

Общероссийский математический портал

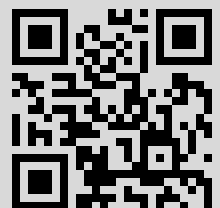
В. А. Голубева, В. П. Лексин, Алгебраическая характеристика монодромии обобщенных уравнений Книжника–Замолодчикова типа  $B_n$ , *Тр. МИАН*, 2002, том 238, 124–143

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением  
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.204.244.121

5 марта 2015 г., 19:01:52



УДК 519.4

# Алгебраическая характеристика монодромии обобщенных уравнений Книжника–Замолодчикова типа $B_n$ <sup>1</sup>

©2002 г. В. А. Голубева<sup>2</sup>, В. П. Лексин<sup>3</sup>

Поступило в декабре 2001 г.

Теорема Дринфельда–Коно описывает монодромию уравнения Книжника–Замолодчикова на языке квазибиалгебр. Настоящая работа содержит обобщение этой теоремы на случай уравнения типа Книжника–Замолодчикова, отвечающего корневой системе типа  $B_n$ . Дана характеристика тех представлений фундаментальной группы дополнения к дивизору особенностей уравнения, которые могут быть реализованы как представления монодромии уравнения.

## ВВЕДЕНИЕ

В 1965 г. в связи с исследованиями свойств ветвления фейнмановских интегралов итальянский физик Т. Редже поставил вопрос о существовании и форме дифференциальных уравнений обобщенного гипергеометрического типа для этих интегралов [1]. Связь аналитической теории фейнмановских интегралов с ранее развитой математиками теорией фуксовых уравнений и уравнений с регулярными особыми точками, а также с уравнениями гипергеометрического типа изложена в обзорной работе Голубевой [2]. В 1968–1970 гг. математики Делинь и Жерар [3, 4] начали исследования задач, близких по формулировке к задаче Редже, а именно задач построения линейных мероморфных пфаффовых интегрируемых систем уравнений на многомерных комплексных многообразиях, решения которых обладают заданным ветвлением вокруг особенностей системы. Ветвление задавалось представлением фундаментальной группы многообразия, являющегося дополнением в основном пространстве к заранее заданному множеству особенностей системы. Эту задачу естественно было рассматривать как многомерное обобщение известной 21-й проблемы Гильберта (или проблемы Римана–Гильберта). В этих работах для некоторых многообразий и при некоторых условиях на заданное представление фундаментальной группы получены ее решения. В дальнейшем число работ, содержащих положительное решение многомерной задачи Римана–Гильберта при ряде специальных условий, было расширено (см. [5–11]). Кроме того, был четко выделен класс многомерных систем Пфаффа типа Фукса [12]. Также были получены первые примеры представлений, для которых проблема Римана–Гильберта имеет отрицательное решение [13, 9, 14].

С проблемой Римана–Гильберта, являющейся обратной задачей, тесно связана соответствующая прямая задача, состоящая в описании монодромии линейных мероморфных пфаффовых систем. Ее естественно назвать ограниченной проблемой Римана–Гильберта [15].

Первые работы по характеристике монодромии фуксовой системы принадлежат Дринфельду [16, 17] и Коно [18, 19]. В них исследована монодромия уравнений Книжника–Замолодчикова (КЗ). Эти уравнения были получены в работе [20] при изучении корреляционных функций модели Весса–Зумино в двумерной конформной теории поля. Они полностью определяются алгеброй Ли симметрий модели и некоторым комплексным параметром. Основная

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект 97-1644).

<sup>2</sup>Отд. математики, Всероссийский институт научной и технической информации, Москва, Россия.

<sup>3</sup>Коломенский государственный педагогический институт, г. Коломна, Московская обл., Россия.

теорема теории Дринфельда–Коно утверждает, что представление монодромии уравнения КЗ с точностью до эквивалентности представлений определяется универсальной квантовой  $R$ -матрицей для квантовой группы Дринфельда–Джимбо, отвечающей алгебре Ли симметрий модели.

Особенности уравнений КЗ расположены на комплексификации объединения зеркал отражения группы Вейля системы корней типа  $A_{n-1}$ . В настоящей работе рассматриваются аналоги уравнений КЗ, имеющие особенности на комплексификации объединения зеркал отражения группы Вейля типа  $B_n$ . Эти уравнения, подобно уравнениям КЗ (типа  $A_{n-1}$ ), полностью определяются соответствующей алгеброй Ли и, кроме того, парой комплексных параметров, в то время как в обычных уравнениях КЗ такой параметр только один. Для этих обобщенных уравнений КЗ (типа  $B_n$ ) строится аналог теории Дринфельда–Коно сплетенных квазибиалгебр типа  $B_n$ , сформулирована основная теорема этой теории и указана схема ее доказательства.

### 1. ТЕОРЕМА ДРИНФЕЛЬДА–КОНО ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КЗ, АССОЦИИРОВАННЫХ С СИСТЕМОЙ КОРНЕЙ ТИПА $A_{n-1}$

В этом разделе приводится краткий обзор результатов Дринфельда и Коно по ограниченной проблеме Римана–Гильберта для уравнений КЗ, ассоциированных с системой корней типа  $A_{n-1}$  (см. [16–19], а также [21]).

Теорема Дринфельда–Коно дает алгебраическую характеристику монодромии классических уравнений КЗ, ассоциированных с системами корней типа  $A_{n-1}$ , и является составной частью алгебраической теории квазихопфовых алгебр, развитой Дринфельдом. Главными ингредиентами соответствующей теории являются следующие алгебраические объекты и факты.

- Понятие сплетенной квазибиалгебры

$$\mathcal{A} = (A, \mu, \Delta, \eta, \varepsilon, R_A, \Phi_A),$$

где  $A$  — биалгебра,  $\mu$  — умножение,  $\Delta$  — коумножение,  $\eta$  и  $\varepsilon$  являются единицей и коединицей соответственно,  $R_A \in A^{\otimes 2}$  — сплетающий элемент, называемый универсальной  $R$ -матрицей, и  $\Phi_A \in A^{\otimes 3}$  — ассоциатор.

Любая такая сплетенная квазибиалгебра определяет представление группы кос Артина  $B_n$  в  $A^{\otimes n}$

$$\rho_{\mathcal{A}}: B_n \rightarrow A^{\otimes n}.$$

- Калибровочно эквивалентные (см. [21]) сплетенные квазибиалгебры определяют эквивалентные представления группы кос Артина.

Пусть  $A_{n-1} \subset \mathbb{C}^n$  — комплексификация корневой системы типа  $A_{n-1}$  и  $W_{A_{n-1}}$  обозначает ее группу Вейля. Пусть  $H$  — комплексификация гиперплоскостей отражения (так называемая конфигурация гиперплоскостей) группы Вейля  $W_{A_{n-1}}$ ,  $H = \bigcup_{i < j} H_{ij}$ , где

$$H_{ij} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n: z_i - z_j = 0\},$$

$1 \leq i < j \leq n$ . Пусть  $X_n$  — дополнение к этой конфигурации в  $\mathbb{C}^n$ , т.е.

$$X_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n: z_i \neq z_j \text{ при } i \neq j\}.$$

Фундаментальная группа  $\pi_1(X_n, z_0)$ ,  $z_0 = (1, 2, \dots, n) \in X_n$ , есть группа крашенных кос  $P_n = P(A_{n-1})$ . Поскольку симметрическая группа  $S_n$  оставляет конфигурацию гиперплоскостей  $H$  инвариантной при действии  $S_n$  на  $\mathbb{C}^n$  перестановками координат, мы можем определить

группу кос Артина  $B_n$  (мы будем обозначать ее далее  $B(A_{n-1})$ ) как фундаментальную группу пространства орбит

$$B(A_{n-1}) = \pi_1(X_n/S_n, \bar{z}_0),$$

где  $\bar{z}_0$  — орбита точки  $z_0 \in X_n$ .

Пусть  $g$  — полупростая конечномерная комплексная алгебра Ли,  $U(g)$  — ее универсальная обертывающая алгебра и  $U(g)[[h]]$  — тривиальная формальная деформация  $U(g)$  (см. [21]).

Уравнения КЗ типа  $A_{n-1}$  имеют вид

$$df = \frac{h}{2\pi i} \Omega_{A_{n-1}} f, \quad \text{где} \quad \Omega_{A_{n-1}} = \sum_{1 \leq i < j \leq n} t_{ij} d \log(z_i - z_j).$$

Здесь  $f$  — голоморфная функция на универсальном накрытии  $\tilde{X}_n$  со значениями в  $(U(g)[[h]])^{\otimes n}$ ,  $t_{ij}$  являются постоянными элементами из  $U(g)^{\otimes n}$ , которые определяются по тензору Белавина–Дринфельда  $t \in g^{\otimes 2}$  (см. п. 2.1).

Условия интегрируемости по Фробениусу системы уравнений КЗ равносильны равенствам  $d\Omega = 0$  и  $\Omega \wedge \Omega = 0$ . Записанные в терминах коэффициентов  $t_{ij}$  формы  $\Omega_{A_{n-1}}$ , эти условия имеют вид коммутационных соотношений

$$\begin{aligned} [t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] &= [t_{jk}, t_{ij} + t_{ik}] = [t_{ik}, t_{ij} + t_{jk}] = 0 \quad \text{для} \quad i < j < k, \\ [t_{ij}, t_{kl}] &= 0 \quad \text{для} \quad \{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset. \end{aligned}$$

Эти соотношения называются инфинитезимальными соотношениями группы крашенных кос типа  $A_{n-1}$ .

Теорема Дринфельда–Коно есть по существу утверждение об эквивалентности двух структур сплетенных квазибиалгебр  $\mathcal{A}_h$  и  $\mathcal{A}_{KZ}$ .

