Math-Net.Ru
Общероссийский математический портал

В. А. Голубева, В. П. Лексин, Алгебраическая характеризация монодромии обобщенных уравнений Книжника–Замолодчикова типа B_n, *Тр. МИАН*, 2002, том 238, 124–143

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 23.23.9.5
31 января 2015 г., 13:04:01

ТРУДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА ИМ. В.А. СТЕКЛОВА, 2002, т. 238, с. 124–143

УДК 519.4

Алгебраическая характеризация монодромии обобщенных уравнений Книжника–Замолодчикова типа B_n [1]

©2002 г. В. А. Голубева[2], В. П. Лексин[3]

Поступило в декабре 2001 г.

Теорема Дринфельда–Коно описывает монодромию уравнения Книжника–Замолодчикова на языке квазибиалгебр. Настоящая работа содержит обобщение этой теоремы на случай уравнения типа Книжника–Замолодчикова, отвечающего корневой системе типа B_n. Дана характеризация тех представлений фундаментальной группы дополнения к дивизору особенностей уравнения, которые могут быть реализованы как представления монодромии уравнения.

ВВЕДЕНИЕ

В 1965 г. в связи с исследованиями свойств ветвления фейнмановских интегралов итальянский физик Т. Редже поставил вопрос о существовании и форме дифференциальных уравнений обобщенного гипергеометрического типа для этих интегралов [1]. Связь аналитической теории фейнмановских интегралов с ранее развитой математиками теорией фуксовых уравнений и уравнений с регулярными особыми точками, а также с уравнениями гипергеометрического типа изложена в обзорной работе Голубевой [2]. В 1968–1970 гг. математики Делинь и Жерар [3, 4] начали исследования задач, близких по формулировке к задаче Редже, а именно задач построения линейных мероморфных пфаффовых интегрируемых систем уравнений на многомерных комплексных многообразиях, решения которых обладают заданным ветвлением вокруг особенностей системы. Ветвление задавалось представлением фундаментальной группы многообразия, являющегося дополнением в основном пространстве к заранее заданному множеству особенностей системы. Эту задачу естественно было рассматривать как многомерное обобщение известной 21-й проблемы Гильберта (или проблемы Римана–Гильберта). В этих работах для некоторых многообразий и при некоторых условиях на заданное представление фундаментальной группы получены ее решения. В дальнейшем число работ, содержащих положительное решение многомерной задачи Римана–Гильберта при ряде специальных условий, было расширено (см. [5–11]). Кроме того, был четко выделен класс многомерных систем Пфаффа типа Фукса [12]. Также были получены первые примеры представлений, для которых проблема Римана–Гильберта имеет отрицательное решение [13, 9, 14].

С проблемой Римана–Гильберта, являющейся обратной задачей, тесно связана соответствующая прямая задача, состоящая в описании монодромии линейных мероморфных пфаффовых систем. Ее естественно назвать ограниченной проблемой Римана–Гильберта [15].

Первые работы по характеризации монодромии фуксовой системы принадлежат Дринфельду [16, 17] и Коно [18, 19]. В них исследована монодромия уравнений Книжника–Замолодчикова (КЗ). Эти уравнения были получены в работе [20] при изучении корреляционных функций модели Весса–Зумино в двумерной конформной теории поля. Они полностью определяются алгеброй Ли симметрий модели и некоторым комплексным параметром. Основная

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке INTAS (проект 97-1644).

[2] Отд. математики, Всероссийский институт научной и технической информации, Москва, Россия.

[3] Коломенский государственный педагогический институт, г. Коломна, Московская обл., Россия.

теорема теории Дринфельда–Коно утверждает, что представление монодромии уравнения КЗ с точностью до эквивалентности представлений определяется универсальной квантовой R-матрицей для квантовой группы Дринфельда–Джимбо, отвечающей алгебре Ли симметрий модели.

Особенности уравнений КЗ расположены на комплексификации объединения зеркал отражения группы Вейля системы корней типа A_{n-1}. В настоящей работе рассматриваются аналоги уравнений КЗ, имеющие особенности на комплексификации объединения зеркал отражения группы Вейля типа B_n. Эти уравнения, подобно уравнениям КЗ (типа A_{n-1}), полностью определяются соответствующей алгеброй Ли и, кроме того, парой комплексных параметров, в то время как в обычных уравнениях КЗ такой параметр только один. Для этих обобщенных уравнений КЗ (типа B_n) строится аналог теории Дринфельда–Коно сплетенных квазибиалгебр типа B_n, сформулирована основная теорема этой теории и указана схема ее доказательства.

1. ТЕОРЕМА ДРИНФЕЛЬДА–КОНО ДЛЯ УРАВНЕНИЙ КЗ, АССОЦИИРОВАННЫХ С СИСТЕМОЙ КОРНЕЙ ТИПА A_{n-1}

В этом разделе приводится краткий обзор результатов Дринфельда и Коно по ограниченной проблеме Римана–Гильберта для уравнений КЗ, ассоциированных с системой корней типа A_{n-1} (см. [16–19], а также [21]).

Теорема Дринфельда–Коно дает алгебраическую характеризацию монодромии классических уравнений КЗ, ассоциированных с системами корней типа A_{n-1}, и является составной частью алгебраической теории квазихопфовых алгебр, развитой Дринфельдом. Главными ингредиентами соответствующей теории являются следующие алгебраические объекты и факты.

• Понятие сплетенной квазибиалгебры

$$\mathcal{A} = \Big(A, \mu, \Delta, \eta, \varepsilon, R_A, \Phi_A\Big),$$

где A — биалгебра, μ — умножение, Δ — коумножение, η и ε являются единицей и коединицей соответственно, $R_A \in A^{\otimes 2}$ — сплетающий элемент, называемый универсальной R-матрицей, и $\Phi_A \in A^{\otimes 3}$ — ассоциатор.

Любая такая сплетенная квазибиалгебра определяет представление группы кос Артина B_n в $A^{\otimes n}$

$$\rho_{\mathcal{A}}\colon B_n \to A^{\otimes n}.$$

• Калибровочно эквивалентные (см. [21]) сплетенные квазибиалгебры определяют эквивалентные представления группы кос Артина.

Пусть $A_{n-1} \subset \mathbb{C}^n$ — комплексификация корневой системы типа A_{n-1} и $W_{A_{n-1}}$ обозначает ее группу Вейля. Пусть H — комплексификация гиперплоскостей отражения (так называемая конфигурация гиперплоскостей) группы Вейля $W_{A_{n-1}}$, $H = \bigcup_{i<j} H_{ij}$, где

$$H_{ij} = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n\colon\ z_i - z_j = 0\},$$

$1 \le i < j \le n$. Пусть X_n — дополнение к этой конфигурации в $\mathbb{C}^n$, т.е.

$$X_n = \{(z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n\colon\ z_i \ne z_j \text{ при } i \ne j\}.$$

Фундаментальная группа $\pi_1(X_n, z_0)$, $z_0 = (1, 2, \dots, n) \in X_n$, есть группа крашеных кос $P_n = P(A_{n-1})$. Поскольку симметрическая группа S_n оставляет конфигурацию гиперплоскостей H инвариантной при действии S_n на $\mathbb{C}^n$ перестановками координат, мы можем определить группу кос Артина B_n (мы будем обозначать ее далее $B(A_{n-1})$) как фундаментальную группу пространства орбит

$$B(A_{n-1}) = \pi_1(X_n/S_n, \overline{z}_0),$$

где $\overline{z}_0$ — орбита точки $z_0 \in X_n$.

Пусть g — полупростая конечномерная комплексная алгебра Ли, $U(g)$ — ее универсальная обертывающая алгебра и $U(g)[[h]]$ — тривиальная формальная деформация $U(g)$ (см. [21]).

Уравнения КЗ типа A_{n-1} имеют вид

$$df = \frac{h}{2\pi i}\Omega_{A_{n-1}} f, \qquad \text{где} \qquad \Omega_{A_{n-1}} = \sum_{1\le i<j\le n} t_{ij}\, d\log(z_i - z_j).$$

Здесь f — голоморфная функция на универсальном накрытии $\widetilde{X}_n$ со значениями в $(U(g)[[h]])^{\otimes n}$, t_{ij} являются постоянными элементами из $U(g)^{\otimes n}$, которые определяются по тензору Белавина–Дринфельда $t \in g^{\otimes 2}$ (см. п. 2.1).

Условия интегрируемости по Фробениусу системы уравнений КЗ равносильны равенствам $d\Omega = 0$ и $\Omega \wedge \Omega = 0$. Записанные в терминах коэффициентов t_{ij} формы $\Omega_{A_{n-1}}$, эти условия имеют вид коммутационных соотношений

$$[t_{ij}, t_{ik} + t_{jk}] = [t_{jk}, t_{ij} + t_{ik}] = [t_{ik}, t_{ij} + t_{jk}] = 0 \qquad \text{для} \quad i<j<k,$$
$$[t_{ij}, t_{kl}] = 0 \qquad \text{для} \quad \{i,j\} \cap \{k,l\} = \varnothing.$$

Эти соотношения называются инфинитезимальными соотношениями группы крашеных кос типа A_{n-1}.

Теорема Дринфельда–Коно есть по существу утверждение об эквивалентности двух структур сплетенных квазибиалгебр $\mathcal{A}_h$ и $\mathcal{A}_{\mathrm{KZ}}$.

Первая структура сплетенной квазибиалгебры $\mathcal{A}_h$ характеризуется следующими данными:

$$\mathcal{A}_h = \Big(U_h(g), \mu_h, \Delta_h, \eta_h, \varepsilon_h, R_h, \Phi_h = 1\otimes 1\otimes 1\Big).$$

Здесь $U_h(g)$ — алгебра Дринфельда–Джимбо (однопараметрическая деформация $U(g)$ как алгебры Хопфа), которая определяется как ассоциативная $\mathbb{C}[[h]]$-алгебра, порожденная элементами X_i, Y_i, H_i, $i = 1, 2, \dots, n$, удовлетворяющими соотношениям

$$[H_i, H_j] = 0, \qquad [H_i, X_j] = a_{ij} X_j, \qquad [H_i, Y_j] = -a_{ij} Y_j, \qquad [X_i, Y_j] = \delta_{ij}\frac{\mathrm{sh}(hd_iH_i/2)}{\mathrm{sh}(hd_i/2)},$$
$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} X_i^k X_j X_i^{1-a_{ij}-k} = 0, \qquad \sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \begin{bmatrix} 1-a_{ij} \\ k \end{bmatrix}_{q_i} Y_i^k Y_j Y_i^{1-a_{ij}-k} = 0,$$

где $d_1, \dots, d_n$ — длины корней алгебры Ли g, $q_i = e^{hd_i}$ и a_{ij} являются элементами матрицы Картана алгебры Ли g. Для алгебры Ли с системой корней A_{n-1} мы имеем $d_1 = \ldots = d_n = d$.

