ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 2, № 1
январь
1970

К МЕТОДУ СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ ДЛЯ КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА ФЕЙНМАНА

В. П. Маслов

Формула, полученная ранее автором при условии, что классические экстремали функционала $\int L dt$ невырождены, переносится на общий случай.

Рассмотрим общий лагранжиан

$$L(\dot{X}, X, t), \; X = X_1, \; \ldots, \; X_n \tag{1}$$

и фейнмановский континуальный интеграл [1]

$$\Phi(x, \xi, t) = \int \exp\left\{\frac{i}{h}\int L(\dot{X}, X, \tau)\, d\tau\right\} dX(\tau), \tag{2}$$

который берется по всем траекториям, исходящим из точки $\xi = \xi_1, \ldots, \xi_n$ и приходящим в момент $\tau = t$ в точку $x = x_1, \; \ldots, \; x_n$.

Фейнмановский континуальный интеграл как интеграл по траектории еще не обоснован строго математически. Поэтому всякие вычисления с помощью манипуляций с континуальным интегралом Фейнмана с математической точки зрения можно признать лишь как эвристические соображения. Однако именно такие эвристические соображения привели автора к получению квазиклассической асимптотики в целом [2]. Поэтому мы сочли нужным привести их здесь для более общего случая, когда экстремали классической вариации задачи вырождены. В этом случае, так же как и в невырожденном, обнаруживается полная аналогия (с точки зрения теории Морса) с асимптотикой обычного интеграла. Нетрудно заметить при этом в приводимом ниже выводе методологическую связь с теорией Морса (см. [3]).

Все приводимые ниже результаты могут быть получены строго [1)], если принять, что $\Phi(x, \xi, t)$ есть функция Грина для псевдодифференциального по Вейлю оператора

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\left(\hat{p}^{\mathrm{II}}, \frac{x^{\mathrm{I}} + x^{\mathrm{III}}}{2}, t\right),$$

[1)] Они легко извлекаются из [4].

где $\hat{p} = -ih\frac{\partial}{\partial x}$, $H(p, x, t)$ — гамильтониан, отвечающий лагранжиану $L(\dot{X}, X, t)$, а римские цифры означают порядок действия операторов $\hat{p}$ и x:

$$H\left(\hat{p}\ ,\ \frac{x^{\mathrm{I}} + x^{\mathrm{III}}}{2}, t\right)\psi(x, t) =$$
$$= \int e^{\frac{ipx}{h}} dp \int e^{-\frac{ip\xi}{h}} H\left(p, \frac{x+\xi}{2}, t\right)\psi(\xi, t)\, d\xi.$$

Прежде чем приступать к исследованию интеграла (2), рассмотрим для аналогии K-мерный интеграл вида

$$\int e^{\frac{i}{h}F(x)}\Phi(x)\, dx, \quad x = x_1, \ldots, x_N, \tag{3}$$

где $F(x)$, $\Phi(x)$ дважды дифференцируемы, а $\Phi(x)$ сверх того финитна и $\Omega = \operatorname{Supp}\Phi(x)$ — ее носитель. Пусть $x = x^0$ — единственная в Ω стационарная точка $F(x)$:

$$F'(x^0) = 0, \quad F'(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \neq x^0, \quad x \in \Omega.$$

Мы можем перейти к новым переменам $y = y_1, \ldots, y_N$ с помощью преобразования поворота так, что матрица

$$\left\| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{x=x^0} \tag{4}$$

станет диагональной. Предположим, не уменьшая общности, что при $i \leqslant k$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y_i^2}\right|_{x=x^0} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y_i^2}\right|_{x=x^0} = 0 \text{ при } i > k. \tag{5}$$

Тогда очевидно, что по методу стационарной фазы можно вычислить асимптотику при $h \to 0$ первых k интегралов по $y_1, \ldots, y_k$ и свести задачу к вычислению $N - k$ интегралов. Нетрудно убедиться, что

$$\int e^{\frac{i}{h}F(x)}\Phi_1(x)\, dx,$$

где $\Phi_1(x) \equiv \Phi(x)$ в окрестности точки $x = x^0$, отличается от (3) на $O(h^\infty)$. Поэтому эти оставшиеся $N - k$ интегралов могут быть взяты по малой окрестности точки $x = x^0$. Таким образом, с помощью метода стационарной фазы для интеграла (3) задача сводится к асимптотике s-кратного интеграла в окрестности стационарной точки, где s — кратность нулевого собственного значения второй вариации $\delta^2 F(x)\,|_{x=x^0}$, т. е. матрицы (4).