Первая структура сплетенной квазибиалгебры  $\mathcal{A}_h$  характеризуется следующими данными:

$$\mathcal{A}_h = (U_h(g), \mu_h, \Delta_h, \eta_h, \varepsilon_h, R_h, \Phi_h = 1 \otimes 1 \otimes 1).$$

Здесь  $U_h(g)$  — алгебра Дринфельда–Джимбо (однопараметрическая деформация  $U(g)$  как алгебры Хопфа), которая определяется как ассоциативная  $\mathbb{C}[[h]]$ -алгебра, порожденная элементами  $X_i, Y_i, H_i, i = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \quad [H_i, X_j] = a_{ij} X_j, \quad [H_i, Y_j] = -a_{ij} Y_j, \quad [X_i, Y_j] = \delta_{ij} \frac{\text{sh}(hd_i H_i/2)}{\text{sh}(hd_i/2)}, \\ \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} X_i^k X_j X_i^{1-a_{ij}-k} &= 0, \quad \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} Y_i^k Y_j Y_i^{1-a_{ij}-k} &= 0, \end{aligned}$$

где  $d_1, \dots, d_n$  — длины корней алгебры Ли  $g$ ,  $q_i = e^{hd_i}$  и  $a_{ij}$  являются элементами матрицы Картана алгебры Ли  $g$ . Для алгебры Ли с системой корней  $A_{n-1}$  мы имеем  $d_1 = \dots = d_n = d$ .

Использованные выше обозначения определяются следующими равенствами:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q [n-1]_q \dots [n-k+1]_q}{[k]_q!}, \quad [n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \quad [k]_q! = [1]_q [2]_q \dots [k]_q.$$

Топология кольца  $\mathbb{C}[[h]]$  или модуля  $M$  над этим кольцом определяется степенями идеала, порожденного переменной  $h$ , или при помощи действия этих степеней на модуле  $M$ .

Коумножение  $\Delta_h$  определяется как гомоморфизм алгебр

$$\Delta_h: U_h(g) \rightarrow U_h(g) \widehat{\otimes} U_h(g),$$

где  $\widehat{\otimes}$  — топологическое тензорное произведение (см. [21]).

Гомоморфизм  $\Delta_h$  на образующих  $U_h(g)$  определяется формулами

$$\begin{aligned} \Delta_h(H_i) &= H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i, \\ \Delta_h(X_i) &= X_i \otimes e^{hd_i H_i/4} + e^{-hd_i H_i/4} \otimes X_i, \\ \Delta_h(Y_i) &= Y_i \otimes e^{hd_i H_i/4} + e^{-hd_i H_i/4} \otimes Y_i. \end{aligned}$$

На другие элементы из  $U_h(g)$  коумножение распространяется, естественно, по мультипликативности.

Коединица и антипод на  $U_h(g)$  определяются на образующих формулами

$$\begin{aligned} \varepsilon_h(H_i) &= \varepsilon_h(X_i) = \varepsilon_h(Y_i) = 0, \\ S_h(H_i) &= -H_i, \quad S_h(X_i) = e^{hd_i/2} X_i, \quad S_h(Y_i) = e^{-hd_i/2} Y_i. \end{aligned}$$

На другие элементы  $\varepsilon_h$  и  $S_h$  продолжаются также по мультипликативности.

Элемент  $\Phi_h \in U_h(g)^{\otimes 3}$ , называемый ассоциатором, определяется как элемент, задающий деформацию коассоциативности коумножения, и удовлетворяет следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} (1 \otimes \Delta_h) \Delta_h(a) &= \Phi_h (\Delta_h \otimes 1) \Delta_h(a) \Phi_h^{-1}, \\ (\varepsilon \otimes 1) \Delta_h(a) &= 1, \quad (1 \otimes \varepsilon) \Delta_h(a) = 1 \end{aligned}$$

для всех  $a \in U_h(g)$  и

$$(1 \otimes 1 \otimes \Delta_h) \Phi_h (\Delta_h \otimes 1 \otimes 1) \Phi_h = \Phi_{h,234} (1 \otimes \Delta_h \otimes 1) \Phi_h \Phi_{h,123}$$

(это уравнение называется уравнением пятиугольника),

$$(1 \otimes \varepsilon \otimes 1) \Phi_h = 1.$$

Здесь  $\Phi_{h,123} = \Phi_h \otimes 1$  и  $\Phi_{h,234} = 1 \otimes \Phi_h$ . Для  $\Phi_h = 1 \otimes 1 \otimes 1$  мы получаем коассоциативную биалгебру (более точно, алгебру Хопфа). В случае алгебры Дринфельда–Джимбо мы имеем как раз этот случай.

Пусть  $\tau$  — оператор перестановки тензорных сомножителей, и пусть  $\Delta_h^{\text{op}}(a) = \tau \Delta_h(a)$ . Универсальная  $R$ -матрица  $R_h \in U_h(g)^{\otimes 2}$  определяется как элемент, задающий деформацию кокоммутативности коумножения и удовлетворяющий уравнениям

$$\Delta_h^{\text{op}}(a) = R_h \Delta_h(a) R_h^{-1}$$

для всех  $a \in U_h(g)$  и

$$\begin{aligned} (1 \otimes \Delta_h) R_h &= \Phi_{h,231}^{-1} R_{h,13} \Phi_{h,213} R_{h,12} \Phi_{h,123}^{-1}, \\ (\Delta_h \otimes 1) R_h &= \Phi_{h,312} R_{h,13} \Phi_{h,132}^{-1} R_{h,23} \Phi_{h,123}. \end{aligned}$$

Последние два уравнения называются уравнениями шестиугольника.

Уравнения пятиугольника и шестиугольника моделируют свойства перестановочности регуляризованной голономии уравнения КЗ и операции удвоения нитей кос со свободными концами (см. [22]). Геометрическая интерпретация некоторых из перечисленных выше равенств для общей структуры сплетенной квазиалгебры представлена на рис. 1.

$$\Delta_1 R_A = \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \begin{array}{l} \Phi_{A,312} \\ R_{A,13} \\ \Phi_{A,132}^{-1} \\ R_{A,23} \\ \Phi_{A,123} \end{array}$$

$$\Delta_1 R_A = \Phi_{A,312} R_{A,13} \Phi_{A,132}^{-1} R_{A,23} \Phi_{A,123}$$

$$\Delta_2 R_A = \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \diagup \quad \diagdown \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \end{array} \begin{array}{l} \Phi_{A,231}^{-1} \\ R_{A,13} \\ \Phi_{A,213} \\ R_{A,12} \\ \Phi_{A,123}^{-1} \end{array}$$

$$\Delta_2 R_A = \Phi_{A,231}^{-1} R_{A,13} \Phi_{A,213} R_{A,12} \Phi_{A,123}^{-1}$$

$$(\Delta_3 \Phi_{A,123})(\Delta_1 \Phi_{A,123}) = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} = \begin{array}{c} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \end{array} \begin{array}{l} \Phi_{A,234} \\ \Delta_2 \Phi_{A,123} \\ \Phi_{A,123} \end{array}$$

$$(\Delta_3 \Phi_A)(\Delta_1 \Phi_A) = \Phi_{A,234}(\Delta_2 \Phi_A)\Phi_{A,123}$$

**Рис. 1**

При  $\Phi_h = 1 \otimes 1 \otimes 1$  мы имеем равенства

$$(\Delta_h \otimes 1)R_h = R_{13}R_{23}, \quad (1 \otimes \Delta_h)R_h = R_{12}R_{13},$$

из которых следует уравнение Янга–Бакстера

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

Явные формулы универсальной  $R$ -матрицы для произвольной конечномерной полупростой алгебры Ли  $g$  были предложены рядом авторов (см., например, [21, 23]).

Вторая структура квазибиалгебры  $\mathcal{A}_{KZ}$  связана с уравнением КЗ типа  $A_{n-1}$  и определяется следующими данными:

$$\mathcal{A}_{KZ} = (U(g)[[h]], \mu, \Delta, \eta, \varepsilon, R_{KZ}, \Phi_{KZ}).$$

В этом случае  $R$ -матрица  $R_{KZ}$  равна элементу локальной монодромии решения уравнения КЗ при  $n = 2$  в окрестности дивизора  $z_1 - z_2 = 0$ , т.е.

$$R_{KZ,12} = e^{ht_{12}/2}.$$

Ассоциатор  $\Phi_{\text{KZ}}$  есть элемент  $U(g)[[h]]^{\otimes 3}$ , который связывает локальные решения системы уравнений КЗ при  $n = 3$  в пересечении окрестности некоторой точки на компоненте дивизора  $z_1 - z_2 = 0$  и окрестности некоторой точки на компоненте  $z_2 - z_3 = 0$  (см. [20]). Явное выражение для первых членов ряда, представляющего ассоциатор  $\Phi_{\text{KZ}}(ht_{12}, ht_{23})$ , можно найти в [21], а выражения всех членов ряда через дзета-функции многих переменных указаны в [22].

Проверка аксиом сплетенной квазибиалгебры для  $R_{\text{KZ}}$  и  $\Phi_{\text{KZ}}$  проведена в [21, гл. 19].

Универсальная  $R$ -матрица и ассоциатор  $\Phi$  в структуре сплетенной квазибиалгебры позволяют определить в явном виде представление группы кос Артина. Ниже мы опишем, как такое представление задается для общей структуры сплетенной квазибиалгебры, а затем покажем, как оно выглядит для введенных выше сплетенных квазибиалгебр  $\mathcal{A}_h$  и  $\mathcal{A}_{\text{KZ}}$ .

*Представление группы кос Артина  $B(A_{n-1})$ , определенное по структуре сплетенной квазибиалгебры.* Пусть  $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$  — стандартные образующие группы кос Артина  $B(A_{n-1})$ . Пусть задана некоторая сплетенная квазибиалгебра  $\mathcal{A}$ . Определим операторы  $s_{ii+1} \in \text{End}(A^{\otimes n})$  соответствием на порождающих элементах

$$s_{ii+1}: (a_1 \otimes \dots \otimes a_i \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n) \rightarrow (a_1 \otimes \dots \otimes a_{i+1} \otimes a_i \otimes \dots \otimes a_n)$$

для  $1 \leq i \leq n - 1, a_i \in A$ .