Использованные выше обозначения определяются следующими равенствами:

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q[n-1]_q\ldots[n-k+1]_q}{[k]_q!}, \qquad [n]_q = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}, \qquad [k]_q! = [1]_q[2]_q\ldots[k]_q.$$

Топология кольца $\mathbb{C}[[h]]$ или модуля M над этим кольцом определяется степенями идеала, порожденного переменной h, или при помощи действия этих степеней на модуле M.

Коумножение Δ_h определяется как гомоморфизм алгебр

$$\Delta_h\colon U_h(g) \to U_h(g)\widehat{\otimes} U_h(g),$$

где $\widehat{\otimes}$ — топологическое тензорное произведение (см. [21]).

Гомоморфизм Δ_h на образующих $U_h(g)$ определяется формулами

$$\Delta_h(H_i) = H_i \otimes 1 + 1 \otimes H_i,$$

$$\Delta_h(X_i) = X_i \otimes e^{hd_iH_i/4} + e^{-hd_iH_i/4} \otimes X_i,$$

$$\Delta_h(Y_i) = Y_i \otimes e^{hd_iH_i/4} + e^{-hd_iH_i/4} \otimes Y_i.$$

На другие элементы из $U_h(g)$ коумножение распространяется, естественно, по мультипликативности.

Коединица и антипод на $U_h(g)$ определяются на образующих формулами

$$\varepsilon_h(H_i) = \varepsilon_h(X_i) = \varepsilon_h(Y_i) = 0,$$

$$S_h(H_i) = -H_i, \qquad S_h(X_i) = e^{hd_i/2}X_i, \qquad S_h(Y_i) = e^{-hd_i/2}Y_i.$$

На другие элементы ε_h и S_h продолжаются также по мультипликативности.

Элемент $\Phi_h \in U_h(g)^{\otimes 3}$, называемый ассоциатором, определяется как элемент, задающий деформацию коассоциативности коумножения, и удовлетворяет следующим уравнениям:

$$(1 \otimes \Delta_h)\Delta_h(a) = \Phi_h(\Delta_h \otimes 1)\Delta_h(a)\Phi_h^{-1},$$

$$(\varepsilon \otimes 1)\Delta_h(a) = 1, \qquad (1 \otimes \varepsilon)\Delta_h(a) = 1$$

для всех $a \in U_h(g)$ и

$$(1 \otimes 1 \otimes \Delta_h)\Phi_h(\Delta_h \otimes 1 \otimes 1)\Phi_h = \Phi_{h,234}(1 \otimes \Delta_h \otimes 1)\Phi_h\Phi_{h,123}$$

(это уравнение называется уравнением пятиугольника),

$$(1 \otimes \varepsilon \otimes 1)\Phi_h = 1.$$

Здесь $\Phi_{h,123} = \Phi_h \otimes 1$ и $\Phi_{h,234} = 1 \otimes \Phi_h$. Для $\Phi_h = 1 \otimes 1 \otimes 1$ мы получаем коассоциативную биалгебру (более точно, алгебру Хопфа). В случае алгебры Дринфельда–Джимбо мы имеем как раз этот случай.

Пусть τ — оператор перестановки тензорных сомножителей, и пусть $\Delta_h^{\mathrm{op}}(a) = \tau\Delta$. Универсальная R-матрица $R_h \in U_h(g)^{\otimes 2}$ определяется как элемент, задающий деформацию кокоммутативности коумножения и удовлетворяющий уравнениям

$$\Delta_h^{\mathrm{op}}(a) = R_h\Delta_h(a)R_h^{-1}$$

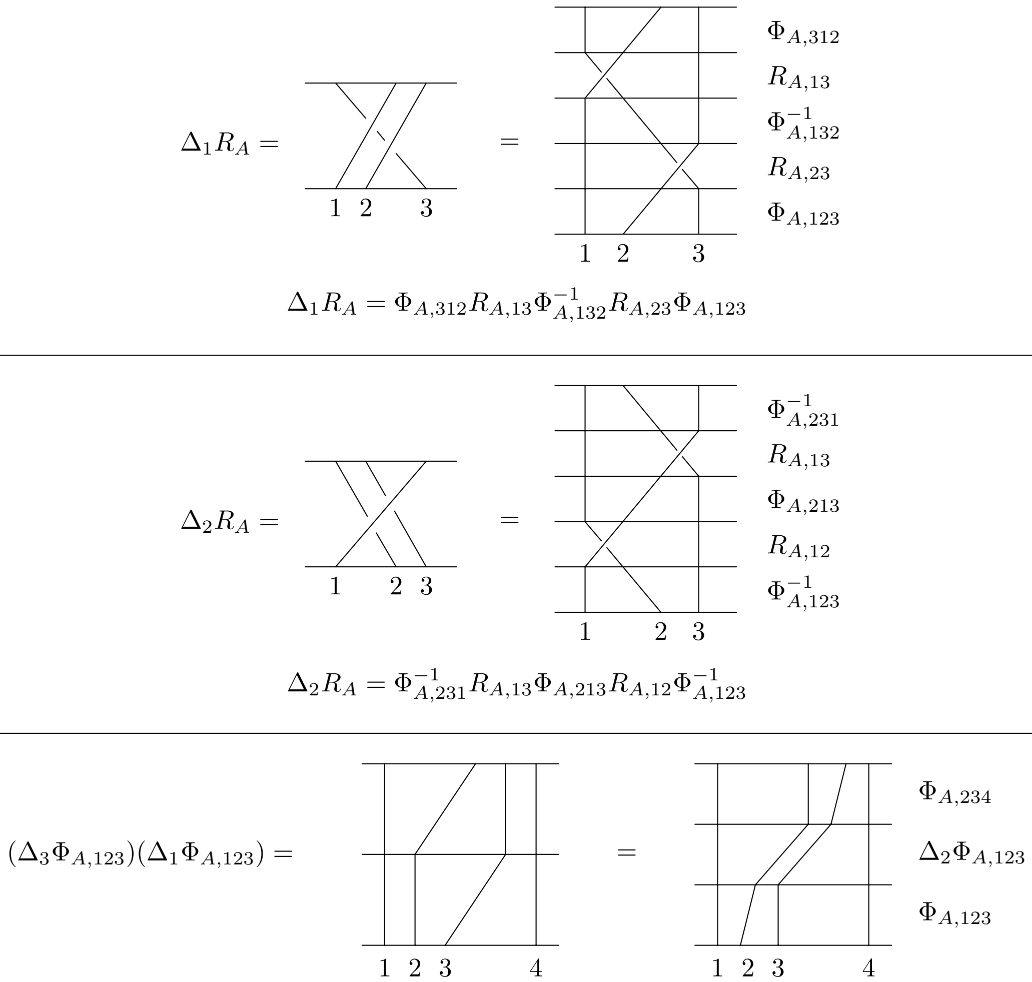
для всех $a \in U_h(g)$ и

$$(1 \otimes \Delta_h)R_h = \Phi_{h,231}^{-1}R_{h,13}\Phi_{h,213}R_{h,12}\Phi_{h,123}^{-1},$$

$$(\Delta_h \otimes 1)R_h = \Phi_{h,312}R_{h,13}\Phi_{h,132}^{-1}R_{h,23}\Phi_{h,123}.$$

Последние два уравнения называются уравнениями шестиугольника.

Уравнения пятиугольника и шестиугольника моделируют свойства перестановочности регуляризованной голономии уравнения КЗ и операции удвоения нитей кос со свободными концами (см. [22]). Геометрическая интерпретация некоторых из перечисленных выше равенств для общей структуры сплетенной квазиалгебры представлена на рис. 1.



$$\Delta_1 R_A = \Phi_{A,312} R_{A,13} \Phi^{-1}_{A,132} R_{A,23} \Phi_{A,123}$$

$$\Delta_2 R_A = \Phi^{-1}_{A,231} R_{A,13} \Phi_{A,213} R_{A,12} \Phi^{-1}_{A,123}$$

$$(\Delta_3\Phi_A)(\Delta_1\Phi_A) = \Phi_{A,234}(\Delta_2\Phi_A)\Phi_{A,123}$$

Рис. 1

При $\Phi_h = 1\otimes 1\otimes 1$ мы имеем равенства

$$(\Delta_h\otimes 1)R_h = R_{13}R_{23}, \qquad (1\otimes\Delta_h)R_h = R_{12}R_{13},$$

из которых следует уравнение Янга–Бакстера

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12}.$$

Явные формулы универсальной R-матрицы для произвольной конечномерной полупростой алгебры Ли g были предложены рядом авторов (см., например, [21, 23]).

Вторая структура квазибиалгебры $\mathcal{A}_{\mathrm{KZ}}$ связана с уравнением КЗ типа A_{n-1} и определяется следующими данными:

$$\mathcal{A}_{\mathrm{KZ}} = \Big(U(g)[[h]], \mu, \Delta, \eta, \varepsilon, R_{\mathrm{KZ}}, \Phi_{\mathrm{KZ}}\Big).$$

В этом случае R-матрица R_{KZ} равна элементу локальной монодромии решения уравнения КЗ при $n=2$ в окрестности дивизора $z_1 - z_2 = 0$, т.е.

$$R_{\mathrm{KZ},12} = e^{ht_{12}/2}.$$

Ассоциатор Φ_{KZ} есть элемент $U(g)[[h]]^{\otimes 3}$, который связывает локальные решения системы уравнений КЗ при $n=3$ в пересечении окрестности некоторой точки на компоненте дивизора $z_1-z_2=0$ и окрестности некоторой точки на компоненте $z_2-z_3=0$ (см. [20]). Явное выражение для первых членов ряда, представляющего ассоциатор $\Phi_{\mathrm{KZ}}(ht_{12},ht_{23})$, можно найти в [21], а выражения всех членов ряда через дзета-функции многих переменных указаны в [22].

Проверка аксиом сплетенной квазибиалгебры для R_{KZ} и Φ_{KZ} проведена в [21, гл. 19].