Если область Ω такова, что содержит *все* стационарные точки функции $F(x)$, то такой интеграл можно представить в виде суммы интегралов, каждый из которых берется по области, содержащей лишь одну стационарную точку функции $F(x)$, и имеет вид (3). Это делается, как известно, при помощи разбиения единицы по этим областям:

$$\Phi(x) \equiv \Phi(x)\,\Sigma\, e_i(x) = \Sigma\,\Phi_i(x),$$

где $\Phi_i(x)$ — финитные функции с носителями, принадлежащими i-й области. Поэтому ответ дается суммой вкладов от каждой стационарной

точки. Мы покажем, что аналогичная ситуация имеет место и для фейнмановского интеграла (2). В этом случае стационарными точками на множестве траекторий будут экстремали функционала $S = \int L d\tau$:

$$\delta \int L(\dot{x}, x, \tau)\, d\tau = 0,$$

т. е. траектории классической гамильтоновой системы, выходящие из точки ξ и проходящие за время $\tau = t$ через точку x.

Вторая вариация $\delta^2 S$ функционала S является линейным оператором, функционально зависящим от траектории. На классической траектории кратность нулевого собственного значения $\delta^2 S$, как известно, равна дефекту (корангу) матрицы $\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$, где S — действие (значения функционала S на траектории), и поэтому не превосходит n.

Покажем, что асимптотика интеграла (2) выражается через сумму по всем классическим траекториям интегралов ровно той кратности, какова кратность нулевого собственного значения второй вариации функционала $\int L d\tau$ на данной траектории, причем, если экстремаль изолированная, интеграл берется по сколь угодно малой (не зависящей от h) области. В случае, когда вторая вариация $\delta^2 h$ на экстремалях не имеет нулевого собственного значения, т. е. $\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \xi_j} \right\|$ отличен от нуля для всех экстремалей, проходящих из ξ в x за время t, автором была установлена следующая формула для интеграла (2):

$$\Phi(x, \xi, t) = \sum_j \exp\left(\frac{i\pi}{2}\gamma\right)\left(\sqrt{\left|\det\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \xi_j}\right\|\right|}\right)^{-1} \exp\left(\frac{i}{h} S^j\right) + O(h), \qquad (6)$$

где S^j — значение функционала S на j-й экстремали, γ^j — индекс j-й экстремали [4]. Если лагранжиан удовлетворяет условию Лежандра

$$\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \right\| > 0,$$

то γ^j есть индекс Морса j-й экстремали, т. е. число отрицательных собственных значений $\delta^2 S^j$. Он равен, как известно, числу нулей $\det \left\| \frac{\partial S}{\partial \xi_i \partial X_j} \right\| (\tau)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant t$ с учетом кратностей или сумме дефектов матрицы $\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial X_j} \right\|$ по всем точкам j-й экстремали. (О других способах вычисления γ^j см. также [4, 5, 6].)