**Предложение 1.** *Представление группы кос Артина  $B(A_{n-1})$  по общей структуре квазибиалгебры определяется формулами*

$$\begin{aligned} \rho_{\mathcal{A}}(\sigma_1) &= s_{12}R_{12}, & \rho_{\mathcal{A}}(\sigma_i) &= \Phi_i^{-1}s_{ii+1}R_{ii+1}\Phi_i, \\ \Phi_i &= \Delta^{(i+1)}\Phi \otimes 1^{\otimes(n-i-1)}, & \Delta^{(i+1)}: A^{\otimes 3} &\rightarrow A^{\otimes(i+1)}, \\ \Delta^{(3)} &= 1_{A^{\otimes 3}}, & \Delta^{(i+1)} &= (\Delta \otimes 1_{A^{\otimes(i-1)}})\Delta^{(i)}. \end{aligned}$$

Для структуры сплетенной биалгебры на  $U_h(g)$  предыдущие формулы имеют вид

$$\rho_{\mathcal{A}_h}(\sigma_1) = s_{12}R_{12}, \tag{*}$$

$$\rho_{\mathcal{A}_h}(\sigma_i) = s_{ii+1}R_{ii+1}. \tag{**}$$

*Представление группы кос Артина  $B(A_{n-1})$ , определенное по структуре сплетенной квазибиалгебры  $\mathcal{A}_{\text{KZ}}$ .* Упомянутое представление группы кос  $B(A_{n-1})$  в  $U(g)[[h]]^{\otimes n}$ , определяемое общими формулами по структуре сплетенной квазибиалгебры  $\mathcal{A}_{\text{KZ}}$ , совпадает с представлением монодромии уравнения КЗ, определяемым рядами Чена [21, гл. 19], и задается представленными ниже явными формулами (см. [17, 24]).

**Предложение 2.** *Монодромия уравнения КЗ для произвольного  $n$  задается следующими формулами:*

$$\begin{aligned} \rho_{\text{KZ}}(\sigma_1) &= s_{12}R_{\text{KZ}}, \\ \rho_{\text{KZ}}(\sigma_i) &= \Phi_{\text{KZ}}^{-1} \left( h \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}, ht_{ii+1} \right) s_{ii+1} e^{ht_{ii+1}/2} \Phi_{\text{KZ}} \left( h \sum_{k=1}^{i-1} t_{ki}, ht_{ii+1} \right) \end{aligned}$$

для  $i = 2, \dots, n - 1, s_{ii+1} \in S_n$ .

Теперь мы напомним две основные теоремы, которые определяют содержание теории Дринфельда–Коно.

**Теорема 1** (Дринфельд). *Две структуры квазибиалгебры  $A_h$  и  $A_{KZ}$  являются калибровочно эквивалентными, т.е. существуют линейный изоморфизм*

$$\beta: U_h(g) \rightarrow U(g)[[h]]$$

и ряд

$$F \in U(g)[[h]]^{\otimes 2}$$

такие, что выполняются равенства

$$(\beta \otimes \beta)R_h = FR_{KZ}F^{-1}$$

и

$$1 \otimes 1 \otimes 1 = \beta^{\otimes 3}(\Phi_h) = (1 \otimes F)(1 \otimes \Delta)(F)\Phi_{KZ}(\Delta \otimes 1)(F^{-1})(F^{-1} \otimes 1).$$

Поскольку калибровочно эквивалентные сплетенные квазибиалгебры определяют эквивалентные представления группы кос  $B(A_{n-1})$ , как следствие, получается доказательство теоремы Дринфельда–Коно.

**Теорема 2** (Дринфельд–Коно). *Пусть  $g$  — полупростая алгебра Ли и  $t \in g \otimes g$  —  $g$ -инвариантный симметрический 2-тензор Белавина–Дринфельда. Тогда представление монодромии уравнения КЗ с коэффициентами, определяемыми тензором  $t$ , эквивалентно представлению группы кос  $B(A_{n-1})$ , определяемому формулами (\*) и (\*\*) через универсальную  $R$ -матрицу алгебры Дринфельда–Джимбо.*

Последняя теорема дает полную алгебраическую характеристику представления монодромии для уравнения КЗ.

## 2. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СПЛЕТЕННЫХ КВАЗИБИАЛГЕБР ТИПА $B_n$

В этом разделе рассматриваются возможные обобщения теории Дринфельда и Коно на обобщенные уравнения КЗ, ассоциированные с другими системами корней, отличными от систем корней типа  $A_n$ .

Пусть  $g$  — простая конечномерная комплексная алгебра Ли,  $A = \|a_{ij}\|$  — ее матрица Картана и  $(d_1, \dots, d_r)$  — квадраты длин корней корневой системы алгебры Ли  $g$ , которые для простых алгебр Ли могут принимать не более двух значений. Конструкция алгебр Дринфельда–Джимбо основана на однопараметрической деформации универсальной обертывающей алгебры  $U(g)$  алгебры Ли  $g$ . Обобщение этой конструкции может отвечать как однопараметрическим, так и многопараметрическим деформациям  $U(g)$ . Ниже рассматриваются деформации, в которых число параметров не превосходит числа  $r$  различных длин корней исходной алгебры Ли, а соответствующие формальные параметры обозначаются  $h_1, \dots, h_r$ ,  $r = 1, 2$ . Для простых алгебр Ли типа  $A, D, E$  достаточно одного такого формального параметра, а для алгебр Ли типа  $B_n, C_n, n \geq 2, G_2$  и  $F_4$  в общем случае естественно использование двух параметров.

В настоящей работе рассматривается только случай корневой системы  $B_n$  и изучаются двухпараметрические деформации универсальной обертывающей алгебры соответствующей алгебры Ли.

Следуя схеме, изложенной в разд. 1, далее мы рассматриваем следующие вопросы.

1. Обобщенные уравнения КЗ типа  $B_n$ .
2. Группа кос Брискорна типа  $B_n$  и ее реализация симметрическими косами.
3. Определение сплетенной квазибиалгебры, ассоциированной с уравнениями КЗ типа  $B_n$ , и представление монодромии этого уравнения.



4. Определение двухпараметрической алгебры Дринфельда–Джимбо типа  $B_n$  и структуры сплетенной квазибиалгебры типа  $B_n$  на ней. Представление группы кос Брискорна типа  $B_n$  (ниже мы обозначаем эту группу  $B(B_n)$ ) в терминах структурных элементов  $B$ -сплетенной биалгебры Дринфельда–Джимбо.

5. Краткое описание геометрического метода получения аксиом для структурных элементов сплетенной квазибиалгебры типа  $B_n$ .

6. Формулировка  $B_n$ -аналога теоремы Дринфельда–Джимбо.

Как и в разд. 1, мы не касаемся вопросов существования структурных элементов ( $R$ -матриц, ассоциаторов) и вопросов жесткости определяемых алгебраических объектов. Эти вопросы будут рассмотрены подробно в других публикациях.

**2.1. Уравнения КЗ типа  $B_n$ .** Пусть  $g$  — полупростая алгебра Ли,  $U(g)$  — ее универсальная обертывающая алгебра и  $t \in g \otimes g$  — тензор вида

$$t = \frac{1}{2}(\Delta(c) - 1 \otimes c - c \otimes 1),$$

где  $c$  — элемент Казимира в  $U(g)$ .

Пусть  $H_{B_n} = \bigcup_{i < j} (H_{ij}^- \cup H_{ij}^+) \cup \bigcup_k H_k^0$  обозначает в  $\mathbb{C}^n$  конфигурацию комплексифицированных гиперплоскостей отражения группы Вейля корневой системы  $B_n$ , где

$$H_{ij}^- = \{z_i - z_j = 0, 1 \leq i < j \leq n\},$$

$$H_{ij}^+ = \{z_i + z_j = 0, 1 \leq i < j \leq n\},$$

$$H_k^0 = \{z_k = 0, 1 \leq k \leq n\}.$$

Пусть  $Y_n$  обозначает дополнение к этой конфигурации в  $\mathbb{C}^n$ ,  $Y_n = \mathbb{C}^n \setminus H_{B_n}$ . Фундаментальная группа  $\pi_1(Y_n, y_0)$ ,  $y_0 \in Y_n$ , есть обобщенная группа крашенных кос коксетеровского типа  $B_n$ , которую мы обозначим  $P(B_n)$ .

Рассмотрим обобщенное уравнение КЗ, ассоциированное с корневой системой  $B_n$  (см. [25])

$$d\Psi(z) = \left( \frac{h_1}{2\pi i} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{t_{ij}^- d(z_i - z_j)}{z_i - z_j} + \frac{t_{ij}^+ d(z_i + z_j)}{z_i + z_j} \right) + \frac{h_2}{2\pi i} \sum_{i=1}^n \frac{t_i^0 dz_1}{z_i} \right) \Psi(z).$$

Здесь  $h_1, h_2 \in \mathbb{C}$  — комплексные параметры, которые иногда удобно считать формальными переменными. Коэффициенты  $t_{ij}^-$ ,  $t_{ij}^+$ ,  $t_i^0$  определяются по элементам  $t \in U(g)^{\otimes 2}$ ,  $t^0 \in U(g)$  (см. ниже) и автоморфизму Вейля–Шевалле  $\sigma_W: U(g) \rightarrow U(g)$ . Пусть  $R$  — корневая система алгебры Ли  $g$  и  $R_+$  — множество положительных корней. Ниже мы обозначим через  $e_\alpha$ ,  $\alpha \in R$ , корневые векторы алгебры Ли  $g$ , а через  $h_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , базис в подалгебре Картана алгебры Ли  $g$  (мы надеемся, что совпадение обозначений не приведет к путанице). Автоморфизм Вейля–Шевалле  $\sigma_W$  действует по правилам

$$\sigma_W(e_\alpha) = e_{-\alpha}, \quad \sigma_W(h_i) = -h_i, \quad \sigma(1) = 1.$$

Тензор Белавина–Дринфельда  $t$  через базис  $(e_\alpha, h_i)$ ,  $\alpha \in R$ ,  $i = 1, \dots, m$ , выражается следующим образом:

$$t = \sum_{\alpha \in R_+} e_\alpha \otimes e_{-\alpha} + \sum_{i,j=1}^m g_{ij} h_i \otimes h_j,$$

а элемент  $t^0$ , найденный Лейбманом, имеет вид

$$t^0 = \sum_{\alpha \in R} (e_\alpha e_\alpha + e_\alpha e_{-\alpha}).$$

Пусть далее  $t^- = t$ ,  $t^+ = (\sigma_W \otimes 1)t$ . Кроме того, через  $t_{ij}^-$ ,  $t_{ij}^+$  обозначаются образы элементов  $t^-$ ,  $t^+$  при естественном вложении

$$U(g)^{\otimes 2} \rightarrow U(g)^{\otimes n}$$

на  $i$ -й и  $j$ -й тензорные сомножители в  $U(g)^{\otimes n}$ , через  $t_i^0$  обозначим образ  $t^0$  при включении  $U(g)$  в  $U(g)^{\otimes n}$  на  $i$ -й тензорный сомножитель.

