Д. Б. Фукс, Двойственность Экмана–Хилтона и теория функторов в категории топологических пространств, *УМН*, 1966, том 21, выпуск 2(128), 3–40

*1966 г. март — апрель* *т. XXI, вып. 2 (128)*

*УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК*

УДК 517.43+513.83

# ДВОЙСТВЕННОСТЬ ЭКМАНА — ХИЛТОНА И ТЕОРИЯ ФУНКТОРОВ В КАТЕГОРИИ ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Д. Б. Фукс

СОДЕРЖАНИЕ



## § 1. Двойственность Экмана — Хилтона в гомотопической топологии

Этот параграф содержит перечень основных понятий и фактов, относящихся к двойственности Экмана — Хилтона. Последующие параграфы формально на него не опираются, и статью можно читать, начиная со второго параграфа. В отличие от первого параграфа, второй и последующие практически не оперируют ни с какими понятиями гомотопической топологии.

Отдельные факты, указывающие на то, что в гомотопической топологии существует содержательная, далеко идущая двойственность, были известны довольно давно. Мы начнем с рассмотрения некоторых примеров.

Пусть $X$ и $Y$ — два топологических пространства, $f\colon X \to Y$ и $g\colon X \to Y$ — непрерывные отображения пространства $X$ в пространство $Y$. Говорят, что эти отображения *гомотопны*, если их можно соединить непрерывным семейством непрерывных отображений $X$ в $Y$, точнее, если для каждого $t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ существует непрерывное отображение $f_t\colon X \to Y$, непрерывно зависящее от $t$, причем $f_0 = f$ и $f_1 = g$. Непрерывная зависимость $f_t$ от $t$ означает, что функция $F(x, t) = f_t(x)$, определенная на прямом произведении $X \times [0, 1]$ и принимающая значения в $Y$, непрерывна по совокупности переменных.

Обычно в связи с двойственностью Экмана — Хилтона рассматривают не просто топологические пространства, а топологические пространства с отмеченной точкой. *Топологическим пространством с отмеченной точкой*

называется пара $(X, *)$, где $X$ — топологическое пространство, $*$ — точка этого пространства, называемая *отмеченной*. При этом в определение непрерывного отображения включается требование о том, чтобы при этом отображении отмеченная точка переходила в отмеченную. Это же, естественно, требуется и от всех отображений $f_t$, входящих в определение гомотопий. В дальнейшем, не оговаривая этого специально, мы будем понимать под топологическим пространством топологическое пространство с отмеченной точкой; соответствующие изменения мы считаем внесенными в определения непрерывного отображения и гомотопии. Отмеченная точка, независимо от того, в каком пространстве она рассматривается, будет обозначаться $*$.

Пусть $X$ и $Y$ — два пространства. Рассмотрим множество $\pi(X, Y)$ классов гомотопных отображений (гомотопических классов отображений) пространства $X$ в пространство $Y$. Возникает вопрос: при каких условиях это множество является группой [1])? Например, очевидно, что если $Y$ — топологическая группа и отмеченной точкой является единица, то не только гомотопические классы отображений $X$ в $Y$, но и сами отображения можно умножать по формуле $[f \cdot g](x) = f(x) \cdot g(x)$. Таким образом, в этом случае множество $\pi(X, Y)$ является группой. Наличие умножения в пространстве $Y$ равносильно существованию непрерывного отображения $\mu$: $Y \times Y \to Y$ (ведь умножение — это функция, относящая паре $(y_1, y_2)$ элементов $Y$ их произведение $y_1 \cdot y_2$ — элемент $Y$, т. е. элементу $(y_1, y_2) \in Y \times Y$ элемент $y_1 \cdot y_2 \in Y$, т. е. отображение $Y \times Y \to Y$). Свойства умножения в $Y$, превращающие его в группу, можно выразить в виде некоторых условий, наложенных на отображение $\mu$. Например, ассоциативность умножения равносильна совпадению двух отображений $Y \times Y \times Y \to Y$: отображения, относящего точке $(y_1, y_2, y_3)$ точку $y_1 (y_2 y_3)$, и отображения, относящего точке $(y_1, y_2, y_3)$ точку $(y_1 y_2) y_3$. Аналогично существование в группе обратного элемента равносильно существованию отображения $Y \to Y$ с некоторыми свойствами.

Указанные свойства превращают в группу не $\pi(X, Y)$, а уже множество $Y^X$ всех непрерывных отображений $X$ в $Y$. Для того чтобы групповая структура была определена в $\pi(X, Y)$, можно потребовать от $Y$ меньшего. Например, условие совпадения отображений $Y \times Y \times Y \to Y$, определенных выше, можно заменить условием их гомотопности, и аналогично для других свойств умножения в $Y$. Пространство, в котором определено умножение, удовлетворяющее групповым свойствам только с точностью до гомотопии, называется *H-пространством.*

Итак, для того чтобы $\pi(X, Y)$ обладало естественной групповой структурой для любого пространства $X$ и данного пространства $Y$, достаточно, чтобы $Y$ было $H$-пространством.

---

[1] В такой постановке вопрос, конечно, не имеет смысла. Мы имеем в виду следующее. Для каких пространств $Y$ можно ввести групповую структуру во множество $\pi(X, Y)$ для всех пространств $X$ естественно по $X$, т. е. так, что если $X_1$ и $X_2$ — два пространства, $\varphi : X_1 \to X_2$ — отображение одного в другое, то индуцированное отображение $\pi(X_2, Y) \to \pi(X_1, Y)$ является гомоморфизмом групп (переводит произведение в произведение, обратный элемент — в обратный элемент)? Аналогично: для каких $X$ множество $\pi(X, Y)$ является группой естественно по $Y$?

Теперь выясним, какие условия нужно наложить на пространство $X$, чтобы на множествах $\pi(X, Y)$ для всех $X$ определялась групповая структура. Один пример хорошо известен. Если $S^n$ есть $n$-мерная сфера (одна из точек этой $n$-мерной сферы считается отмеченной), то множество $\pi(S^n, Y)$ снабжается групповой структурой и полученная группа $\pi_n(Y)$ называется *n-мерной гомотопической группой* пространства $Y$. Если $\alpha$ и $\beta$ — два элемента множества $\pi(S^n, Y)$, то элемент $\alpha\cdot\beta$ строится следующим образом (при $n\geqslant 2$ группа $\pi_n(Y)$ оказывается коммутативной, и поэтому операция в ней обычно обозначается знаком $+$). Выбираются отображения $f$: $S^n\to Y$ и $g$: $S^n\to Y$ соответственно из классов $\alpha$ и $\beta$, переводящие, как было условлено, отмеченную точку в отмеченную (отмеченную точку сферы мы считаем лежащей на ее экваторе). Отображение $f\cdot g$: $S^n\to Y$ отображает весь экватор сферы $S^n$ в отмеченную точку пространства $Y$, верхнюю полусферу сферы $S^n$ отображает в пространство $Y$ с помощью отображения $f$, нижнюю — с помощью отображения $g$ (поскольку весь экватор отобразился в одну точку, то отображение каждой из полусфер может быть представлено как отображение сферы). Элемент $\alpha+\beta\in\pi(S^n, Y)$ определяется как класс гомотопных отображений, к которому принадлежит отображение $f\cdot g$.