Универсальная R-матрица и ассоциатор Φ в структуре сплетенной квазибиалгебры позволяют определить в явном виде представление группы кос Артина. Ниже мы опишем, как такое представление задается для общей структуры сплетенной квазибиалгебры, а затем покажем, как оно выглядит для введенных выше сплетенных квазибиалгебр $\mathcal{A}_h$ и $\mathcal{A}_{\mathrm{KZ}}$.

Представление группы кос Артина $B(A_{n-1})$, определенное по структуре сплетенной квазибиалгебры. Пусть $\sigma_1,\dots,\sigma_{n-1}$ — стандартные образующие группы кос Артина $B(A_{n-1})$. Пусть задана некоторая сплетенная квазибиалгебра $\mathcal{A}$. Определим операторы $s_{ii+1}\in\mathrm{End}(A^{\otimes n})$ соответствием на порождающих элементах

$$s_{ii+1}\colon (a_1\otimes\ldots\otimes a_i\otimes a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_n)\to(a_1\otimes\ldots\otimes a_{i+1}\otimes a_i\otimes\ldots\otimes a_n)$$

для $1\le i\le n-1$, $a_i\in A$.

Предложение 1. *Представление группы кос Артина $B(A_{n-1})$ по общей структуре квазибиалгебры определяется формулами*

$$\rho_{\mathcal{A}}(\sigma_1)=s_{12}R_{12},\qquad \rho_{\mathcal{A}}(\sigma_i)=\Phi_i^{-1}s_{ii+1}R_{ii+1}\Phi_i,$$
$$\Phi_i=\Delta^{(i+1)}\Phi\otimes 1^{\otimes(n-i-1)},\qquad \Delta^{(i+1)}\colon A^{\otimes 3}\to A^{\otimes(i+1)},$$
$$\Delta^{(3)}=1_{A^{\otimes 3}},\qquad \Delta^{(i+1)}=(\Delta\otimes 1_{A^{\otimes(i-1)}})\Delta^{(i)}.$$

Для структуры сплетенной биалгебры на $U_h(g)$ предыдущие формулы имеют вид

$$\rho_{\mathcal{A}_h}(\sigma_1)=s_{12}R_{12},\tag{$*$}$$
$$\rho_{\mathcal{A}_h}(\sigma_i)=s_{ii+1}R_{ii+1}.\tag{$**$}$$

Представление группы кос Артина $B(A_{n-1})$, определенное по структуре сплетенной квазибиалгебры $\mathcal{A}_{\mathrm{KZ}}$. Упомянутое представление группы кос $B(A_{n-1})$ в $U(g)[[h]]^{\otimes n}$, определяемое общими формулами по структуре сплетенной квазибиалгебры $\mathcal{A}_{\mathrm{KZ}}$, совпадает с представлением монодромии уравнения КЗ, определяемым рядами Чена [21, гл. 19], и задается представленными ниже явными формулами (см. [17, 24]).

Предложение 2. *Монодромия уравнения КЗ для произвольного n задается следующими формулами*:

$$\rho_{\mathrm{KZ}}(\sigma_1)=s_{12}R_{\mathrm{KZ}},$$
$$\rho_{\mathrm{KZ}}(\sigma_i)=\Phi_{\mathrm{KZ}}^{-1}\left(h\sum_{k=1}^{i-1}t_{ki},ht_{ii+1}\right)s_{ii+1}e^{ht_{ii+1}/2}\Phi_{\mathrm{KZ}}\left(h\sum_{k=1}^{i-1}t_{ki},ht_{ii+1}\right)$$

для $i=2,\dots,n-1$, $s_{ii+1}\in S_n$.

Теперь мы напомним две основные теоремы, которые определяют содержание теории Дринфельда–Коно.

Теорема 1 (Дринфельд). *Две структуры квазибиалгебры $\mathcal{A}_h$ и $\mathcal{A}_{\mathrm{KZ}}$ являются калибровочно эквивалентными, т.е. существуют линейный изоморфизм*

$$\beta\colon U_h(g) \to U(g)[[h]]$$

и ряд

$$F \in U(g)[[h]]^{\otimes 2}$$

такие, что выполняются равенства

$$(\beta \otimes \beta)R_h = F R_{\mathrm{KZ}} F^{-1}$$

и

$$1 \otimes 1 \otimes 1 = \beta^{\otimes 3}(\Phi_h) = (1 \otimes F)(1 \otimes \Delta)(F)\Phi_{\mathrm{KZ}}(\Delta \otimes 1)(F^{-1})(F^{-1} \otimes 1).$$

Поскольку калибровочно эквивалентные сплетенные квазибиалгебры определяют эквивалентные представления группы кос $B(A_{n-1})$, как следствие, получается доказательство теоремы Дринфельда–Коно.

Теорема 2 (Дринфельд–Коно). *Пусть g — полупростая алгебра Ли и $t \in g \otimes g$ — g-инвариантный симметрический 2-тензор Белавина–Дринфельда. Тогда представление монодромии уравнения КЗ с коэффициентами, определяемыми тензором t, эквивалентно представлению группы кос $B(A_{n-1})$, определяемому формулами $(*)$ и $(**)$ через универсальную R-матрицу алгебры Дринфельда–Джимбо.*

Последняя теорема дает полную алгебраическую характеризацию представления монодромии для уравнения КЗ.

2. ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ СПЛЕТЕННЫХ КВАЗИБИАЛГЕБР ТИПА B_n

В этом разделе рассматриваются возможные обобщения теории Дринфельда и Коно на обобщенные уравнения КЗ, ассоциированные с другими системами корней, отличными от систем корней типа A_n.

Пусть g — простая конечномерная комплексная алгебра Ли, $A = \|a_{ij}\|$ — ее матрица Картана и $(d_1, \dots, d_r)$ — квадраты длин корней корневой системы алгебры Ли g, которые для простых алгебр Ли могут принимать не более двух значений. Конструкция алгебр Дринфельда–Джимбо основана на однопараметрической деформации универсальной обертывающей алгебры $U(g)$ алгебры Ли g. Обобщение этой конструкции может отвечать как однопараметрическим, так и многопараметрическим деформациям $U(g)$. Ниже рассматриваются деформации, в которых число параметров не превосходит числа r различных длин корней исходной алгебры Ли, а соответствующие формальные параметры обозначаются $h_1, \dots, h_r$, $r = 1, 2$. Для простых алгебр Ли типа A, D, E достаточно одного такого формального параметра, а для алгебр Ли типа B_n, C_n, $n \geq 2$, G_2 и F_4 в общем случае естественно использование двух параметров.

В настоящей работе рассматривается только случай корневой системы B_n и изучаются двухпараметрические деформации универсальной обертывающей алгебры соответствующей алгебры Ли.

Следуя схеме, изложенной в разд. 1, далее мы рассматриваем следующие вопросы.

1. Обобщенные уравнения КЗ типа B_n.

2. Группа кос Брискорна типа B_n и ее реализация симметрическими косами.

3. Определение сплетенной квазибиалгебры, ассоциированной с уравнениями КЗ типа B_n, и представление монодромии этого уравнения.

4. Определение двухпараметрической алгебры Дринфельда–Джимбо типа B_n и структуры сплетенной квазибиалгебры типа B_n на ней. Представление группы кос Брискорна типа B_n (ниже мы обозначаем эту группу $B(B_n)$) в терминах структурных элементов B-сплетенной биалгебры Дринфельда–Джимбо.

5. Краткое описание геометрического метода получения аксиом для структурных элементов сплетенной квазибиалгебры типа B_n.

6. Формулировка B_n-аналога теоремы Дринфельда–Джимбо.

Как и в разд. 1, мы не касаемся вопросов существования структурных элементов (R-матриц, ассоциаторов) и вопросов жесткости определяемых алгебраических объектов. Эти вопросы будут рассмотрены подробно в других публикациях.

2.1. Уравнения КЗ типа B_n. Пусть g — полупростая алгебра Ли, $U(g)$ — ее универсальная обертывающая алгебра и $t \in g \otimes g$ — тензор вида

$$t = \frac{1}{2}(\Delta(c) - 1 \otimes c - c \otimes 1),$$

где c — элемент Казимира в $U(g)$.

Пусть $H_{B_n} = \bigcup_{i<j}(H_{ij}^- \cup H_{ij}^+) \cup \bigcup_k H_k^0$ обозначает в $\mathbb{C}^n$ конфигурацию комплексифицированных гиперплоскостей отражения группы Вейля корневой системы B_n, где

$$H_{ij}^- = \{z_i - z_j = 0,\ 1 \le i < j \le n\},$$

$$H_{ij}^+ = \{z_i + z_j = 0,\ 1 \le i < j \le n\},$$

$$H_k^0 = \{z_k = 0,\ 1 \le k \le n\}.$$

Пусть Y_n обозначает дополнение к этой конфигурации в $\mathbb{C}^n$, $Y_n = \mathbb{C}^n \setminus H_{B_n}$. Фундаментальная группа $\pi_1(Y_n, y_0)$, $y_0 \in Y_n$, есть обобщенная группа крашеных кос коксетеровского типа B_n, которую мы обозначим $P(B_n)$.

