А. В. Стояновский, Б. Л. Фейгин, Функциональные модели представлений алгебр токов и полубесконечные клетки Шуберта, *Функц. анализ и его прил.*, 1994, том 28, выпуск 1, 68–90

Функциональный анализ и его приложения
1994, т. 28, вып. 1, с. 68–90

УДК 512.81

Функциональные модели представлений алгебр токов и полубесконечные клетки Шуберта

© 1994. А. В. Стояновский, Б. Л. Фейгин

§1. Введение

Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная комплексная простая алгебра Ли с простыми связями (simply laced), $\hat{\mathfrak{g}}$ — соответствующая аффинная алгебра, т.е. одномерное центральное расширение алгебры токов на окружности $\mathfrak{g}^{S^1} = \ldots + \mathfrak{g}t^{-2} + \mathfrak{g}t^{-1} + \mathfrak{g} + \mathfrak{g}t + \mathfrak{g}t^2 + \ldots$, K — центральный элемент. Мы будем рассматривать интегрируемые представления алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ из категории $\mathcal{O}$ представлений со старшим весом, на которых K действует скаляром k (число k называется центральным зарядом или уровнем представления). Один из критериев интегрируемости состоит в следующем. Фиксируем картановское разложение $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_+ \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_-$. Пусть α — произвольный корень алгебры $\mathfrak{g}$, $e(\alpha)$ — ненулевой элемент корневого подпространства, соответствующего корню α, $e_i(\alpha) = e(\alpha) \cdot t^i$ и $S_i^{(k+1)}(\alpha) = \sum_{i_1+\cdots+i_{k+1}=i} e_{i_1}(\alpha) \ldots e_{i_{k+1}}(\alpha)$. Бесконечные выражения $S_i^{(k+1)}(\alpha)$, $i \in \mathbb{Z}$, действуют на представлениях алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ из категории $\mathcal{O}$, и представление V уровня k интегрируемо в том и только том случае, когда $k \in \mathbb{Z}$, $k \geqslant 0$ и все $S_i^{(k+1)}(\alpha)$ действуют на V нулем. Иными словами, элементы $S_i^{(k+1)}(\alpha)$ порождают двусторонний идеал в пополненной универсальной обертывающей алгебре $\widetilde{U}(\hat{\mathfrak{g}})$, аннулирующий интегрируемые представления уровня k.

Ограничимся теперь вакуумным неприводимым представлением V_k уровня k. Пусть v — вакуумный вектор в V_k; тогда $\hat{\mathfrak{g}}^{\mathrm{in}} v = 0$, где $\hat{\mathfrak{g}}^{\mathrm{in}} = \mathfrak{g} + \mathfrak{g}t + \mathfrak{g}t^2 + \ldots$. Обозначим через $\hat{\mathfrak{n}}_+ = \ldots + \mathfrak{n}_+ t^{-1} + \mathfrak{n}_+ + \mathfrak{n}_+ t + \ldots \subset \hat{\mathfrak{g}}$ подалгебру токов со значениями в положительной нильпотентной подалгебре алгебры $\mathfrak{g}$. Главную роль в нашем исследовании играет подпространство $W = U(\hat{\mathfrak{n}}_+)v \subset V_k$. Его можно отождествить с факторпространством $U(\hat{\mathfrak{n}}_+)/I_k$, где I_k — некоторый левый идеал в $U(\hat{\mathfrak{n}}_+)$. Структура этого идеала описывается следующей теоремой.

Теорема 1.1.1. *$I_k = U(\hat{\mathfrak{n}}_+)\hat{\mathfrak{n}}_+^{\mathrm{in}} + J_k$, где $\hat{\mathfrak{n}}_+^{\mathrm{in}} = \hat{\mathfrak{n}}_+ \cap \hat{\mathfrak{g}}^{\mathrm{in}}$, а J_k — двусторонний идеал, порожденный элементами $S_i^{(k+1)}(\alpha_j)$ (выражения из J_k конечны по модулю $\hat{\mathfrak{n}}_+^{\mathrm{in}}$), α_j — простые корни алгебры $\mathfrak{g}$, $j = 1, \ldots, l$, $l = \operatorname{rank} \mathfrak{g}$.*

На этой теореме основывается приводимая ниже довольно громоздкая конструкция двойственного пространства к W. Опишем ее сначала в самом простом случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$.

Пусть $\Omega^1\mathbb{C} = \mathbb{C}[x]\,dx$ — пространство полиномиальных 1-форм на прямой. Его симметрическая степень $S^n\Omega^1\mathbb{C}$ реализуется в пространстве выражений $f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n$, где $f(x_1, \ldots, x_n)$ — симметрический полином. Определим «ограниченную симметрическую степень» пространства $\Omega^1\mathbb{C}$ как подпространство $S^n_{(k+1)}\Omega^1\mathbb{C} \subset S^n\Omega^1\mathbb{C}$, состоящее из выражений $f(x_1, \ldots, x_n)\,dx_1 \ldots dx_n$, в которых f равен нулю при $x_1 = x_2 = \ldots = x_{k+1}$. Очевидно, что $S^\bullet_{(k+1)}\Omega^1\mathbb{C}$ — коммутативная коалгебра, и мы утверждаем, что $S^\bullet_{(k+1)}\Omega^1\mathbb{C} \simeq W^*$.

Этот результат может быть использован для описания неприводимого представления V_k как линейного пространства. Напомним, что в пространстве V_k имеется семейство $\{v_n,\ n \in \mathbb{Z}\}$ так называемых экстремальных векторов. Подгруппа сдвигов $\mathbb{Z}$ аффинной группы Вейля $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ действует на V_k, и $\{v_n\}$ — орбита вакуумного вектора относительно этого действия. Рассмотрим семейство подпространств $W_n = U(\hat{\mathfrak{n}}_+)v_n$; имеем $W_{n_1} \simeq W_{n_2}$, и изоморфизм задается действием некоторого элемента аффинной группы Вейля. С другой стороны, пространства W_n вложены друг в друга:

$$\ldots \hookrightarrow W_1 \hookrightarrow W = W_0 \hookrightarrow W_{-1} \hookrightarrow W_{-2} \hookrightarrow \ldots,$$

и V_k есть индуктивный предел этой последовательности вложений. Неформально говоря, сказанное означает, что можно определить «полубесконечные ограниченные симметрические степени» пространства $\Omega^1(S^1)$ 1-форм на окружности, так что пространство $W_{-\infty} = V_k$ оказывается двойственным к $\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} S^{\frac{\infty}{2}+i}_{(k+1)}(\Omega^1(S^1))$. С некоторой точки зрения «полубесконечные ограниченные симметрические степени» очень близки к пространствам полубесконечных внешних форм, но конструкция «симметрических степеней» существенно менее прозрачна. Формула характера для V_k, происходящая из «полубесконечной реализации» этого представления, совпадает с «парафермионной» формулой Леповского–Примка [3]; связи полубесконечной конструкции с парафермионными алгебрами остаются для нас загадкой.

Теперь перейдем к случаю произвольной алгебры $\mathfrak{g}$.

Конструкция 1.1.2. Рассмотрим $\mathbb{Z}^l$-градуированное векторное пространство $M = \bigoplus M_{m_1,\ldots,m_l}$, $m_i \in \mathbb{Z}$, $m_i \geqslant 0$,

$$M_{m_1,\ldots,m_l} = \Big\{ f(x_1(\alpha_1), \ldots, x_{m_1}(\alpha_1);\ x_1(\alpha_2), \ldots, x_{m_2}(\alpha_2);\ \ldots;\ x_1(\alpha_l), \ldots, x_{m_l}(\alpha_l)) \times \prod_{i'<j'} (x_i(\alpha_{i'}) - x_j(\alpha_{j'}))^{-1} \cdot \prod_{i,j} dx_i(\alpha_j) \Big\}.$$

Здесь f — полином от переменных $x_i(\alpha_j)$, симметричный по каждой из групп переменных $\{x_i(\alpha_1)\}$, …, $\{x_i(\alpha_l)\}$. Пространство $M_{m_1,\ldots,m_l}$ можно рассматривать как компоненту «расширенной симметрической степени» пространства $F = M_{1,0,\ldots,0} \oplus M_{0,1,0,\ldots,0} \oplus \ldots \oplus M_{0,0,\ldots,0,1}$. Мы называем M «расширенным», так как оно больше, чем симметрическая алгебра пространства F: выражения

могут иметь полюсы первого порядка на диагоналях $x_i(\alpha_{i'}) = x_j(\alpha_{j'})$. Теперь добавим «серровские соотношения». Пусть $A = (A_{ij})$ — матрица Картана алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $\bar{M} = \bigoplus \bar{M}_{m_1,\dots,m_l}$ — подпространство в M, где $\bar{M}_{m_1,\dots,m_l} \subset M_{m_1,\dots,m_l}$ состоит из выражений, в которых f равен нулю, если для некоторых $1 \leqslant i, j \leqslant l$, $i \neq j$, $x_1(\alpha_i) = x_2(\alpha_i) = \ldots = x_{1-A_{ij}}(\alpha_i) = x_1(\alpha_j)$. Мы утверждаем, что $\bar{M}$ естественно изоморфно двойственному пространству к $U(\hat{\mathfrak{n}}_+)/U(\hat{\mathfrak{n}}_+)\hat{\mathfrak{n}}_+^{\mathrm{in}}$. Наконец, опишем $W^* = (U(\hat{\mathfrak{n}}_+)/I_k)^*$. Это градуированное подпространство в $\bar{M}$, $W^*_{m_1,\dots,m_l} \subset \bar{M}_{m_1,\dots,m_l}$, и элемент из $\bar{M}$ принадлежит W^*, если f удовлетворяет дополнительному условию: для каждого $1 \leqslant i \leqslant l$ полином f равен нулю при $x_1(\alpha_i) = x_2(\alpha_i) = \cdots = x_{k+1}(\alpha_i)$.

Используя изложенную «функциональную реализацию» W^*, можно написать формулу характера этого пространства. Пусть L_0 — оператор энергии. Рассмотрим сначала случай $k = 1$. Тогда

$$\operatorname{Tr}(q^{L_0})|_W = \sum_{m_1,\dots,m_l \geqslant 0} \frac{q^{\frac{1}{2}\sum A_{ij} m_i m_j}}{(q)_{m_1}\dots(q)_{m_l}}. \tag{1.1.3}$$

Здесь $\{A_{ij}\}$ — матрица Картана. Для общего k формула имеет такой же вид, но l заменяется на $l{\cdot}k$, а $\{A_{ij}\}$ — на квадратичную форму с матрицей $A \otimes \widetilde{B}_k^{-1}$, где A — матрица Картана алгебры $\mathfrak{g}$, а $\widetilde{B}_k$ — симметризованная матрица Картана B_k (см. 2.7.3). Заметим, что формулы такого типа появлялись в работах [11–14], где они описывают характер пространства квази-частиц в термодинамическом анзатце Бете.

По точно той же схеме, что и в случае $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$, из описания пространства W^* получается некоторое описание пространства V_k и следующая формула характера для V_k:

$$\operatorname{ch} V_k = \frac{1}{(q)_\infty^l} \sum_{\substack{N_1^{(i)} \geqslant \ldots \geqslant N_k^{(i)} \in \mathbb{Z} \\ i=1,\dots,l}} \frac{q^{\frac{1}{2}\sum_{i,j,p} A_{ij} N_p^{(i)} N_p^{(j)}} z_1^{\sum_p N_p^{(1)}} \dots z_l^{\sum_p N_p^{(l)}}}{\prod_{i=1}^l \prod_{p=1}^{k-1} (q)_{N_p^{(i)} - N_{p+1}^{(i)}}} \tag{1.1.4}$$

(степени переменных $z_1, \ldots, z_l$ соответствуют весам относительно картановской подалгебры $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, а степени q — градуировке по энергии). Эта формула описывает разложение пространства V_k на неприводимые представления относительно однородной подалгебры Гейзенберга $\hat{\mathfrak{h}}$.