Какое пространство $X$ может быть взято вместо $n$-мерной сферы, чтобы прошла аналогичная конструкция? Для ответа на этот вопрос нам потребуется одно определение. Если $A$ и $B$ — два пространства с отмеченными точками, то их *букетом* $A\vee B$ называется пространство, которое получается из объединения $A\cup B$ отождествлением отмеченных точек. Точка, которая получилась в результате этого отождествления, считается отмеченной в $A\vee B$. Очевидно, что если $C$ — любое третье пространство, то два отображения $\varphi$: $A\to C$ и $\psi$: $B\to C$ взаимно однозначным образом определяют отображение $\varphi\vee\psi$: $A\vee B\to C$.

Пусть $X$ и $Y$ — два пространства. Зафиксируем некоторое отображение $\nu$: $X\to X\vee X$. Тогда по любым двум отображениям $f$: $X\to Y$, $g$: $X\to Y$ можно построить отображение $f\cdot g$: $X\xrightarrow{\nu}X\vee X\xrightarrow{f\vee g}Y$. Теперь, налагая некоторые условия на отображение $\nu$, мы можем добиться того, чтобы такое умножение отображений $X\to Y$ определяло групповую структуру на $\pi(X, Y)$. В частности, групповая структура в $\pi_n(Y)$ определена с помощью отображения $S^n\to S^n\vee S^n$, переводящего экватор отображаемой сферы в отмеченную точку букета, а верхнюю и нижнюю полусферы отображаемой сферы — в две сферы, составляющие букет.

Как показали Эйленберг и Маклейн [3], для любой абелевой группы $\Pi$ и натурального $n$ существует пространство $K(\Pi, n)$ такое, что $\pi_i(K(\Pi, n))=0$ при $i\neq n$ $(i>0)$ и $\pi_n(K(\Pi, n))=\Pi$. Это пространство определено неоднозначно; в частности, всегда можно взять за такое пространство абелеву топологическую группу. Для любого пространства $X$, абелевой группы $\Pi$ и натурального числа $n$ определена, таким образом, группа $\pi(X, K(\Pi, n))$, которая обозначается $H^n(X; \Pi)$ и называется *n-мерной группой когомологий пространства X с коэффициентами в группе* $\Pi$. Это определение (для симплициальных комплексов) совпадает (при $n>0$)

с обычным определением когомологических групп [1]. Как известно, когомологии сферы устроены наиболее просто:

$$H^q(S^n, \Pi) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad q \neq n, \\ \Pi & \text{при} \quad q = n. \end{cases}$$

Мы получили двойственные определения групп когомологий и гомотопических групп. А именно, $n$-мерная гомотопическая группа пространства $Y$ есть группа $\pi(S^n, Y)$; $S^n$ — это пространство, когомологии которого выражаются формулами: $H^q(S^n; \Pi) = 0$ $(q \neq n)$, $H^n(S^n; \Pi) = \Pi$; группа $n$-мерных когомологий пространства $X$ с коэффициентами в группе $\Pi$ есть группа $\pi(X, K(\Pi, n))$, где $K(\Pi, n)$ — пространство, гомотопии которого определяются из формул: $\pi_q(K(\Pi, n)) = 0$ при $q \neq n$, $\pi_n(K(\Pi, n)) = \Pi$.

Теперь дадим два важных определения. Пусть $X$ — пространство. Через $\Omega X$ обозначается пространство всех петель этого пространства, т. е. пространство таких отображений отрезка $[0, 1]$ в пространство $X$, которые переводят точки 0 и 1 в отмеченную точку пространства $X$. Отмеченной точкой в пространстве $\Omega X$ считается «нулевая петля», т. е. петля, сводящаяся к одной отмеченной точке. Рассмотрим, далее, прямое произведение $X \times [0, 1]$ и в нем подпространство, составленное из трех частей: «верхнего основания», «нижнего основания» и «слоя над отмеченной точкой», т. е. подпространство, образованное такими точками $(x, t)$, где $x \in X$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$, что либо $x = *$, либо $t = 0$, либо $t = 1$. Пространство, которое получается из $X \times [0, 1]$ отождествлением в одну точку точек указанного подпространства, называется *надстройкой над пространством* $X$ и обозначается $\Sigma X$. Иными словами, надстройка получается так: берутся два конуса с основанием $X$, приставляются основаниями, и в полученном пространстве отождествляются между собой точки отрезка, идущего из одной вершины в другую через отмеченную точку.

Понятия пространства петель и надстройки играли на самом деле важную роль в проведенном выше построении. Заметим, например, что:

1.1. *Если пространство $Y$ является пространством петель некоторого пространства $Z$ (или гомотопически ему эквивалентно), то для любого пространства $X$ множество $\pi(X, Y)$ является группой.*

1.2. *Если пространство $X$ является надстройкой над каким-нибудь пространством $Z$ (или гомотопически ей эквивалентно), то для любого пространства $Y$ множество $\pi(X, Y)$ является группой.*

1.3. *Надстройка над $n$-мерной сферой есть $(n+1)$-мерная сфера.*

1.4. *Пространство петель пространства $K(\Pi, n)$ есть пространство $K(\Pi, n-1)$.*

Подобные факты были систематизированы Б. Экманом и П. Хилтоном [6]—[9]. Ими был сформулирован общий принцип двойственности, который состоит в том, что в гомотопической топологии некоторые понятия разбиваются на пары двойственных (гомотопические группы — группы когомологий; букет — прямое произведение; надстройка — пространство петель), причем если в какой-нибудь теореме заменить все понятия двойственными, то эта теорема остается, как правило, верной.

Кроме уже приведенных примеров, подтверждающих этот принцип, можно указать ряд других. Например, группы когомологий любого пространства $X$ и надстройки $\Sigma X$ над ним совпадают со сдвигом размерности на единицу:

$$H^q(X;\ G) = H^{q+1}(\Sigma X;\ G). \tag{1.1}$$

Для гомотопических групп аналогичный факт имеет место только в «стабильных размерностях»:

$$\pi_n(X) = \pi_{n+1}(\Sigma X) \quad \text{при} \quad n < 2k-1, \tag{1.2}$$

где $k$ — размерность первой нетривиальной гомотопической группы пространства $X$. Двойственные утверждения справедливы для пространств петель:

$$\pi_n(X) = \pi_{n-1}(\Omega X), \tag{1.3}$$

$$H^q(X;\ G) = H^{q-1}(\Omega X;\ G) \quad \text{при} \quad q < 2k-1. \tag{1.4}$$

Двойственны также хорошо известные формулы

$$H^q(X \vee Y;\ G) = H^q(X;\ G) + H^q(Y;\ G), \tag{1.5}$$

$$\pi_n(X \times Y) = \pi_n(X) + \pi_n(Y). \tag{1.6}$$

Работы Экмана и Хилтона быстро получили широкую известность и явились стимулом для очень широкого круга исследований в самых различных направлениях. Большинство из них было посвящено поискам новых примеров двойственных объектов. Например в лекциях Хилтона [10] было дуализировано понятие расслоенного пространства. Напомним определение расслоения, принадлежащее Серру [1]).

