

Нелинейные динамические системы, хаос и численные методы

Пчелинцев Александр Николаевич

Тамбовский государственный технический университет

Тамбов, 2019

Понятие динамической системы

Под динамической системой понимают любой объект или процесс, для которого однозначно определено понятие состояния $X(t)$ (векторная функция) как совокупности некоторых величин $x_1(t), \dots, x_n(t)$ (переменных состояния – скалярных функций) в момент времени t , и задан закон, который описывает изменение начального состояния $X(0) = X_0$ с течением времени.

Время t может принимать любое действительное значение $t \in \mathbb{R}$, чаще рассматривают системы, когда $t \geq 0$.

$$X(t) \in \mathbb{R}^n.$$

x_i называется фазовой координатой, $\dot{x}_i$ – производная фазовой координаты по времени, n – порядок системы.

Линейная система первого порядка

$$\dot{x}_1 = ax_1,$$

где a – постоянная величина, $X(0) = X_0 = x_{1,0}$. Примеры: процессы радиоактивного распада, размножение одного биологического вида, рост (уменьшение) вязкой деформации со временем при наложении (или снятии) нагрузки. Решение: $X(t) = x_1(t) = X_0 e^{at}$.

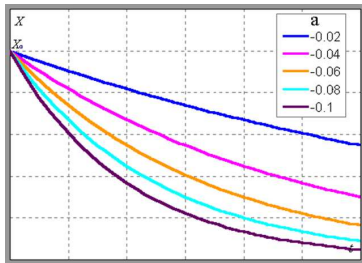


Рисунок 1 – Динамика системы при
 $a < 0$.

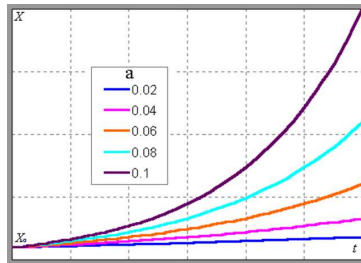


Рисунок 2 – Динамика системы при
 $a > 0$.

Линейная система второго порядка – пружинный маятник

Уравнение движения: $m\ddot{x}_1 = -kx_1$.

Введём вторую фазовую координату – скорость движения маятника $x_2 = \dot{x}_1$.

Получим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m}x_1 \end{cases}$$

с начальным

условием $X(0) = [x_{1,0} \ x_{2,0}]^T$.

Решение:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{x_{2,0}}{\omega} \sin(\omega t) + x_{1,0} \cos(\omega t), \\ x_2(t) = x_{2,0} \cos(\omega t) - x_{1,0}\omega \sin(\omega t), \end{cases}$$

где $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – собственная частота колебаний.

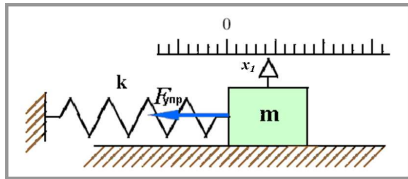


Рисунок 3 – Пружинный маятник.

Временная диаграмма и фазовая траектория

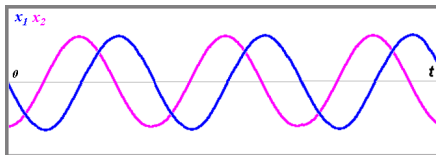


Рисунок 4 – Временная развёртка для гармонических колебаний.

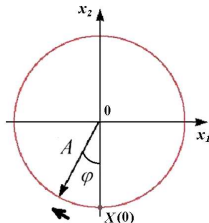


Рисунок 5 – Фазовая траектория системы «Пружинный маятник» – множество точек фазовой плоскости $x_1 O x_2$ с координатами $(x_1(t), x_2(t))$, $t \in \mathbb{R}$.

$$x_{1,0} = 0, x_{2,0} = -A, x_1(t) = -A \sin t, x_2(t) = -A \cos t,$$

где A – амплитуда колебаний, $\varphi = \omega t$, $\omega = 1$.