Наконец, отметим, что изложенные результаты могут быть обобщены и на случай алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с кратными связями. В теореме 1.1.1 следует заменить $S_i^{(k+1)}(\alpha_j)$ на $S_i^{(\varkappa k+1)}(\alpha_j)$, если корень α_j короче длинного корня в $\sqrt{\varkappa}$ раз ($\varkappa = 1$, 2 или 3). То же самое изменение (замену $k+1$ на $\varkappa k+1$) следует произвести в конструкции 1.1.2. Формула характера для V_k наводит на мысль (согласно замечанию Э. Б. Винберга), что $\mathfrak{g}$ реализована как алгебра неподвижных точек диаграммного автоморфизма алгебры $\mathfrak{g}_1$ с простыми связями [4], а представление алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ — как подпространство в представлении алгебры $\hat{\mathfrak{g}}_1$.

Вот, например, формула характера для $\mathfrak{g}$ типа B_2:

$$\operatorname{ch} V_k = \frac{1}{(q)_\infty^2} \sum_{\substack{N_1^{(1)}\geqslant\ldots\geqslant N_k^{(1)}\in\mathbb{Z}\\ N_1^{(2)}\geqslant\ldots\geqslant N_{2k}^{(2)}\in\mathbb{Z}}} \frac{q^{\sum\limits_{p=1}^{k} N_p^{(1)2} - \sum\limits_{p=1}^{k} N_p^{(1)}(N_{2p-1}^{(2)}+N_{2p}^{(2)}) + \sum\limits_{p=1}^{2k} N_p^{(2)2}} z_1^{\sum\limits_{p=1}^{k} N_p^{(1)}} z_2^{\sum\limits_{p=1}^{2k} N_p^{(2)}}}{\prod\limits_{p=1}^{k-1} (q)_{N_p^{(1)}-N_{p+1}^{(1)}} \prod\limits_{p=1}^{2k-1} (q)_{N_p^{(2)}-N_{p+1}^{(2)}}}. \tag{1.1.5}$$

В этой статье мы более или менее подробно разбираем только случай $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ (см. § 2). Общий случай гораздо техничнее, и мы надеемся написать о нем в следующей работе. Отметим, что понятие полубесконечных ограниченных симметрических степеней не разработано в полной мере даже для $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$. Оно требует отдельного исследования, которое мы рассчитываем провести в будущем.

Вторая тема статьи связана с геометрией многообразия флагов алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$. Пусть $F=\widehat{G}/\mathbf{B}_+$ — многообразие флагов, $\mathbf{1}$ — единичный класс смежности и M — замыкание орбиты $\widehat{N}_+\cdot\mathbf{1}$, где $\widehat{N}_+$ — подгруппа в $\widehat{G}$, состоящая из токов со значениями в унипотентной подгруппе $N_+\subset G$ с алгеброй Ли $\mathfrak{n}_+$. Неприводимое интегрируемое представление $V_{\boldsymbol{\lambda}}$ со старшим весом $\boldsymbol{\lambda}$ реализуется в двойственном пространстве к пространству сечений голоморфного линейного расслоения $L_{\boldsymbol{\lambda}}$ на F. Пространство $W=U(\hat{\mathfrak{n}}_+)v$ (v — вакуумный вектор) двойственно к пространству $H^0(M,L_{\boldsymbol{\lambda}})$. Поэтому мы можем использовать геометрические методы для описания W. В § 3 в случае $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ мы применяем голоморфную формулу Лефшеца для неподвижных точек, чтобы определить характер пространства $H^0(M,L_{\boldsymbol{\lambda}})$. Многообразие M при $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_2$ неособо. (Хорошо известно, что аналогичный метод для полного многообразия флагов вместо M дает формулу Вейля для характера.) Мы также выписываем формулу характера типа Демазюра для W и получаем тот же самый результат.

Таким образом, имеем две формулы характера пространства W: первая формула — следствие функциональной реализации в пространстве симметрических полиномов, а вторая дается формулой Лефшеца или Демазюра. Сравнение двух полученных выражений дает тождества Роджерса–Рамануджана (при $k=1$) и тождества Гордона (при общем k).

В § 4 мы обсуждаем случай $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_3$. Многообразие M при $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_3$ особо; поэтому формула для неподвижных точек становится значительно сложнее. Мы не можем выписать ее полностью, однако формулируем гипотезу, согласно которой специализация $(\operatorname{Tr} q^{L_0}|_W)$ второй формулы характера пространства W совпадает с формулой Каца для характера вакуумного представления алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ с тем же центральным зарядом.

Расширенный вариант этого текста опубликован в виде препринта [10].

Мы благодарны В. А. Фатееву, с которым второй автор обсуждал связи нашей тематики с теорией S-матриц, возникающих при деформации конформных теорий поля.

Мы посвящаем эту статью Израилю Моисеевичу Гельфанду к его 80-летию.

§2. Функциональная модель: случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$

2.1. Обозначения. В алгебре $\mathfrak{sl}_2$ имеется стандартный базис e, f, h, а в алгебре $\widehat{\mathfrak{sl}}_2 = \mathfrak{sl}_2 \otimes \mathbb{C}[[t, t^{-1}] \oplus \langle K\rangle$ — базис, состоящий из $e_i = e \otimes t^i$, $f_i = f \otimes t^i$, $h_i = h \otimes t^i$, $i \in \mathbb{Z}$, и центрального элемента K. В этом базисе скобка задается формулами

$$[K, e_i] = [K, f_i] = [K, h_i] = [e_i, e_j] = [f_i, f_j] = 0, \quad [h_i, e_j] = 2e_{i+j},$$
$$[h_i, f_j] = -2f_{i+j}, \quad [e_i, f_j] = h_{i+j} + iK\delta_{i,-j}, \quad [h_i, h_j] = 2iK\delta_{i,-j}.$$

В треугольном разложении $\widehat{\mathfrak{sl}}_2 = \mathfrak{n}_- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}_+$ имеем $\mathfrak{h} = \langle h_0, K\rangle$, $\mathfrak{n}_+ = \langle e_i, f_i, h_i : i > 0\rangle + \langle e_0\rangle$ и $\mathfrak{n}_- = \langle e_i, f_i, h_i : i < 0\rangle + \langle f_0\rangle$. Корневые векторы, отвечающие простым корням — это e_0 и f_1. Алгебра $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ градуированная: $\deg e_i = \deg f_i = \deg h_i = i$, $\deg K = 0$; степень элемента γ называется его энергией. Аффинная группа Вейля $W_{\mathrm{aff}} = \mathbb{Z}_2 \ltimes \mathbb{Z}$ состоит из сдвигов на прямой на целочисленные векторы T_n, $n \in \mathbb{Z}$, и отражений S_n, $n \in \mathbb{Z}$, относительно точки $n/2$. Корневому вектору f_i, $i > 0$, соответствует отражение S_i, а вектору e_i, $i \geqslant 0$, — отражение S_{-i}.

Веса $\boldsymbol{\lambda}$ градуированных представлений алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ задаются тремя числами: $\boldsymbol{\lambda} = (m, \lambda, k)$, где m — энергия, $\lambda = \boldsymbol{\lambda}(h_0)$, $k = \boldsymbol{\lambda}(K)$. Действие группы Вейля на весах задается формулами

$$\begin{aligned} &T_n \cdot (m, \lambda, k) = (m - \lambda n - kn^2, \lambda + 2kn, k), \\ &S_0 \cdot (m, \lambda, k) = (m, -\lambda, k). \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

В частности, T_n действует на корневых векторах так:

$$\begin{gathered} T_n(e_i)T_{-n} = (e_{i-2n}), \qquad T_n(h_i)T_{-n} = (h_i) \quad (i \neq 0), \\ T_n(f_i)T_{-n} = (f_{i+2n}). \end{gathered} \tag{2.1.2}$$

Алгебра Вирасоро действует на $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ и ее интегрируемых представлениях из категории $\mathcal{O}$:

$$\begin{gathered} L_i = \frac{1}{2(k+2)} : \sum_{\alpha+\beta=i} (e_\alpha f_\beta + f_\alpha e_\beta + h_\alpha h_\beta/2) :, \\ [L_i, e_j] = je_{i+j}, \quad [L_i, f_j] = jf_{i+j}, \quad [L_i, h_j] = jh_{i+j}. \end{gathered} \tag{2.1.3}$$

Введем также «полусумму положительных корней алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$» $\boldsymbol{\rho} = (0, 1, 2)$.

2.2. Базисное представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ — это неприводимое представление V со старшим весом $\boldsymbol{\lambda}_0 = (0, 0, 1)$. Оно является фактормодулем модуля Верма $M_{\boldsymbol{\lambda}_0}$ с вакуумным вектором $\bar{v}$ по максимальному подмодулю $M_{S_0 * \boldsymbol{\lambda}_0} + M_{S_1 * \boldsymbol{\lambda}_0}$ (здесь действие $\omega \in W_{\mathrm{aff}}$ на вес $\boldsymbol{\lambda}$ определяется формулой $\omega * \boldsymbol{\lambda} = \omega \cdot (\boldsymbol{\lambda} + \boldsymbol{\rho}) - \boldsymbol{\rho}$). Соответствующие сингулярные векторы в $M_{\boldsymbol{\lambda}_0}$ — это $f_0 \bar{v}$ и $e_{-1}^2 \bar{v}$. Обозначим образ вектора $\bar{v}$ при проекции $M_{\boldsymbol{\lambda}_0} \to V$ через v.

Пусть $\hat{\mathfrak{n}} = \langle e\rangle \otimes \mathbb{C}[[t, t^{-1}]$ — абелева подалгебра в $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ с базисом e_i, $i \in \mathbb{Z}$. Определим наше *основное подпространство* $W \subset V$ как $W = U(\hat{\mathfrak{n}})v$. Поскольку $e_i v = 0$ при $i \geqslant 0$, на v реально действует только алгебра $U(\hat{\mathfrak{n}}^{\mathrm{out}}) =$

$\mathbb{C}[e_{-1}, e_{-2}, \dots]$. Поэтому $W = (\mathbb{C}[e_{-1}, e_{-2}, \dots]/I)v$, где I — некоторый идеал в $\mathbb{C}[e_{-1}, e_{-2}, \dots]$. Мы знаем, что $e_{-1}^2 \in I$.

Теорема 2.2.1. *Идеал I порожден полиномами $S_{-k} = \sum e_i e_{-k-i}$, $k \geqslant 2$.*

Эта теорема будет доказана в §3. Сейчас объясним лишь, почему $S_{-k} \in I$. Из явной формулы (2.1.3) следует, что $L_{-1}v = 0$. Поэтому $(k-2)!S_{-k}v = \pm[(\operatorname{ad} L_{-1})^{k-2}(e_{-1}^2)]v = 0$.

Замечание 2.2.2. Вообще, бесконечные выражения $S_m = \sum_{i+j=m} e_i e_j$ — коэффициенты формального ряда $(\sum_{i\in\mathbb{Z}} e_i z^i)^2 = e(z)^2$ — действуют на всех представлениях алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ из категории $\mathcal{O}$. Известный факт состоит в том, что если центральный заряд равен 1, то S_m на интегрируемом представлении действуют нулем: $e(z)^2 = 0$ (ср. §2.4).

2.3. Пространство W разлагается в сумму конечномерных весовых компонент $W = \bigoplus W_{(n,\lambda,1)}$. С целью вычислить его формальный характер $\operatorname{ch}(W)$, равный по определению $\sum q^i z^j \dim W_{(-i,2j,1)}$, мы сейчас введем удобное описание пространства W^*, которое и назовем функциональной моделью.