Рассмотрим обобщенное уравнение КЗ, ассоциированное с корневой системой B_n (см. [25])

$$d\Psi(z) = \left(\frac{h_1}{2\pi i}\sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{t_{ij}^- d(z_i - z_j)}{z_i - z_j} + \frac{t_{ij}^+ d(z_i + z_j)}{z_i + z_j}\right) + \frac{h_2}{2\pi i}\sum_{i=1}^{n}\frac{t_i^0 dz_1}{z_i}\right)\Psi(z).$$

Здесь $h_1, h_2 \in \mathbb{C}$ — комплексные параметры, которые иногда удобно считать формальными переменными. Коэффициенты t_{ij}^-, t_{ij}^+, t_i^0 определяются по элементам $t \in U(g)^{\otimes 2}$, $t^0 \in U(g)$ (см. ниже) и автоморфизму Вейля–Шевалле $\sigma_{\mathrm{W}}\colon U(g) \to U(g)$. Пусть R — корневая система алгебры Ли g и R_+ — множество положительных корней. Ниже мы обозначим через e_α, $\alpha \in R$, корневые векторы алгебры Ли g, а через h_j, $j = 1, \dots, l$, базис в подалгебре Картана алгебры Ли g (мы надеемся, что совпадение обозначений не приведет к путанице). Автоморфизм Вейля–Шевалле σ_{W} действует по правилам

$$\sigma_{\mathrm{W}}(e_\alpha) = e_{-\alpha}, \qquad \sigma_{\mathrm{W}}(h_i) = -h_i, \qquad \sigma(1) = 1.$$

Тензор Белавина–Дринфельда t через базис (e_α, h_i), $\alpha \in R$, $i = 1, \dots, m$, выражается следующим образом:

$$t = \sum_{\alpha\in R_+} e_\alpha \otimes e_{-\alpha} + \sum_{i,j=1}^{m} g_{ij} h_i \otimes h_j,$$

а элемент t^0, найденный Лейбманом, имеет вид

$$t^0 = \sum_{\alpha \in R} (e_\alpha e_\alpha + e_\alpha e_{-\alpha}).$$

Пусть далее $t^- = t$, $t^+ = (\sigma_{\mathrm{W}} \otimes 1)t$. Кроме того, через t^-_{ij}, t^+_{ij} обозначаются образы элементов t^-, t^+ при естественном вложении

$$U(g)^{\otimes 2} \to U(g)^{\otimes n}$$

на i-й и j-й тензорные сомножители в $U(g)^{\otimes n}$, через t^0_i обозначим образ t^0 при включении $U(g)$ в $U(g)^{\otimes n}$ на i-й тензорный сомножитель.

Коэффициенты уравнения КЗ типа B_n удовлетворяют коммутационным соотношениям

$$[t^-_{ik}, t^-_{ij} + t^-_{jk}] = 0, \qquad [t^+_{ij}, t^-_{ik} + t^+_{jk}] = 0, \qquad [t^-_{ij}, t^+_{ik} + t^+_{jk}] = 0, \qquad i \neq j \neq k,$$

а также следующим соотношениям:

$$[\widetilde{t}^-_{ij} + \widetilde{t}^0_i + \widetilde{t}^0_j, \widetilde{t}^+_{ij}] = 0, \qquad [\widetilde{t}^+_{ij} + \widetilde{t}^0_i + \widetilde{t}^0_j, \widetilde{t}^-_{ij}] = 0, \qquad [\widetilde{t}^-_{ij} + \widetilde{t}^+_{ij} + \widetilde{t}^0_i, \widetilde{t}^0_j] = 0, \qquad i \neq j,$$

$$[t^\pm_{ij}, t^\pm_{kl}] = 0, \qquad [t^\pm_{ij}, t^0_l] = 0, \qquad [t^0_i, t^0_j] = 0, \qquad i \neq j \neq k \neq l,$$

где $\widetilde{t}^\pm_{ij} = \frac{h_1}{2\pi i} t^\pm_{ij}$, $\widetilde{t}^0_i = \frac{h_2}{2\pi i} t^0_i$.

Можно показать, что выписанные соотношения для коэффициентов равносильны условию интегрируемости по Фробениусу $\Omega_{B_n} \wedge \Omega_{B_n} = 0$ для 1-формы уравнения КЗ типа B_n

$$\Omega_{B_n} = \frac{h_1}{2\pi i} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\frac{t^-_{ij} d(z_i - z_j)}{z_i - z_j} + \frac{t^+_{ij} d(z_i + z_j)}{z_i + z_j} \right) + \frac{h_2}{2\pi i} \sum_{i=1}^n \frac{t^0_i dz_i}{z_i}.$$

Рассмотрим алгебраические симметрии уравнений КЗ типа B_n. Группа Вейля W_{B_n} системы корней типа B_n изоморфна полупрямому произведению $W_{B_n} = S_n \ltimes (\mathbb{Z}_2)^n$ симметрической группы S_n с прямым произведением групп второго порядка $(\mathbb{Z}_2)^n$. По определению симметрическая группа S_n действует на $U(g)^{\otimes n}$ перестановками тензорных сомножителей, а стандартные образующие ϵ_i из $(\mathbb{Z}_2)^n$ действуют с помощью автоморфизма Вейля–Шевалле $\sigma_{\mathrm{W},i}$ на i-м тензорном сомножителе тензорной степени $U(g)^{\otimes n}$.

Мы имеем

$$st^\pm_{ij} = t^\pm_{(s^{-1}i)(s^{-1}j)} \quad \forall s \in S_n, \qquad st^0_i = t^0_{s^{-1}(i)}.$$

Для образующих ϵ_i, $i = 1, \ldots, n$, группы $(\mathbb{Z}_2)^n$ действие на коэффициенты формы Ω_{B_n} определяется по формулам

$$\epsilon_i t^\pm_{kl} = t^\mp_{kl}, \qquad i = k \text{ или } l;$$

$$\epsilon_i t^\pm_{kl} = t^\pm_{kl}, \qquad i \neq k \neq l;$$

$$\epsilon_k t^0_i = t^0_i, \qquad k, i = 1, \ldots, n.$$

Действие группы W_{B_n} на пространстве $\mathbb{C}^n$ определяется следующими правилами:

$$s(z_1, \ldots, z_n) = (z_{s^{-1}(1)}, \ldots, z_{s^{-1}(n)}), \qquad s \in S_n,$$

$$\epsilon_i(z_1, \ldots, z_n) = (z_1, \ldots, -z_i, \ldots, z_n), \qquad \epsilon_i \in (\mathbb{Z}_2)^n.$$

Легко видеть, что относительно указанного действия группы Вейля W_{B_n} 1-форма Ω_{B_n} уравнения КЗ типа B_n является инвариантной. Это позволяет факторизовать представление монодромии ρ группы крашеных кос $P(B_n) = \pi_1(Y_n, y_0)$ в $U(g)[[h_1, h_2]]^{\otimes n}$ через группу кос Брискорна $B(B_n) = \pi_1(Y_n/W_{B_n}, \overline{y}_0)$, т.е. мы имеем следующую коммутативную диаграмму гомоморфизмов:

$$\begin{tikzcd} & U(g)[[h_1,h_2]]^{\otimes n} \\ P(B_n) = \pi_1(Y_n) \arrow[ur, "\rho"] \arrow[dr, "p"'] & \\ & B(B_n) = \pi_1(Y_n/W_{B_n}) \arrow[uu, "\rho_{\mathrm{KZ}(B)}"'] \end{tikzcd}$$

Представление $\rho_{\mathrm{KZ}(B)}$ из диаграммы обычно называют представлением монодромии группы кос Брискорна.

2.2. Группы кос Брискорна. Пусть W_R — группа Вейля, соответствующая неприводимой системе корней $R \subset \mathbb{R}^n \subset \mathbb{C}^n$, и H_R — конфигурация гиперплоскостей отражения в $\mathbb{C}^n$. Напомним, что известно о фундаментальной группе $\pi_1(\mathbb{C}^n \setminus H, z_0)$, т.е. группе крашеных кос $P(R)$, и ее представлениях для различных систем корней. Естественно, будут упомянуты соответствующие факты для групп кос Брискорна $B(R) = \pi_1((\mathbb{C}^n \setminus H)/W_R, \overline{z}_0)$.

Во-первых, копредставления для групп кос Брискорна, отвечающих различным системам корней, были найдены самим Брискорном в начале 70-х годов прошлого века.

Далее, для $W_{A_{n-1}}$ фундаментальная группа $\pi_1(\mathbb{C}^n \setminus H_A, z_0)$ есть обычная группа крашеных кос P_n (в работе мы используем обозначение $P(A_{n-1})$). Копредставления и структура этой группы хорошо изучены (см. работы [18, 26, 27] и ссылки в них). Различные теоремы о связи представлений групп $P(A_{n-1})$ и $B(A_{n-1})$ с монодромией уравнений КЗ можно найти в работах [18, 28]. Например, в [18] Коно доказал, что представления монодромии некоторых уравнений КЗ факторизуются через алгебры Гекке. Геометрические приложения представлений монодромии групп кос можно найти в работе [21].

Для W_{B_n} копредставление группы крашеных кос $P(B_n) = \pi_1(\mathbb{C}^n \setminus H_{B_n}, z_0)$ найдено в [29, 30]. В работе [25] дана характеризация некоторых представлений групп $P(B_n)$ и $B(B_n)$ как представлений монодромии уравнений КЗ типа B_n. В работах [31, 32, 27, 33, 34] рассмотрены различные представления групп $P(B_n)$ и $B(B_n)$ в алгебры Гекке и приведены некоторые геометрические интерпретации этих групп.

Для W_{D_n} копредставление группы крашеных кос $P(D_n) = \pi_1(\mathbb{C}^n \setminus H_D, z_0)$ найдено в работах [28, 25]. Некоторые представления этой группы описаны в [25], однако нет достаточно общих конструкций для представлений этих групп. Соответствующие уравнения КЗ и их представления монодромии в этом случае также мало изучены (см. [34–36]).

Для групп Вейля типов G_2, F_4, E_6, E_7, E_8 есть только несколько разрозненных результатов [34–36].

Ниже рассматривается характеризация представлений монодромии для случая системы корней B_n.

2.3. Геометрическая реализация группы кос Брискорна $B(B_n)$. Известно, что группа кос Брискорна $B(B_n)$ имеет копредставление с образующими $\sigma_1, \dots, \sigma_n, \tau$ и порождающими соотношениями

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i, \quad |i-j| \geq 2, \qquad \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1},$$

$$(\tau\sigma_1)^2 = (\sigma_1\tau)^2, \qquad \tau\sigma_i = \sigma_i\tau, \quad i \geq 2.$$

Теперь мы опишем геометрическую реализацию группы $B(B_n)$ при помощи симметричеcких кос с $2n$ нитями, указанную в работе [38].