Особые точки динамических систем

Особая точка X^* (неподвижная точка, положение равновесия, стационарная точка, точка покоя) динамической системы – точка фазового пространства, в которой

$$\begin{cases} f_1(X^*) = 0, \\ f_2(X^*) = 0, \\ \dots\dots\dots \\ f_n(X^*) = 0. \end{cases}$$

Устойчивость особой точки

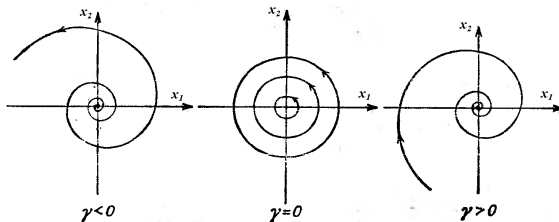


Рисунок 6 – Фазовые траектории системы с трением.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -\gamma x_2 - \omega^2 x_1. \end{cases}$$

Положение равновесия устойчиво при $\gamma > 0$ (является притягивающей точкой – *аттрактором*), при $\gamma < 0$ неустойчиво, при $\gamma = 0$ обладает нейтральной устойчивостью.

При переходе значения параметра γ через 0 происходит перестройка характера фазовых траекторий системы, т.е. *бифуркация*.

$\gamma = 0$ называется *точкой бифуркации*.

Классификация особых точек

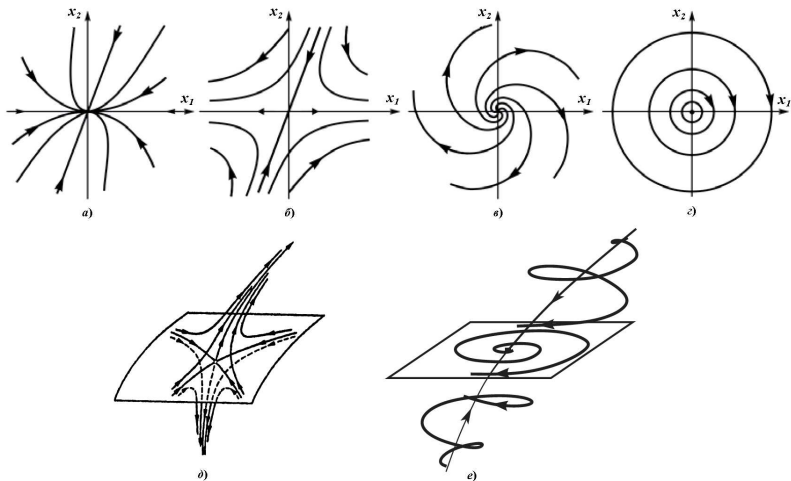


Рисунок 7 – Примеры фазовых портретов для разных типов особых точек:

а) устойчивый узел, б) седло-узел в пространстве $\mathbb{R}^2$, в) неустойчивый фокус, г) центр, д) седло-узел в пространстве $\mathbb{R}^3$, е) седло-фокус в пространстве $\mathbb{R}^3$.

Система Ван дер Поля

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = b(1 - x_1^2)x_2 - x_1. \end{cases}$$

Можно установить существование, единственность и устойчивость замкнутой траектории в системе – *предельного цикла*, соответствующего периодическому решению.

Фазовые траектории, расположенные как и вне, так и внутри цикла, асимптотически стремятся к нему. Таким образом, устойчивый цикл – ещё один пример *аттрактора*.

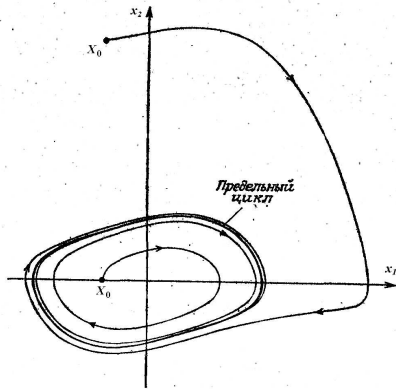


Рисунок 8 – Фазовый портрет системы Ван дер Поля, $b > 0$.