Коэффициенты уравнения КЗ типа  $B_n$  удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[t_{ik}^-, t_{ij}^- + t_{jk}^-] = 0, \quad [t_{ij}^+, t_{ik}^- + t_{jk}^+] = 0, \quad [t_{ij}^-, t_{ik}^+ + t_{jk}^+] = 0, \quad i \neq j \neq k,$$

а также следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} [\tilde{t}_{ij}^- + \tilde{t}_i^0 + \tilde{t}_j^0, \tilde{t}_{ij}^+] &= 0, & [\tilde{t}_{ij}^+ + \tilde{t}_i^0 + \tilde{t}_j^0, \tilde{t}_{ij}^-] &= 0, & [\tilde{t}_{ij}^- + \tilde{t}_{ij}^+ + \tilde{t}_i^0, \tilde{t}_j^0] &= 0, & i \neq j, \\ [t_{ij}^\pm, t_{kl}^\pm] &= 0, & [t_{ij}^\pm, t_l^0] &= 0, & [t_i^0, t_j^0] &= 0, & i \neq j \neq k \neq l, \end{aligned}$$

где  $\tilde{t}_{ij}^\pm = \frac{h_1}{2\pi i} t_{ij}^\pm$ ,  $\tilde{t}_i^0 = \frac{h_2}{2\pi i} t_i^0$ .

Можно показать, что выписанные соотношения для коэффициентов равносильны условию интегрируемости по Фробениусу  $\Omega_{B_n} \wedge \Omega_{B_n} = 0$  для 1-формы уравнения КЗ типа  $B_n$

$$\Omega_{B_n} = \frac{h_1}{2\pi i} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left( \frac{t_{ij}^- d(z_i - z_j)}{z_i - z_j} + \frac{t_{ij}^+ d(z_i + z_j)}{z_i + z_j} \right) + \frac{h_2}{2\pi i} \sum_{i=1}^n \frac{t_i^0 dz_i}{z_i}.$$

Рассмотрим алгебраические симметрии уравнений КЗ типа  $B_n$ . Группа Вейля  $W_{B_n}$  системы корней типа  $B_n$  изоморфна полупрямому произведению  $W_{B_n} = S_n \times (\mathbb{Z}_2)^n$  симметрической группы  $S_n$  с прямым произведением групп второго порядка  $(\mathbb{Z}_2)^n$ . По определению симметрическая группа  $S_n$  действует на  $U(g)^{\otimes n}$  перестановками тензорных сомножителей, а стандартные образующие  $\epsilon_i$  из  $(\mathbb{Z}_2)^n$  действуют с помощью автоморфизма Вейля-Шевалле  $\sigma_{W,i}$  на  $i$ -м тензорном сомножителе тензорной степени  $U(g)^{\otimes n}$ .

Мы имеем

$$st_{ij}^\pm = t_{(s^{-1}i)(s^{-1}j)}^\pm \quad \forall s \in S_n, \quad st_i^0 = t_{s^{-1}(i)}^0.$$

Для образующих  $\epsilon_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , группы  $(\mathbb{Z}_2)^n$  действие на коэффициенты формы  $\Omega_{B_n}$  определяется по формулам

$$\begin{aligned} \epsilon_i t_{kl}^\pm &= t_{kl}^\mp, & i &= k \text{ или } l; \\ \epsilon_i t_{kl}^\pm &= t_{kl}^\pm, & i &\neq k \neq l; \\ \epsilon_k t_i^0 &= t_i^0, & k, i &= 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Действие группы  $W_{B_n}$  на пространстве  $\mathbb{C}^n$  определяется следующими правилами:

$$\begin{aligned} s(z_1, \dots, z_n) &= (z_{s^{-1}(1)}, \dots, z_{s^{-1}(n)}), & s &\in S_n, \\ \epsilon_i(z_1, \dots, z_n) &= (z_1, \dots, -z_i, \dots, z_n), & \epsilon_i &\in (\mathbb{Z}_2)^n. \end{aligned}$$

Легко видеть, что относительно указанного действия группы Вейля  $W_{B_n}$  1-форма  $\Omega_{B_n}$  уравнения КЗ типа  $B_n$  является инвариантной. Это позволяет факторизовать представление

монодромии  $\rho$  группы крашенных кос  $P(B_n) = \pi_1(Y_n, y_0)$  в  $U(g)[[h_1, h_2]]^{\otimes n}$  через группу кос Брискорна  $B(B_n) = \pi_1(Y_n/W_{B_n}, \bar{y}_0)$ , т.е. мы имеем следующую коммутативную диаграмму гомоморфизмов:

$$\begin{array}{ccc}
 & \nearrow \rho & U(g)[[h_1, h_2]]^{\otimes n} \\
 P(B_n) = \pi_1(Y_n) & & \uparrow \rho_{\text{KZ}(B)} \\
 & \searrow p & B(B_n) = \pi_1(Y_n/W_{B_n})
 \end{array}$$

Представление  $\rho_{\text{KZ}(B)}$  из диаграммы обычно называют представлением монодромии группы кос Брискорна.

**2.2. Группы кос Брискорна.** Пусть  $W_R$  — группа Вейля, соответствующая неприводимой системе корней  $R \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$ , и  $H_R$  — конфигурация гиперплоскостей отражения в  $\mathbb{C}^n$ . Напомним, что известно о фундаментальной группе  $\pi_1(\mathbb{C}^n \setminus H, z_0)$ , т.е. группе крашенных кос  $P(R)$ , и ее представлениях для различных систем корней. Естественно, будут упомянуты соответствующие факты для групп кос Брискорна  $B(R) = \pi_1((\mathbb{C}^n \setminus H)/W_R, \bar{z}_0)$ .

Во-первых, копредставления для групп кос Брискорна, отвечающих различным системам корней, были найдены самим Брискорном в начале 70-х годов прошлого века.

Далее, для  $W_{A_{n-1}}$  фундаментальная группа  $\pi_1(\mathbb{C}^n \setminus H_A, z_0)$  есть обычная группа крашенных кос  $P_n$  (в работе мы используем обозначение  $P(A_{n-1})$ ). Копредставления и структура этой группы хорошо изучены (см. работы [18, 26, 27] и ссылки в них). Различные теоремы о связи представлений групп  $P(A_{n-1})$  и  $B(A_{n-1})$  с монодромией уравнений КЗ можно найти в работах [18, 28]. Например, в [18] Коно доказал, что представления монодромии некоторых уравнений КЗ факторизуются через алгебры Гекке. Геометрические приложения представлений монодромии групп кос можно найти в работе [21].

Для  $W_{B_n}$  копредставление группы крашенных кос  $P(B_n) = \pi_1(\mathbb{C}^n \setminus H_{B_n}, z_0)$  найдено в [29, 30]. В работе [25] дана характеристика некоторых представлений групп  $P(B_n)$  и  $B(B_n)$  как представлений монодромии уравнений КЗ типа  $B_n$ . В работах [31, 32, 27, 33, 34] рассмотрены различные представления групп  $P(B_n)$  и  $B(B_n)$  в алгебры Гекке и приведены некоторые геометрические интерпретации этих групп.

Для  $W_{D_n}$  копредставление группы крашенных кос  $P(D_n) = \pi_1(\mathbb{C}^n \setminus H_D, z_0)$  найдено в работах [28, 25]. Некоторые представления этой группы описаны в [25], однако нет достаточно общих конструкций для представлений этих групп. Соответствующие уравнения КЗ и их представления монодромии в этом случае также мало изучены (см. [34–36]).

Для групп Вейля типов  $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$  есть только несколько разрозненных результатов [34–36].

Ниже рассматривается характеристика представлений монодромии для случая системы корней  $B_n$ .

**2.3. Геометрическая реализация группы кос Брискорна  $B(B_n)$ .** Известно, что группа кос Брискорна  $B(B_n)$  имеет копредставление с образующими  $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau$  и порождающими соотношениями

$$\begin{aligned}
 \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, & |i - j| \geq 2, & & \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \\
 (\tau \sigma_1)^2 &= (\sigma_1 \tau)^2, & \tau \sigma_i &= \sigma_i \tau, & i &\geq 2.
 \end{aligned}$$

Теперь мы опишем геометрическую реализацию группы  $B(B_n)$  при помощи симметрических кос с  $2n$  нитями, указанную в работе [38].

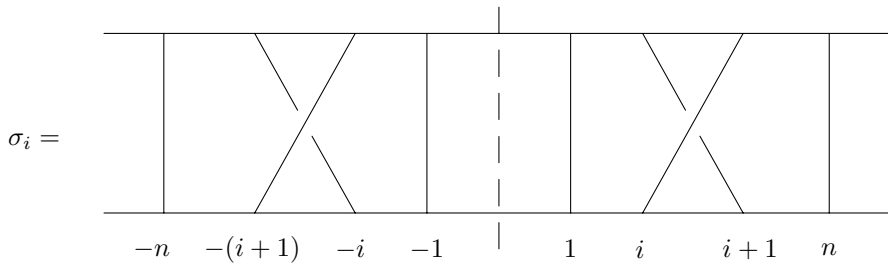


Рис. 2

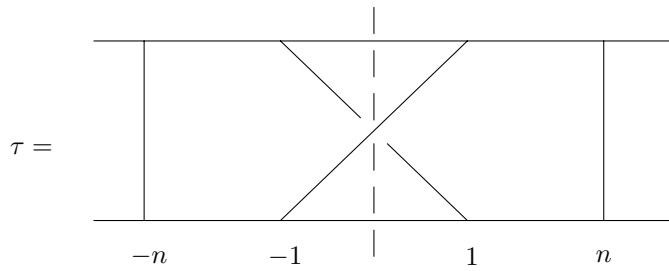


Рис. 3

Мы сопоставим образующей  $\sigma_i$  группы  $B(B_n)$  симметрическую косу, которая изображена на рис. 2. Эта коса из группы кос Артина  $B(A_{2n-1})$  с  $2n$  нитями (нити натянуты между точками  $(0, i, 0)$  и  $(0, i, 1)$ ,  $i = -n, -n + 1, \dots, -1, 1, 2, \dots, n$ , в полосе  $\mathbb{R}^2 \times [0, 1] \subset \mathbb{R}^3$ ) инвариантна при вращении на  $180^\circ$  вокруг оси  $(0, 0, z)$ ,  $z \in \mathbb{R}$ . Аналогично образующей  $\tau$  мы сопоставляем косу, изображенную на рис. 3.

