

ОБОЛОЧКИ И ГЕОМЕТРИИ

С.С.Акбаров

Со времен изобретения первых оптических приборов в физике утвердилась идея, что видимый образ наблюдаемого объекта зависит от инструментов наблюдения. Один из способов формализовать это в математике – конструкция, сопоставляющая произвольному объекту A категории $\mathbf{K}$ его оболочку $\text{Env}_\Phi^\Omega A$ в заданном классе морфизмов Ω (интерпретируемом как *класс представлений*) относительно заданного класса морфизмов Φ (интерпретируемого как *класс инструментов наблюдения*). Оказывается, что если в качестве $\mathbf{K}$ фиксировать какую-нибудь достаточно широкую категорию топологических алгебр (например, категорию стереотипных алгебр), то каждый выбор классов Ω и Φ будет определять некую “проекцию функционального анализа в геометрию”, причем стандартные математические дисциплины – *комплексная геометрия*, *дифференциальная геометрия* и *топология* – становятся частными случаями этой конструкции. Наглядно детали этих построений и их результаты удобно изобразить в виде следующей таблицы:

Дисциплина	Комплексная геометрия	Дифференциальная геометрия	Топология
Руководящий пример видимого образа	Алгебра $\mathcal{O}(M)$ голоморфных функций на комплексном многообразии M	Алгебра $\mathcal{E}(M)$ гладких функций на гладком многообразии M	Алгебра $\mathcal{C}(M)$ непрерывных функций на топологическом пространстве M
Инструменты наблюдения Φ	Гомоморфизмы в банаховы алгебры	Дифференциальные инволютивные гомоморфизмы в C^* -алгебры с присоединенными нильпотентами	Инволютивные гомоморфизмы в C^* -алгебры
Класс представлений Ω	Плотные эпиморфизмы	Плотные эпиморфизмы	Плотные эпиморфизмы
Видимый образ объекта A	Голоморфная оболочка $\text{Env}_\mathcal{O} A$	Гладкая оболочка $\text{Env}_\mathcal{E} A$	Непрерывная оболочка $\text{Env}_\mathcal{C} A$
Базовое представление	$\text{Env}_\mathcal{O} A = \mathcal{O}(M)$ для подалгебры $A \subseteq \mathcal{O}(M)$	$\text{Env}_\mathcal{E} A = \mathcal{E}(M)$ для подалгебры $A \subseteq \mathcal{E}(M)$	$\text{Env}_\mathcal{C} A = \mathcal{C}(M)$ для подалгебры $A \subseteq \mathcal{C}(M)$
Диаграмма рефлексивности	$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^*(G) & \xrightarrow{\text{Env}_\mathcal{O}} & \mathcal{O}_{\text{exp}}^*(G) \\ * \uparrow & & \downarrow * \\ \mathcal{O}(G) & \xleftarrow{\text{Env}_\mathcal{O}} & \mathcal{O}_{\text{exp}}(G) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^*(G) & \xrightarrow{\text{Env}_\mathcal{E}} & \text{Env}_\mathcal{E} \mathcal{E}^*(G) \\ * \uparrow & & \downarrow * \\ \mathcal{E}(G) & \xleftarrow{\text{Env}_\mathcal{E}} & \mathcal{K}_\infty(G) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^*(G) & \xrightarrow{\text{Env}_\mathcal{C}} & \text{Env}_\mathcal{C} \mathcal{C}^*(G) \\ * \uparrow & & \downarrow * \\ \mathcal{C}(G) & \xleftarrow{\text{Env}_\mathcal{C}} & \mathcal{K}(G) \end{array}$
Диаграмма рефлексивности для коммутативных групп	$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}^*(G) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{O}(\widehat{G}) \\ * \uparrow & & \downarrow * \\ \mathcal{O}(G) & \xleftarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{O}^*(\widehat{G}) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \mathcal{E}^*(G) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{E}(\widehat{G}) \\ * \uparrow & & \downarrow * \\ \mathcal{E}(G) & \xleftarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{E}^*(\widehat{G}) \end{array}$	$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}^*(G) & \xrightarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}(\widehat{G}) \\ * \uparrow & & \downarrow * \\ \mathcal{C}(G) & \xleftarrow{\mathcal{F}} & \mathcal{C}^*(\widehat{G}) \end{array}$

Мы поговорим о том, как работает и что позволяет увидеть эта схема в топологии.