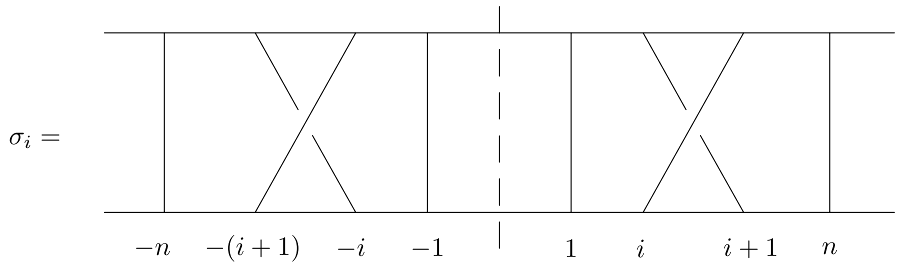


Рис. 2

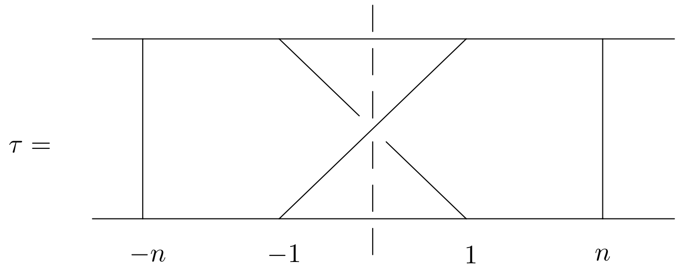


Рис. 3

Мы сопоставим образующей σ_i группы $B(B_n)$ симметрическую косу, которая изображена на рис. 2. Эта коса из группы кос Артина $B(A_{2n-1})$ с $2n$ нитями (нити натянуты между точками $(0,i,0)$ и $(0,i,1)$, $i=-n,-n+1,\dots,-1,1,2,\dots,n$, в полосе $\mathbb{R}^2\times[0,1]\subset\mathbb{R}^3$) инвариантна при вращении на 180° вокруг оси $(0,0,z)$, $z\in\mathbb{R}$. Аналогично образующей τ мы сопоставляем косу, изображенную на рис. 3.

Нетрудно проверить, что для указанных симметрических кос все порождающие соотношения группы $B(B_n)$ выполняются. Например, на рис. 4 представлены правая и левая части соотношения $(\tau\sigma_1)^2=(\sigma_1\tau)^2$. Легко видеть, что соответствующие косы изотопны.

Описанное соответствие на образующих задает мономорфизм $B(B_n)$ в $B(A_{2n-1})$, образом которого является вся подгруппа симметрических кос.

Замечание. Желательно дать подобную геометрическую интерпретацию для групп кос Брискорна, соответствующих другим корневым системам или, немного общее, группам Коксетера. Нам известно, что геометрическая интерпретация, подобная интерпретации для $B(B_n)$, существует для обобщенных групп кос, соответствующих диэдральным группам $I_2(n)$.

2.4. Монодромия уравнений КЗ типа B_n. Цель данного пункта — дать явные формулы для монодромии уравнений КЗ типа B_n.

Рассмотрим сначала решения наиболее простых уравнений КЗ типа B_n.

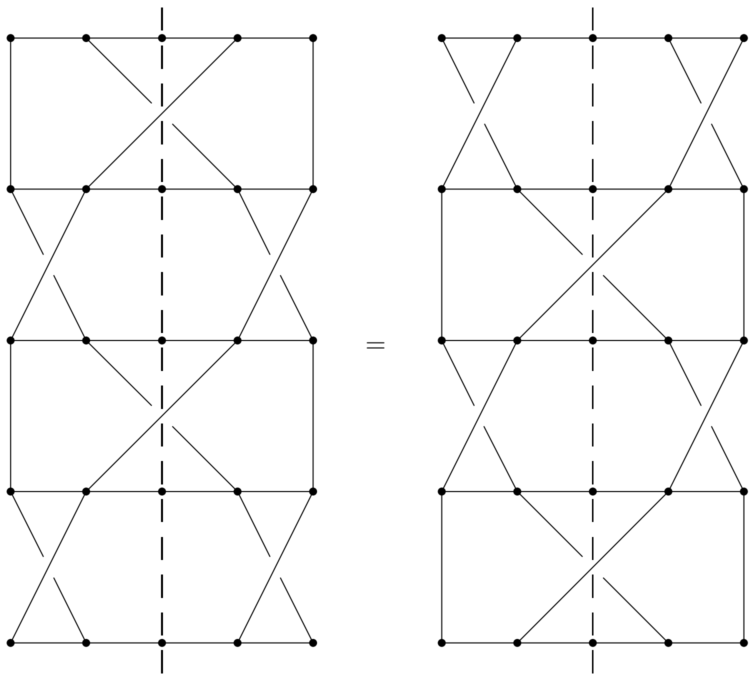
1. Пусть $h_1=h_2=0$. Тогда уравнение КЗ имеет вид $d\Psi=0$ и его монодромия характеризуется действием группы Вейля W_{B_n} на $U(g)^{\otimes n}$.

2. Пусть теперь $n=1$. Уравнение имеет форму

$$d\Psi(z)=\left(\frac{h_2}{2\pi i}\frac{t^0dz}{z}\right)\Psi(z).$$

Представление монодромии группы $B(B_1)=\mathbb{Z}=\langle\tau\rangle$, соответствующее решению $\Psi(z)=z^{\frac{h_2}{2\pi i}t^0}$, описывается формулой

$$\rho_{B_1}(\tau)=\sigma_{\mathrm{W}}\exp\left(h_2\frac{t^0}{2}\right).$$



$\sigma_1\,\tau\,\sigma_1\,\tau$ $\qquad$ $\tau\,\sigma_1\,\tau\,\sigma_1$

Рис. 4

3. Пусть $n = 2$. В этом случае сингулярный дивизор уравнения КЗ типа B_2 есть объединение прямых с уравнениями $z_1 - z_2 = 0$, $z_1 + z_2 = 0$, $z_1 = 0$, $z_2 = 0$.

Группа кос Брискорна $B(B_2)$ порождается двумя элементами σ_1, τ, удовлетворяющими соотношению

$$\sigma_1\tau\sigma_1\tau = \tau\sigma_1\tau\sigma_1.$$

Соответствующее уравнение КЗ имеет вид

$$d\Psi(z) = \left(\frac{h_1}{2\pi i}\left(\frac{t_{12}^- d(z_1 - z_2)}{z_1 - z_2} + \frac{t_{12}^+ d(z_1 + z_2)}{z_1 + z_2}\right) + \frac{h_2}{2\pi i}\left(\frac{t_1^0 dz_1}{z_1} + \frac{t_2^0 dz_2}{z_2}\right)\right)\Psi(z).$$

Сделаем замену переменных, предложенную Чередником [36]:

$$u = \frac{z_1 - z_2}{-z_2}, \qquad v = -z_2.$$

Получим следующее уравнение:

$$d\Psi(z) = \left(\left(\frac{h_1}{2\pi i}(t_{12}^- + t_{12}^+) + \frac{h_2}{2\pi i}(t_1^0 + t_2^0)\right)\frac{dv}{v} + \frac{h_1}{2\pi i}t_{12}^-\frac{du}{u} + \frac{h_2}{2\pi i}t_1^0\frac{d(1-u)}{1-u} + \frac{h_1}{2\pi i}t_{12}^+\frac{d(2-u)}{2-u}\right)\Psi(z).$$

Решение этого уравнения можно представить в виде $\Psi(z) = v^M G(u)$, где

$$M = \frac{h_1}{2\pi i}(t_{12}^+ + t_{12}^-) + \frac{h_2}{2\pi i}(t_1^0 + t_2^0)$$

есть элемент центра алгебры, порожденной коэффициентами t_{12}^+, t_{12}^-, t_1^0, t_2^0, и $G(u)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{dG}{du} = \left(\frac{h_1}{2\pi i}\frac{t_{12}^-}{u} + \frac{h_2}{2\pi i}\frac{t_1^0}{1-u} + \frac{h_1}{2\pi i}\frac{t_{12}^+}{2-u}\right)G.$$

Рассмотрим решение G_0 в окрестности точки $u = 0$ и решение G_1 в окрестности точки $u = 1$ с главными членами асимптотик в соответствующих точках следующего вида:

$$G_0 \sim u^{\frac{h_1}{2\pi i} t_{12}^-}, \qquad G_1 \sim (1-u)^{\frac{h_2}{2\pi i} t_1^0}.$$

Упомянутые окрестности можно выбрать пересекающимися. Как указано в [36] и [37], ассоциатор Дринфельда Φ_B^{KZ} коксетеровского типа B есть "матрица" связи решений G_0 и G_1 в пересечении рассматриваемых окрестностей, т.е. мы имеем

$$G_0 = G_1 \Phi_B^{\mathrm{KZ}}.$$

Очевидно, что $\Phi_B^{\mathrm{KZ}} \in (U(g)[[h_1, h_2]])^{\otimes 2}$.

Монодромия решения $v^M G(u)$ уравнения КЗ типа B_2, когда $G(u)$ совпадает с G_0 и G_1 в окрестностях точек $u = 0$ и $u = 1$, на образующих σ_1, τ группы кос $B(B_2)$ выражается следующими формулами:

$$\rho_{\mathrm{KZ}}^{B_2}(\sigma_1) = s_{12} e^{h_1 t_{12}^-/2}, \qquad \rho_{\mathrm{KZ}}^{B_2}(\tau) = (\Phi_B^{\mathrm{KZ}})^{-1} \sigma_{\mathrm{W},1} e^{h_2 t_1^0/2} \Phi_B^{\mathrm{KZ}},$$

где $\Phi_B^{\mathrm{KZ}}(\frac{h_1}{2\pi i} t_{12}^+, \frac{h_1}{2\pi i} t_{12}^-, \frac{h_2}{2\pi i} t_1^0)$ есть ассоциатор Дринфельда типа B, $\sigma_{\mathrm{W},1}$ — автоморфизм Вейля–Шевалле, действующий на первом тензорном сомножителе в $U(g)^{\otimes 2}$, s_{12} — оператор перестановки первого и второго сомножителей в $U(g)^{\otimes 2}$.

Для случая $n = 3$ мы имеем уже два ассоциатора Φ_A^{KZ} и Φ_B^{KZ}. Необходимо отметить, что ассоциатор Φ_A^{KZ} для уравнения КЗ типа B_3 определяется как "матрица" связи решений в окрестностях точек, лежащих на гиперплоскостях $z_1 - z_2 = 0$ и $z_2 - z_3 = 0$, и совпадает с ассоциатором Φ_{KZ}, определенным в разд. 1 (см. [38]). Ассоциаторы Φ_A^{KZ} и Φ_B^{KZ}, определенные описанным выше способом, при $n > 3$ совпадают с ассоциаторами, определенными при $n = 2, 3$, с точностью до тензорного умножения на тензорное произведение единиц из $U(g)[[h_1, h_2]]$ [38].