Векторное пространство $\hat{\mathfrak{n}}^{\text{out}} = \langle e_i \rangle_{i<0}$ состоит из «сингулярных токов» $\varphi(x) \otimes e$ со значениями в подалгебре $\mathfrak{n}_+ \subset \mathfrak{sl}_2$, где $\varphi(x)$ — полином от x^{-1} без свободного члена. Двойственное пространство $(\hat{\mathfrak{n}}^{\text{out}})^*$ естественно отождествляется с пространством полиномиальных 1-форм $\Omega^1\mathbb{C}$ (с градуировкой $\deg x^n dx = n+1$). Поэтому $U(\hat{\mathfrak{n}}^{\text{out}})^* \simeq \bigoplus_{k\geqslant 0}(S^k\hat{\mathfrak{n}}^{\text{out}})^* \simeq \bigoplus_{k\geqslant 0} S^k(\Omega^1\mathbb{C})$, где $S^k(\Omega^1\mathbb{C})$ — пространство выражений $f(x_1, \dots, x_k)\,dx_1 \dots dx_k$, различные dx_i коммутируют и $f(x_1, \dots, x_k)$ — симметрический полином. Будем называть $S^k\Omega^1\mathbb{C}$ *пространством k частиц*. Спаривание $S^k\Omega^1\mathbb{C}$ с $S^k\hat{\mathfrak{n}}^{\text{out}}$ задается формулой

$$\begin{aligned}\langle f\,dx_1 \dots dx_k, (\varphi_1 \otimes e)\cdot \ldots \cdot(\varphi_k \otimes e)\rangle \\ = \operatorname{Res}_{x_1=\ldots=x_k=0}(f(x_1, \dots, x_k)\varphi_1(x_1)\dots\varphi_k(x_k)\,dx_1\dots dx_k). \quad (2.3.1)\end{aligned}$$

$W^* = \bigoplus_k W^* \cap S^k(\Omega^1\mathbb{C})$ — подпространство в $S^\bullet(\Omega^1\mathbb{C})$, и из теоремы 2.2.1 легко следует, что

$$W^* \cap S^k(\Omega^1\mathbb{C}) = \{f(x_1, \dots, x_k)\,dx_1\dots dx_k : f = 0 \text{ при } x_1 = x_2\}.$$

(На языке частиц: как только две частицы сливаются, функция равна нулю.) Итак,

$$W^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} W_k^*,$$

где

$$\begin{aligned}W_k^* = \Big\{ g(x_1, \dots, x_k)\prod_{i<j}(x_i - x_j)^2 \prod_{i=1}^{k} dx_i, \\ g(x_1, \dots, x_k) \text{ — симметрический полином} \Big\}; \quad (2.3.2)\end{aligned}$$

$$\operatorname{ch} W = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname{ch} W_k^* = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{q^{k^2} z^k}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^k)}. \quad (2.3.3)$$

При $z=1$ и при $z=q$ это левые части тождеств Роджерса–Рамануджана.

2.4. Теперь применим теорему 2.2.1 к описанию всего пространства представления V. Пусть $v_n = T_n v$ есть n-й экстремальный вектор этого представления, $n \in \mathbb{Z}$. По формуле (2.1.1) вес v_n равен $(-n^2, 2n, 1)$. Рассмотрим пространство $W_n = T_n W = U(\hat{\mathfrak{n}}) v_n$. Очевидно, что $\ldots \subset W_2 \subset W_1 \subset W_0 = W \subset W_{-1} \subset \ldots$ и $V = \bigcup W_n = \varinjlim W_{-N}$ (см. рис. 1). Из теоремы 2.2.1 и формулы (2.1.2) следует, что $W_n = (\mathbb{C}[e_{-2n-1}, e_{-2n-2}, \ldots]/I_n) v_n$, где I_n — идеал, порожденный полиномами S_m, $m \leqslant -4n-2$.

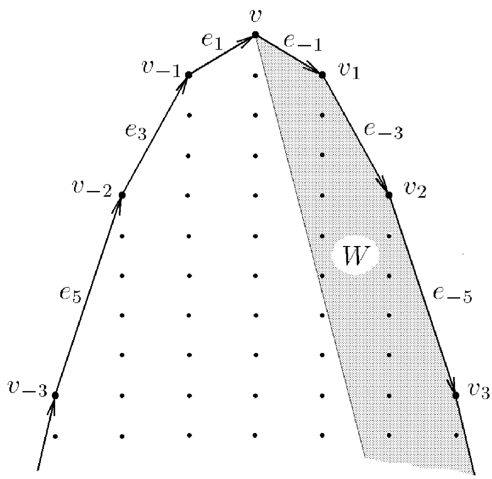

Fig. 1

Пространство $W_0 = (\mathbb{C}[e_{-1}, e_{-2}, \ldots]/(e_{-1}^2, e_{-1}e_{-2}, 2e_{-1}e_{-3} + e_{-2}^2, \ldots))v$ вкладывается в $W_{-1} = (\mathbb{C}[e_1, e_0, e_{-1}, \ldots]/(e_1^2, e_1e_0, 2e_1e_{-1} + e_0^2, \ldots))v_{-1}$ с помощью гомоморфизма $\mathbb{C}[e_i]$-модулей, переводящего v в $e_1 v_{-1}$. Далее, $e_1 v_{-1} = e_1 e_3 v_{-2} = e_1 e_3 e_5 v_{-3} = \ldots$. Любой вектор пространства V записывается в виде конечной линейной комбинации выражений вида

$$e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k} v_{-N} = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k} e_{2N+1} v_{-N-1} = \ldots$$

для достаточно большого N. Теперь *устремим N к бесконечности*, т.е. подставим вместо v_{-N} выражение $e_{2N+1} e_{2N+3} e_{2N+5} \ldots v_{-\infty}$ (совершенно формально). Получается следующее описание базисного представления.

Теорема 2.4.1. *Пусть $\widetilde{V}$ — векторное пространство с базисом, состоящим из бесконечных «мономов» $m = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{2N+1} e_{2N+3} \ldots v_{-\infty}$, в которых, начиная с некоторого места, идут подряд e_i с последовательными нечетными номерами $i = 2N+1, 2N+3, 2N+5, \ldots$, причем считается, что*

(i) *различные e_i коммутируют между собой (т.е. $e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_k} e_{i_l} \ldots v_{-\infty} = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{i_l} e_{i_k} \ldots v_{-\infty}$);*

(ii) *если перед стабильной частью $e_{2N+1} e_{2N+3} \ldots v_{-\infty}$ «монома» $m = e_{i_1} e_{i_2} \ldots e_{2N+1} e_{2N+3} \ldots v_{-\infty}$ встречается e_{i_k} с номером $i_k \geqslant 2N$, то $m = 0$ («нельзя уплотнять»).*

На пространстве $\widetilde{V}$ *действуют слева бесконечные выражения* $S_m = \sum_{\alpha+\beta=m} e_\alpha e_\beta$, $m \in \mathbb{Z}$. *Пусть* $V = \widetilde{V}/(S_m)\widetilde{V}$ — *факторпространство по этому действию. Тогда в пространстве* V *реализуется базисное представление алгебры* $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$, *причем элементы* e_i *действуют очевидным образом (умножением слева).*

Замечание 2.4.2. Символ $v_{-\infty}$ играет роль «экстремального вектора на бесконечности». Вектор v_{-N} аннулируется подалгеброй $\mathfrak{n}_+^{-N} = T_{-N}\mathfrak{n}_+T_N = \langle f_i, i > -2N\,; h_i, i > 0\,; e_i, i \geqslant 2N\rangle$. Если N стремится к бесконечности, то подалгебра $\mathfrak{n}_+^{-N}$ стремится к $\mathfrak{n}_+^{-\infty} = \langle f_i, i \in \mathbb{Z}\,; h_i, i > 0\rangle$. Поэтому естественно считать, что «вектор» $v_{-\infty}$ уничтожается подалгеброй $\mathfrak{n}_+^{-\infty}$. Но на самом деле $v_{-\infty}$ аннулируется большей подалгеброй $\hat{\mathfrak{b}} = \{f_i, h_i, i \in \mathbb{Z}\}$. Мы постараемся объяснить такую точку зрения в следующем пункте.

2.5. Естественно попытаться задать действие алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ на пространстве V теоремы 2.4.1 независимо от предыдущего изложения. Действие части $\langle h_i, i > 0\rangle$ алгебры $\mathfrak{n}_+^{-\infty}$ автоматически получается из условия $h_i(v_{-\infty}) = 0$. Например,

$$\begin{aligned} &h_i(e_1e_3e_5\ldots v_{-\infty})\\ &\quad= [h_i, e_1]e_3e_5\ldots v_{-\infty} + e_1h_ie_3e_5\ldots v_{-\infty}\\ &\quad= 2e_{i+1}e_3e_5\ldots v_{-\infty} + 2e_1e_{i+3}e_5\ldots v_{-\infty} + \ldots + e_1e_3e_5\ldots h_iv_{-\infty}\,. \end{aligned}$$

Все слагаемые, кроме последнего, равны нулю по правилу «нельзя уплотнять» из теоремы 2.4.1, а последнее слагаемое равно нулю из-за равенства $h_iv_{-\infty} = 0$. (Конечно, такие «рассуждения» просто выражают тот факт, что $h_iv_{-N} = 0$ для достаточно больших N.) Аналогично, действие операторов $f_i \in \mathfrak{n}_+^{-\infty}$ в силу условия $f_iv_{-\infty} = 0$ сводится к действию h_j.

Таким образом, осталось задать действие операторов h_i при $i < 0$. Удивительный (хоть и легко объяснимый) факт состоит в том, что и в этом случае h_i действуют по правилу $h_iv_{-\infty} = 0$ (иными словами, символ $v_{-\infty}$ можно опускать в записи «монома», так что конструкция 2.4.1 в каком-то смысле родственна конструкциям полубесконечных форм).

Приведем пример: вычисление дает $h_{-1}v = e_0v_{-1}$ в базисном представлении. С другой стороны,

$$h_{-1}(e_1e_3e_5\ldots v_{-\infty}) = 2e_0e_3e_5\ldots v_{-\infty} + 2e_1e_2e_5e_7\ldots v_{-\infty} + \ldots + e_1e_3\ldots h_{-1}v_{-\infty}\,.$$

Из соотношений $S_3e_5e_7\ldots v_{-\infty} = S_7e_7e_9\ldots v_{-\infty} = \ldots = 0$ следует, что

$$e_0e_3e_5\ldots v_{-\infty} = -e_1e_2e_5e_7\ldots v_{-\infty} = e_1e_3e_4e_7e_9\ldots v_{-\infty} = \ldots\,.$$

Таким образом, если обозначить $2e_0e_3e_5\ldots v_{-\infty} = a$, то

$$h_{-1}(e_1e_3e_5\ldots v_{-\infty}) = a - a + a - a + \ldots + e_1e_3e_5\ldots h_{-1}v_{-\infty}\,.$$

Сумму ряда $a - a + a - a + \ldots$ естественно положить равной $a/2$, что как раз равно $e_0e_3e_5e_7\ldots v_{-\infty} = e_0v_{-1} = h_{-1}v$. Поэтому мы должны считать, что действие h_{-1} подчиняется правилу $h_{-1}v_{-\infty} = 0$.

2.6. Работать с основным пространством W и пространством V из теоремы 2.4.1 становится гораздо проще, если выбрать в них базис из мономов. Назовем моном $e_{i_1}\dots e_{i_n}v\in W$ *приведенным*, если $i_1<i_2<\dots<i_n<0$ и, более того, $i_{k+1}-i_k\geqslant 2$ для всех k. Назовем «моном» $m=e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}\dots v_{-\infty}$ *приведенным*, если $i_{k+1}-i_k\geqslant 2$ для всех k.

Предложение 2.6.1. а) *Приведенные мономы образуют базис в W.*

б) *Приведенные «мономы» образуют базис в V.*

Пункт (а) легко вывести из теоремы 2.2.1; (б) тривиально следует из (а).

Из предложения 2.6.1(а) можно получить другое доказательство формулы (2.3.3) для характера пространства W.

Мы закончим этот пункт вычислением характера пространства V. Введем стандартные обозначения $(q)_k=(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^k)$, $(q)_\infty=\prod_{i=1}^{\infty}(1-q^i)$. Тогда

$$\operatorname{ch}W_{-N}=\operatorname{ch}(T_{-N}W)=T_{-N}\operatorname{ch}W=\sum_{n=-N}^{\infty}\frac{q^{n^2}z^n}{(q)_{n+N}}\quad(\text{см. }(2.1.1));$$

$$\operatorname{ch}V=\lim_{N\to\infty}\operatorname{ch}W_{-N}=\frac{1}{(q)_\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}q^{n^2}z^n. \tag{2.6.2}$$

Получилась известная формула характера бозонной реализации базисного представления.