$O(0,0)$ – неустойчивое положение равновесия.

Свободная конвекция в плоском слое жидкости

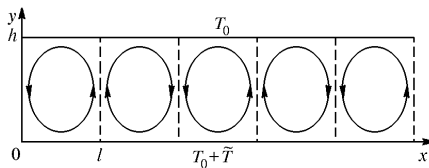


Рисунок 9 – Профиль течения при конвекции в подогреваемом снизу слое жидкости.

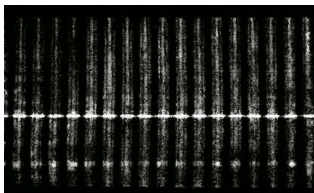


Рисунок 10 – Конвективная структура упорядоченных валов (вид сверху). Конвекция создана в слое силиконового масла толщиной 2,5 мм с размерами пластин 98×60 мм. Верхняя пластина прозрачна, а в качестве нижней взята полированная медь (как поверхность, отражающая свет). Конвективные валы здесь визуализированы за счет преломления света [1, с. 104].

Математическое моделирование свободной конвекции

$$T(x, y, t) = T_0 + \Delta T - \frac{\Delta T}{h} y + \theta(x, y, t),$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = & \left[\gamma \left(\theta + \Delta T - \frac{\Delta T}{h} y \right) - 1 \right] g - \\ & - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(\theta v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\theta v_y)}{\partial y} - \frac{\Delta T}{h} v_y = a \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right).$$

На верхний и нижний края слоя наложим граничные условия, выражающие постоянство температуры и отсутствие потока жидкости через границу:

$$\begin{aligned} \theta(x, 0, t) = \theta(x, h, t) = 0, \quad v_y(x, 0, t) = v_y(x, h, t) = 0, \\ v_x(0, y, t) = v_x(l, y, t) = 0. \end{aligned}$$

Динамическая система Лоренца

$$v_x(x, y, t) \approx -x_1(t)\beta \sin \alpha x \cos \beta y,$$

$$v_y(x, y, t) \approx x_1(t)\alpha \cos \alpha x \sin \beta y,$$

$$\theta(x, y, t) \approx x_2(t) \cos \alpha x \sin \beta y - x_3(t) \sin 2\beta y,$$

где $\alpha = \pi/l$, $\beta = \pi/h$.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3. \end{cases}$$

Обычно систему Лоренца исследуют при классических значениях ее параметров, то есть при $\sigma = 10$, $r = 28$ и $b = 8/3$.

Все решения этой динамической системы ограничены.

В системе с $n > 2$ может существовать так называемый *странный аттрактор*, состоящий из всюду плотных седловых траекторий, вдоль которых близкие траектории экспоненциально разбегаются. При этом имеются области притяжения, возвращающие траектории к аттрактору. Это и создает их хаотическое поведение. Из-за неустойчивости решений на аттракторах системы правильный численный прогноз их поведения на заданном отрезке времени важен в понимании, например, процессов эволюции (например, если рассматривается модель [2] роста раковых опухолей) и снижения неопределенности.

Классические численные методы построения численных решений динамических систем (например, метод Эйлера, Рунге-Кутты 4-ого порядка, Адамса) дают значительные ошибки на больших временных промежутках из-за неустойчивости хаотических решений.