Нетрудно проверить, что для указанных симметрических кос все порождающие соотношения группы  $B(B_n)$  выполняются. Например, на рис. 4 представлены правая и левая части соотношения  $(\tau\sigma_1)^2 = (\sigma_1\tau)^2$ . Легко видеть, что соответствующие косы изотопны.

Описанное соответствие на образующих задает гомоморфизм  $B(B_n)$  в  $B(A_{2n-1})$ , образом которого является вся подгруппа симметрических кос.

**Замечание.** Желательно дать подобную геометрическую интерпретацию для групп кос Брискорна, соответствующих другим корневым системам или, немного общее, группам Кокстера. Нам известно, что геометрическая интерпретация, подобная интерпретации для  $B(B_n)$ , существует для обобщенных групп кос, соответствующих диэдральным группам  $I_2(n)$ .

**2.4. Монодромия уравнений КЗ типа  $B_n$ .** Цель данного пункта — дать явные формулы для монодромии уравнений КЗ типа  $B_n$ .

Рассмотрим сначала решения наиболее простых уравнений КЗ типа  $B_n$ .

1. Пусть  $h_1 = h_2 = 0$ . Тогда уравнение КЗ имеет вид  $d\Psi = 0$  и его монодромия характеризуется действием группы Вейля  $W_{B_n}$  на  $U(g)^{\otimes n}$ .

2. Пусть теперь  $n = 1$ . Уравнение имеет форму

$$d\Psi(z) = \left( \frac{h_2}{2\pi i} \frac{t^0 dz}{z} \right) \Psi(z).$$

Представление монодромии группы  $B(B_1) = \mathbb{Z} = \langle \tau \rangle$ , соответствующее решению  $\Psi(z) = z^{\frac{h_2}{2\pi i} t^0}$ , описывается формулой

$$\rho_{B_1}(\tau) = \sigma_W \exp\left( h_2 \frac{t^0}{2} \right).$$

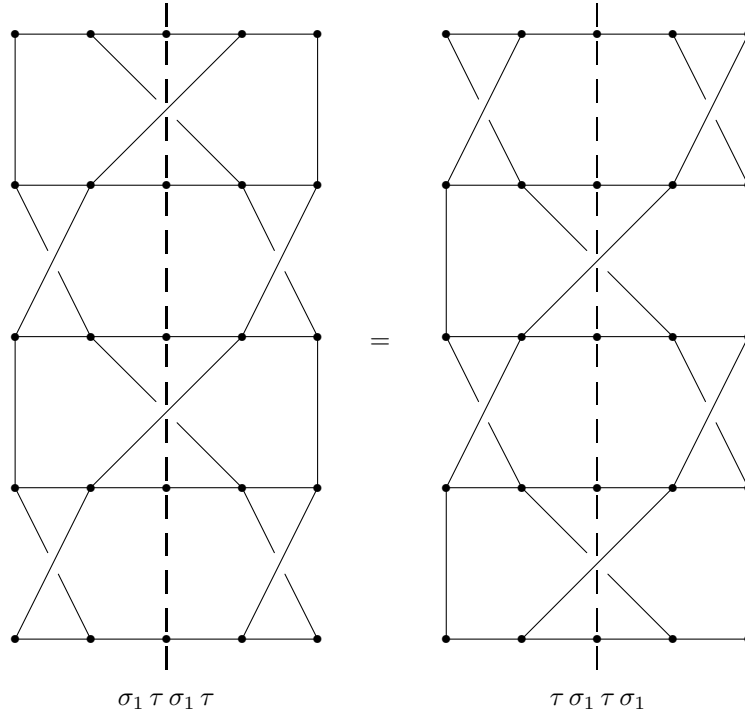


Рис. 4

3. Пусть  $n = 2$ . В этом случае сингулярный дивизор уравнения КЗ типа  $B_2$  есть объединение прямых с уравнениями  $z_1 - z_2 = 0$ ,  $z_1 + z_2 = 0$ ,  $z_1 = 0$ ,  $z_2 = 0$ .

Группа кос Брискорна  $B(B_2)$  порождается двумя элементами  $\sigma_1$ ,  $\tau$ , удовлетворяющими соотношению

$$\sigma_1 \tau \sigma_1 \tau = \tau \sigma_1 \tau \sigma_1.$$

Соответствующее уравнение КЗ имеет вид

$$d\Psi(z) = \left( \frac{h_1}{2\pi i} \left( \frac{t_{12}^- d(z_1 - z_2)}{z_1 - z_2} + \frac{t_{12}^+ d(z_1 + z_2)}{z_1 + z_2} \right) + \frac{h_2}{2\pi i} \left( \frac{t_1^0 dz_1}{z_1} + \frac{t_2^0 dz_2}{z_2} \right) \right) \Psi(z).$$

Сделаем замену переменных, предложенную Чередником [36]:

$$u = \frac{z_1 - z_2}{-z_2}, \quad v = -z_2.$$

Получим следующее уравнение:

$$d\Psi(z) = \left( \left( \frac{h_1}{2\pi i} (t_{12}^- + t_{12}^+) + \frac{h_2}{2\pi i} (t_1^0 + t_2^0) \right) \frac{dv}{v} + \frac{h_1}{2\pi i} t_{12}^- \frac{du}{u} + \frac{h_2}{2\pi i} t_1^0 \frac{d(1-u)}{1-u} + \frac{h_1}{2\pi i} t_{12}^+ \frac{d(2-u)}{2-u} \right) \Psi(z).$$

Решение этого уравнения можно представить в виде  $\Psi(z) = v^M G(u)$ , где

$$M = \frac{h_1}{2\pi i} (t_{12}^+ + t_{12}^-) + \frac{h_2}{2\pi i} (t_1^0 + t_2^0)$$

есть элемент центра алгебры, порожденной коэффициентами  $t_{12}^+$ ,  $t_{12}^-$ ,  $t_1^0$ ,  $t_2^0$ , и  $G(u)$  является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dG}{du} = \left( \frac{h_1}{2\pi i} \frac{t_{12}^-}{u} + \frac{h_2}{2\pi i} \frac{t_1^0}{1-u} + \frac{h_1}{2\pi i} \frac{t_{12}^+}{2-u} \right) G.$$

Рассмотрим решение  $G_0$  в окрестности точки  $u = 0$  и решение  $G_1$  в окрестности точки  $u = 1$  с главными членами асимптотик в соответствующих точках следующего вида:

$$G_0 \sim u^{\frac{h_1}{2\pi i} t_{12}^-}, \quad G_1 \sim (1-u)^{\frac{h_2}{2\pi i} t_1^0}.$$

Упомянутые окрестности можно выбрать пересекающимися. Как указано в [36] и [37], ассоциатор Дринфельда  $\Phi_B^{\text{KZ}}$  коксетеровского типа  $B$  есть “матрица” связи решений  $G_0$  и  $G_1$  в пересечении рассматриваемых окрестностей, т.е. мы имеем

$$G_0 = G_1 \Phi_B^{\text{KZ}}.$$

Очевидно, что  $\Phi_B^{\text{KZ}} \in (U(g)[[h_1, h_2]])^{\otimes 2}$ .

Монодромия решения  $v^M G(u)$  уравнения КЗ типа  $B_2$ , когда  $G(u)$  совпадает с  $G_0$  и  $G_1$  в окрестностях точек  $u = 0$  и  $u = 1$ , на образующих  $\sigma_1, \tau$  группы кос  $B(B_2)$  выражается следующими формулами:

$$\rho_{\text{KZ}}^{B_2}(\sigma_1) = s_{12} e^{h_1 t_{12}^-/2}, \quad \rho_{\text{KZ}}^{B_2}(\tau) = (\Phi_B^{\text{KZ}})^{-1} \sigma_{W,1} e^{h_2 t_1^0/2} \Phi_B^{\text{KZ}},$$

где  $\Phi_B^{\text{KZ}}(\frac{h_1}{2\pi i} t_{12}^+, \frac{h_1}{2\pi i} t_{12}^-, \frac{h_2}{2\pi i} t_1^0)$  есть ассоциатор Дринфельда типа  $B$ ,  $\sigma_{W,1}$  — автоморфизм Вейля–Шевалле, действующий на первом тензорном сомножителе в  $U(g)^{\otimes 2}$ ,  $s_{12}$  — оператор перестановки первого и второго сомножителей в  $U(g)^{\otimes 2}$ .

Для случая  $n = 3$  мы имеем уже два ассоциатора  $\Phi_A^{\text{KZ}}$  и  $\Phi_B^{\text{KZ}}$ . Необходимо отметить, что ассоциатор  $\Phi_A^{\text{KZ}}$  для уравнения КЗ типа  $B_3$  определяется как “матрица” связи решений в окрестностях точек, лежащих на гиперплоскостях  $z_1 - z_2 = 0$  и  $z_2 - z_3 = 0$ , и совпадает с ассоциатором  $\Phi_{\text{KZ}}$ , определенным в разд. 1 (см. [38]). Ассоциаторы  $\Phi_A^{\text{KZ}}$  и  $\Phi_B^{\text{KZ}}$ , определенные описанным выше способом, при  $n > 3$  совпадают с ассоциаторами, определенными при  $n = 2, 3$ , с точностью до тензорного умножения на тензорное произведение единиц из  $U(g)[[h_1, h_2]]$  [38].

Таким образом, как и в случае корневой системы  $A_{n-1}$ , можно вычислить монодромию уравнения КЗ типа  $B_n$ ,  $n > 3$ , но при этом приходится использовать ассоциаторы двух типов  $\Phi_A^{\text{KZ}} \in U(g)[[h_1, h_2]]^{\otimes 3}$  и  $\Phi_B^{\text{KZ}} \in U(g)[[h_1, h_2]]^{\otimes 2}$ . Соответствующие формулы для значений монодромии на образующих  $\sigma_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , и  $\tau$  имеют вид [39]

$$\begin{aligned} \rho_{\text{KZ}}^{B_n}(\sigma_1) &= s_{12} e^{h_1 t_{12}^-/2}, \\ \rho_{\text{KZ}}^{B_n}(\tau) &= (\Phi_B^{\text{KZ}})^{-1} \sigma_{W,1} e^{h_2 t_1^0/2} \Phi_B^{\text{KZ}}, \\ \rho_{\text{KZ}}(\sigma_i) &= ((\Phi_A^{\text{KZ}})^{(i)})^{-1} s_{ii+1} e^{h_1 t_{ii+1}^0/2} (\Phi_A^{\text{KZ}})^{(i)}. \end{aligned}$$

Здесь  $(\Phi_A^{\text{KZ}})^{(i)}$  получены с помощью коумножения точно так же, как указано в формулах разд. 1 для представления группы кос, построенного по общей структуре сплетенной квазибиалгебры.