Таким образом, как и в случае корневой системы A_{n-1}, можно вычислить монодромию уравнения КЗ типа B_n, $n > 3$, но при этом приходится использовать ассоциаторы двух типов $\Phi_A^{\mathrm{KZ}} \in U(g)[[h_1, h_2]]^{\otimes 3}$ и $\Phi_B^{\mathrm{KZ}} \in U(g)[[h_1, h_2]]^{\otimes 2}$. Соответствующие формулы для значений монодромии на образующих σ_i, $i = 1, \dots, n-1$, и τ имеют вид [39]

$$\begin{aligned}
\rho_{\mathrm{KZ}}^{B_n}(\sigma_1) &= s_{12} e^{h_1 t_{12}^-/2}, \\
\rho_{\mathrm{KZ}}^{B_n}(\tau) &= (\Phi_B^{\mathrm{KZ}})^{-1} \sigma_{\mathrm{W},1} e^{h_2 t_1^0/2} \Phi_B^{\mathrm{KZ}}, \\
\rho_{\mathrm{KZ}}(\sigma_i) &= ((\Phi_A^{\mathrm{KZ}})^{(i)})^{-1} s_{ii+1} e^{h_1 t_{ii+1}/2} (\Phi_A^{\mathrm{KZ}})^{(i)}.
\end{aligned}$$

Здесь $(\Phi_A^{\mathrm{KZ}})^{(i)}$ получены с помощью коумножения точно так же, как указано в формулах разд. 1 для представления группы кос, построенного по общей структуре сплетенной квазибиалгебры.

Список соотношений, связывающих $R_A = e^{h_1 t^-/2}$, $R_B = e^{h_2 t^0/2}$, Φ_A, Φ_B и соответствующих структуре сплетенной квазибиалгебры коксетеровского типа B_n, будет дан ниже в разд. 4.

3. МНОГОПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ АЛГЕБРЫ ДРИНФЕЛЬДА–ДЖИМБО

В этом разделе мы приведем определение многопараметрических алгебр Дринфельда–Джимбо и укажем некоторые их свойства, аналогичные свойствам обычных алгебр Дринфельда–Джимбо. Пусть $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ — простые корни простой комплексной алгебры Ли g. Пусть $d_1, \dots, d_m$ обозначают квадраты длин простых корней $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ и $h(d_1), \dots, h(d_m)$ — соответствующие формальные параметры. Число различных формальных параметров $r \le m$ среди $h(d_1), \dots, h(d_m)$ равно числу различных длин простых корней. В рассматриваемых нами случаях $r = 1$ или 2.

Многопараметрическая алгебра Дринфельда–Джимбо $U_h(g)$, $h=(h(d_1),\dots,h(d_m))$, есть ассоциативная алгебра, порожденная элементами $X_i=X_{\alpha_i}$, $Y_i=Y_{-\alpha_i}$, $H_i=H_{\alpha_i}$, $i=1,2,\dots,m$, удовлетворяющими соотношениям

$$[H_i,H_j]=0,\qquad [H_i,X_j]=a_{ij}X_j,\qquad [H_i,Y_j]=-a_{ij}Y_j,\qquad [X_i,Y_j]=\delta_{ij}\frac{\mathrm{sh}(h(d_i)d_iH_i/2)}{\mathrm{sh}(h(d_i)d_i/2)},$$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}}(-1)^k\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ k\end{bmatrix}_{q_i}X_i^kX_jX_i^{1-a_{ij}-k}=0,\qquad \sum_{k=0}^{1-a_{ij}}(-1)^k\begin{bmatrix}1-a_{ij}\\ k\end{bmatrix}_{q_i}Y_i^kY_jY_i^{1-a_{ij}-k}=0.$$

Здесь мы используем обозначения

$$q_i=e^{h(d_i)d_i/2},$$

$$\begin{bmatrix}n\\ k\end{bmatrix}_{q_i}=\frac{[n]_{q_i}[n-1]_{q_i}\dots[n-k+1]_{q_i}}{[k]_{q_i}!},\qquad [n]_{q_i}=\frac{q_i^n-q_i^{-n}}{q_i-q_i^{-1}},\qquad [k]_{q_i}!=[1]_{q_i}[2]_{q_i}\dots[k]_{q_i}$$

и a_{ij} — элементы матрицы Картана алгебры Ли g. Топология кольца $\mathbb{C}_h=\mathbb{C}[[h(d_1),\dots,h(d_m)]]$, где $h=(h(d_1),\dots,h(d_m))$, или модуля M над этим кольцом определяется степенями идеалов $I=(h(d_1),\dots,h(d_m))$ или их действием на модуле M.

Мы определим коумножение Δ_h для многопараметрической алгебры $U_h(g)$ как непрерывный гомоморфизм алгебр

$$\Delta_h\colon U_h(g)\to U_h(g)\widehat{\otimes}U_h(g),$$

где $\widehat{\otimes}$ — топологическое тензорное произведение [21]. Этот гомоморфизм на образующих алгебры $U_h(g)$ определяется формулами

$$\Delta_h(H_i)=H_i\otimes 1+1\otimes H_i,$$
$$\Delta_h(X_i)=X_i\otimes e^{h(d_i)d_iH_i/4}+e^{-h(d_i)d_iH_i/4}\otimes X_i,$$
$$\Delta_h(Y_i)=Y_i\otimes e^{h(d_i)d_iH_i/4}+e^{-h(d_i)d_iH_i/4}\otimes Y_i.$$

Мы определим коединицу и антипод на образующих в $U_h(g)$ формулами

$$\varepsilon(H_i)=\varepsilon(X_i)=\varepsilon(Y_i)=0,$$
$$S_h(H_i)=-H_i,\qquad S_h(X_i)=e^{h(d_i)d_i/2}X_i,\qquad S_h(Y_i)=e^{-h(d_i)d_i/2}Y_i$$

и распространим на все $U_h(g)$ по мультипликативности как гомоморфизм и антигомоморфизм соответственно.

Пусть μ_h обозначает умножение в $U_h(g)$, и пусть

$$\eta_h\colon \mathbb{C}_h\to U_h(g)$$

обозначает единицу в $U_h(g)$.

Алгебру Хопфа $(U_h(g),\mu_h,\Delta_h,\eta_h,\varepsilon_h,S_h)$ будем называть многопараметрической алгеброй Хопфа.

Многопараметрическая алгебра Дринфельда–Джимбо обладает следующими свойствами.

Предложение 3. *Пусть $(U_h(g),\mu_h,\Delta_h,\eta_h,\varepsilon_h)$ — многопараметрическая алгебра Дринфельда–Джимбо и $U(g)$ — универсальная обертывающая алгебра алгебры Ли g. Имеет место изоморфизм*

$$U_h(g)/IU_h(g)=U(g).$$

Доказательство аналогично доказательству в однопараметрическом случае (см. [21]).

Предложение 4. *Антипод в $U_h(g)$ удовлетворяет равенству*

$$S_h^2(a) = e^{\rho_h} a e^{-\rho_h}, \qquad a \in U_h(g),$$

где

$$\rho_h = \sum_{i,j=1}^{n} (A^{-1})_{ji} d_j h(d_i) H_i$$

и A^{-1} — обратная матрица к матрице Картана алгебры Ли g.

Доказательство. Формула доказывается прямыми вычислениями в $U_h(g)$, как и в однопараметрическом случае.

Для простых алгебр Ли g типов A, D, E многопараметрическая алгебра Дринфельда–Джимбо совпадает с обычной однопараметрической алгеброй Дринфельда–Джимбо.

В многопараметрическом случае для алгебр Дринфельда–Джимбо может быть реализована конструкция квантового дубля Дринфельда [21, 23], которая позволяет определить многопараметрическую универсальную R-матрицу.

Имеет место следующая

Теорема 3. *Универсальная R-матрица имеет вид*

$$R_h = \sum_{l \in \mathbb{Z}_+^r} e^{t_0(h) + \frac{1}{4}(H_l(h) \otimes 1 + 1 \otimes H_l(h))} P_l,$$

где

$$t_0(h) = \sum_{1 \le i,\, j \le r} (DA)_{ij}^{-1} h(d_i) H_i \widehat{\otimes} h(d_j) H_j, \qquad H_l = \sum_{i=1}^{r} l_i h(d_i) H_i,$$

P_l — некоторые однородные полиномы от переменных $X_1 \otimes 1, \ldots, X_r \otimes 1$ и $1 \otimes Y_1, \ldots, 1 \otimes Y_r$, причем $P_0 = 1 \otimes 1$ и $D = \operatorname{diag}(d_1, \ldots, d_n)$. Также выполняется сравнение $R_h \equiv 1 \otimes 1 \pmod I$, где $I = (h(d_1), \ldots, h(d_n))$ — идеал, порожденный параметрами деформации.

Доказательство аналогично доказательству соответствующей теоремы в однопараметрическом случае.

4. СПЛЕТЕННЫЕ КВАЗИБИАЛГЕБРЫ КОКСЕТЕРОВСКОГО ТИПА B_n И ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ДРИНФЕЛЬДА–КОНО

Сплетенная квазибиалгебра типа B_n — это некоторая биалгебра A с почти кокоммутативным и почти коассоциативным коумножением и набором структурных элементов

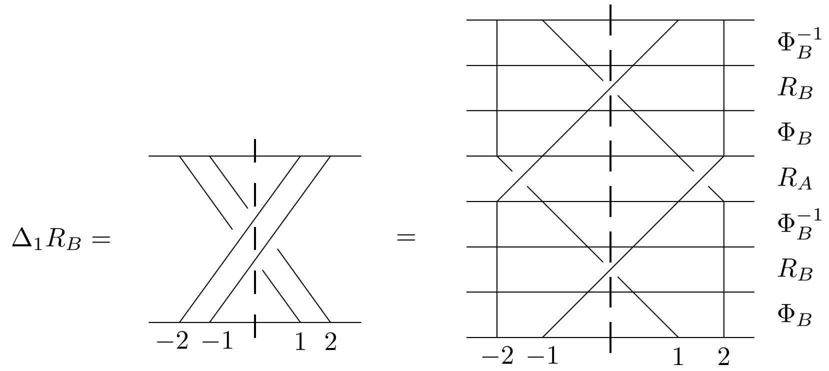
$$\mathcal{B} = \Big(A, \mu, \Delta, \eta, \varepsilon, R_A, \Phi_A, R_B, \Phi_B\Big),$$

где η — единица, ε — коединица, $R_A \in A^{\otimes 2}$ и $R_B \in A$ — R-матрицы, $\Phi_A \in A^{\otimes 3}$, $\Phi_B \in A^{\otimes 2}$ — ассоциаторы. Аксиоматическая характеризация R-матриц и ассоциаторов будет дана ниже.