Отображение $p$: $E \to B$ пространства $E$ в пространство $B$ называется *расслоением в смысле Серра*, если для любого пространства, отображения $F$: $Z \to E$ и гомотопии $f_t$: $Z \to B$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ такой, что $f_0 = pF$, существует гомотопия $F_t$: $Z \to E$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ такая, что $F_0 = F$ и $pF_t = f_t$.

Пространство $F = p^{-1}(*) \subset E$ называется *слоем* этого расслоения, $B$ — его *базой*.

Понятие *корасслоения* определяется следующим образом.

Отображение $i$: $B \to E$ пространства $B$ в пространство $E$ называется *корасслоением*, если для любого пространства $Z$, отображения $F$: $E \to Z$ и гомотопии $f_t$: $B \to Z$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ такой, что $f_0 = F \circ i$, существует гомотопия $F_t$: $E \to Z$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ такая, что $F_0 = F$ и $F_t \circ i = f_t$.

Заметим, что корасслоение всегда является топологическим вложением и его образ замкнут в $E$. Обратно, всякое вложение замкнутого подполи-

1) Частным случаем расслоения в смысле Серра является обычное расслоение, которое, как известно, определяется следующим образом. Отображение $p$: $E \to B$ называется *расслоением* (или *локально тривиальным расслоением*), если прообразы $p^{-1}(x)$ гомеоморфны между собой для всех точек $x \in B$ и у каждой точки $x \in B$ найдется окрестность $U$ такая, что имеет место гомеоморфизм $p^{-1}(U) = U \times p^{-1}(x)$, причем если при этом гомеоморфизме точка $\xi \in p^{-1}(U)$ переходит в точку $(y, \xi_0)$, где $y \in U$, $\xi_0 \in p^{-1}(x)$, то $y = p(\xi)$. Различие между этими понятиями сводится к тому, что если $p$: $E \to B$ — локально тривиальное расслоение, то прообразы всех точек $B$ гомеоморфны, а если это — расслоение в смысле Серра, то прообразы всех точек гомотопически эквивалентны

эдра в полиэдр является корасслоением. Пространство, получающееся из $E$ отождествлением в одну точку точек образа отображения $i$, называется *кослоем* корасслоения $i$; пространство $B$ называется его *кобазой*.

Примеры, подтверждающие существование двойственности между понятиями расслоения, слоя, базы, с одной стороны, и понятиями корасслоения, кослоя, кобазы, с другой стороны, приводятся очень легко. Например, вложение $\varphi_{t_0}: X \to \Sigma X$ $(0 < t_0 < 1)$, относящее точке $x \in X$ точку $(x, t_0) \in \Sigma X$, является корасслоением, кослой которого гомеоморфен букету $\Sigma X \vee \Sigma X$. С другой стороны, отображение $\pi_{t_0}$: $\Omega X \to X$ $(0 < t_0 < 1)$, сопоставляющее петле $f \in \Omega X$ точку $f(t_0)$, является расслоением в смысле Серра. Его слой — $\Omega X \times \Omega X$.

Более сложный пример. Пусть $X$ и $Y$ — два пространства. Через $X * Y$ обозначим пространство, получаемое из прямого произведения $X \times Y \times I$, где $I$ — отрезок $[0, 1]$, отождествлениями $(x', y, 1) = (x'', y, 1)$, $(x, y', 0) = (x, y'', 0)$, $(*, *, t') = (*, *, t'')$, где $x, x', x'' \in X$, $y, y', y'' \in Y$, $t', t'' \in I$ — любые точки. Иначе говоря, пространство $X * Y$ можно получить, если присоединить к букету $X \vee Y$ для каждых точек $x \in X \subset X \vee Y, y \in Y \subset X \cdot Y$ отрезок, соединяющий эти точки (эти отрезки считаются непересекающимися). Пространство $X * Y$ называется *соединением пространств* $X$ и $Y$. Двойственная операция сопоставляет пространствам $X$ и $Y$ пространство $K(X, Y)$ тех путей букета $X \vee Y$, которые начинаются на $X$ и кончаются на $Y$ (эта конструкция была приведена в моей заметке [15]; однако, как мне сообщил Т. Ганя, она была известна Хилтону задолго до этого). Естественное вложение $i$: $X \vee Y \to X * Y$ является корасслоением; его кослой, очевидно, представляет собой надстройку $\Sigma(X \times Y)$. С другой стороны, сопоставляя каждому пути $\alpha \in K(X, Y)$ точку $(x, y) \in X \times Y$, где $x$ и $y$ — начало и конец пути $\alpha$, мы получаем расслоение в смысле Серра $\pi$: $K(X, Y) \to X \times Y$; его слой, очевидно, есть совокупность тех путей букета, которые начинаются и кончаются в отмеченной точке, т. е. пространство $\Omega(X \vee Y)$.

Другие примеры пар двойственных понятий содержатся в работах Гани и Берштейна [11]—[13]. Дуализируя известные понятия, такие, как категория Люстерника — Шнирельмана, гомотопическая нильпотентность и другие, они получили новые содержательные инварианты.

Однако, несмотря на большое количество подтверждающих примеров, до последнего времени в двойственности Экмана — Хилтона не было доказано ни одной теоремы. Она оставалась, по выражению Е. Спаньера, «метаматематическим методом», позволяющим формулировать правдоподобные утверждения и иногда помогающим доказывать их. В последние годы был предпринят ряд попыток «дать определение двойственности Экмана — Хилтона», т. е. построить точную теорию, в рамках которой можно было бы не постулировать, опираясь на интуицию, а доказывать двойственность различных понятий и утверждений. Первое, что требуется сделать для построения такой теории, это выяснить, на каких объектах определена двойственность Экмана — Хилтона. Рассмотрение приведенных выше примеров показывает, что двойственность Экмана — Хилтона — это двойственность естественных гомото-

пических свойств надстроек и пространств петель, букетов и прямых произведений, пространств $X \times Y$ и $K(X, Y)$ и т. д. Что же касается надстроек, пространств петель и т. д., то это все функции, сопоставляющие топологическому пространству (или нескольким топологическим пространствам) топологическое пространство, причем непрерывному отображению $f: X \to Y$ соответствуют непрерывные отображения $\Sigma f: \Sigma X \to \Sigma Y$, $\Omega f: \Omega X \to \Omega Y$ и т. д. Такие функции называются (*ковариантными*) *функторами в категории топологических пространств* (точное определение будет дано в § 2).