Список соотношений, связывающих  $R_A = e^{h_1 t^-/2}$ ,  $R_B = e^{h_2 t^0/2}$ ,  $\Phi_A$ ,  $\Phi_B$  и соответствующих структуре сплетенной квазибиалгебры коксетеровского типа  $B_n$ , будет дан ниже в разд. 4.

### 3. МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ ДРИНФЕЛЬДА–ДЖИМБО

В этом разделе мы приведем определение многопараметрических алгебр Дринфельда–Джимбо и укажем некоторые их свойства, аналогичные свойствам обычных алгебр Дринфельда–Джимбо. Пусть  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  — простые корни простой комплексной алгебры Ли  $g$ . Пусть  $d_1, \dots, d_m$  обозначают квадраты длин простых корней  $\alpha_1, \dots, \alpha_m$  и  $h(d_1), \dots, h(d_m)$  — соответствующие формальные параметры. Число различных формальных параметров  $r \leq m$  среди  $h(d_1), \dots, h(d_m)$  равно числу различных длин простых корней. В рассматриваемых нами случаях  $r = 1$  или  $2$ .

Многопараметрическая алгебра Дринфельда–Джимбо  $U_h(g)$ ,  $h = (h(d_1), \dots, h(d_m))$ , есть ассоциативная алгебра, порожденная элементами  $X_i = X_{\alpha_i}$ ,  $Y_i = Y_{-\alpha_i}$ ,  $H_i = H_{\alpha_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$ , удовлетворяющими соотношениям

$$[H_i, H_j] = 0, \quad [H_i, X_j] = a_{ij}X_j, \quad [H_i, Y_j] = -a_{ij}Y_j, \quad [X_i, Y_j] = \delta_{ij} \frac{\text{sh}(h(d_i)d_i H_i/2)}{\text{sh}(h(d_i)d_i/2)},$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} X_i^k X_j X_i^{1-a_{ij}-k} = 0, \quad \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} Y_i^k Y_j Y_i^{1-a_{ij}-k} = 0.$$

Здесь мы используем обозначения

$$q_i = e^{h(d_i)d_i/2},$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{q_i} = \frac{[n]_{q_i} [n-1]_{q_i} \dots [n-k+1]_{q_i}}{[k]_{q_i}!}, \quad [n]_{q_i} = \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}, \quad [k]_{q_i}! = [1]_{q_i} [2]_{q_i} \dots [k]_{q_i}$$

и  $a_{ij}$  — элементы матрицы Картана алгебры Ли  $g$ . Топология кольца  $\mathbb{C}_h = \mathbb{C}[[h(d_1), \dots, h(d_m)]]$ , где  $h = (h(d_1), \dots, h(d_m))$ , или модуля  $M$  над этим кольцом определяется степенями идеалов  $I = (h(d_1), \dots, h(d_m))$  или их действием на модуле  $M$ .

Мы определим коумножение  $\Delta_h$  для многопараметрической алгебры  $U_h(g)$  как непрерывный гомоморфизм алгебр

$$\Delta_h: U_h(g) \rightarrow U_h(g) \widehat{\otimes} U_h(g),$$

где  $\widehat{\otimes}$  — топологическое тензорное произведение [21]. Этот гомоморфизм на образующих алгебры  $U_h(g)$  определяется формулами

$$\Delta_h(H_i) = H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i,$$

$$\Delta_h(X_i) = X_i \otimes e^{h(d_i)d_i H_i/4} + e^{-h(d_i)d_i H_i/4} \otimes X_i,$$

$$\Delta_h(Y_i) = Y_i \otimes e^{h(d_i)d_i H_i/4} + e^{-h(d_i)d_i H_i/4} \otimes Y_i.$$

Мы определим коединицу и антипод на образующих в  $U_h(g)$  формулами

$$\varepsilon(H_i) = \varepsilon(X_i) = \varepsilon(Y_i) = 0,$$

$$S_h(H_i) = -H_i, \quad S_h(X_i) = e^{h(d_i)d_i/2} X_i, \quad S_h(Y_i) = e^{-h(d_i)d_i/2} Y_i$$

и распространим на все  $U_h(g)$  по мультипликативности как гомоморфизм и антигомоморфизм соответственно.

Пусть  $\mu_h$  обозначает умножение в  $U_h(g)$ , и пусть

$$\eta_h: \mathbb{C}_h \rightarrow U_h(g)$$

обозначает единицу в  $U_h(g)$ .

Алгебру Хопфа  $(U_h(g), \mu_h, \Delta_h, \eta_h, \varepsilon_h, S_h)$  будем называть многопараметрической алгеброй Хопфа.

Многопараметрическая алгебра Дринфельда–Джимбо обладает следующими свойствами.

**Предложение 3.** Пусть  $(U_h(g), \mu_h, \Delta_h, \eta_h, \varepsilon_h)$  — многопараметрическая алгебра Дринфельда–Джимбо и  $U(g)$  — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли  $g$ . Имеет место изоморфизм

$$U_h(g)/IU_h(g) = U(g).$$

**Доказательство** аналогично доказательству в однопараметрическом случае (см. [21]).

**Предложение 4.** Антитоп в  $U_h(g)$  удовлетворяет равенству

$$S_h^2(a) = e^{\rho_h} a e^{-\rho_h}, \quad a \in U_h(g),$$

где

$$\rho_h = \sum_{i,j=1}^n (A^{-1})_{ji} d_j h(d_i) H_i$$

и  $A^{-1}$  — обратная матрица к матрице Картана алгебры Ли  $g$ .

**Доказательство.** Формула доказывается прямыми вычислениями в  $U_h(g)$ , как и в однопараметрическом случае.

Для простых алгебр Ли  $g$  типов  $A, D, E$  многопараметрическая алгебра Дринфельда–Джимбо совпадает с обычной однопараметрической алгеброй Дринфельда–Джимбо.

В многопараметрическом случае для алгебр Дринфельда–Джимбо может быть реализована конструкция квантового дубля Дринфельда [21, 23], которая позволяет определить многопараметрическую универсальную  $R$ -матрицу.

Имеет место следующая

**Теорема 3.** Универсальная  $R$ -матрица имеет вид

$$R_h = \sum_{l \in \mathbb{Z}_+^r} e^{t_0(h) + \frac{1}{4}(H_l(h) \otimes 1 + 1 \otimes H_l(h))} P_l,$$

где

$$t_0(h) = \sum_{1 \leq i, j \leq r} (DA)_{ij}^{-1} h(d_i) H_i \widehat{\otimes} h(d_j) H_j, \quad H_l = \sum_{i=1}^r l_i h(d_i) H_i,$$

$P_l$  — некоторые однородные полиномы от переменных  $X_1 \otimes 1, \dots, X_r \otimes 1$  и  $1 \otimes Y_1, \dots, 1 \otimes Y_r$ , причем  $P_0 = 1 \otimes 1$  и  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ . Также выполняется сравнение  $R_h \equiv 1 \otimes 1 \pmod{I}$ , где  $I = (h(d_1), \dots, h(d_n))$  — идеал, порожденный параметрами деформации.

**Доказательство** аналогично доказательству соответствующей теоремы в однопараметрическом случае.

#### 4. СПЛЕТЕННЫЕ КВАЗИБИАЛГЕБРЫ КОКСЕТЕРОВСКОГО ТИПА $B_n$ И ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ДРИНФЕЛЬДА–КОНО

Сплетенная квазибиалгебра типа  $B_n$  — это некоторая биалгебра  $A$  с почти кокоммутативным и почти коассоциативным коумножением и набором структурных элементов

$$\mathcal{B} = (A, \mu, \Delta, \eta, \varepsilon, R_A, \Phi_A, R_B, \Phi_B),$$

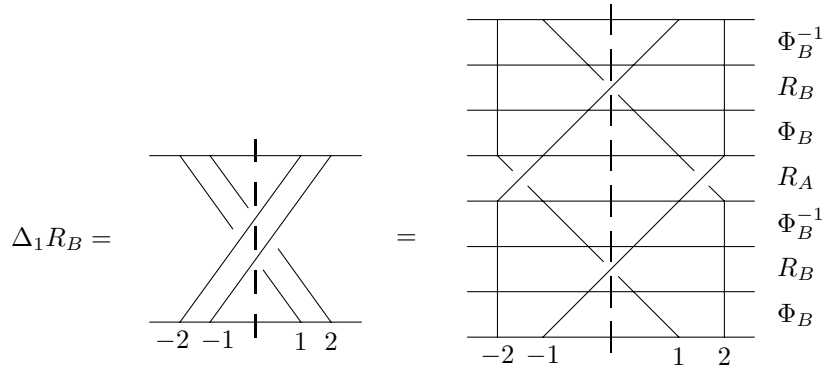
где  $\eta$  — единица,  $\varepsilon$  — коединица,  $R_A \in A^{\otimes 2}$  и  $R_B \in A$  —  $R$ -матрицы,  $\Phi_A \in A^{\otimes 3}$ ,  $\Phi_B \in A^{\otimes 2}$  — ассоциаторы. Аксиоматическая характеристика  $R$ -матриц и ассоциаторов будет дана ниже.