Геометрическая интерпретация метода Эйлера

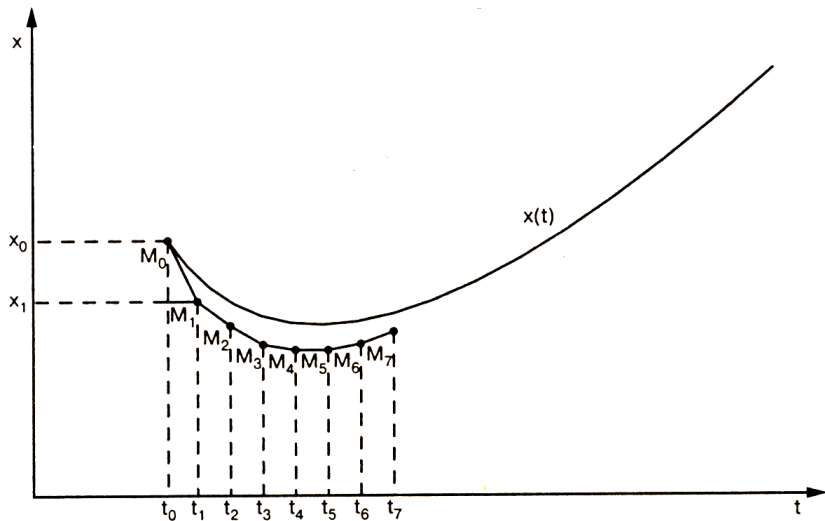


Рисунок 11 – Геометрическая интерпретация метода Эйлера.

Дуга траектории системы Лоренца

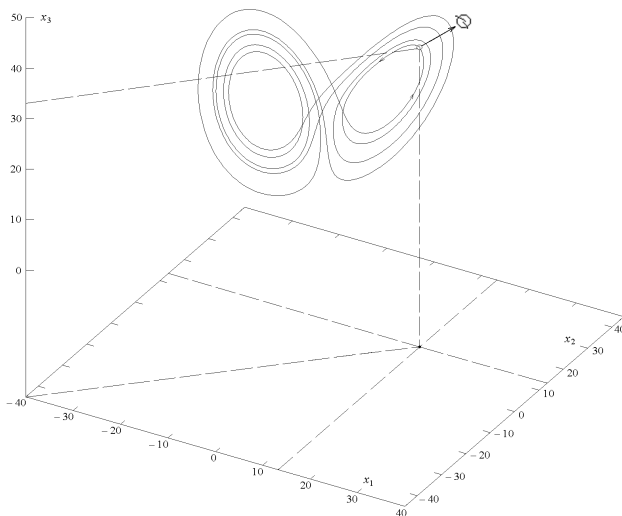


Рисунок 12 – Дуга траектории, построенная на отрезке времени $[0, 6.827]$ для

$$x_{1,0} = 13.41265629, x_{2,0} = 13.46430003, x_{3,0} = 33.46156416.$$

Седловой цикл в системе Лоренца

На рисунке $x = x_1$, $y = x_2$ и $z = x_3$.

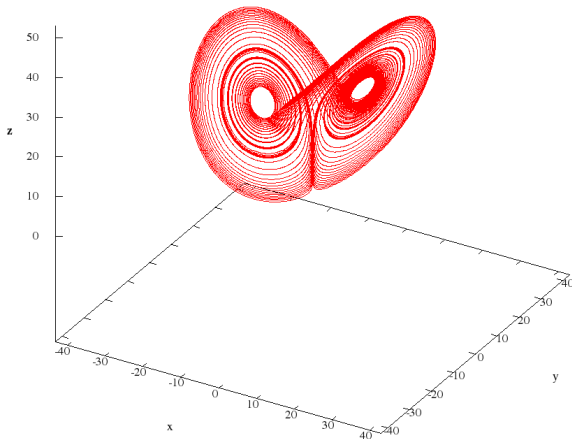


Рисунок 13 – Седловой цикл в системе Лоренца.

Пчелинцев А. Три цикла в аттракторе Лоренца, Хабр, 2017.

<https://habr.com/ru/post/329578/>

Возвраты Пуанкаре и устойчивость по Пуассону

Если рассматривается предельная траектория, отличная от особой точки, то она называется *устойчивой по Пуассону*, если она обладает свойством возвращаться в сколь угодно малую окрестность каждой своей точки бесконечное число раз. Возврат траектории в ε -окрестность произвольно выбранной на ней начальной точки называют *возвратами Пуанкаре*.