Таким образом, сначала нужно установить, какие именно функторы двойственны между собой. Затем нужно доказывать, что естественные гомотопические свойства двойственных функторов двойственны.

Первая попытка решить эту задачу содержится в работе Д. Кана [14]. Им было замечено следующее свойство некоторых двойственных функторов. Пусть $X$ и $Y$ — два любых пространства. Тогда любое отображение $f$: $X \to Y \times Y$ взаимно однозначно определяется двумя отображениями $f_1$: $X \to Y$, $f_2$: $X \to Y$ $(f(x) = (f_1(x), f_2(x)) \in Y \times Y)$. С другой стороны, отображения $f_1$ и $f_2$ определяют отображение $f$: $X \vee X \to Y$. Сопоставляя отображению $f$ отображение $f$, мы получаем взаимно однозначное соответствие между отображениями $X \to Y \times Y$ и отображениями $X \vee X \to Y$. Аналогичный факт имеет место для надстроек и пространств петель: для любых пространств $X$ и $Y$ отображения $\Sigma X$ в $Y$ и отображения $X$ в $\Omega Y$ находятся во взаимно однозначном соответствии. Д. Кан ввел общее понятие сопряженных функторов, назвав функторы $S$ и $T$ *сопряженными*, если для любых пространств $X$ и $Y$ множество всех отображений $X$ в $TY$ и множество всех отображений $SX$ в $Y$ находятся во взаимно однозначном соответствии (от этого соответствия требуется еще выполнение условия «естественности», см. § 5). Кан распространил свое определение на функторы нескольких переменных, определенных не обязательно в категории топологических пространств.

Однако определение Кана оказалось чрезвычайно узким. Без труда можно перечислить все сопряженные в смысле Кана функторы (см. теорему 6.1). Это делается следующим образом. Пусть $A$ и $X$ — любые пространства. Через $A \# X$ обозначим пространство, получаемое из прямого произведения $A \times X$ отождествлением в одну точку точек «координатного креста» $A \vee X \subset A \times X$. Через $X^A$ обозначим пространство всех непрерывных отображений пространства $A$ в пространство $X$ (в $X^A$ вводится бикомпактно-открытая топология, обобщающая топологию равномерной сходимости на бикомпактах; определение см. в § 2). Ясно, в частности, что если $A$ — пространство, состоящее из трех точек, то $A \# X = X \vee X$ и $X^A = X \times X$; если $A$ — окружность, то $A \# X = \Sigma X$ и $X^A = \Omega X$. Функтор $\Omega_A$, сопоставляющий пространству $X$ пространство $X^A$, сопряжен в смысле Кана функтору $\Sigma_A$, сопоставляющему пространству $X$ пространство $A \# X$. Оказывается, что в некоторых широких предположениях этой парой сопряженность Кана и исчерпывается. Таким образом, функторы, сопоставляющие пространству $X$ пространства $\Sigma X \times \Sigma X$, $\Omega X \vee \Omega X$, $X * X$, $K(X, X)$

и многие другие, не имеют себе сопряженных в смысле Д. Кана, хотя и допускают дуализацию по Экману — Хилтону.

Намного более общее определение двойственности функторов содержится в заметке автора [15]. Основная идея состоит в том, чтобы рассматривать не все отображения пространств вида $SX$, где $S$ — некоторый функтор, а только «естественные».

Если $S$ и $T$ — два функтора и для любого пространства $X$ задано отображение $\varphi_X$: $SX \to TX$, то оно называется *естественным по* $X$, если для любого пространства $Y$ и отображения $f$: $X \to Y$ имеет место равенство $Tf \circ \varphi_X = \varphi_Y \circ Sf$, где $Sf$: $SX \to SY$ и $Tf$: $TX \to TY$ — отображения, входящие в определение функторов. Естественное по $X$ отображение $\varphi_X$: $SX \to TX$ иначе называется *отображением функтора* $S$ *в функтор* $T$. Для любых двух функторов $S$ и $T$ совокупность всех отображений функтора $S$ в функтор $T$ можно рассматривать как топологическое пространство с отмеченной точкой. Оно обозначается $\{S \to T\}$. Доказывается важное (хотя и очень простое) утверждение: $\{\Omega_A \to S\} = SA$; для любых функтора $S$ и пространства $A$ эта теорема была независимо получена автором [15] (предложение 1) и Хилтоном и Рисом [24] (лемма 1.1), которые доказали ее в несколько иной ситуации; она будет доказана и в настоящей статье (теорема 2.3). «Оператор двойственности» $D$, сопоставляющий функтору $S$ двойственный функтор $DS$, определяется сначала с помощью аксиом. А именно требуется, чтобы для любого пространства $A$ выполнялись равенства $D\Sigma_A = \Omega_A$, $D\Omega_A = \Sigma_A$ и для любых функторов $S$ и $T$ имел место гомеоморфизм $\{S \to DT\} = \{T \to DS\}$. Оказалось, что эти аксиомы определяют естественным образом оператор $D$, а именно, если $S$ — любой функтор, $A$ — любое пространство, то $DSA = \{S \to \Sigma_A\}$. В заметке [15] и в статье [17] были найдены двойственные функторы для многих функторов. Двойственны друг другу, например, функторы, сопоставляющие пространству $X$ пространства $X * X$ и $K(X, X)$.

Некоторые результаты, касающиеся двойственности «естественных гомотопических свойств двойственных функторов», получены А. С. Шварцем и автором [16].

Рассмотренная автором двойственность функторов в категории топологических пространств может быть перенесена на функторы, заданные в довольно широком классе категорий. Этот класс описан А. С. Шварцем [19]. В частности, содержательная двойственность получается для функторов в категории абелевых групп и в категории банаховых пространств. Последней посвящены работы [20] и [21] Шварца и Митягина.

Таким образом, двойственность Экмана — Хилтона оказывается тесно связанной с теорией функторов в категории топологических пространств с отмеченной точкой. Последующие параграфы посвящены этой теории. В § 2 даются основные определения, приводятся примеры и доказываются теоремы, не относящиеся непосредственно к двойственности. §§ 3—5 посвящены систематическому изложению теории двойственности для этих функторов. В § 6 рассматривается уже упоминавшееся понятие сопряженности функторов в смысле Д. Кана.

## § 2. Функторы в категории топологических пространств

**1.** Пусть $X$ — топологическое пространство.

Определение 2.1. Пространство $X$ называется *функционально-хаусдорфовым*, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ найдется непрерывная функция $f$ на $X$, принимающая действительные значения от нуля до единицы, такая, что $f(x)=0$ и $f(y)=1$.