2.7. Результаты пп. 2.2–2.6 легко обобщаются на другие неприводимые интегрируемые представления алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ со старшим весом. Мы приведем соответствующие формулировки.

В этом пункте V — неприводимое представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ со старшим весом $\boldsymbol{\lambda}=(0,l,k)$, где k,l — целые числа, $0\leqslant l\leqslant k$, v — вакуумный вектор и $W=U(\hat{\mathfrak{n}})v=(\mathbb{C}[e_{-1},e_{-2},\dots]/I)v$.

Теорема 2.2.1$'$. *Идеал I порожден полиномами e_{-1}^{k+1-l} и*

$$S_{-i}^{(k+1)}=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_{k+1}=-i}e_{\alpha_1}e_{\alpha_2}\dots e_{\alpha_{k+1}},\qquad i\geqslant k+1.$$

Доказательство теоремы будет дано в п. 3.4.

Замечание 2.2.2$'$. $e(z)^{k+1}=0$.

Имеет место следующий аналог (2.3.2):

$$W^*=\bigoplus_{m=0}^{\infty}W_m^*,$$

где

$$\begin{aligned}W_m^*\simeq\{&f(x_1,\dots,x_m)\,dx_1\dots dx_m,\ f\text{ симметричен},\\&f=0\text{ при }x_1=x_2=\ldots=x_{k+1}\ (\text{если }k+1\leqslant m)\\&\text{и при }x_1=x_2=\ldots=x_{k-l+1}=0\ (\text{если }k-l+1\leqslant m)\}\end{aligned}\tag{2.3.2$'$}$$

(функция равна нулю, как только сливаются $k+1$ частиц или $k+1-l$ частиц сливаются в нуле). Характер пространства W дается формулой

$$\operatorname{ch} W = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{N_1\geqslant\ldots\geqslant N_k\geqslant 0\\ N_1+\ldots+N_k=m}} \frac{z^{m+l/2} q^{N_1^2+\ldots+N_k^2+N_{k-l+1}+\ldots+N_k}}{(q)_{N_1-N_2}(q)_{N_2-N_3}\ldots(q)_{N_{k-1}-N_k}(q)_{N_k}}. \tag{2.3.3$'$}$$

Мы дадим набросок доказательства этого утверждения.

Для простоты будем считать, что $l=0$.

Теорема 2.7.1. *Характер пространства* $W_m^* = \{f(x_1,\ldots,x_m)\,dx_1\ldots dx_m$, f *— симметрический полином,* $f=0$ *при* $x_1=x_2=\ldots=x_{k+1}\}$ *с градуировкой* $\deg(x_1^{t_1}\ldots x_m^{t_m}\,dx_1\ldots dx_m)=\sum t_i+m$ *равен*

$$\operatorname{ch} W_m^* = \sum_{\substack{N_1\geqslant\ldots\geqslant N_k\geqslant 0\\ N_1+\ldots+N_k=m}} \frac{q^{N_1^2+\ldots+N_k^2}}{(q)_{N_1-N_2}(q)_{N_2-N_3}\ldots(q)_{N_{k-1}-N_k}(q)_{N_k}}.$$

Набросок доказательства. Пусть $p=(p_1,\ldots,p_s)$ — разбиение числа m на слагаемые, $p_1\geqslant\ldots\geqslant p_s>0$. Пусть $U_p=\{f(x_1,\ldots,x_m)\,dx_1\ldots dx_m$, f симметричен, и если одновременно $x_1=x_2=\ldots=x_{p_1}$, $x_{p_1+1}=\ldots=x_{p_1+p_2}$, $x_{p_1+p_2+1}=\ldots=x_{p_1+p_2+p_3},\ldots,x_{p_1+\ldots+p_{s-1}+1}=\ldots=x_m$, то $f(x_1,\ldots,x_m)=0\}\subset S^m\Omega^1\mathbb{C}$. Определим фильтрацию пространства $S^m\Omega^1\mathbb{C}$ подпространствами $F_p=\bigcap_{p'\geqslant p}U_{p'}$, где множество разбиений числа m упорядочено лексикографически. Очевидно, что $W_m^*=U_{p(k)}=F_{p(k)}$, где $p(k)=(k+1,1,1,\ldots,1)$.

Присоединенный градуированный фактор $(\operatorname{Gr} F)_p$ отождествляется с пространством полиномиальных форм $\varphi(z_1,\ldots,z_s)\,(dz_1)^{p_1}\ldots(dz_s)^{p_s}$ от переменных $z_1=x_1=x_2=\ldots=x_{p_1}$, $z_2=x_{p_1+1}=\ldots=x_{p_1+p_2}$, $\ldots$, $z_s=x_{p_1+\ldots+p_{s-1}+1}=\ldots=x_m$ (частицы слились в s групп по p_i штук в i-й группе), причем

1) если $p_i=p_j$, то φ симметрична по z_i и z_j;

2) φ обращается в нуль на диагонали $z_i=z_j$ с некоторой кратностью $\varkappa_{ij}$.

Кратность $\varkappa_{ij}$ можно вычислить, забыв про все переменные x_t, кроме двух групп переменных, соответствующих z_i и z_j. Пусть $p_i\geqslant p_j$. Рассматривая компоненту $(\operatorname{Gr} F)_{(p_i,p_j)}$ для фильтрации F на пространстве симметрических функций от p_i+p_j переменных, несложно убедиться в том, что $\varkappa_{ij}=2p_j$ ($=\deg\operatorname{Sym}\prod_{t=1}^{p_j}(x_t-x_{p_j+t})^2$, Sym — симметризация по $x_1,\ldots,x_{p_i+p_j}$). Таким образом,

$$(\operatorname{Gr} F)_p \simeq \Big\{\varphi(z_1,\ldots,z_s)\prod_{i<j}(z_i-z_j)^{2p_j}(dz_1)^{p_1}\ldots(dz_s)^{p_s},\ \text{где для каждого}\ r\in\mathbb{N}\quad \varphi\ \text{симметрична по переменным}\ z_i,\ \text{для которых}\ p_i=r\Big\}.$$

Пусть n_r — количество слагаемых разбиения p, равных r. Тогда

$$\operatorname{ch}(\operatorname{Gr} F)_p = \frac{q^{\sum_{i<j}2p_j+\sum_i p_i}}{\prod_r (q)_{n_r}} = \frac{q^{\sum_r N_r^2}}{(q)_{N_1-N_2}(q)_{N_2-N_3}\ldots(q)_{N_r-N_{r+1}}\ldots},$$

где $N_r = n_r + n_{r+1} + \ldots$ — слагаемые разбиения, транспонированного к p.

Суммируя по p и по m, получаем «тождество Гордона при $k = \infty$»:

$$\operatorname{ch} S^*\Omega^1\mathbb{C} = \frac{1}{(q)_\infty} = \sum_{\substack{(N_1\ldots N_r\ldots 0\ 0\ 0\ldots)\\ N_1\geqslant\ldots\geqslant N_t=0}} \frac{q^{\sum_r N_r^2}}{(q)_{N_1-N_2}(q)_{N_2-N_3}\cdots}. \tag{2.7.2}$$

Интересующий нас характер пространства W_m^* получается суммированием $\operatorname{ch}(\operatorname{Gr} F)_p$ по всем $p < p(k)$, т.е. $p_i \leqslant k$ при всех i. В транспонированном к p разбиении $N_{k+1} = N_{k+2} = \ldots = 0$, что и дает формулу 2.7.1.

Замечание 2.7.3. Матрица квадратичной формы

$$\sum_{r=1}^{k}(n_r + n_{r+1} + \ldots + n_k)^2 = \sum_r r n_r^2 + \sum_{r<t} 2 r n_r n_t$$

обратна к симметризованной матрице Картана

$$\widetilde{B}_k = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \ldots & 0\\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots\\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0\\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1\\ 0 & \ldots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, если ввести обозначение

$$\Psi_A(q) = \sum_{n_1,\ldots,n_k\geqslant 0} \frac{q^{\sum A_{ij} n_i n_j}}{(q)_{n_1}\ldots(q)_{n_k}},$$

то мы доказали, что $\operatorname{ch} W(q,1) = \Psi_{\widetilde{B}_k^{-1}}(q)$.

Теорема 2.4.1$'$. *Неприводимое представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ со старшим весом $\boldsymbol{\lambda}$ реализуется в факторпространстве $\widetilde{V}/(S_i^{(k+1)})_{i\in\mathbb{Z}}\widetilde{V}$, где $\widetilde{V}$ — пространство с базисом, состоящим из «мономов» $e_{i_1}e_{i_2}\ldots e_{2N}^l e_{2N+1}^{k-l} e_{2N+2}^l e_{2N+3}^{k-l}\ldots$, причем*

(i) *различные e_i коммутируют,*

(ii) *если перед стабильной частью $e_{2N}^l e_{2N+1}^{k-l}\ldots$ (или $e_{2N+1}^{k-l}e_{2N+2}^l\ldots$) «монома» $m = e_{i_1}e_{i_2}e_{i_3}\ldots$ встречается e_{i_j} с $i_j \geqslant 2N$ (соответственно с $i_j \geqslant 2N+1$), то $m = 0$.*

Элементы $e_i \in \widehat{\mathfrak{sl}}_2$ действуют на V умножением слева.

Предложение 2.6.1$'$. *Назовем моном $e_{i_1}\ldots e_{i_m}v \in W$ ($e_{i_1}e_{i_2}\cdots \in V$) приведенным, если $i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_m < 0$, $i_{m-k+l} < -1$ и $i_{j+k} - i_j \geqslant 2$ при всех j (соответственно $i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots$ и $i_{j+k} - i_j \geqslant 2$ при всех j). Тогда приведенные мономы образуют базис в W (соответственно в V).*

Наконец, выпишем формулу характера пространства V:

$$\operatorname{ch} V = \frac{1}{(q)_\infty} \sum_{N_1\geqslant\ldots\geqslant N_k\in\mathbb{Z}} \frac{q^{N_1^2+\ldots+N_k^2+N_{k-l+1}+\ldots+N_k} z^{N_1+\ldots+N_k+l/2}}{(q)_{N_1-N_2}(q)_{N_2-N_3}\cdots(q)_{N_{k-1}-N_k}}. \tag{2.6.2$'$}$$

Замечание 2.7.4. Полученная формула характера, как легко видеть, совпадает с «парафермионной» формулой из статьи [3], имеющей в случае $l = 0$ вид

$$\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=0}^{\infty} q^{i-j^2/k}\dim V_{(-i,2j,1)} = \frac{1}{(q)_\infty}\,\Psi_{A_{k-1}^{-1}}(q)$$

в обозначениях 2.7.3 (A_{k-1}^{-1} — обратная матрица к матрице Картана A_{k-1}).

§3. Полубесконечные клетки Шуберта: случай $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2$

3.1. Пусть $G = SL(2,\mathbb{C})$, $\widehat{G} = \widetilde{SL}(2,\mathbb{C}[t,t^{-1}]])$ — центральное расширение (с помощью $\mathbb{C}^*$) группы токов со значениями в G, $\mathbf{B}_+$ — борелевская подгруппа в $\widehat{G}$ с алгеброй Ли $\mathfrak{b}_+$ и $F = \widehat{G}/\mathbf{B}_+$ — многообразие флагов группы $\widehat{G}$. Мы будем смотреть на F как на бесконечномерное комплексное алгебраическое многообразие.

Неприводимое интегрируемое представление V алгебры $\hat{\mathfrak{g}}$ со старшим весом $\boldsymbol{\lambda}$ реализуется в пространстве $H^0(F, L_{\boldsymbol{\lambda}})^*$, где $L_{\boldsymbol{\lambda}} = \widehat{G}\times_{\mathbf{B}_+}\mathbb{C}_{(-\boldsymbol{\lambda})}$ — голоморфное линейное расслоение Бореля–Вейля на F [5, 6].