Пусть  $\nu$  обозначает гомоморфизм, задающий перестановку тензорных сомножителей  $\nu: A^{\otimes 2} \rightarrow A^{\otimes 2}$ ,  $a \otimes b \rightarrow b \otimes a$  и  $\Delta^{\text{op}} = \nu \Delta$ . Мы требуем, чтобы выполнялись равенства

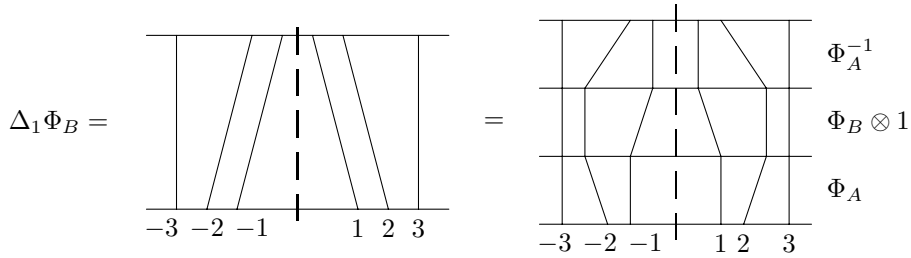
$$\Delta^{\text{op}}(a) = R_A \Delta(a) R_A^{-1}, \quad (\Delta \otimes 1) \Delta(a) = \Phi_A (1 \otimes \Delta) \Delta(a) \Phi_A^{-1}.$$

Эти равенства определяют, что означают “почти кокоммутативность” и “почти коассоциативность”. Мы также требуем, чтобы структурные элементы удовлетворяли еще следующим





$$\Delta R_B = \Phi_B^{-1}(R_B \otimes 1)\Phi_B R_A \Phi_B^{-1}(R_B \otimes 1)\Phi_B$$



$$\Delta_1 \Phi_B = \Phi_A^{-1}(\Phi_B \otimes 1)\Phi_A$$

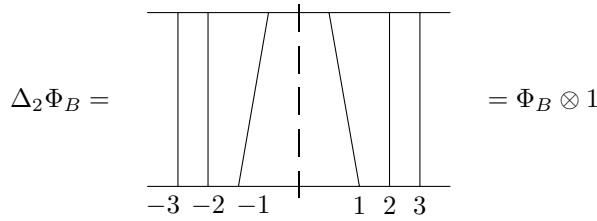


Рис. 5

аксиомам:

- 1)  $\Delta_1 R_A = \Phi_A^{312} R_A^{13} (\Phi_A^{132})^{-1} R_A^{23} \Phi_A^{123}$ ,  $\Delta_2 R_A = (\Phi_A^{231})^{-1} R_A^{13} \Phi_A^{213} R_A^{12} (\Phi_A^{132})^{-1}$ ;
- 2)  $\Delta R_B = \Phi_B^{-1}(R_B \otimes 1)\Phi_B R_A^{12} \Phi_B^{-1}(R_B \otimes 1)\Phi_B$ ;
- 3)  $(\Delta_3 \Phi_A)(\Delta_1 \Phi_A) = (1 \otimes \Phi_A)(\Delta_2 \Phi_A)(\Phi_A \otimes 1)$ ;
- 4)  $\Delta_1 \Phi_B = \Phi_A^{-1}(\Phi_B \otimes 1)\Phi_A$ ,  $\Delta_2 \Phi_B = \Phi_B \otimes 1$ ;
- 5)  $\varepsilon_1 R_A = \varepsilon_2 R_A = 1 \otimes 1$ ;
- 6)  $\varepsilon_1 \Phi_A = \varepsilon_2 \Phi_A = \varepsilon_3 \Phi_A = 1 \otimes 1 \otimes 1$ ,  $\Delta_i = \Delta \otimes 1, 1 \otimes \Delta, \Delta \otimes 1 \otimes 1, 1 \otimes \Delta \otimes 1, 1 \otimes 1 \otimes \Delta$ ,  
 $\varepsilon_i = \varepsilon \otimes 1, 1 \otimes \varepsilon, \varepsilon \otimes 1 \otimes 1, 1 \otimes \varepsilon \otimes 1, 1 \otimes 1 \otimes \varepsilon$ ;
- 7)  $\varepsilon R_B = 1$ ,  $(\varepsilon \otimes 1)\Phi_B = (1 \otimes \varepsilon)\Phi_B = 1 \otimes 1$ ,

где  $\varepsilon$  — коединица в  $A$  и  $\Delta$  — коумножение в  $A$ .

Эти аксиомы моделируют свойства голономии уравнения КЗ типа  $B_n$ , которые вытекают из свойства перестановочности регуляризованной голономии с операцией симметрического инфинитезимального удвоения нитей симметрических кос со свободными концами (см. [39]). Геометрическая интерпретация этих аксиом дана на рис. 5.

В общем случае структура сплетенной квазибиалгебры типа  $B_n$  на алгебре  $A$  и некоторая инволюция  $\sigma_A$  на  $A$  позволяют определить представление группы Брискорна типа  $B(B_n)$

$$\rho_B: B(B_n) \rightarrow A^{\otimes n}$$

по формулам, аналогичным формулам п. 2.4:

$$\begin{aligned}\rho_B(\sigma_1) &= s_{12}R_A, \\ \rho_B(\sigma_i) &= (\Phi_A^{(i)})^{-1} s_{i\ i+1} R_{A,(i\ i+1)} \Phi_A^{(i)}, \\ \rho_B(\tau) &= \Phi_B^{-1} \sigma_{A,1}(R_B)_1 \Phi_B,\end{aligned}$$

где  $R_B$  — универсальная матрица типа  $B$ , а индекс 1 обозначает вложение  $R_B$  в  $A^{\otimes n}$  на первый тензорный сомножитель.

Теперь мы определим структуру сплетенной квазибиалгебры типа  $B$  по уравнениям КЗ типа  $B_n$ ,  $n \geq 1$ . Она характеризуется следующими данными:

$$\mathcal{B}_{\text{KZ}} = \left( U(g)[[h_1, h_2]], \mu, \Delta, \eta, \varepsilon, R_A^{\text{KZ}}, R_B^{\text{KZ}}, \Phi_A^{\text{KZ}}, \Phi_B^{\text{KZ}} \right),$$

где  $R_A^{\text{KZ}} = e^{h_1 t^- / 2} \in (U(g)[[h_1, h_2]])^{\otimes 2}$ ,  $R_B^{\text{KZ}} = e^{h_2 t^0 / 2} \in U(g)[[h_1, h_2]]$ ,  $\Phi_A^{\text{KZ}} \in (U(g)[[h_1, h_2]])^{\otimes 3}$ ,  $\Phi_B^{\text{KZ}} \in (U(g)[[h_1, h_2]])^{\otimes 2}$ .

Умножение  $\mu$ , коумножение  $\Delta$ , единица  $\eta$  и коединица  $\varepsilon$  совпадают с соответствующими операциями в тривиальной двухпараметрической деформации обертывающей алгебры  $U(g)$ . Можно показать, что указанный набор структурных элементов определяет структуру сплетенной квазибиалгебры типа  $B_n$  на  $U(g)[[h_1, h_2]]$  (см. [39]).

Формулы для монодромии уравнения КЗ типа  $B_n$  были даны в п. 2.4.

Мы определим теперь скручивание произвольной структуры  $\mathcal{B}$  квазибиалгебры типа  $B_n$  на некоторой алгебре  $A$ . Скручивание определяется элементами  $F_A \in A^{\otimes 2}$  и  $F_B \in A$ . Скрученная структура определяется следующими элементами:

$$\begin{aligned}\tilde{R}_B &= F_B R_B F_B^{-1}, & \tilde{R}_A &= F_A R_A F_A^{-1}, \\ \tilde{\Phi}_B &= (\Delta F_B) \Phi_B (\Delta F_B)^{-1}, & \tilde{\Phi}_A &= (1 \otimes F_A) (\Delta_2 F_A) \Phi_A (\Delta_1 F_A^{-1}) (F_A \otimes 1), \\ \tilde{\Delta}(a) &= F_A \Delta(a) F_A^{-1}, & \tilde{\mu}(a \otimes b) &= \mu(F_A(a \otimes b) F_A^{-1}).\end{aligned}$$

**Предложение 5.** *Множество скрученных объектов сплетенной квазибиалгебры типа  $B$  удовлетворяет аксиомам 1)–7).*

Обозначим структуру скрученной квазибиалгебры  $\mathcal{B}_{(F_A, F_B)}$ . Две структуры, получающиеся одна из другой скручиванием, называются калибровочно эквивалентными. Две калибровочно эквивалентные структуры сплетенной квазибиалгебры типа  $B$  определяют эквивалентные представления группы кос Брискорна  $B(B_n)$ .

Для формулировки обобщения теоремы Дринфельда–Коно необходимо следующее утверждение.

**Предложение 6.** *Для двухпараметрических алгебр Дринфельда–Джимбо  $U_h(g)$  существуют такие элементы  $R_{A,h} \in U_h(g)^{\otimes 2}$ ,  $R_{B,h} \in U_h(g)$ , что следующий набор объектов:*

$$\mathcal{B}_h = \left( U_h(g), \mu_h, \Delta_h, \eta_h, \varepsilon_h, R_{A,h}, R_{B,h}, \Phi_{A,h} = 1 \otimes 1 \otimes 1, \Phi_{B,h} = 1 \otimes 1 \right)$$

*определяет сплетенную топологическую биалгебру над  $\mathbb{C}_h$ , где  $h = (h_1, h_2)$ . Элемент  $R_{A,h}$  совпадает с универсальной  $R$ -матрицей, которая упоминалась выше.*

Любая такая сплетенная биалгебра определяет представление группы кос Брискорна типа  $B(B_n)$  по формулам, указанным выше в этом разделе, где в качестве  $\sigma_A$  берется продолжение  $\tilde{\sigma}_W$  автоморфизма Вейля–Шевалле на  $U_h(g)$  (для этого можно использовать линейный непрерывный изоморфизм  $U_h(g)$  и  $U(g)[[h_1, h_2]]$ ). В частности, мы получаем элементы  $\tilde{R}_{A,h} = s_{12}R_{A,h}$  и  $\tilde{R}_{B,h} = \tilde{\sigma}_W R_{B,h}$ , удовлетворяющие одному из порождающих соотношений для кос Брискорна типа  $B_n$

$$(\tilde{R}_{A,h}(\tilde{R}_{B,h} \otimes 1))^2 = ((\tilde{R}_{B,h} \otimes 1)\tilde{R}_{A,h})^2.$$

Это уравнение на  $R$ -матрицы для случая  $B_n$  необходимо добавить к уравнениям Янга–Бакстера. Существование элемента  $R_B$  для случая  $g = sl(2)$  следует из работы [33].

Теперь мы сформулируем теорему, которая обобщает теорему Дринфельда на случай систем корней типа  $B$ .