Определение 2.2. Пространство $X$ называется *$k$-пространством*, если множество точек $U \subset X$ открыто в $X$ тогда и только тогда, когда пересечение $U \cap K$ множества $U$ с любым бикомпактом $K \subset X$ открыто в $K$.

Если $X$ — любое пространство, то можно следующим образом изменить его топологию, чтобы оно стало $k$-пространством. Множество $U \subset X$ назовем *$k$-открытым* в $X$, если пересечение $K \cap U$ множества $U$ с любым бикомпактом $K \subset X$ открыто в $K$. Ясно, что всякое множество, открытое в $X$, является и $k$-открытым в $X$. Совокупность $k$-открытых множеств определяет в $X$ новую топологию. Полученное топологическое пространство обозначим $X^*$. Естественное отображение $\tau$: $X^* \to X$ непрерывно и является гомеоморфизмом на всех бикомпактах. Если $f$: $X \to Y$ — отображение пространства $X$ в пространство $Y$ (не обязательно непрерывное), то индуцируется отображение $f^*$: $X^* \to Y^*$, которое непрерывно тогда и только тогда, когда отображение $f$ непрерывно на всех бикомпактах $K \subset X$.

Мы будем рассматривать категорию $C$ функционально-хаусдорфовых $k$-пространств с отмеченной точкой в качестве основной категории. Отмеченная точка будет обозначаться $*$ независимо от того, в каком пространстве она рассматривается. При этом мы будем считать, что любое пространство $X$ отождествляется с пространством $X^*$, любое отображение $f$: $X \to Y$ — с отображением $f^*$: $X^* \to Y^*$. Таким образом, любое функционально-хаусдорфово пространство определяет объект основной категории, любое отображение одного пространства в другое, непрерывное на всех бикомпактах первого, определяет морфизм основной категории. Поэтому в дальнейшем, рассматривая топологическое пространство $X$, мы, не оговаривая этого специально, имеем в виду пространство $X^*$.

Пусть $X$ и $Y$ — два пространства с отмеченными точками. Через $Y^X$ мы обозначим пространство непрерывных отображений пространства $X$ в пространство $Y$, переводящих отмеченную точку в отмеченную точку в компактно-открытой топологии. Через $X \# Y$ мы будем обозначать пространство, полученное из прямого произведения $X \times Y$ путем отождествления в одну (отмеченную) точку множества $X \times * \cup * \times Y$ (координатного креста этого произведения). Пусть $Z$ — любое пространство, $f$: $Z \to Y^X$ и $\varphi$: $X \# Z \to Y$ — отображения (переводящие отмеченную точку в отмеченную точку). Через $\alpha(f)$ мы обозначим отображение пространства $X \# Z$ в пространство $Y$, сопоставляющее точке $(x, z) \in X \# Z$ точку $[f(z)](x) \in Y$. Через $\beta(\varphi)$ мы обозначим отображение пространства $Z$ в пространство $Y^X$ такое, что $\alpha[\beta(\varphi)] = \varphi$. Ясно, что отображение $\beta(\varphi)$ определено однозначно и что $\beta[\alpha(f)] = f$. Хорошо известно (см., например, [23]), что если $X$ — локально бикомпактное пространство и все рассматриваемые пространства

хаусдорфовы, то взаимно обратные отображения $\alpha$ и $\beta$ устанавливают гомеоморфизмы $(Y^X)^Z = Y^{X\# Z}$. Оказывается что для $k$-пространств этот гомеоморфизм имеет место и без дополнительных предположений.

Предложение 2.1. *Пусть $X$, $Y$ и $Z$ — объекты категории $C$. Пространства $(((Y^X)^*)^Z)^*$ и $(Y^{(X\# Z)^*})^*$ гомеоморфны.*

Доказательство этого утверждения мало отличается от приведенного в цитированной выше книге. Оно содержится в [18].

Учитывая сделанные выше оговорки, можно сформулировать предложение 2.1 следующим образом.

Предложение 2.1′. *В категории $C$ имеет место равенство* $(Y^X)^Z = Y^{X\# Z}$.

В дальнейшем мы будем понимать под пространством и отображением соответственно объект и морфизм категории $C$.

2. Определение 2.3. Говорят, что задан ковариантный функтор $S$ в категории $C$ (или просто функтор $S$), если каждому пространству $X$ сопоставлено пространство $SX$ и каждому отображению $f$ пространства $X$ в пространство $Y$ сопоставлено отображение $Sf\colon SX \to SY$, причем выполняются следующие аксиомы.

S1. Если $f\colon X \to Y$ и $g\colon Y \to Z$ — отображения, то $S(g \circ f) = Sg \circ Sf$ (здесь $\circ$ означает композицию отображений).

S2. Если $e\colon X \to X$ — тождественное отображение пространства $X$, то $Se\colon SX \to SX$ есть тождественное отображение пространства $SX$.

S3. Если $X$ — одноточечное пространство, то $SX$ также одноточечное пространство.

S4. Сопоставление $f \to Sf$ определяет непрерывное отображение $X^Y \to (SX)^{SY}$.

Замечание. Из аксиом S1 и S3 следует, что если $\nu\colon X \to Y$ — тривиальное отображение, т. е. отображение, переводящее все пространство $X$ в отмеченную точку пространства $Y$, то $S_\nu\colon SX \to SY$ также тривиально.

Примеры. (Мы нигде не проверяем выполнения аксиом S1—S4, так как это не представляет труда ни для одного из следующих примеров.)

1°. Функтор, сопоставляющий каждому пространству $X$ это же пространство и каждому отображению $f\colon X \to Y$ это же отображение, называется тождественным. Функтор, который сопоставляет каждому пространству $X$ одноточечное пространство, называется тривиальным.

2°. Функтор $P_n$ $(n \geqslant 2)$ сопоставляет пространству $X$ прямое произведение $n$ экземпляров пространства $X$, отображению $f$ — прямое произведение $\underbrace{f \times f \times \ldots \times f}_{n}$. Обозначим также $P_2 = P$.

3°. Функтор $B_n$ $(n \geqslant 2)$ сопоставляет пространству $X$ букет $\underbrace{X \vee X \vee \ldots \vee X}_{n}$. Обозначим также $B_2 = B$.

4°. Функтор $\Sigma$ сопоставляет пространству $X$ надстройку над ним (см. стр. 6). Иначе говоря, $\Sigma X = X \# S^1$, где $S^1$ — окружность. Если $f\colon X \to Y$ — отображение, то отображение $\Sigma f\colon \Sigma X \to \Sigma Y$ сопоставляет точке $(x, t)$ точку $(f(x), t) \in \Sigma Y$.

Заметим, что если бы мы заменили наше определение обычным определением надстройки, т. е. не отождествляли бы точки ($*$, $t$), то мы не получили бы функтора, так как не выполнялась бы аксиома S3.

