin K \quad |P(x)| \geqslant c|x_1|^{\alpha_1} \ldots |x_n|^{\alpha_n} + k.$$

Этот факт позволяет дать геометрическое условие гипоэллиптичности (по Хёрмандеру) квазиэллиптического многочлена.

Теорема ([2]). *для того, чтобы квазиэллиптический многочлен был гипоэллиптическим достаточно, чтобы его многогранник Ньютона был строго полным.*

Литература

[1] Т.О. Ермолаева, А. К. Цих Интегрирование рациональных функций по $\mathbb{R}^n$ с помощью торических компактификаций и многомерных вычетов, Матем. сборник, 187 (1996), №9, 45 – 64.

[28] Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ для проведения научных исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете, договор № 14.Y26.31.0006.

[2] A.V. Shchuplev, A.K. Tsikh, E.V. Zubchenkova Power minorants for quasielliptic polynomials, to appear in J. Sib. Fed. Univ. Math. Phys.

ПРОДОЛЖЕНИЕ ПУЧКОВ НА СЕМЕЙСТВЕ ГОЛОМОРФНЫХ КРИВЫХ

Е. В. Юрьева (Красноярск)
aitria@mail.ru

Известная теорема "об острие клина" (Н.Н. Боголюбов 1956 [1]) утверждает: *если функция $f(z)$, голоморфна в трубчатой области $\mathcal{T} = \mathbb{R}^n + i\Gamma$, основанием которой служит двусторонний световой конус $\Gamma : y_1^2 > y_2^2 + \cdots + y_n^2$, и непрерывна в ее замыкании $\overline{\mathcal{T}}$, то она голоморфно продолжается в $\mathbb{C}^n$.*

В работе С.И. Пинчука [2] приводится одно из наиболее значимых обобщений теоремы Боголюбова, где вместо указанной трубчатой области над световым конусом рассматривается клин с острием на вполне вещественном многообразии, ограниченный гладкими гиперповерхностями в общем положении. В статье [3] изучается вопрос о продолжении голоморфных функций в окрестность острия дустороннего n-кругового клина *необщего* положения.

Анализ идей доказательства теорем, обобщающих теорему Боголюбова, показал, что в некоторых случаях вместо теорем "об острие клина" можно рассматривать вопрос о продолжении пучков.

Пусть Δ представляется в виде дизъюнктного объединения компактных вполне вещественные многообразий $M_r^n \subset \mathbb{C}^n,\ r > 0$.

Обозначим
$$\Delta^* = \bigsqcup_{r\neq 1} M_r^n.$$

Предположим, что Δ допускает расслоение на голоморфные кривые
$$l_u = \{z : \chi_j(z,u) = 0, j = 1,\dots,n-1\},\ u \in T^{n-1}.$$

При условии, что *на каждом слое $z_n = \mathrm{const}$ каждая кривая l_u имеет по одной точке.* справедливо следующее утверждение.

Теорема. *Пусть $\mathcal{O}(\Delta^*)$ — пучок ростков голоморфных функций на Δ^*. Если f — сечение этого пучка, непрерывно продолжаемое на M_1^n, то f продолжается до голоморфного сечения пучка $\mathcal{O}(\Delta)$.*

Литература

[1] Боголюбов Н.Н., Медведев Б.В., Поливанов М.К. Вопросы теории дисперсионных соотношений, *Физматгиз* (1958).

[2] Пинчук С.И. Теорема Боголюбова "об острие клина"для порождающих многообразий, *Мат. сб.* **94(136)** (1974), №3(7), 468-482.

[3] Yurieva E.V. On the holomorphic extention into a neighborhood of the edge of a wedge in nongeneral position, *Siberian Math. J.* **52** (2011), no. 3, 563-568.

ПОДГРУППЫ НЕЧЕТНОГО ПОРЯДКА В ГРУППЕ КРЕМОНЫ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ПРОЕКТИВНОЙ ПЛОСКОСТИ

Е. А. Ясинский[29] **(Москва)**
yasinskyegor@gmail.com

Группой Кремоны $\mathrm{Cr}_n(k)$ называется группа бирациональных автоморфизмов n-мерного проективного пространства над полем k. Классификация конечных подгрупп в группе Кремоны является классической проблемой, восходящей к работам Е. Бертини, который в 1877 г. описал классы сопряженности инволюций в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$. Практически полная классификация конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{C})$ была получена И. В. Долгачевым и В. А. Исковских лишь в 2006 г. В ее основе лежит теория рациональных G-многообразий, развитая в работах Ю. И. Манина и В. А. Исковских.

В гораздо меньшей степени изучены конечные подгруппы в группе Кремоны над произвольными, необязательно алгебраически замкнутыми, полями. Некоторые результаты о существовании бирациональных автоморфизмов простого порядка в группе $\mathrm{Cr}_2(k)$ для любого совершенного поля k были получены Долгачевым и Исковских. Похожие вопросы, в том числе оценки типа Минковкого для порядков конечных подгрупп в $\mathrm{Cr}_2(k)$, рассматривались в работах Ж.-П. Серра. Порождающие для различных подгрупп в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})$ были недавно изучены Дж. Бланком и Ф. Мангольтом.

Мы будем интересоваться подгруппами нечетного порядка в группе $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})$. Наш основной результат состоит в доказательстве следующих двух теорем.

Теорема 1. *Любая подгруппа нечетного порядка в группе* $\mathrm{Cr}_2(\mathbb{R})$ *сопряжена подгруппе в группе автоморфизмов некоторой поверхности дель Пеццо X. Более точно, имеет место один из следующих случаев:*

(i) $\mathrm{rkPic}(X)^G = 1$*;*

(ii) $X \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \times \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ *и G является произведением не более чем двух циклических групп.*

Теорема 2 дает более подробное описание групп G, встречающихся в случае (i) из предыдущей теоремы.

[29]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 15-01-02164

Теорема 2. *Пусть X — гладкая проективная вещественная поверхность дель Пеццо с $X(\mathbb{R}) \neq \varnothing$, $K_X^2 \neq 6$, а $G \subset \mathrm{Aut}(X)$ — подгруппа нечетного порядка, такая что* $\mathrm{rkPic}(X)^G = 1$. *Тогда имеет место один из следующих случаев:*

(i) $K_X^2 = 9$, $X \cong \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, *$G$ — циклическая подгруппа в* $\mathrm{PGL}_3(\mathbb{R})$;

(ii) $K_X^2 = 8$, $G \cong \mathbb{Z}/t\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/l\mathbb{Z}$, *причем действие G сопряжено линейному;*

(iii) $K_X^2 = 5$, $G \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$, *причем действие G сопряжено линейному.*

Замечание. К сожалению, мы пока не обладаем полным описанием в случае $K_X^2 = 6$. Известно, однако, что если группа G абелева, то $G \cong \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ и действие G сопряжено линейному.