**Теорема 4.** *Существуют два таких скручивающих ряда  $F_A(h_1, h_2) \in U(g)[[h_1, h_2]]^{\otimes 2}$ ,  $F_B(h_1, h_2) \in U(g)[[h_1, h_2]]$ , что имеет место изоморфизм*

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{KZ} &= \left( U(g)[[h]], \mu, \Delta, R_A = e^{t^-/2}, R_B = e^{ht^0/2}, \Phi_A^{KZ}, \Phi_B^{KZ} \right)_{F(h_1, h_2)} \cong \\ &\cong \mathcal{B}_h = \left( U_h(g), R_{A,h}, R_{B,h}, \Phi_{A,h} = 1 \otimes 1 \otimes 1, \Phi_{B,h} = 1 \otimes 1 \right). \end{aligned}$$

Теперь сформулируем основную теорему работы.

**Теорема 5.** *Пусть  $g$  — любая простая комплексная конечномерная алгебра Ли,  $t^- \in g \otimes g \subset U(g)^{\otimes 2}$  —  $g$ -инвариантный тензор Белавина–Дринфельда и  $t^0 \in U(g)$  — элемент Лейбмана. Тогда представление монодромии уравнения КЗ типа  $B_n$  с коэффициентами, определяемыми элементами  $t^-, t^+ = (\sigma_W \otimes 1)(t^-)$  и  $t^0$ ,*

$$\rho_{KZ}: B(B_n) \rightarrow (U(g)[[h]])^{\otimes n}$$

*эквивалентно представлению группы кос Брискорна  $B(B_n)$ , определяемому по структуре сплетенной квазибиалгебры типа  $B$  на двухпараметрической алгебре Дринфельда–Джимбо  $U_h(g)$  с тривиальными ассоциаторами  $\Phi_{A,h} = 1 \otimes 1 \otimes 1$  и  $\Phi_{B,h} = 1 \otimes 1$ .*

Доказательство сформулированной теоремы аналогично доказательству теоремы Дринфельда–Коно для случая системы корней  $A_n$  (см. [21, гл. 18, 19]). Так как полное доказательство занимает слишком много места, мы лишь перечислим основные вехи доказательства.

1. Доказательство существования линейного изоморфизма

$$U_h(g) \simeq U(g)[[h]],$$

продолжающего тождественное отображение на  $U(g)$ .

2. Доказательство изоморфизма с точностью до калибровочной эквивалентности двух произвольных структур квазибиалгебры типа  $B$  на тривиальной двухпараметрической деформации универсальной обертывающей алгебры  $U(g)$ , которые отличаются только ассоциаторами  $\Phi_A$ , а остальные структурные элементы совпадают. Подобное утверждение верно и относительно ассоциатора  $\Phi_B$ . Доказательство последнего факта основано на использовании циклических гомологий (см. [40]).

3. Используя утверждения п. 2 с помощью калибровочных эквивалентностей мы можем редуцировать структуру сплетенной квазибиалгебры  $\mathcal{B}_{KZ}$  к структуре сплетенной квазибиалгебры с тривиальными ассоциаторами  $\Phi_A$  и  $\Phi_B$ .

4. Доказательство изоморфизма с точностью до калибровочной эквивалентности структуры сплетенной биалгебры, полученной в п. 3, и некоторой универсальной структуры сплетенной биалгебры на алгебре Дринфельда–Джимбо, существование которой утверждалось в предложении 6.

Полное доказательство появится в дальнейших публикациях.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Regge T.* Algebraic topology methods in the theory of Feynman relativistic amplitudes // Battelle rencontres, 1967 / Eds. C. DeWitt, J. Wheeler. New York: Benjamin, 1968. P. 433–458.
2. *Голубева В.А.* Некоторые вопросы аналитической теории фейнмановских интегралов // УМН. 1976. Т. 31, №2. С. 174–202.
3. *Deligne P.* Equations différentielles à points singuliers réguliers. Berlin: Springer, 1970. (Lect. Notes Math.; V. 163).
4. *Gérard R.* Théorie de Fuchs sur une variété analytique complexe // J. math. pures et appl. Sér. 9. 1968. V. 47. P. 321–404.
5. *Болибрух А.А.* Системы Пфаффа типа Фукса на комплексном аналитическом многообразии // Мат. сб. 1977. Т. 103, №1. С. 112–123.
6. *Голубева В.А.* О мероморфном сечении комплексно-аналитического векторного расслоенного пространства над комплексным проективным пространством // Мат. сб. 1977. Т. 103, №4. С. 505–518.
7. *Suzuki O.* The problems of Riemann and Hilbert and the relations of Fuchs in several complex variables // Lect. Notes Math. 1979. V. 712. P. 325–364.
8. *Kita M.* The Riemann–Hilbert problem and its application to analytic functions of several complex variables // Tokyo J. Math. 1979. V. 2, N 1. P. 1–27.
9. *Kita M.* The Riemann–Hilbert problem in several complex variables. II // Tokyo J. Math. 1979. V. 2, N 2. P. 293–300.
10. *Katz N.* An overview of Deligne’s works on Hilbert’s twenty-first problem // Proc. Symp. Pure Math. 1976. V. 28. P. 537–557.
11. *Hain R.* On a generalization of Hilbert’s 21st problem // Ann. sci. Ecole Norm. Super. Sér. 4. 1986. V. 19, N 4. P. 609–627.
12. *Болибрух А.А.* О фундаментальной матрице системы Пфаффа типа Фукса // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1977. Т. 41, №5. С. 1084–1109.
13. *Болибрух А.А.* Пример неразрешимой проблемы Римана–Гильберта на  $CP^2$  // Геометрические методы в задачах алгебры и анализа. Ярославль: Изд. Яросл. гос. ун-та, 1980. Вып. 2. С. 60–64.
14. *Лексин В.П.* О фуксовых представлениях фундаментальной группы комплексного многообразия // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль: Изд. Яросл. гос. ун-та. 1979. Вып. 4. С. 109–114.
15. *Golubeva V.A.* On the Riemann–Hilbert problem in a class of the Knizhnik–Zamolodchikov equations // Funct. Diff. Equat. 2001. V. 8, N 3/4. P. 241–256.
16. *Дринфельд В.Г.* Квазихопфовы алгебры // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1, №6. С. 114–148.
17. *Дринфельд В.Г.* О квазитреугольных квазихопфовых алгебрах и одной группе, тесно связанной с  $Gal(\overline{Q}/Q)$  // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2, №4. С. 129–181.
18. *Kohno T.* Linear representations of braid groups and classical Yang–Baxter equations // Contemp. Math. 1988. V. 78. P. 339–363.
19. *Kohno T.* Quantized universal enveloping algebras and monodromy of braid groups: Preprint Nagoya Univ., 1991.
20. *Knizhnik V.G., Zamolodchikov A.B.* Current algebra and Wess–Zumino models in two dimensions // Nucl. Phys. B. 1984. V. 247, N 1. P. 83–103.
21. *Кассель К.* Квантовые группы. М.: Фазис, 1999.
22. *Le T.Q.T., Murakami I.* Representations of the category of tangles by Kontsevich’s iterated integral // Commun. Math. Phys. 1995. V. 168, N 3. P. 535–562.
23. *Tanisaki T.* Killing forms, Harish–Chandra isomorphisms, and universal  $R$ -matrices for quantum algebras // Intern. J. Mod. Phys. A. 1992. V. 7. Suppl. 1B. P. 941–961.
24. *Piunikhin S.* Combinatorial expression for universal Vassiliev link invariant // Commun. Math. Phys. 1995. V. 168, N 1. P. 1–22.
25. *Leibman A.* Some monodromy representations of generalized braid groups // Commun. Math. Phys. 1994. V. 164, N 2. P. 293–304.

26. *Markushevich D.G.* The  $D_n$  generalized pure braid groups // *Geom. Dedicata*. 1991. V. 40, N 1. P. 73–96.
27. *Вершинин В.* Группы кос и пространства петель // *УМН*. 1999. Т. 54, № 2. С. 3–84.
28. *Mathieu O.* Équations de Knizhnik–Zamolodchikov et théorie des représentations // *Astérisque*. 1995. V. 227, exp. 777. P. 47–67. (Séminaire Bourbaki, 1993/94).
29. *Leibman A., Markushevich D.* The monodromy of the Brieskorn bundle // *Contemp. Math*. 1994. V. 164. P. 91–117.
30. *Leibman A.* Fiber bundles with degenerations and their applications to computing fundamental groups // *Geom. Dedicata*. 1993. V. 48, N 1. P. 93–126.
31. *tom Dieck T.* Knotentheorie und Wurzelsysteme. I, II // *Math. Göttingen*. 1993. V. 21. P. 44.
32. *Lambropoulou S.* Solid torus links and Hecke algebras of  $B$  type // *Proc. Conf. on Quantum Topology*. Singapore: World Sci., 1994. P. 225–245.
33. *Häring-Oldenburg R.* Tensor categories of Coxeter type  $B$  and QFT on the half plane // *J. Math. Phys.* 1997. V. 38, N 10. P. 5371–5382.
34. *Golubeva V.A., Leksin V.P.* On two types of representations of the braid group associated with the Knizhnik–Zamolodchikov equation of the  $B_n$  type // *J. Dyn. and Control Syst.* 1999. V. 5, N 4. P. 565–596.
35. *Чередник И.В.* Обобщенные группы кос и локальные  $r$ -матричные системы // *ДАН СССР*. 1989. Т. 307, № 1. С. 49–53.
36. *Cherednik I.V.* Monodromy representations for generalized Knizhnik–Zamolodchikov equations and Hecke algebras // *Publ. RIMS. Kyoto Univ.* 1991. V. 27, N 5. P. 711–726.
37. *de Concini C., Procesi C.* Hyperplane arrangements and holonomy equations // *Sel. Math. New ser.* 1995. V. 1, N 3. P. 495–535.
38. *Горюнов В.В.* Когомологии групп кос серий  $C$  и  $D$  // *Тр. Моск. мат. о-ва*. 1981. Т. 42. С. 234–242.
39. *Laksin V.P.* Monodromy for KZ equations of the  $B_n$ -type and accompanying algebraic structures // *Funct. Diff. Equat.* 2001. V. 8, N 3/4. P. 335–344.
40. *Loday J.-L.* Cyclic homology. Berlin: Springer, 1998. (Grundle Math. Wissensch.; Bd. 301).