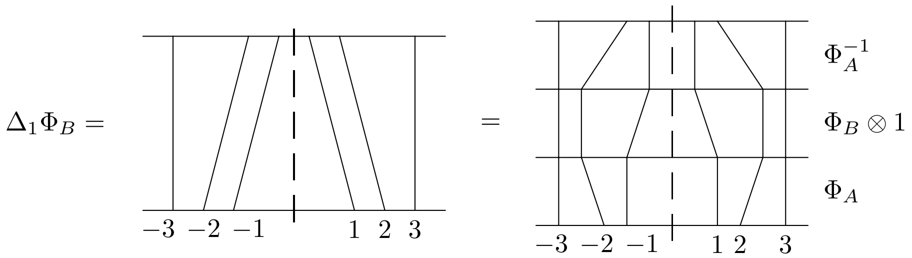
Пусть ν обозначает гомоморфизм, задающий перестановку тензорных сомножителей $\nu\colon A^{\otimes 2} \to A^{\otimes 2}$, $a \otimes b \to b \otimes a$ и $\Delta^{\mathrm{op}} = \nu\Delta$. Мы требуем, чтобы выполнялись равенства

$$\Delta^{\mathrm{op}}(a) = R_A \Delta(a) R_A^{-1}, \qquad (\Delta \otimes 1)\Delta(a) = \Phi_A (1 \otimes \Delta)\Delta(a) \Phi_A^{-1}.$$

Эти равенства определяют, что означают “почти кокоммутативность” и “почти коассоциативность”. Мы также требуем, чтобы структурные элементы удовлетворяли еще следующим



$$\Delta R_B = \Phi_B^{-1}(R_B \otimes 1)\Phi_B R_A \Phi_B^{-1}(R_B \otimes 1)\Phi_B$$



$$\Delta_1 \Phi_B = \Phi_A^{-1}(\Phi_B \otimes 1)\Phi_A$$

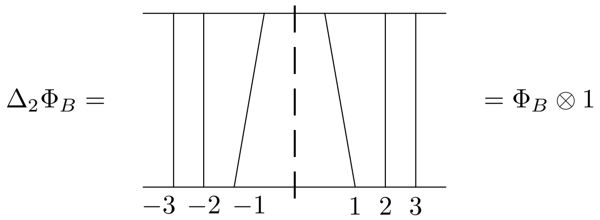


Рис. 5

аксиомам:

1) $\Delta_1 R_A = \Phi_A^{312} R_A^{13} (\Phi_A^{132})^{-1} R_A^{23} \Phi_A^{123}$, $\Delta_2 R_A = (\Phi_A^{231})^{-1} R_A^{13} \Phi_A^{213} R_A^{12} (\Phi_A^{132})^{-1}$;
2) $\Delta R_B = \Phi_B^{-1}(R_B \otimes 1)\Phi_B R_A^{12} \Phi_B^{-1}(R_B \otimes 1)\Phi_B$;
3) $(\Delta_3 \Phi_A)(\Delta_1 \Phi_A) = (1 \otimes \Phi_A)(\Delta_2 \Phi_A)(\Phi_A \otimes 1)$;
4) $\Delta_1 \Phi_B = \Phi_A^{-1}(\Phi_B \otimes 1)\Phi_A$, $\Delta_2 \Phi_B = \Phi_B \otimes 1$;
5) $\varepsilon_1 R_A = \varepsilon_2 R_A = 1 \otimes 1$;
6) $\varepsilon_1 \Phi_A = \varepsilon_2 \Phi_A = \varepsilon_3 \Phi_A = 1 \otimes 1 \otimes 1$, $\Delta_i = \Delta \otimes 1, 1 \otimes \Delta, \Delta \otimes 1 \otimes 1, 1 \otimes \Delta \otimes 1, 1 \otimes 1 \otimes \Delta$, $\varepsilon_i = \varepsilon \otimes 1, 1 \otimes \varepsilon, \varepsilon \otimes 1 \otimes 1, 1 \otimes \varepsilon \otimes 1, 1 \otimes 1 \otimes \varepsilon$;
7) $\varepsilon R_B = 1$, $(\varepsilon \otimes 1)\Phi_B = (1 \otimes \varepsilon)\Phi_B = 1 \otimes 1$,

где ε — коединица в A и Δ — коумножение в A.

Эти аксиомы моделируют свойства голономии уравнения КЗ типа B_n, которые вытекают из свойства перестановочности регуляризованной голономии с операцией симметрического инфинитезимального удвоения нитей симметрических кос со свободными концами (см. [39]). Геометрическая интерпретация этих аксиом дана на рис. 5.

В общем случае структура сплетенной квазибиалгебры типа B_n на алгебре A и некоторая инволюция σ_A на A позволяют определить представление группы Брискорна типа $B(B_n)$

$$\rho_B\colon B(B_n) \to A^{\otimes n}$$

по формулам, аналогичным формулам п. 2.4:

$$\rho_{\mathcal{B}}(\sigma_1) = s_{12}R_A,$$
$$\rho_{\mathcal{B}}(\sigma_i) = (\Phi_A^{(i)})^{-1} s_{i\,i+1} R_{A,(i\,i+1)} \Phi_A^{(i)},$$
$$\rho_{\mathcal{B}}(\tau) = \Phi_B^{-1} \sigma_{A,1} (R_B)_1 \Phi_B,$$

где R_B — универсальная матрица типа B, а индекс 1 обозначает вложение R_B в $A^{\otimes n}$ на первый тензорный сомножитель.

Теперь мы определим структуру сплетенной квазибиалгебры типа B по уравнениям КЗ типа B_n, $n \geq 1$. Она характеризуется следующими данными:

$$\mathcal{B}_{\mathrm{KZ}} = \Big(U(g)[[h_1,h_2]], \mu, \Delta, \eta, \varepsilon, R_A^{\mathrm{KZ}}, R_B^{\mathrm{KZ}}, \Phi_A^{\mathrm{KZ}}, \Phi_B^{\mathrm{KZ}}\Big),$$

где $R_A^{\mathrm{KZ}} = e^{h_1 t^-/2} \in (U(g)[[h_1,h_2]])^{\otimes 2}$, $R_B^{\mathrm{KZ}} = e^{h_2 t^0/2} \in U(g)[[h_1,h_2]]$, $\Phi_A^{\mathrm{KZ}} \in (U(g)[[h_1,h_2]])^{\otimes 3}$, $\Phi_B^{\mathrm{KZ}} \in (U(g)[[h_1,h_2]])^{\otimes 2}$.

Умножение μ, коумножение Δ, единица η и коединица ε совпадают с соответствующими операциями в тривиальной двухпараметрической деформации обертывающей алгебры $U(g)$. Можно показать, что указанный набор структурных элементов определяет структуру сплетенной квазибиалгебры типа B_n на $U(g)[[h_1,h_2]]$ (см. [39]).

Формулы для монодромии уравнения КЗ типа B_n были даны в п. 2.4.

Мы определим теперь скручивание произвольной структуры $\mathcal{B}$ квазибиалгебры типа B_n на некоторой алгебре A. Скручивание определяется элементами $F_A \in A^{\otimes 2}$ и $F_B \in A$. Скрученная структура определяется следующими элементами:

$$\widetilde{R}_B = F_B R_B F_B^{-1}, \qquad \widetilde{R}_A = F_A R_A F_A^{-1},$$
$$\widetilde{\Phi}_B = (\Delta F_B)\Phi_B(\Delta F_B)^{-1}, \qquad \widetilde{\Phi}_A = (1\otimes F_A)(\Delta_2 F_A)\Phi_A(\Delta_1 F_A^{-1})(F_A\otimes 1),$$
$$\widetilde{\Delta}(a) = F_A\Delta(a)F_A^{-1}, \qquad \widetilde{\mu}(a\otimes b) = \mu(F_A(a\otimes b)F_A^{-1}).$$

Предложение 5. *Множество скрученных объектов сплетенной квазибиалгебры типа B удовлетворяет аксиомам* 1)–7).

Обозначим структуру скрученной квазибиалгебры $\mathcal{B}_{(F_A,F_B)}$. Две структуры, получающиеся одна из другой скручиванием, называются калибровочно эквивалентными. Две калибровочно эквивалентные структуры сплетенной квазибиалгебры типа B определяют эквивалентные представления группы кос Брискорна $B(B_n)$.

Для формулировки обобщения теоремы Дринфельда–Коно необходимо следующее утверждение.

Предложение 6. *Для двухпараметрических алгебр Дринфельда–Джимбо $U_h(g)$ существуют такие элементы $R_{A,h} \in U_h(g)^{\otimes 2}$, $R_{B,h} \in U_h(g)$, что следующий набор объектов*:

$$\mathcal{B}_h = \Big(U_h(g), \mu_h, \Delta_h, \eta_h, \varepsilon_h, R_{A,h}, R_{B,h}, \Phi_{A,h} = 1\otimes 1\otimes 1, \Phi_{B,h} = 1\otimes 1\Big)$$

определяет сплетенную топологическую биалгебру над $\mathbb{C}_h$, где $h = (h_1,h_2)$. Элемент $R_{A,h}$ совпадает с универсальной R-матрицей, которая упоминалась выше.

Любая такая сплетенная биалгебра определяет представление группы кос Брискорна типа $B(B_n)$ по формулам, указанным выше в этом разделе, где в качестве σ_A берется продолжение $\widetilde{\sigma}_{\mathrm{W}}$ автоморфизма Вейля–Шевалле на $U_h(g)$ (для этого можно использовать линейный непрерывный изоморфизм $U_h(g)$ и $U(g)[[h_1,h_2]]$). В частности, мы получаем элементы $\widetilde{R}_{A,h} = s_{12}R_{A,h}$ и $\widetilde{R}_{B,h} = \widetilde{\sigma}_{\mathrm{W}}R_{B,h}$, удовлетворяющие одному из порождающих соотношений для кос Брискорна типа B_n

$$(\widetilde{R}_{A,h}(\widetilde{R}_{B,h}\otimes 1))^2 = ((\widetilde{R}_{B,h}\otimes 1)\widetilde{R}_{A,h})^2.$$

Это уравнение на R-матрицы для случая B_n необходимо добавить к уравнениям Янга–Бакстера. Существование элемента R_B для случая $g = sl(2)$ следует из работы [33].