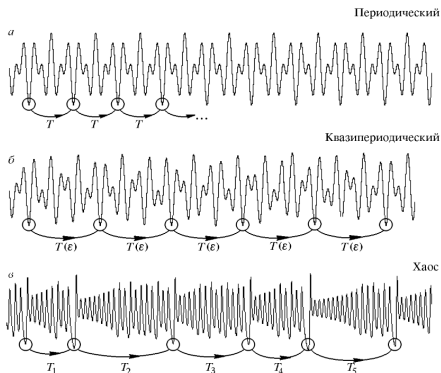


Рисунок 14 – Возвраты Пуанкаре для периодического, квазипериодического и хаотического режима динамики.

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{X} = B_0 + B_1 X + \varphi(X), \quad (1)$$

где $X(t) = [x_1(t) \dots x_n(t)]^T$ – векторная функция времени t со значениями в пространстве $\mathbb{R}^n$, $B_0 \in \mathbb{R}^n$ – заданный вектор-столбец,

$$\varphi(X) = [\varphi_1(X) \dots \varphi_n(X)]^T,$$

$\varphi_p(X) = \langle Q_p X, X \rangle$, B_1 и Q_p ($p = \overline{1, n}$) – матрицы $(n \times n)$ действительных чисел.

Анализ современной литературы показал, что формулы общего решения систем вида (1) в классе каких-либо известных функций пока не найдено.

Примеры систем с квадратичными нелинейностями

Система Лоренца

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \sigma(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = rx_1 - x_2 - x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3. \end{cases}$$

Для данной системы матрицы имеют вид:

$$B_0 = \mathbf{0}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \mathbf{0},$$
$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Примеры систем с квадратичными нелинейностями

Система Чена

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a(x_2 - x_1), \\ \dot{x}_2 = (c - a)x_1 - x_1x_3 + cx_2, \\ \dot{x}_3 = x_1x_2 - bx_3, \end{cases}$$

Для данной системы матрицы имеют вид:

$$B_0 = \mathbf{0}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} -a & a & 0 \\ c - a & c & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{bmatrix}, \quad Q_1 = \mathbf{0},$$
$$Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Пусть

$$X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \Lambda_i t^i,$$

где $\Lambda_0 = X(0)$ – вектор значений начальных условий для системы (1), $\Lambda_i \in \mathbb{R}^n$.

$$\varphi_p(X) = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_{i,p} t^i, \quad \Phi_{i,p} = \sum_{j=0}^i \langle Q_p \Lambda_j, \Lambda_{i-j} \rangle, \quad p = \overline{1, n}.$$

Пусть

$$\Phi_i = [\Phi_{i,1} \dots \Phi_{i,n}]^T.$$

$$\Lambda_1 = B_0 + B_1 \Lambda_0 + \Phi_0. \quad (2)$$

Рекуррентное соотношение при $i \geq 2$

$$\Lambda_i = \frac{B_1 \Lambda_{i-1} + \Phi_{i-1}}{i}. \quad (3)$$

$$h_1(\Lambda_0) = \|\Lambda_0\|, \quad \mu = n \max_{p=\overline{1,n}} \|Q_p\|,$$

$$h_2(\Lambda_0) = \begin{cases} \|B_0\| + (\|B_1\| + 2\mu)h_1 + \mu h_1^2, & \text{если } h_1 > 1, \\ \|B_0\| + \|B_1\| + \mu & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Ряды сходятся при $t \in (-\tau; \tau)$, где $\tau = 1/h_2$.