Основному подпространству $W \subset V$ из §2 соответствует *основное подмногообразие* $M = \overline{\widehat{N}\cdot\mathbf{1}} \subset F$ — замыкание орбиты единичного класса смежности под действием группы $\widehat{N}$ токов со значениями в верхнетреугольных матрицах из $SL(2,\mathbb{C})$. Отображение вложения $W \to V$ двойственно к отображению ограничения сечений $H^0(F, L_{\boldsymbol{\lambda}}) \to H^0(M, L_{\boldsymbol{\lambda}})$. Чтобы обосновать это утверждение, заметим, что $M = \varinjlim M_n$, где $M_n = \overline{\mathbf{B}_+^n\cdot\mathbf{1}}$, $\mathbf{B}_+^n = T_n\mathbf{B}_+T_{-n}$ (предел в смысле алгебраической геометрии), а аналогичный факт для конечномерного многообразия M_n (и алгебры $\mathfrak{b}_+^n$ вместо $\hat{\mathfrak{n}}$) ничем не отличается от хорошо известной теоремы для многообразия флагов конечномерной комплексной полупростой группы Ли [15, 16]. Наше утверждение получается теперь переходом к пределу по n.

Точно так же обосновывается обращение в нуль высших групп когомологий многообразия M с коэффициентами в $L_{\boldsymbol{\lambda}}|_M$, а равно и возможность применения к паре $(M, L_{\boldsymbol{\lambda}}|_M)$ формулы Атьи–Ботта–Лефшеца[1] для неподвижных точек действия максимального тора $\mathbf{T} = \mathbb{T}\times\mathbb{T}\times\mathbb{T}$ группы $\mathbb{T}\ltimes\widehat{SU}(2)$ — «компактной формы» группы $\mathbb{C}^*\ltimes\widehat{G}$. (Лишний множитель $\mathbb{C}^*$ соответствует градуировке по энергии на V и букве q в формулах характера.)

Комбинируя формулу Лефшеца с обращением в нуль $H^i(M, L_{\boldsymbol{\lambda}}|_M)$ при $i > 0$, получаем следующую формулу характера пространства W:

$$\operatorname{ch} W = \sum_{\omega\in W_{\mathrm{aff}}\cap M}\frac{e^{i\omega\cdot\boldsymbol{\lambda}}}{\prod\limits_{\mu\ —\ \text{вес}\ T_\omega M}(1-e^{i\mu})}\,. \tag{3.1.1}$$

(Напомним, что группа Вейля $W_{\mathrm{aff}} = N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ вложена в $F \simeq (\mathbb{T}\ltimes\widehat{SU}(2))/\mathbf{T}$.)

[1] Несмотря на то, что многообразия M_n особые, для них можно написать некоторый вариант формулы Атьи–Ботта–Лефшеца. См. по этому поводу п. 3.5.

3.2. Теорема 3.2.1 (структура многообразия M).

1) *M неособо.*

2) $M \cap W_{\mathrm{aff}} = \{T_n : n \geqslant 0, S_n : n > 0\}$.

3) *Множество весов действия максимального тора* $\mathbf{T}$ *на касательном пространстве к* M *в точке* $\omega \in W_{\mathrm{aff}} \cap M$ *является подмножеством в множестве корней алгебры* $\hat{\mathfrak{g}}$. *Соответствующие корневые векторы суть*

для $\omega = T_n$, $n \geqslant 0$: $\{e_{-i},\ i \geqslant 2n+1;\ f_i,\ n+1 \leqslant i \leqslant 2n;\ h_{-i},\ 1 \leqslant i \leqslant n\}$;

для $\omega = S_n$, $n > 0$: $\{e_{-i},\ i \geqslant 2n;\ f_i,\ n \leqslant i \leqslant 2n-1;\ h_{-i},\ 1 \leqslant i \leqslant n-1\}$.

4) *Стратификация многообразия флагов орбитами группы* $\mathbf{N}_-$ *индуцирует стратификацию многообразия* M: $M = \bigsqcup_{\omega \in W_{\mathrm{aff}} \cap M} Y_\omega$, $Y_\omega = \mathbf{N}_- \omega \cap M$, *причем*

(i) Y_ω — *стягиваемое подмногообразие,* $\operatorname{codim} Y_{T_n} = \operatorname{codim} Y_{S_n} = n$;

(ii) Y_{T_n} *и* $Y_{S_{n+1}}$ *суть n-параметрические семейства орбит группы* $\widehat{N}$ *коразмерности* $2n$ *и* $2n+1$ *соответственно, причем трансверсаль к семейству* Y_ω ($\omega = T_n$ *или* S_{n+1}) *задается формулой*

$$(d_1, \ldots, d_n) \mapsto \begin{pmatrix} (1 + d_1 t^{-1} + \ldots + d_n t^{-n})^{-1} & 0 \\ 0 & 1 + d_1 t^{-1} + \ldots + d_n t^{-n} \end{pmatrix} \cdot \omega\,;$$

(iii) $\overline{Y}_{T_n} = \bigcup_{m \geqslant n} Y_{T_m} \bigcup_{m > n} Y_{S_m}$, $\overline{Y}_{S_n} = \bigcup_{m \geqslant n} Y_{S_m} \bigcup_{m \geqslant n} Y'_{T_m}$, *где* Y'_{T_m} — *подсемейство $\widehat{N}$-орбит в* Y_{T_m} *коразмерности* 1, *состоящее из орбит с параметром* $d_m = 0$.

Для доказательства теоремы выберем такие представители классов смежности $\omega \in W_{\mathrm{aff}} = N(\mathbf{T})/\mathbf{T}$ (которые также обозначим через ω): $T_n = \begin{pmatrix} t^{-n} & 0 \\ 0 & t^n \end{pmatrix}$, $S_n = \begin{pmatrix} 0 & -t^{-n} \\ t^n & 0 \end{pmatrix}$. Многообразие F покрывается координатными картами: $F = \bigcup_{\omega \in W_{\mathrm{aff}}} U_\omega$, $U_\omega = \omega \mathbf{N}_- \cdot \mathbf{1} \simeq \mathbf{N}_-$. Прямое вычисление в координатах U_ω доказывает все пункты теоремы.

Пусть, например, $\omega = T_n = \begin{pmatrix} t^{-n} & 0 \\ 0 & t^n \end{pmatrix}$. Элемент $\omega \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \omega \mathbf{N}_- \cdot \mathbf{1}$, где $a = 1 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \ldots$, $b = b_1 t^{-1} + b_2 t^{-2} + \ldots$, $c = c_0 + c_1 t^{-1} + \ldots$, $d = 1 + d_1 t^{-1} + \ldots$, $ad - bc = 1$, принадлежит $\widehat{N} \cdot \mathbf{1}$ тогда и только тогда, когда для некоторого ряда Лорана $p = p_1 t^{-1} + p_2 t^{-2} + \ldots$ матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & p \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t^{-n} & 0 \\ 0 & t^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} at^{-n} + ct^n p & bt^{-n} + dt^n p \\ ct^n & dt^n \end{pmatrix} \tag{3.2.2}$$

лежит в $\mathbf{B}_+$. Если $n < 0$, то ряд $dt^n = t^n + d_1 t^{n-1} + \ldots$ не может лежать в $\mathbb{C}[t]$; поэтому $\widehat{N} \cdot \mathbf{1} \cap U_\omega = \varnothing$. Разберем подробно случай $n = 1$, чтобы проиллюстрировать феномен появления мнимых корней в касательном пространстве $T_\omega M$. Условие «матрица (3.2.2) лежит в $\mathbf{B}_+$» в этом случае означает, что

$$c = c_0, \qquad d = 1 + d_1 t^{-1},$$
$$t^{-1} + a_1 t^{-2} + a_2 t^{-3} + \ldots + c_0(p_1 + p_2 t^{-1} + \ldots) = c_0 p_1,$$
$$b_1 t^{-2} + b_2 t^{-3} + \ldots + (t + d_1)(p_1 t^{-1} + p_2 t^{-2} + \ldots) = p_1.$$

Если $c_0 = 0$, то третье равенство не может выполняться и p не существует. Если же $c_0 \neq 0$, то третье равенство однозначно определяет p_2, p_3, ..., например, $p_2 = -1/c_0$. Приравнивая коэффициенты при t^{-1} в четвертом равенстве, получаем $p_1 d_1 = -p_2 = 1/c_0$. Поэтому необходимо также, чтобы $d_1 \neq 0$. Обратно, если $c_0 \neq 0$, $d_1 \neq 0$, то определим p_i формулами

$$p_1 = \frac{1}{c_0 d_1}, \qquad p_2 = -\frac{1}{c_0}, \qquad p_i = -\frac{a_{i-2}}{c_0} \quad \text{при } i = 3, 4, \dots . \tag{3.2.3}$$

Матрица (3.2.2) тогда будет иметь вид $\begin{pmatrix} c_0 p_1 & x \\ c_0 t & d_1 + t \end{pmatrix}$, и ее определитель $c_0 p_1 (d_1 + t) - x c_0 t$ равен 1, откуда $x = p_1$ и матрица лежит в $\mathbf{B}_+$, что и требовалось.

Таким образом,

$$\widehat{N} \cdot \mathbf{1} \cap U_{T_1} = \left\{ T_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 + a_1 t^{-1} + \dots & b_1 t^{-1} + \dots \\ c_0 & 1 + d_1 t^{-1} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{1} : c_0, d_1 \neq 0 \right\},$$

$$M \cap U_{T_1} = \left\{ T_1 \cdot \begin{pmatrix} a & b_1 t^{-1} + \dots \\ c_0 & 1 + d_1 t^{-1} \end{pmatrix} \cdot \mathbf{1} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b_1 t^{-3} + b_2 t^{-4} + \dots \\ c_0 t^2 & 1 + d_1 t^{-1} \end{pmatrix} \cdot T_1 \right\}.$$

В частности, $M \cap U_{T_1}$ неособо; кроме того, доказан п. 3) для $\omega = T_1$.

Гиперплоскость $\{c_0 = 0\} \subset M \cap U_{T_1}$ есть

$$Y_{T_1} = \bigcup_{d_1 \in \mathbb{C}} \widehat{N} \cdot \begin{pmatrix} (1 + d_1 t^{-1})^{-1} & 0 \\ 0 & 1 + d_1 t^{-1} \end{pmatrix} \cdot T_1 .$$

Гиперплоскость $\{d_1 = 0\}$ является пересечением $U_{T_1} \cap \overline{Y}_{S_1}$; это легко увидеть, если принять во внимание, что действие копии группы $SL(2, \mathbb{C})$ с алгеброй Ли $\langle e_{-2}, f_2, h_0 - 2c \rangle \subset \hat{\mathfrak{g}}$ на F индуцирует голоморфное вложение $SL(2, \mathbb{C})/B_+ \simeq \mathbb{C}P^1 \hookrightarrow M$, переводящее $0 \in \mathbb{C}P^1$ в T_1, z в $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z t^2 & 1 \end{pmatrix} \cdot T_1$, а ∞ в $S_2 T_1 = S_1$.

Приведенное только что соображение подсказывает способ компактно записать информацию теоремы (3.2.1) в виде картинки. На рис. 2 отрезки прямых символически изображают проективные прямые $\mathbb{C}P^1 \subset M$, порожденные действием e_{-i}, соединяющие точки ω и $S_i \omega$ из $W_{\text{aff}} \cap M$.