Эта формула получена в общем случае в [4] с помощью канонического оператора [4, 7, 8]. В [2] для частного случая

$$L(\dot{x}, x, t) = \frac{\dot{x}^2}{2} + v(x, t),\ x = x_1, \ldots, x_n,\ \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right| < C \qquad (7)$$

эта формула была получена (говоря на языке континуального интеграла) с помощью сведения континуального интеграла к следующему повторному. Интервал 0, t разбивается на отрезки 0, t_1, ..., t_N ($t_N = t$) такие, что

на отрезке t_i, t_{i+1} из любой точки ξ в любую точку x проходит лишь одна экстремаль функционала S (это оказывается возможным из-за условия (7)) и рассматриваются все кривые $\tilde{X}(\tau)$, проходящие через заданные точки

$$\xi, \xi^1, \ldots, \xi^N \quad (\xi^i = (\xi_1{}^i, \ldots, \xi_n{}^i), \xi^N = x)$$

в моменты $0, t_1, \ldots, t_N$, соответственно. Тогда очевидно, что

$$\Phi(x, \xi, t) = \int d\xi^1 \ldots d\xi^{N-1} \int \exp\left\{\frac{i}{h} \int L(\dot{\tilde{x}}, \tilde{x}, \tau)\right\} d\tilde{x}(\tau). \tag{8}$$

Поскольку внутренний интеграл имеет лишь одну экстремаль, можно найти его асимптотику по методу Сесиль Моретт [9]. В результате получим

$$\Phi(x, \xi, t) = \int\int d\xi^1 \ldots d\xi^{N-1} \exp\left\{\frac{i}{h} \sum_i S(t_i, t_{i+1}, \xi^i, \xi^{i+1})\right\} \times$$
$$\times \left\{\prod_i \sqrt{\left|\det\left\|\frac{\partial^2 S(t_i, t_{i+1}, \xi^i, \xi^{i+1})}{\partial \xi_j^i \partial \xi_k^{i+1}}\right\|\right|}\right\}^{-1}, \tag{9}$$

где $S(t_i, t_{i+1}, \xi^i, \xi^{i+1})$ — действие вдоль классической траектории, проходящей из точки ξ^i, t_i в точку ξ^{i+1}, t_{i+1}. Этот последний $n \cdot N$-кратный интеграл вычисляется по обычному методу стационарной фазы [2] (см. также [4, «Метод шагов вдоль траектории»]). Возможность применения метода стационарной фазы для интеграла (9) обусловливается отличием от нуля $\mathrm{d}\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \xi_j}\right\|$ на каждой экстремали.

Теперь оставим лишь предположение о том, что все экстремали изолированы. Тогда очевидно, что точку $\tau = t_{N-1}$ можно выбрать так, чтобы она не была фокальной [2] ни для какой экстремали.

Пусть $\bar{\xi}^k(S^j)$ — точка пересечения плоскости $\xi^k = (\xi_1{}^k, \ldots, \xi_n{}^k)$ с j-й экстремалью и пусть $e_j{}^k(\xi^k)$ — финитная функция, равная 1 в ε-окрестности точки $\bar{\xi}^k(S^j)$ и 0 вне 2ε-окрестности этой точки. Очевидно, что

$$\Phi(x, \xi, t) = \sum_j \int d\xi^1 \ldots d\xi^{N-1} \prod_k e_j{}^k(\xi^k) \exp\left\{\frac{i}{h} \sum_i S(t_i, t_{i+1}, \xi^i, \xi^{i+1})\right\} \times$$
$$\times \left\{\prod_i \sqrt{\left|\det\left\|\frac{\partial^2 S(t_i, t_{i+1}, \xi^i, \xi^{i+1})}{\partial \xi_\mu{}^i \partial \xi_\nu{}^{+1}}\right\|\right|}\right\}^{-1} + O(h^\infty), \tag{10}$$

поскольку вне 2ε-окрестностей точек $\bar{\xi}^k(S^j)$, $j = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N-1$, у интеграла (2) нет стационарных точек [3].

В силу выбора точки $t = t_{N-1}$ интеграл

$$\int d\xi^1 \ldots d\xi^{N-2} \prod_k e_j{}^k(\xi^k) \exp\left\{\frac{i}{h} \sum_i S(t_i, t_{i+1}, \xi^i, \xi^{i+1})\right\} \times$$
$$\times \left\{\prod_i \sqrt{\left|\det\left\|\frac{\partial^2 S(t_i, t_{i+1}, \xi^i, \xi^{i+1})}{\partial \xi_\mu{}^i \partial \xi_\nu{}^{i+1}}\right\|\right|}\right\}^{-1} \tag{11}$$

---

[2] Т. е. $\det\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial \xi_j^{N-1}}\right\| \neq 0$ при $\tau = t_{N-1}$ на любой экстремали.