Выберем

$$0 < \Delta t < \tau$$

или

$$-\tau < \Delta t < 0.$$

Критерий окончания суммирования

$$\|\Lambda_i\| |\Delta t|^i < \varepsilon_p.$$

Алгоритм численного решения

- 1 Задать значения машинного эпсилон ε_m и way (1 или -1).
- 2 Задать значения T , ε_p и $\Lambda_0 = X(0)$.
- 3 $t := 0$.
- 4 Вычислить значение Δt как функцию от Λ_0 .
- 5 $t := t + \Delta t$.
- 6 Если $t > T$, то $flag := 1$; $\Delta t := \Delta t - (t - T)$
Иначе если $t < T$, то $flag := 0$
Иначе $flag := 1$.
- 7 $p := 1$; $i := 0$; $x := \Lambda_0$.
- 8 $i := i + 1$; $p := p \cdot way \cdot \Delta t$. Вычислить Λ_i по формуле (2) или (3).
- 9 $x := x + \Lambda_i \cdot p$.
- 10 $L := \|\Lambda_i\| \cdot |p|$.
- 11 Если $L > \varepsilon_p$, то перейти к шагу 8.
- 12 $\Lambda_0 := x$.
- 13 Вывод Λ_0 .
- 14 Если $flag = 0$, то перейти к шагу 4.

Положим, что

$$\begin{aligned}\Omega &= [t_0; t_1] \cup [t_1; t_2] \cup \dots \cup [t_{N-1}; t_N], \\ t_0 &= 0, \quad t_N = T, \\ \Delta t_l &= t_l - t_{l-1},\end{aligned}$$

n_l — степень полинома, соответствующего моменту времени t_l ,
 $l = \overline{1, N}$,

$$\begin{aligned}n_{\min} &= \min_l n_l, \quad n_{\max} = \max_l n_l, \quad l_{\min} = \operatorname{indmin}_l n_l, \\ l_{\max} &= \operatorname{indmax}_l n_l, \quad \Delta t_{\min} = \min_l \Delta t_l, \\ \Delta t_{\max} &= \max_l \Delta t_l, \quad d_{\min} = \operatorname{indmin}_l \Delta t_l, \\ d_{\max} &= \operatorname{indmax}_l \Delta t_l.\end{aligned}$$

№	t	$x_1(t)$	$x_2(t)$	$x_3(t)$
1	0	-10.3391	-11.1003	23.8488
2	3.695	-10.4283	-10.7454	23.3929
3	8.411	-10.5177	-10.7434	23.5557

№	t	$\dot{x}_1(t)$	$\dot{x}_2(t)$	$\dot{x}_3(t)$
1	0	-26.6412	8.14097	43.2213
2	3.695	-11.0986	16.0749	41.8775
3	8.411	-7.89935	20.561	42.3287

Прямой проход по времени

T	3.695	8.411
N	7549	16869
$n_{\min}$	18	19
$l_{\min}$	N	N
$n_{\max}$	27	27
$l_{\max}$	2304	2304
$t_{l_{\min}}$	3.69487	8.41082
$t_{l_{\max}}$	1.26107	1.26107
$\Delta t_{\min}$	0.000129384	0.000179493
$d_{\min}$	$l_{\min}$	$l_{\min}$
$t_{d_{\min}}$	$t_{l_{\min}}$	$t_{l_{\min}}$
$\Delta t_{\max}$	0.00124324	0.00124324
$d_{\max}$	2299	2299
$t_{d_{\max}}$	1.25485	1.25485

Обратный проход по времени

$-T$	-3.695	-8.411
$\hat{N}$	7549	16869
$\hat{n}_{\min}$	18	19
$\hat{l}_{\min}$	$\hat{N}$	$\hat{N}$
$\hat{n}_{\max}$	27	27
$\hat{l}_{\max}$	5206	14526
$\hat{t}_{l_{\min}}$	-3.69489	-8.41083
$\hat{t}_{l_{\max}}$	-2.38689	-7.10279
$\Delta \hat{t}_{\min}$	-0.000109911	-0.000165672
$\hat{d}_{\min}$	$\hat{l}_{\min}$	$\hat{l}_{\min}$
$\hat{t}_{d_{\min}}$	$\hat{t}_{l_{\min}}$	$\hat{t}_{l_{\min}}$
$\Delta \hat{t}_{\max}$	-0.00124325	-0.00124325
$\hat{d}_{\max}$	5252	14572