5°. Функтор $\Omega$ сопоставляет пространству $X$ пространство $\Omega X$ петель пространства $X$ с началом в точке $*$. Если дано отображение $f$: $X \to Y$, то каждой петле пространства $X$ отвечает петля пространства $Y$. Таким образом определяется отображение $\Omega f$: $\Omega X \to \Omega Y$.

6°. Пусть $A$ — произвольное пространство. Обозначим через $\Sigma_A$ функтор, сопоставляющий пространству $X$ пространство $A \# X$, отображению $f$: $X \to Y$ отображение $\Sigma_A f = e \# f$: $A \# X \to A \# Y$ (здесь $e$: $A \to A$ — тождественное отображение).

Заметим, что если $A$ — одноточечное пространство, то $\Sigma_A$ есть тривиальный функтор; если $A$ — пространство, состоящее из двух точек, то $\Sigma_A$ есть тождественный функтор; если $A$ — пространство, состоящее из $k$ изолированных точек ($k \geqslant 3$), то $\Sigma_A = B_{k-1}$; если же $A$ — окружность, то $\Sigma_A = \Sigma$.

7°. Пусть $A$ — произвольное пространство. Обозначим через $\Omega_A$ функтор, сопоставляющий пространству $X$ пространство $X^A$, отображению $f$: $X \to Y$ отображение $\Omega_A f$: $\Omega_A X \to \Omega_A Y$, относящее отображению $\varphi$: $A \to X$ композицию $f \circ \varphi$: $A \to Y$.

Заметим, что если $A$ — одноточечное пространство, то $\Omega_A$ есть тривиальный функтор; если $A$ — пространство, состоящее из двух точек, то $\Omega_A$ есть тождественный функтор; если $A$ — пространство, состоящее из $k$ изолированных точек ($k \geqslant 3$), то $\Omega_A = P_{k-1}$. Если же $A$ — окружность, то $\Omega_A = \Omega$.

Таким образом, все ранее перечисленные примеры оказываются частными случаями функторов $\Sigma_A$ и $\Omega_A$. Теперь мы приведем несколько примеров функторов, не сводящихся к этим двум.

8°. Если $S$ и $T$ — два функтора, то их композицией $S \circ T$ называется функтор, сопоставляющий пространству $X$ пространство $S(TX)$ и отображению $f$ отображение $S(Tf)$.

Предложение 2.2. *Имеют место равенства* $\Sigma_A \circ \Sigma_B = \Sigma_{A \# B}$ *и* $\Omega_A \circ \Omega_B = \Omega_{A \# B}$.

Первое из этих равенств очевидно, второе следует из предложения 2.1.

Легко привести пример функтора, который не сводится и к композиции функторов $\Sigma_A$ и $\Sigma_B$.

9°. Пусть $S$ и $T$ — два функтора. Через $S \times T$ обозначим функтор, сопоставляющий пространству $X$ пространство $SX \times TX$. Этот функтор назовем *прямым произведением функторов* $S$ и $T$. Аналогично определяются функторы $S_1 \times S_2 \times S_3$, $S \vee T$ и т. д.

10°. Через $J$ мы обозначим функтор, сопоставляющий пространству $X$ его соединение (join) с самим собой (см. стр. 8).

Аналогично примеру 9° можно определить функтор $S * T$, где $S$ и $T$ — функторы, и т. д.

Можно рассматривать еще функторы, сопоставляющие пространству $X$ пространство $X \# X$, $n$-ю симметрическую или циклическую степень $X$,

связную или линейно-связную компоненту его отмеченной точки, универсальное накрытие над ним и т. д.

3. Определение 2.4. Будем говорить, что задано отображение $\varphi\colon S \to T$ функтора $S$ в функтор $T$, если для каждого пространства $X$ задано отображение $\varphi_X\colon SX \to TX$ такое, что для любого отображения $f\colon X_1 \to X_2$, где $X_1$ и $X_2$ — любые пространства, диаграмма отображений

$$\begin{array}{ccc} SX_1 & \xrightarrow{\varphi_{X_1}} & TX_1 \\ {\scriptstyle Sf}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Tf} \\ SX_2 & \xrightarrow{\varphi_{X_2}} & TX_2 \end{array}$$

коммутативна.

11°. Очевидным образом определяются тождественное и тривиальное отображения функторов.

12°. Пусть $E$ — тождественный функтор, $\Sigma$ — функтор надстройки. Через $\varphi_X\colon X \to \Sigma X$, где $X$ — произвольное пространство, обозначим отображение, определенное по формуле $\varphi_X(x) = (x, t_0)$, где $t_0$ — фиксированное число $(0 \leqslant t_0 \leqslant 1)$. Получаем отображение $\varphi = \varphi^{(t_0)}\colon E \to \Sigma$.

13°. Пусть $f\colon A \to B$ — отображение. Естественным образом определяются отображения $f_0\colon \Sigma_A \to \Sigma_B$ и $f^0 : \Omega_B \to \Omega_A$.

14°. Пусть $A$ — любое пространство, $S$ — любой функтор, $\alpha \in SA$ — точка. Отображение $\eta_\alpha\colon \Omega_A \to S$ мы определим по формуле $(\eta_\alpha)_X f = Sf(\alpha)$, где $X$ — любое пространство, $f\colon A \to X$ — отображение, т. е. элемент пространства $\Omega_A X$, $Sf\colon SA \to SX$ — отображение, существующее согласно определению функтора.

Пусть $S$ и $T$ — два функтора. Вообще говоря, рассмотрение множества всех отображений функтора $S$ в функтор $T$ может привести к теоретико-множественным парадоксам. Мы докажем (предложение 2.3), что при выполнении некоторых условий это исключено и множество отображений одного функтора в другой определено корректно. Пока мы это предполагаем.

Итак, предположим, что совокупность всех отображений функтора $S$ в функтор $T$ образует множество. Обозначим его $\{SX \to TX\}_X$ или коротко $\{S \to T\}$. В множестве $\{S \to T\}$ мы определим топологию следующим образом. Пусть $X$ — пространство. Рассмотрим отображение $\alpha(X)\colon \{S \to T\} \to TX, SX$, определенное формулой $[\alpha(X)]_\varphi = \varphi_X$. Топология, которую мы определяем в $\{S \to T\}$, будет сильнейшей из топологий, в которой все отображения $\alpha(X)$ непрерывны. Иными словами, базис открытых множеств в пространстве $\{S \to T\}$ составляют конечные пересечения полных прообразов открытых множеств из пространств $TX^{SX}$ при отображениях $\alpha(X)$ для всех пространств $X$.

Рассмотрим, например, пространство $\{X \to \Sigma X\}_X$ (см. пример 12°). Можно доказать (это будет следовать из теоремы 2.3), что отображения функтора $E$ в функтор $\Sigma$ — это отображения $\varphi(t_0)$ и только они. Ясно, что $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$ — тривиальные отображения, а все остальные отображения $E \to \Sigma$ различны. Поэтому точки пространства $\{E \to \Sigma\}$ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками окружности. Оказывается (теорема 2.3),

что и топология в этом пространстве такая же, как и на окружности, т. е. $\{X \to \Sigma X\}_X = S^1$.