[3] Таким образом, в точках $t_1, \ldots, t_{N-1}$ мы ставим 2ε-диафрагмы около экстремалей. Оставшийся интеграл не имеет экстремалей и поэтому пренебрежимо мал при $h \to 0$.

имеет лишь невырожденные стационарные траектории, и к нему может быть применена формула (6). Таким образом, мы приходим к n-кратному интегралу. Переход от такого n-кратного интеграла к интегралу кратности, равной дефекту матрицы $\left\| \frac{\partial^2 S^j}{\partial \xi_i \partial X_k} \right\|$, проделан в [4].

Пусть s — дефект матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial \xi_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x_n \partial \xi_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_n \partial \xi_n} \end{matrix} \right\|$$

на j-й траектории. Это значит, что $n - s$ строк этой матрицы линейно независимы. Без уменьшения общности положим, что это последние $n - s$ строк, так что первые s строк через них выражаются. Перейдем на j-й классической траектории к переменным $p_1, \ldots, p_s, x_{s+1}, \ldots, x_n$, т. е. по первым s переменным совершим преобразование Лежандра. В этом случае, как известно, новое действие

$$\tilde{S}(p_1, \ldots, p_s, x_{s+1}, \ldots, x_n, \xi, t)$$

выражается через S^j следующим образом:

$$\tilde{S}^j = S^j - \sum_{i=1}^{s} p_i x_i (p_1, \ldots, p_s, x_{s+1}, \ldots, x_n).$$

Оказывается [4], что

$$Y_s = \det \left\| \begin{matrix} \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_1 \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_1 \partial \xi_2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial p_s \partial \xi_1} & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x_{s+1} \partial \xi_1} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial x_n \partial \xi_n} \end{matrix} \right\| \tag{12}$$

отличен от нуля.

Окончательный ответ для j-го члена суммы (10) такой же, как и для j-го члена суммы (6), только S^j надо заменить на $\tilde{S}^j$ и det, стоящий там под знаком корня, на det (12), после чего совершить переход от $p_1, \ldots, p_s$ к $x_1, \ldots, x_s$ с помощью обратного преобразования Фурье (переход от $p_1, \ldots, p_s$ к $x_1, \ldots, x_s$ представлению). При этом интеграл по $dp_1, \ldots, dp_s$ можно брать лишь по окрестности[4] точки $p_1, \ldots, p_s$ — значений первых s компонент импульса в момент t для j-й траектории.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 16 июля 1969 г.

[4] Более точная оценка получится, если подынтегральное выражение умножить на финитную функцию, равную 1 в ε-окрестности точки $p_1, \ldots, p_s$ и нулю вне 2ε-окрестности этой точки.

Литература

[1] Р. Фейнман. Пространственно-временной подход к нерелятивистской квантовой механике. В сб.: «Вопросы причинности в кантовой механике», ИЛ, 1955.
[2] Б. П. Маслов. ЖВМ и МФ, **1**, 638, 1961.
[3] Г. Зейферт, В. Трельфалль. Вариационное исчисление в целом, ИЛ, 1947.
[4] В. П. Маслов. Теория возмущений и асимптотические методы, МГУ, 1965.
[5] В. И. Арнольд. Функциональный анализ, I, 1967, 1—16.
[6] Д. Б. Фукс. ДАН СССР, **178**, 303, 1968.
[7] В. С. Буслаев. ДАН СССР, **184**, 59, 1969.
[8] В. Л. Дубнов, ДАН СССР, **183**, 754, 1968.
[9] Cecile Morette. Phys. Rev., **81**, 848, 1951.

ON THE STATIONARY PHASE METHOD FOR FEYNMAN'S CONTINUAL INTEGRAL

V. P. Maslov

The formula obtained earlier by the author under condition that classical paths are not degenerate, is generalized.