Теперь мы сформулируем теорему, которая обобщает теорему Дринфельда на случай систем корней типа B.

Теорема 4. *Существуют два таких скручивающих ряда* $F_A(h_1,h_2) \in U(g)[[h_1,h_2]]^{\otimes 2}$, $F_B(h_1,h_2) \in U(g)[[h_1,h_2]]$, *что имеет место изоморфизм*

$$\mathcal{B}_{\mathrm{KZ}} = \Big(U(g)[[h]], \mu, \Delta, R_A = e^{t^-/2}, R_B = e^{ht^0/2}, \Phi_A^{\mathrm{KZ}}, \Phi_B^{\mathrm{KZ}}\Big)_{F(h_1,h_2)} \cong$$
$$\cong \mathcal{B}_h = \Big(U_h(g), R_{A,h}, R_{B,h}, \Phi_{A,h} = 1\otimes 1\otimes 1, \Phi_{B,h} = 1\otimes 1\Big).$$

Теперь сформулируем основную теорему работы.

Теорема 5. *Пусть g — любая простая комплексная конечномерная алгебра Ли, $t^- \in \in g\otimes g \subset U(g)^{\otimes 2}$ — g-инвариантный тензор Белавина–Дринфельда и $t^0 \in U(g)$ — элемент Лейбмана. Тогда представление монодромии уравнения КЗ типа B_n с коэффициентами, определяемыми элементами t^-, $t^+ = (\sigma_{\mathrm{W}}\otimes 1)(t^-)$ и t^0,*

$$\rho_{\mathrm{KZ}}\colon B(B_n) \to (U(g)[[h]])^{\otimes n}$$

эквивалентно представлению группы кос Брискорна $B(B_n)$, определяемому по структуре сплетенной квазибиалгебры типа B на двухпараметрической алгебре Дринфельда–Джимбо $U_h(g)$ с тривиальными ассоциаторами $\Phi_{A,h} = 1\otimes 1\otimes 1$ и $\Phi_{B,h} = 1\otimes 1$.

Доказательство сформулированной теоремы аналогично доказательству теоремы Дринфельда–Коно для случая системы корней A_n (см. [21, гл. 18, 19]). Так как полное доказательство занимает слишком много места, мы лишь перечислим основные вехи доказательства.

1. Доказательство существования линейного изоморфизма

$$U_h(g) \simeq U(g)[[h]],$$

продолжающего тождественное отображение на $U(g)$.

2. Доказательство изоморфизма с точностью до калибровочной эквивалентности двух произвольных структур квазибиалгебры типа B на тривиальной двухпараметрической деформации универсальной обертывающей алгебры $U(g)$, которые отличаются только ассоциаторами Φ_A, а остальные структурные элементы совпадают. Подобное утверждение верно и относительно ассоциатора Φ_B. Доказательство последнего факта основано на использовании циклических гомологий (см. [40]).

3. Используя утверждения п. 2 с помощью калибровочных эквивалентностей мы можем редуцировать структуру сплетенной квазибиалгебры $\mathcal{B}_{\mathrm{KZ}}$ к структуре сплетенной квазибиалгебры с тривиальными ассоциаторами Φ_A и Φ_B.

4. Доказательство изоморфизма с точностью до калибровочной эквивалентности структуры сплетенной биалгебры, полученной в п. 3, и некоторой универсальной структуры сплетенной биалгебры на алгебре Дринфельда–Джимбо, существование которой утверждалось в предложении 6.

Полное доказательство появится в дальнейших публикациях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Regge T.* Algebraic topology methods in the theory of Feynman relativistic amplitudes // Battelle rencontres, 1967 / Eds. C. DeWitt, J. Wheeler. New York: Benjamin, 1968. P. 433–458.
2. *Голубева В.А.* Некоторые вопросы аналитической теории фейнмановских интегралов // УМН. 1976. Т. 31, №2. С. 174–202.
3. *Deligne P.* Equations différentielles à points singuliers réguliers. Berlin: Springer, 1970. (Lect. Notes Math.; V. 163).
4. *Gérard R.* Théorie de Fuchs sur une varieté analytique complexe // J. math. pures et appl. Sér. 9. 1968. V. 47. P. 321–404.
5. *Болибрух А.А.* Системы Пфаффа типа Фукса на комплексном аналитическом многообразии // Мат. сб. 1977. Т. 103, №1. С. 112–123.
6. *Голубева В.А.* О мероморфном сечении комплексно-аналитического векторного расслоенного пространства над комплексным проективным пространством // Мат. сб. 1977. Т. 103, №4. С. 505–518.
7. *Suzuki O.* The problems of Riemann and Hilbert and the relations of Fuchs in several complex variables // Lect. Notes Math. 1979. V. 712. P. 325–364.
8. *Kita M.* The Riemann–Hilbert problem and its application to analytic functions of several complex variables // Tokyo J. Math. 1979. V. 2, N 1. P. 1–27.
9. *Kita M.* The Riemann–Hilbert problem in several complex variables. II // Tokyo J. Math. 1979. V. 2, N 2. P. 293–300.
10. *Katz N.* An overview of Deligne's works on Hilbert's twenty-first problem // Proc. Symp. Pure Math. 1976. V. 28. P. 537–557.
11. *Hain R.* On a generalization of Hilbert's 21st problem // Ann. sci. Ecole Norm. Super. Sér. 4. 1986. V. 19, N 4. P. 609–627.
12. *Болибрух А.А.* О фундаментальной матрице системы Пфаффа типа Фукса // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1977. Т. 41, №5. С. 1084–1109.
13. *Болибрух А.А.* Пример неразрешимой проблемы Римана–Гильберта на $\mathbb{C}P^2$ // Геометрические методы в задачах алгебры и анализа. Ярославль: Изд. Яросл. гос. ун-та, 1980. Вып. 2. С. 60–64.
14. *Лексин В.П.* О фуксовых представлениях фундаментальной группы комплексного многообразия // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений. Ярославль: Изд. Яросл. гос. ун-та. 1979. Вып. 4. С. 109–114.
15. *Golubeva V.A.* On the Riemann–Hilbert problem in a class of the Knizhnik–Zamolodchikov equations // Funct. Diff. Equat. 2001. V. 8, N 3/4. P. 241–256.
16. *Дринфельд В.Г.* Квазихопфовы алгебры // Алгебра и анализ. 1989. Т. 1, №6. С. 114–148.
17. *Дринфельд В.Г.* О квазитреугольных квазихопфовых алгебрах и одной группе, тесно связанной с $Gal(\overline{Q}/Q)$ // Алгебра и анализ. 1990. Т. 2, №4. С. 129–181.
18. *Kohno T.* Linear representations of braid groups and classical Yang–Baxter equations // Contemp. Math. 1988. V. 78. P. 339–363.
19. *Kohno T.* Quantized universal envelopping algebras and monodromy of braid groups: Preprint Nagoya Univ., 1991.
20. *Knizhnik V.G., Zamolodchikov A.B.* Current algebra and Wess–Zumino models in two dimensions // Nucl. Phys. B. 1984. V. 247, N 1. P. 83–103.
21. *Кассель К.* Квантовые группы. М.: Фазис, 1999.
22. *Le T.Q.T., Murakami I.* Representations of the category of tangles by Kontsevich's iterated integral // Commun. Math. Phys. 1995. V. 168, N 3. P. 535–562.
23. *Tanisaki T.* Killing forms, Harish-Chandra isomorphisms, and universal R-matrices for quantum algebras // Intern. J. Mod. Phys. A. 1992. V. 7. Suppl. 1B. P. 941–961.
24. *Piunikhin S.* Combinatorial expression for universal Vassiliev link invariant // Commun. Math. Phys. 1995. V. 168, N 1. P. 1–22.
25. *Leibman A.* Some monodromy representations of generalized braid groups // Commun. Math. Phys. 1994. V. 164, N 2. P. 293–304.

26. *Markushevich D.G.* The D_n generalized pure braid groups // Geom. Dedicata. 1991. V. 40, N 1. P. 73–96.
27. *Вершинин В.* Группы кос и пространства петель // УМН. 1999. Т. 54, №2. С. 3–84.
28. *Mathieu O.* Équations de Knizhnik–Zamolodchikov et théorie des representations // Astérisque. 1995. V. 227, exp. 777. P. 47–67. (Séminaire Bourbaki, 1993/94).
29. *Leibman A., Markushevich D.* The monodromy of the Brieskorn bundle // Contemp. Math. 1994. V. 164. P. 91–117.
30. *Leibman A.* Fiber bundles with degenerations and their applications to computing fundamental groups // Geom. Dedicata. 1993. V. 48, N 1. P. 93–126.
31. *tom Dieck T.* Knotentheorie und Wurzelsysteme. I, II // Math. Göttingenis. 1993. V. 21. P. 44.
32. *Lambropoulou S.* Solid torus links and Hecke algebras of B type // Proc. Conf. on Quantum Topology. Singapore: World Sci., 1994. P. 225–245.
33. *Häring-Oldenburg R.* Tensor categories of Coxeter type B and QFT on the half plane // J. Math. Phys. 1997. V. 38, N 10. P. 5371–5382.
34. *Golubeva V.A., Leksin V.P.* On two types of representations of the braid group associated with the Knizhnik–Zamolodchikov equation of the B_n type // J. Dyn. and Control Syst. 1999. V. 5, N 4. P. 565–596.
35. *Чередник И.В.* Обобщенные группы кос и локальные r-матричные системы // ДАН СССР. 1989. Т. 307, №1. С. 49–53.
36. *Cherednik I.V.* Monodromy representations for generalized Knizhnik–Zamolodchikov equations and Hecke algebras // Publ. RIMS. Kyoto Univ. 1991. V. 27, N 5. P. 711–726.
37. *de Concini C., Procesi C.* Hyperplane arrangements and holonomy equations // Sel. Math. New ser. 1995. V. 1, N 3. P. 495–535.
38. *Горюнов В.В.* Когомологии групп кос серий C и D // Тр. Моск. мат. о-ва. 1981. Т. 42. С. 234–242.
39. *Lexin V.P.* Monodromy for KZ equations of the B_n-type and accompanying algebraic structures // Funct. Diff. Equat. 2001. V. 8, N 3/4. P. 335–344.
40. *Loday J.-L.* Cyclic homology. Berlin: Springer, 1998. (Grundl. Math. Wissensch.; Bd. 301).