3.3. Комбинаторные следствия теоремы 3.2.1. Подставляя результаты теоремы 3.2.1 в формулу (3.1.1), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} W = \sum_{n=0}^{\infty} & \frac{e^{i(T_n \cdot \boldsymbol{\lambda})}}{(1-q)\dots(1-q^n)(1-(q^{n+1}z)^{-1})\dots(1-(q^{2n}z)^{-1})(1-q^{2n+1}z)\dots} \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i(S_n \cdot \boldsymbol{\lambda})}}{(1-q)\dots(1-q^{n-1})(1-(q^n z)^{-1})\dots(1-(q^{2n-1}z)^{-1})(1-q^{2n}z)\dots} \\ & = \frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1-q^i z)} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}} z^n [e^{iT_n \cdot \boldsymbol{\lambda}} - e^{iS_{n+1} \cdot \boldsymbol{\lambda}} q^{2n+1} z] \prod_{i=1}^{n} \frac{1-q^i z}{1-q^i}. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

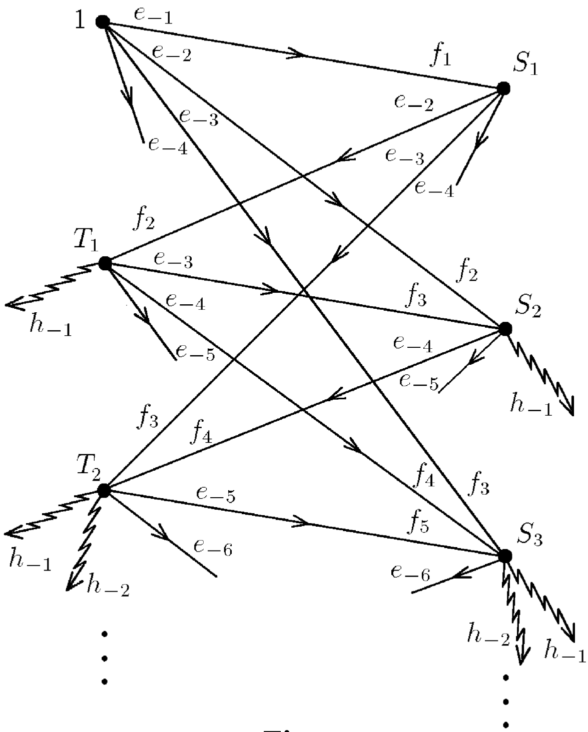

Fig. 2

Сравнение формулы (3.3.1) с (2.3.3′) дает ряд интересных комбинаторных тождеств. Мы выпишем их при $z = 1$:

Теорема 3.3.2. а) (Пентагональная теорема Эйлера)

$$\prod_{m=1}^{\infty}(1-q^m) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{3n^2+n}{2}}.$$

б) (Тождества Роджерса–Рамануджана)

$$\text{(I)}\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}}{(q)_n} = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5m+1})(1-q^{5m+4})};$$

$$\text{(II)}\qquad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2+n}}{(q)_n} = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(1-q^{5m+2})(1-q^{5m+3})}.$$

в) (Тождества Гордона) *Пусть* $0 \leqslant l \leqslant k$ *— целые числа*; *тогда*

$$\sum_{N_1\geqslant\ldots\geqslant N_k\geqslant 0}\frac{q^{N_1^2+\ldots+N_k^2+N_{k-l+1}+\ldots+N_k}}{(q)_{N_1-N_2}\ldots(q)_{N_{k-1}-N_k}(q)_{N_k}} = \prod_{m>0\,;\ m\not\equiv 0,\pm(k-l+1)\,\mathrm{mod}\,2k+3}\frac{1}{1-q^m}.$$

Пункт (а) соответствует весу $\boldsymbol{\lambda} = 0$, п. (б) — весам $\boldsymbol{\lambda} = (0,0,1)$ и $(0,1,1)$, п. (в) — весу $\boldsymbol{\lambda} = (0,l,k)$.

Разложение в произведение правой части тождеств Гордона

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n q^{\frac{(2k+3)n^2+(2l+1)n}{2}} = \prod_{m\equiv 0\,,\pm(k-l+1)\bmod 2k+3}(1-q^m)$$

является частным случаем тройного тождества Якоби

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-1)^n u^{\frac{n(n+1)}{2}} v^{-n} = (1-v)\prod_{m=1}^{\infty}(1-u^m v^{-1})(1-u^m)(1-u^m v)$$

при $u=q^{2k+3}$, $v=q^{k-l+1}$.

Теорема 3.3.2(в) вместе с предложением $2.6.1'$ приводит к классическим фактам теории разбиений ([17, теорема 7.5]).

3.4. Разложение $M=\bigsqcup_{\omega\in W_{\mathrm{aff}}\cap M} Y_\omega$ из теоремы 3.2.1 не является стратификацией в строгом смысле этого слова: граница страта Y_{S_n} не содержится в объединении стратов большей коразмерности. Чтобы получить настоящую стратификацию, нужно несколько измельчить страты: например, разбить Y_{T_1} в объединение двух стратов $(Y_{T_1}\setminus Y'_{T_1})\cup Y'_{T_1}$ коразмерности 1 и 2 и т.д. Подправленной стратификации многообразия M соответствует, как обычно, резольвента (Кузена) $\hat{\mathfrak{n}}$-модуля $H^0(M, L_{\boldsymbol\lambda})$, состоящая из пространств распределений, сосредоточенных на стратах. Характер резольвенты задается формулой Лефшеца (3.3.1), из которой видно, что резольвента устроена довольно сложно. Тем не менее ее начальные члены, соответствующие стратам коразмерности 0 и 1, поддаются явному описанию, и это приводит к доказательству теоремы $2.2.1'$.

Пусть $U=Y_1=\widehat{N}\cdot\mathbf{1}$ — открытый плотный страт многообразия M, $U_1=U_{S_1}\cap M$ и $U_2=(U_{T_1}\cap M)\setminus\overline{Y}_{S_1}$ — открытые окрестности стратов Y_{S_1} и $Y_{T_1}\setminus Y'_{T_1}$ коразмерности 1 соответственно, $U_1^*=U_1\setminus Y_{S_1}$ и $U_2^*=U_2\setminus Y_{T_1}$. Имеем $U_1^*=U_1\cap U$, $U_2^*=U_2\cap U$ (см. доказательство теоремы 3.2.1).

Начиная с этого места, фиксируем расслоение $L_{\boldsymbol\lambda}$, $\boldsymbol\lambda=(0,l,k)$, и будем писать $H^0(Z)$ вместо $H^0(Z,L_{\boldsymbol\lambda})$. По теореме Хартогса последовательность отображений ограничения

$$0\to H^0(M)\to H^0(U)\to H^0(U_1^*)/H^0(U_1)\;\oplus\;H^0(U_2^*)/H^0(U_2)$$

точна. Двойственная последовательность имеет вид

$$0\leftarrow W\xleftarrow{\pi}\mathbb{C}[e_{-1},e_{-2},\dots]\xleftarrow{(\varphi_1,\varphi_2)}M_1\;\oplus\;M_2,$$

где π — естественная проекция, $M_i=[H^0(U_i^*)/H^0(U_i)]^*$.

Теорема $2.2.1'$ вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.4.1. (i) M_1 — *свободный* $\mathbb{C}[e_{-1},e_{-2},\dots]$-*модуль ранга* 1 *с образующей* τ, $\varphi_1(\tau)=e_{-1}^{k-l+1}$;

(ii) $\mathbb{C}[e_i]$-*модуль* M_2 *порожден элементами* σ_i, $i\in\mathbb{Z}$, $\varphi_2(\sigma_i)=S_i^{(k+1)}$.

Доказательство леммы — прямое вычисление. (Ср. [5, лемма 14.5.5]; вычисления п. (ii) основаны на формуле замены координат (3.2.3).)

3.5. В заключение скажем несколько слов о формуле Лефшеца для особых многообразий с целью обоснования некоторых утверждений §3.1. Материал этого пункта также пригодится в §4.

Пусть X — компактное комплексное алгебраическое многообразие (возможно, особое) с локально свободным пучком L ранга 1, а $\mathbf{T}$ — тор, действующий голоморфными преобразованиями пары (X, L) с изолированными неподвижными точками. Естественным аналогом формулы Лефшеца является формула

$$\sum(-1)^i \operatorname{ch}(\mathbf{T}, H^i(X, L)) = \sum_{\mathbf{T}x=x} \operatorname{ch}(\mathbf{T}, \mathcal{O}_x(L)) \tag{3.5.1}$$

($\mathcal{O}_x(L)$ — пространство ростков сечений пучка L в точке x) [18].

Например, пусть X содержится в неособом многообразии Y, $\tilde{L}$ — голоморфное линейное расслоение на Y, $L = \widetilde{L}|_X$, и тор $\mathbf{T}$ действует на $(Y, \widetilde{L})$, сохраняя X. Пусть $x \in X$ — неподвижная точка тора $\mathbf{T}$, $(z_1, \ldots, z_n)$ — локальные координаты на Y с нулем в точке x, в которых действие $\mathbf{T}$ на кокасательном пространстве T_x^*Y диагонализируется с весами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, и X является локально полным пересечением гиперповерхностей $f_j(z_1, \ldots, z_n) = 0$, $j = 1, \ldots, m$, f_j однородны относительно действия $\mathbf{T}$ с весом μ_j (и образуют регулярную последовательность в локальном кольце $\mathcal{O}_x(Y)$). Тогда локальное слагаемое из формулы (3.5.1) имеет вид

$$\operatorname{ch}(\mathbf{T}, \mathcal{O}_x(L)) = \frac{e^{i\nu}\prod_{j=1}^m (1 - e^{i\mu_j})}{\prod_{k=1}^n (1 - e^{i\lambda_k})} \tag{3.5.2}$$

(ν — вес действия $\mathbf{T}$ на слое L_x), что следует из весового разложения комплекса Кошуля.

Рассмотрим ситуацию §3.1: $X = M_n$, $Y = F$, $\tilde{L} = L_{\boldsymbol{\lambda}}$, $\mathbf{T}$ — максимальный тор группы токов. В данном случае формула (3.5.1), как известно, совпадает с формулой Демазюра [16, 19] для элемента T_n аффинной группы Вейля. Разложим T_n в произведение отражений, $T_n = S_{2n}S_{2n-1}\ldots S_2S_1$, соответствующих корням $\alpha > 0$, для которых $(T_n)^{-1}\alpha < 0$. (Если переставить в этом разложении S_2 через S_1, S_3 через S_2S_1 и т.д., то получится приведенное простое разложение T_n.) Формула Демазюра является результатом применения к $e^{-i\boldsymbol{\lambda}}$ последовательности операторов $\Sigma_{S_{2n}}\Sigma_{S_{2n-1}}\ldots\Sigma_{S_2}\Sigma_{S_1}$ на групповой алгебре решетки весов тора $\mathbf{T}$, где

$$\Sigma_{S_\alpha}(\chi) = \frac{\chi}{1 - e^{i\alpha}} + \frac{S_\alpha \cdot \chi}{1 - e^{-i\alpha}}$$

(S_α — отражение относительно корня $\alpha > 0$).

Индукция по n дает

$$\begin{aligned}
&\operatorname{ch} H^0(M_n, L_{\boldsymbol{\lambda}})^* \\
&\quad = \operatorname{ch}(\mathbb{C}[e_{-1}, e_{-2}, \ldots, e_{-2n}]v) \\
&\quad = \sum_{m=0}^{2n-1} \frac{e^{iT_m\cdot\boldsymbol{\lambda}} \cdot \binom{2n-1}{m}_q}{(1-(q^{m+1}z)^{-1})\ldots(1-(q^{2m}z)^{-1})(1-q^{2m+1}z)\ldots(1-q^{m+2n}z)} \\
&\qquad + \sum_{m=1}^{2n} \frac{e^{iS_m\cdot\boldsymbol{\lambda}} \cdot \binom{2n-1}{m-1}_q}{(1-(q^{m}z)^{-1})\ldots(1-(q^{2m-1}z)^{-1})(1-q^{2m}z)\ldots(1-q^{m+2n-1}z)}
\end{aligned} \tag{3.5.3}$$

($\binom{2n-1}{j}_q = \frac{(q)_{2n-1}}{(q)_j(q)_{2n-1-j}}$ есть q-биномиальный коэффициент.)

Наличие числителя $(1-q^{2n-j})\dots(1-q^{2n-1})$ в локальных слагаемых формулы (3.5.3) означает, что многообразия M_n особые.