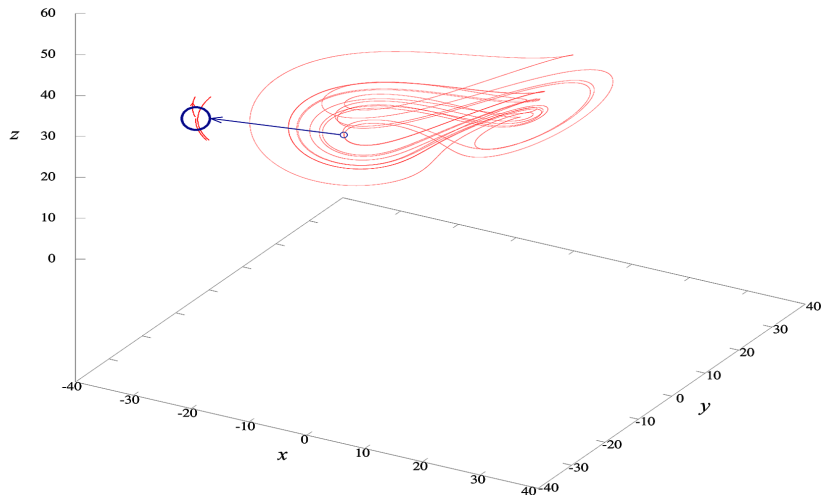
$$x_{1,0} = -10.33913519761, \quad x_{2,0} = -11.10031188035, \\ x_{3,0} = 23.84877914089.$$

$$\varepsilon_p = 10^{-53}, \quad \varepsilon_m = 2.54895 \cdot 10^{-57} \quad (b_m = 189).$$

Такая точность обеспечивает совпадение всех знаков после запятой начальных условий при обратном проходе по времени.

$$N = \hat{N}, \quad t_{l_{\max}} + \left| \hat{t}_{l_{\max}} \right| \approx T, \quad d_{\max} + \hat{d}_{\max} \approx N, \quad t_{d_{\max}} + \left| \hat{t}_{d_{\max}} \right| \approx T.$$

На рисунке $x = x_1$, $y = x_2$ и $z = x_3$.



- ❶ *Берже П., Помо И., Видаль К.* Порядок в хаосе. О детерминистском подходе к турбулентности. – М.: Мир, 1991. – 368 с.
- ❷ *Llanos-Pérez J.A., Betancourt-Mar J.A., Cochob G., Mansilla R., Nieto-Villar J.M.* Phase transitions in tumor growth: III vascular and metastasis behavior // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2016. Vol. 462. P. 560-568.
- ❸ *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. – М.: Физматлит, 2006. – 356 с.
- ❹ *Пчелинцев А.Н.* Численное и физическое моделирование динамики системы Лоренца // *Сибирский журнал вычислительной математики*. 2014. Т. 17. Вып. 2. С. 191-201;
англ.пер.: *Pchelintsev A.N.* Numerical and physical modeling of the dynamics of the Lorenz system // *Numerical Analysis and Applications*. 2014. Vol. 7. Iss. 2. P. 159-167.
- ❺ *Lozi R., Pchelintsev A.N.* A new reliable numerical method for computing chaotic solutions of dynamical systems: the Chen attractor case // *International Journal of Bifurcation and Chaos*. 2015. Vol. 25. Iss. 13. 1550187. 10 pp.
- ❻ *Lozi R., Pogonin V.A., Pchelintsev A.N.* A new accurate numerical method of approximation of chaotic solutions of dynamical model equations with quadratic nonlinearities // *Chaos, Solitons & Fractals*. 2016. Vol. 91. P. 108–114.

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!