Теперь докажем, что при выполнении некоторых условий рассмотрение множества $\{S \to T\}$ корректно. Очевидно, для этого достаточно оценить мощность этого множества.

Определение 2.5. Будем говорить, что функтор $S$ удовлетворяет аксиоме $(\mathfrak{M}_i)$, если существует мощность $\mathfrak{M}$ такая, что для любой точки $y \in SY$, где $Y$ — любое пространство, найдутся пространство $X$ мощности не более $\mathfrak{M}$, точка $x \in SX$ и отображение $f\colon X \to Y$ такие, что $Sf(x) = y$.

Определение 2.6. Будем говорить, что функтор $S$ удовлетворяет аксиоме $(\mathfrak{M}_p)$, если существует мощность $\mathfrak{M}$ такая, что для любых двух различных точек $y_1, y_2 \in Y$, где $Y$ — любое пространство, найдутся пространство $X$ мощности не более $\mathfrak{M}$ и отображение $f\colon Y \to X$ такие, что $Sf(y_1) \neq Sf(y_2)$.

Предложение 2.3. *Если функтор $S$ удовлетворяет аксиоме $(\mathfrak{M}_i)$ или функтор $T$ удовлетворяет аксиоме $(\mathfrak{M}_p)$, то определено множество отображений функтора $S$ в функтор $T$.*

Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма 2.1. *Пусть $S$ и $T$ — функторы из предложения 2.3, $\varphi'\colon S \to T$ и $\varphi''\colon S \to T$ — два разных отображения. Существует пространство $X$ мощности не выше $\mathfrak{M}$ такое, что $\varphi'_X$ и $\varphi''_X$ представляют собой различные отображения.*

Из этой леммы следует наше утверждение.

В самом деле, сопоставим каждому отображению $\varphi\colon S \to T$ набор отображений $\{\varphi_X\}_{X\in A}$, где $A$ — множество всех топологий, которые можно задать на множестве мощности $\mathfrak{M}$. Тогда разным отображениям, согласно лемме, соответствуют разные наборы. В то же время ясно, что такие наборы образуют множество.

Доказательство леммы. Поскольку отображения $\varphi'$ и $\varphi''$ различны, существуют пространство $Y$ и точка $y \in SY$ такие, что $\varphi'_Y(y) \neq \neq \varphi''_Y(y)$. Если функтор $S$ удовлетворяет аксиоме $(\mathfrak{M}_i)$, то существуют пространство $X$ мощности не выше $\mathfrak{M}$, точка $x \in SX$ и отображение $f\colon X \to Y$ такие, что $Sf(x) = y$. Но тогда $\varphi'_X(x) \neq \varphi''_X(x)$, так как $\varphi'_X(x) = \varphi'_Y Sf(x)$ и $\varphi''_X(x) = \varphi''_Y Sf(x)$. Следовательно, $\varphi'_X \neq \varphi''_X$.

Если же функтор $T$ удовлетворяет аксиоме $(\mathfrak{M}_p)$, то существуют пространство $X$ мощности не выше $\mathfrak{M}$ и отображение $f\colon Y \to X$ такие, что $Tf(\varphi'_Y(y)) \neq Tf(\varphi''_Y(y))$. Но $Tf(\varphi'_Y(y)) = \varphi'_X Sf(y)$ и $Tf(\varphi''_Y(y)) = \varphi''_X Sf(y)$. Следовательно, $\varphi'_X Sf(y) \neq \varphi''_X Sf(y)$ и $\varphi'_X \neq \varphi''_X$. Лемма доказана.

Заметим что функторы $\Omega_A$ и $\Sigma_A$ удовлетворяют как той, так и другой аксиоме. Для функтора $\Omega_A$ аксиома $(\mathfrak{M}_i)$ выполняется, если в качестве $X$ брать пространство $A$, аксиома $(\mathfrak{M}_p)$ — если за $X$ взять отрезок. Для функтора $\Sigma_A$ за $X$ нужно брать соответственно двоеточие и отрезок.

Сформулируем для удобства ссылок следующее утверждение.

Предложение 2.4. *Пусть $A$ — любое пространство, $S$ — любой функтор, $I$ — отрезок, $\varphi'\colon S \to \Sigma_A$ и $\varphi''\colon S \to \Sigma_A$ — различные отображения. Тогда отображения $\varphi'_I$ и $\varphi''_I$ различны.*

4. Этот пункт посвящен доказательству трех важных для дальнейшего теорем.

Теорема 2.1. *Для любых функторов $S$ и $T$ таких, что определены пространство $\{S \to T\}$ и пространства $A$, справедливо равенство* $\{\Sigma_A S \to T\} = \{S \to \Omega_A T\} = \Omega_A \{S \to T\}$.

Доказательство. Мы построим отображения $f_1$: $\{\Sigma_A S \to T\} \to \{S \to \Omega_A T\}$, $f_2$: $\{S \to \Omega_A T\} \to \Omega_A \{S \to T\}$, $f_3$: $\Omega_A \{S \to T\} \to \{\Sigma_A S \to T\}$ и покажем, что $f_3 \circ f_2 \circ f_1 = e$, $f_2 \circ f_1 \circ f_3 = e$, $f_1 \circ f_3 \circ f_2 = e$, где $e$ означает тождественное отображение. Теорема тем самым будет доказана.

Отображение $f_1$ сопоставляет элементу $\varphi \in \{\Sigma_A S \to T\}$ элемент $f_1(\varphi) \in \{S \to \Omega_A T\}$, определенный по формуле $[(f_1(\varphi))_X x](a) = \varphi_X(a, x)$, где $X$ — любое пространство, $x \in SX$ и $a \in A$ — любые точки. Для того чтобы доказать его непрерывность, достаточно показать, что для любого пространства $C$ композиция $\{\Sigma_A S \to T\} \xrightarrow{f_1} \{S \to \Omega_A T\} \xrightarrow{\alpha(C)} (\Omega_A TC)^{SC} = ((TC)^A)^{SC}$ непрерывна. Но эта композиция совпадает с композицией $\{\Sigma_A S \to T\} \xrightarrow{\alpha(C)} (TC)^{A\#SC} \to ((TC)^A)^{SC}$, где первое отображение есть $\alpha(C)$, второе совпадает с отображением $\beta$ из п. 1.

Отображение $f_2$ сопоставляет элементу $\varphi \in \{S \to \Omega_A T\}$ такой элемент $f_2\varphi \in \Omega_A \{S \to T\}$, что $[f_2\varphi(a)]_X x = [\varphi_X x]\, a$, где $X$ — любое пространство, $a \in A$, $x \in SX$ — любые точки.