При $n\to\infty$ формула (3.5.3) формально сходится к (3.3.1). В этом смысле естественно считать, что формула (3.3.1) совпадает с формулой Демазюра для «бесконечного элемента»

$$\omega_0 = \lim_{n\to\infty} T_n = \dots S_4S_3S_2S_1 = S_1S_0S_1S_0\dots$$

аффинной группы Вейля.

§4. Случай $\mathfrak{g}=\mathfrak{sl}_3$: формула Лефшеца и связь с $\mathfrak{sl}_2$[2]

4.1. Простые корни алгебры $\mathfrak{sl}_3$ обозначим через α и β, а старший корень — через $\gamma=\alpha+\beta$. Соответствующие корневые векторы — это e^α, e^β и $e^\gamma=[e^\alpha,e^\beta]$. Противоположные корневые векторы суть f^α, f^β, f^γ. Кокорни — это h^α, h^β и $h^\gamma=h^\alpha+h^\beta$. Базис в $\widehat{\mathfrak{sl}}_3$ составляют $e_i^\alpha=e^\alpha\otimes t^i$, $e_i^\beta=e^\beta\otimes t^i$ и т.д., а также K.

Мы будем стараться придерживаться тех же обозначений, что и в §2–3 для аналогичных объектов. Так, $\boldsymbol{\lambda}=(m,\lambda,k)$ — вес алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_3$ (m — энергия, λ — вес алгебры $\mathfrak{sl}_3$, $k=\boldsymbol{\lambda}(K)$), V — неприводимое представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_3$ со старшим весом $\boldsymbol{\lambda}$, $\widehat{G}=\widetilde{SL}(3,\mathbb{C}[t,t^{-1}]])$, $L_{\boldsymbol{\lambda}}=\widehat{G}\times_{\mathbf{B}_+}\mathbb{C}_{(-\boldsymbol{\lambda})}$ — расслоение Бореля–Вейля на $F=\widehat{G}/\mathbf{B}_+$ и $V\simeq H^0(F,L_{\boldsymbol{\lambda}})^*$.

Аффинная группа Вейля $W_{\mathrm{aff}}=W\ltimes\check{T}=S_3\ltimes\mathbb{Z}^2$ содержит решетку $\check{T}=\mathrm{Hom}(\mathbb{T},T)\subset\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$, где T — максимальный тор в $SU(3)$ с алгеброй Ли $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$ (сдвиг на $mh^\alpha+nh^\beta$ будем обозначать $T_{m\alpha+n\beta}$), а также отражения относительно корней $(i,\alpha,0)$, $(i,\beta,0)$, $(i,\gamma,0)$ (обозначаемые соответственно S^α_{-i}, S^β_{-i}, S^γ_{-i}). Имеем $S_0^\alpha=S^\alpha\in W$, $S_n^\alpha=T_{n\alpha}\circ S^\alpha$ и аналогично для β и γ. Простым корням α, β и $(1,-\gamma,0)$ алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_3$ соответствуют отражения S^α, S^β и S_1^γ.

Элементы $\xi\in\check{T}$ и $\omega\in W$ действуют на весах по формулам

$$\begin{aligned}\xi\cdot(m,\lambda,k)&=(m-\lambda(\xi)-k\langle\xi,\xi\rangle/2,\ \lambda+k\xi^*,\ k),\\ \omega\cdot(m,\lambda,k)&=(m,\omega\cdot\lambda,k).\end{aligned}\tag{4.1.1}$$

Здесь ξ^* — образ ξ при изоморфизме $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\to\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$, индуцированном каноническим скалярным произведением $\langle\ ,\ \rangle$ на $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$.

4.2. Пусть V — базисное представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_3$, v — вакуумный вектор, $\hat{\mathfrak{n}}=\mathfrak{n}_+\otimes\mathbb{C}[[t,t^{-1}]$ и $W=U(\hat{\mathfrak{n}})v\subset V$. Как и в §2.2, нас интересует левый идеал I в $U(\hat{\mathfrak{n}}^{\mathrm{out}})$, аннулирующий v. Имеем $f_0^\alpha v=f_0^\beta v=(e_{-1}^\gamma)^2v=0$ (это сингулярные векторы в модуле Верма $M_{\boldsymbol{\lambda}_0}$); поэтому следующие элементы лежат в I:

[2]Данный параграф носит конспективный характер. Доказательства большей части теорем мы опускаем.

$$(e^{\gamma}_{-1})^2, \quad \operatorname{ad} f^{\alpha}_0 (e^{\gamma}_{-1})^2 = \pm 2 e^{\beta}_{-1} e^{\gamma}_{-1}, \quad \operatorname{ad} f^{\beta}_0 (e^{\gamma}_{-1})^2 = \pm 2 e^{\alpha}_{-1} e^{\gamma}_{-1},$$
$$\operatorname{ad} f^{\alpha}_0 (e^{\beta}_{-1} e^{\gamma}_{-1}) = \pm (e^{\beta}_{-1})^2, \quad \operatorname{ad} f^{\beta}_0 (e^{\alpha}_{-1} e^{\gamma}_{-1}) = \pm (e^{\alpha}_{-1})^2.$$

Коммутируя эти пять выражений с оператором $L_{-1} \in \mathrm{Vir}$ и пользуясь соотношением $L_{-1} v = 0$, получаем пять серий элементов идеала I, которые можно в обозначениях замечания 2.2.2 сокращенно записать так:

$$e^{\alpha}(z)^2 = e^{\alpha}(z)\, e^{\gamma}(z) = e^{\gamma}(z)^2 = e^{\gamma}(z)\, e^{\beta}(z) = e^{\beta}(z)^2 = 0\,. \tag{4.2.1}$$

Теорема 4.2.2. *Левый идеал I порожден коэффициентами степеных рядов* (4.2.1) — *выражениями* $R_m = \sum_{i+j=m} e^{\alpha}_i e^{\alpha}_j$, $S_m = \sum_{i+j=m} e^{\alpha}_i e^{\gamma}_j$ *и т.д.*

Замечание 4.2.3. На самом деле, как и в замечании 2.2.2, бесконечные выражения R_m, S_m и т.д. действуют нулем на любой вектор пространства V.

По аналогии с (2.3.3) и (2.6.2) естественно предположить, что характер пространства W задается формулой

$$\operatorname{ch} W = \sum_{a,b \geqslant 0} \frac{q^{a^2 - ab + b^2} z_1^a z_2^b}{(q)_a (q)_b} \tag{4.2.4}$$

(две переменные z_1 и z_2 соответствуют двум простым корням алгебры $\mathfrak{sl}_3$; ср. (4.1.1)), или $\operatorname{ch} W(q,1,1) = \Psi_{\frac{1}{2}A_2}(q)$ (см. замечание 2.7.3).

Доказательство формулы (4.2.4).

Предложение 4.2.5. *Пусть $\tilde{I} \subset S(\hat{\mathfrak{n}}^{\mathrm{out}})$ — присоединенный градуированный фактор идеала I относительно фильтрации Пуанкаре–Биркгофа–Витта на $U(\hat{\mathfrak{n}}^{\mathrm{out}})$. Тогда $\tilde{I}$ порожден теми же соотношениями* (4.2.1).

Теперь рассуждения с двойственным пространством к $\widetilde{W} = S(\hat{\mathfrak{n}}^{\mathrm{out}})/\tilde{I}$, аналогичные рассуждениям п. 2.3, дают

$$\operatorname{ch} \widetilde{W}^* = \sum_{r,s,t \geqslant 0} \frac{q^{r^2+s^2+t^2+rs+st} z_1^{r+s} z_2^{s+t}}{(q)_r (q)_s (q)_t}\,.$$

Используя технику q-биномиальных коэффициентов, несложно преобразовать полученную формулу к виду (4.2.4). □

Изложенные результаты обобщаются на случай представления со старшим весом $\boldsymbol{\lambda} = (0,0,k)$: имеется $2k+3$ серий соотношений типа $e^{\alpha}(z)^i e^{\gamma}(z)^{k+1-i} = 0$ и т.д. Формула характера пространства W выглядит так:

$$\operatorname{ch} W(q,1,1) = \Psi_{\frac{1}{2}A_2 \otimes \widetilde{B}_k^{-1}}(q). \tag{4.2.6}$$

В общем случае $\boldsymbol{\lambda} = (0, \lambda, k)$ в формуле характера пространства W в показатель при q к квадратичной форме $\frac{1}{2}A_2 \otimes \widetilde{B}_k^{-1}$ добавляются линейные члены.

4.3. Многообразие M и формула Лефшеца. Чтобы немного упростить вычисления, ограничимся представлениями V со старшим весом $\boldsymbol{\lambda} = (0,0,k)$, k — натуральное число. В этом случае расслоение $L_{\boldsymbol{\lambda}}$ тривиально

вдоль слоев проекции $\pi : F \to P$ на грассманиан $P = \widehat{G}/\widehat{G}^{\text{in}}$. Расслоение $\pi_* L_{\boldsymbol\lambda} \simeq \widehat{G} \times_{\widehat{G}^{\text{in}}} \mathbb{C}_{(-\boldsymbol\lambda)}$ обозначим также через $L_{\boldsymbol\lambda}$.

Для $\xi \in \check{T}$, $\omega \in W \subset W_{\text{aff}} \subset F$ имеем $\pi(\xi \cdot \omega) = \pi(\xi)$. Поэтому вложение $W_{\text{aff}} \hookrightarrow F$ индуцирует вложение $W_{\text{aff}}/W \simeq \check{T} \hookrightarrow P$.

Мы можем, аналогично §3, ввести подмногообразие $M' = \overline{\widehat{N}_+ \cdot \mathbf{1}} \subset F$ и доказать равенство $\underline{W^* \simeq} H^0(M', L_{\boldsymbol\lambda})$. Однако для наших целей более удобно многообразие $M = \overline{\widehat{N}_- \cdot \mathbf{1}} \subset F$, где $\widehat{N}_-$ — группа токов в нижнетреугольную подгруппу $SL(3, \mathbb{C})$ с алгеброй Ли $\langle f^\alpha, f^\beta, f^\gamma \rangle$. Дело в том, что M, в отличие от M', является объединением слоев проекции π, и вместо суммирования по $\omega \in W_{\text{aff}} \cap M$ мы можем, спроектировав на P, вести суммирование по части $\check{T} \cap \pi(M)$ решетки $\check{T}$. (Соответственно основное подпространство $U(\hat{\mathfrak{n}}_+)v \subset V$ меняется на $U(\hat{\mathfrak{n}}_-)v$; но, поскольку V симметрично относительно замены e на f, характеры пространств $U(\hat{\mathfrak{n}}_+)v$ и $U(\hat{\mathfrak{n}}_-)v$ отличаются лишь заменой z_1 на z_1^{-1} и z_2 на z_2^{-1}.)

Обозначим $\pi(M)$ той же буквой M.

Теорема 4.3.1. 1) $\check{T} \cap M = \{T_{m\alpha+n\beta} : m, n \leqslant 0\}$.

2) *M неособо в точках $T_{n\alpha}$, $T_{n\beta}$ и особо в остальных точках $\xi \in \check{T} \cap M$.*

3) *Локальное слагаемое в формуле Лефшеца для пары $(M, L_{\boldsymbol\lambda})$ в точке $T_{-n\alpha}$, $n \geqslant 0$, равно*

$$\Delta_{-n\alpha} = \frac{e^{iT_{-n\alpha}\cdot\boldsymbol\lambda}}{\displaystyle\prod_{\substack{\delta \text{ – корень } \widehat{\mathfrak{sl}}_3;\\ S_\delta(-n\alpha) = k\alpha + l\beta \neq -n\alpha,\, k,l \leqslant 0;\\ T_{n\alpha}(\delta) > 0}} (1 - e^{i\delta})}$$

$$= \frac{e^{iT_{-n\alpha}\cdot\boldsymbol\lambda}}{(1-(q^n a)^{-1})(1-(q^{n+1}a)^{-1})\dots(1-(q^{2n-1}a)^{-1})(1-q^{2n+1}a)(1-q^{2n+2}a)\dots}$$
$$\times \frac{1}{(1-q^{-n+1}b)\dots(1-q^{-1}b)(1-b)(1-qb)\dots(1-q^{n+1}c)(1-q^{n+2}c)\dots}$$

(здесь S_δ — отражение относительно δ, $a = z_1$, $b = z_2$, $c = z_1 z_2$);

локальное слагаемое $\Delta_{-n\beta}$ получается из $\Delta_{-n\alpha}$ заменой $a \leftrightarrow b$, $\alpha \leftrightarrow \beta$.

4) *Локальное слагаемое $\Delta_{-n\gamma}$ равно*

$$\frac{e^{iT_{-n\gamma}\cdot\boldsymbol\lambda}}{\displaystyle\prod_{\substack{\delta \text{ – корень};\\ S_\delta(-n\gamma) = k\alpha + l\beta \neq -n\gamma,\, k,l \leqslant 0;\\ T_{n\gamma}(\delta) > 0}} (1 - e^{i\delta})} \cdot \frac{(1-c^{-1})(1-(qc)^{-1})\dots(1-(q^{n-1}c)^{-1})}{(1-q)(1-q^2)\dots(1-q^n)}$$

$$= \frac{e^{iT_{-n\gamma}\cdot\boldsymbol\lambda}}{(1-a^{-1})(1-(qa)^{-1})\dots(1-(q^{n-1}a)^{-1})(1-q^{n+1}a)(1-q^{n+2}a)\dots}$$
$$\times \frac{1}{(1-b^{-1})(1-(qb)^{-1})\dots(1-(q^{n-1}b)^{-1})(1-q^{n+1}b)(1-q^{n+2}b)\dots}$$
$$\times \frac{(1-c^{-1})(1-(qc)^{-1})\dots(1-(q^{n-1}c)^{-1})}{(1-q)\dots(1-q^n)(1-(q^n c)^{-1})\dots(1-(q^{2n-1}c)^{-1})(1-q^{2n+1}c)(1-q^{2n+2}c)\dots}.$$

Теорема проверяется прямым вычислением в локальных координатах в окрестности точки $\xi \in \check{T}$ (аналогично доказательству теоремы 3.2.1) с последующим применением формулы (3.5.2).

Нам не удалось вычислить локальные слагаемые, соответствующие точкам $T_{-m\alpha-n\beta}$ при $m > 0, n > 0, m \neq n$. Многообразие имеет в этих точках серьезные особенности, которые, вероятно, даже не являются локально полными пересечениями, так что формула (3.5.2) для них не годится. Что касается формулы Демазюра для «бесконечного элемента»

$$\omega_0 = \lim_{n\to\infty} T_{-n\gamma} = S^\alpha S^\beta S^\alpha S_1^\gamma S^\alpha S^\beta S^\alpha S_1^\gamma \ldots = \ldots S_{-3}^\gamma S_{-1}^\beta S_{-2}^\gamma S_{-1}^\alpha S_{-1}^\gamma S_0^\beta S_0^\gamma S_0^\alpha,$$

то она сходится чрезвычайно медленно, а сложность вычислений растет экспоненциально.

Тем не менее мы можем сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 4.3.2. *При $z_1 = z_2 = 1$ вклад в формулу Лефшеца слагаемых Δ_ξ, соответствующих точкам $\xi \in \check{T} \cap M$, отличным от $T_{-n\alpha}$, $T_{-n\beta}$, $T_{-n\gamma}$, равен нулю.*

По-видимому, каждое такое слагаемое содержит в числителе множитель $(1-a)$, $(1-b)$ или $(1-c)$, который происходит из локального уравнения для M в окрестности ξ, однородного относительно действия тора $\mathbf{T}$ с весом a, b или c.

Предложение 4.3.3. $(\Delta_{-n\alpha} + \Delta_{-n\beta} + \Delta_{-n\gamma})|_{z_1=z_2=1}$ *равно*

а) $((6n+1)\,q^{3n^2+n} - (6n-1)\,q^{3n^2-n})/(q)_\infty^3$, *если V — базисное представление*;

б) $(((2k+4)n+1)\,q^{(k+2)n^2+n} - ((2k+4)n-1)\,q^{(k+2)n^2-n})/(q)_\infty^3$, *если V — представление со старшим весом $\boldsymbol{\lambda} = (0,0,k)$, $k \geqslant 0$.*

Суммируя по n и приравнивая к (4.2.6), получаем серию тождеств:

Теорема 4.3.4 (по модулю гипотезы 4.3.2).

а) (Теорема Гаусса) $(q)_\infty^3 = 1 - 3q + 5q^3 - 7q^6 + 9q^{10} - 11q^{15} + \ldots$.

б) (Аналог тождества Роджерса–Рамануджана)

$$\sum_{a,b\geqslant 0} \frac{q^{a^2-ab+b^2}}{(q)_a(q)_b} = \frac{1 - 5q^2 + 7q^4 - 11q^{10} + 13q^{14} - \ldots}{(q)_\infty^3} = \frac{\sum_{n\in\mathbb{Z}}(6n+1)\,q^{3n^2+n}}{(q)_\infty^3}.$$

в) (Аналог тождеств Гордона)

$$\Psi_{\frac{1}{2}A_2\otimes \widetilde{B}_k^{-1}}(q) = \frac{1}{(q)_\infty^3}\sum_{n\in\mathbb{Z}}((2k+4)n+1)\,q^{(k+2)n^2+n}.$$

(Пункт (а) соответствует $k=0$; по поводу обозначений п. (в) см. 2.7.3.)

4.4. Весьма неожиданным явилось для нас то наблюдение, что правая часть формулы 4.3.4(б) совпадает с формулой Каца для характера базисного представления алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ (см., например, [5, (14.3.5)]), и, более общо, правая часть 4.3.4(в) совпадает с формулой Каца для характера представления алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ со старшим весом $(0,0,k)$.

Пользуясь этим наблюдением, мы можем упростить тождества (4.3.4), заменив их правые части на «бозонную» формулу характера (2.6.2) при $k=1$ и на «парафермионную» формулу (2.6.2′) при любом k. А. Е. Постников заметил,

что после такого упрощения тождество 4.3.4(б) становится очевидным. (Оно доказывается методом квадратов Дюрфи.)

Мы приведем некоторое объяснение факту совпадения характеров пространства W и пространства представления алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$. Пусть, например, V — базисное представление алгебры $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$ (мы надеемся, что путаницы в обозначениях не возникнет). Оно является факторпространством алгебры $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_2^{\mathrm{out}})$, где $\widehat{\mathfrak{sl}}_2^{\mathrm{out}} = \langle e_i, f_i, h_i : i < 0\rangle$, по некоторому левому идеалу J. Поскольку $e_{-1}^2 v = f_0 v = L_{-1} v = 0$, следующие элементы вида $(\operatorname{ad} L_{-1})^n (\operatorname{ad} f_0)^m (e_{-1}^2)$ лежат в J:

$$\begin{gathered} e_{-1}^2, \quad h_{-1}e_{-1} + e_{-1}h_{-1}, \quad f_{-1}e_{-1} + e_{-1}f_{-1} - h_{-1}^2, \\ h_{-1}f_{-1} + f_{-1}h_{-1}, \quad f_{-1}^2, \end{gathered} \tag{4.4.1}$$

$$\begin{gathered} \sum_{i+j=-n} e_i e_j, \quad \sum_{i+j=-n} (h_i e_j + e_j h_i), \quad \sum_{i+j=-n} (f_i e_j + e_i f_j - h_i h_j), \\ \sum_{i+j=-n} (h_i f_j + f_i h_j), \quad \sum_{i+j=-n} f_i f_j \,. \end{gathered} \tag{4.4.2}$$

Предложение 4.4.3. а) *Пять соотношений* (4.4.1) *порождают идеал* J.

б) *Пять серий соотношений* (4.4.2) *порождают идеал* $\tilde{J} \subset S(\widehat{\mathfrak{sl}}_2^{\mathrm{out}})$ — *присоединенный градуированный фактор* J *относительно* PBW-*фильтрации на* $U(\widehat{\mathfrak{sl}}_2^{\mathrm{out}})$.

Осталось сравнить утверждения 4.4.3(б) и 4.2.5 и убедиться, что факторпространства $S(\hat{\mathfrak{n}}^{\mathrm{out}})/\tilde{I}$ и $S(\widehat{\mathfrak{sl}}_2^{\mathrm{out}})/\tilde{J}$ почти не отличаются друг от друга: разница лишь в дополнительной сумме $\sum_{i+j=m}(f_i e_j + e_i f_j)$ в третьей серии квадратичных соотношений (4.4.2). Поэтому весьма правдоподобно, что характеры двух пространств совпадают.

Легко обобщить эту аргументацию на случай произвольного k.

Литература

1. *Schechtman V., Varchenko A.* Arrangements of hyperplanes and Lie algebra homology. Invent. Math., **106**, 139–194 (1991).
2. *Beilinson A. A., Ginzburg V. A.* Infinitesimal structure of moduli spaces of G-bundles. Duke Math. J. (IMRN), No. 4, 63–74 (1992).
3. *Lepowsky J., Primc M.* Structure of the standard modules for the affine Lie algebra $A_1^{(1)}$. Contemporary Mathematics, Vol. 46, AMS, Providence (1985).
4. *Kac V. G.* Infinite dimensional Lie algebras. Birkhäuser, Boston (1983).
5. *Прессли Э., Сигал Г.* Группы петель. Мир, М. (1990).
6. *Kashiwara M.* The flag manifold of Kac–Moody Lie algebra. In: Algebraic Analysis, Geometry, and Number Theory, edited by J.-I. Igusa.
7. *Feigin B. L., Frenkel E. V.* Coinvariants of nilpotent subalgebras of the Virasoro algebra and partition identities. Adv. in Soviet Math., Volume in Honor of I. M. Gelfand (1993).
8. *Feigin B. L., Frenkel E. V.* Affine Kac–Moody algebras and semi-infinite flag manifolds. Commun. Math. Phys., **128**, 161–189 (1990).
9. *Дринфельд В. Г.* Новая реализация янгианов и квантовых аффинных алгебр. ФТИНТ, препринт №36, Харьков (1986).

10. *Feigin B. L., Stoyanovsky A. V.* Quasi-particles models for the representations of Lie algebras and geometry of flag manifold. Preprint, RIMS-942, Kyoto, September (1993).
11. *Kuniba A., Nakanishi T., Suzuki J.* Characters in conformal field theories from thermodynamic Bethe Ansatz. HUTP-92/A069 preprint, December (1992).
12. *Terhoeven M.* Lift of dilogarithm to partition identities. Preprint, Bonn (1992).
13. *Kedem R., Klassen T. R., McCoy B. M., Melzer E.* Fermionic quasi-particle representations for characters of $G_1^{(1)} \times G_1^{(1)}/G_2^{(1)}$. ITP preprint (1992).
14. *Dasmahapatra S., Kedem R., Klassen T. R., McCoy B. M., Melzer E.* Quasi-particles, conformal field theory, and q-series. Preprint ITP-SB-93-12, RU-93-07.
15. *Mehta V. B., Ramanathan A.* Frobenius splitting and cohomology vanishing for Schubert variety. Ann. Math., **122**, 27–40 (1985).
16. *Andersen H. H.* Schubert varieties and Demazure character formula. Invent. Math., **79**, 611–618 (1985).
17. *Эндрюс Г.* Теория разбиений. Наука, М. (1982).
18. *Grothendieck A. et al.* SGA 2. North-Holland, Amsterdam (1968).
19. *Kumar S.* Demazure character formula in arbitrary Kac–Moody setting. Invent. Math., **89**, 395–423 (1987).
20. *Lakshmibai V., Seshadri C. S.* Thèorie monomiale standard pour $\widehat{\mathfrak{sl}}_2$. C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I, **305**, 183–185 (1987).

Московский математический институт
Независимый московский университет

Поступило в редакцию
25 июля 1993 г.