Отображение $f_3$ определено формулой $(f_3(\varphi))_X(a, x) = [\varphi(a)]_X x$, где $\varphi \in \Omega_A \{S \to T\}$, $X$ — любое пространство, $a \in A$, $x \in SX$ — любые точки.

Непрерывность отображений $f_2$ и $f_3$ доказывается так же, как и непрерывность отображения $f_1$.

Равенства $f_3 \circ f_2 \circ f_1 = e$, $f_2 \circ f_1 \circ f_3 = e$ и $f_1 \circ f_3 \circ f_2 = e$ доказываются непосредственно. Например, $[(f_3 \circ f_2 \circ f_1)\varphi]_X(a, x) = [((f_1 \circ f_2)\varphi)\, a]_X(x) = [(f_1(\varphi))_X x]\, a = \varphi_X(a, x)$, т. е. $f_3 \circ f_2 \circ f_1 = e$. Аналогично доказываются и два других требуемых равенства.

Теорема доказана.

Теорема 2.2. *Для любых пространств $A$ и функторов $S$ и $T$ имеет место равенство* $\{S\Omega_A \to T\} = \{S \to T\Sigma_A\}$.

Доказательство. Отображение $f$: $\{S\Omega_A \to T\} \to \{S \to T\Sigma_A\}$ строится как композиция

$$\{S\Omega_A \to T\} \to \{S\Omega_A\Sigma_A \to T\Sigma_A\} \to \{S \to T\Sigma_A\},$$

где второе из отображений индуцировано отображением $i_X$: $X \to \Omega_A\Sigma_A X$, определенным для любого пространства $X$, естественным по $X$, заданным формулой $[i_X(x)]\, a = (a, x)$, где $a \in A$, $x \in X$ — точки. Обратное отображение $f'$: $\{S \to T\Sigma_A\} \to \{S\Omega_A \to T\}$ строится как композиция

$$\{S \to T\Sigma_A\} \to \{S\Omega_A \to T\Sigma_A\Omega_A\} \to \{S\Omega_A \to T\},$$

где второе отображение определено с помощью естественного по $X$ отображения $p_X$: $\Sigma_A\Omega_A X \to X$, заданного формулой $p_X(a, f) = f(a)$, где $a \in A$, $f \in \Omega_A X = X^A$ — точки. Докажем взаимную обратность отображений $f$ и $f'$.

Эти отображения могут быть заданы формулами

$$[f(\varphi)]_X(\xi) = \varphi_{A\#X}(S(i_X))\,\xi,$$
$$[f'(\psi)]_X(\eta) = (T(p_X))\,\psi_{X^A}\eta,$$

где $X$ — любое пространство, $\varphi$: $S\Omega_A \to T$, $\psi$: $S \to T\Sigma_A$ — любые отображения, $\xi \in SX$, $\eta \in S\Omega_A X$ — любые элементы. Имеем

$$[ff'(\psi)]_X\,\xi = [f'(\psi)]_{A\#X}(S(i_X))\,\xi = T(p_{A\#X}) \circ \psi_{(A\#X)^A}(S(i_X))\,\xi =$$
$$= [T(p_{A\#X})] \circ [T\Sigma_A(i_X)]\,\psi_X\xi = T(p_{A\#X} \circ \Sigma_A i_X)\,\psi_X\xi = \psi_X\xi.$$

Здесь первые два равенства следуют из определения отображений $f$ и $f'$, третье — из определения отображения функторов, последнее — из того, что композиция $p_{A\#X} \circ \Sigma_A i_X$ тождественна. Аналогично

$$[f'f(\varphi)]_X(\eta) = [T(p_X)]\,(f(\varphi))_{X^A}(\eta) = [T(p_X)]\,(\varphi_{A\#(X^A)}(S(i_{X^A})\,\eta)) =$$
$$= \varphi_X[S\Omega_A(p_X)] \circ [S(i_{X^A})]\,\eta = \varphi_X S(\Omega_A p_X \circ i_{X^A})\,\eta = \varphi_X\eta.$$

Теорема доказана.

Теорема 2.3. *Для любого пространства $A$ и функтора $S$ имеет место равенство* $\{\Omega_A \to S\} = SA$.

Доказательство. Взаимно обратные отображения $\lambda$: $\{\Omega_A \to S\} = SA$ и $\mu$: $SA \to \{\Omega_A \to S\}$ строятся следующим образом. Отображение $\lambda$ сопоставляет элементу $\varphi \in \{\Omega_A \to S\}$ точку $\varphi_A(e) \in SA$, где $e \in \Omega_A A$ — тождественное отображение. Это отображение непрерывно, так как оно является композицией двух непрерывных отображений: отображения $\alpha(A)$: $\{\Omega_A \to S\} \to SA^{\Omega_A A}$, непрерывного по определению пространства отображений функтора в функтор, и отображения $SA^{\Omega_A A} \to SA$, сопоставляющего отображению $g$: $\Omega_A A \to SA$ точку $g(e) \in A$; непрерывность последнего отображения очевидна.

Отображение $\mu$: $SA \to \{\Omega_A \to S\}$ сопоставляет точке $\alpha \in SA$ отображение $\eta_\alpha$: $\Omega_A \to S$, определенное формулой $(\eta_\alpha)_X f = Sf(\alpha)$, где $X$ — любое пространство, $f \in \Omega_A X$ — любой элемент, $Sf$: $SA \to SX$ — отображение, существующее по определению функтора. Для того чтобы доказать, что отображение $\mu$ непрерывно, достаточно доказать, что его композиция с отображением $\alpha(X)$: $\{\Omega_A \to S\} \to SX^{\Omega_A X}$ непрерывна для любого пространства $X$. Эта композиция представляет собой отображение $g$: $SA \to (SX)^{X^A}$, действующее по формуле $[g(\alpha)]\,f = Sf(\alpha)$, где $\alpha \in SA$, $f \in X^A$ — точки. Если применить к этому отображению преобразование $\alpha$ из п. 1, затем поменять местами сомножители в $SA \# X^A$ и затем к отображению $\alpha(g)$ применить преобразование $\beta$ из п. 1, то получится отображение $X^A \to SX^{SA}$, непрерывное согласно аксиоме S4.

Остается показать, что отображения $\lambda$ и $\mu$ взаимнообратны. Согласно аксиоме S2, $\lambda\mu(\alpha) = [\mu(\alpha)]_A e = Se(\alpha) = \alpha$. Далее, для любого пространства $X$ и точки $f \in \Omega_A X$ имеем

$$[\mu\lambda(\varphi)]_X(f) = Sf(\lambda(\varphi)) = Sf(\varphi_A(e)) = \varphi_X([\Omega_A f]\,e) = \varphi_X f.$$

Здесь мы пользовались определением отображения функторов, а также тем, что $[\Omega_A f]\,e = f \circ e = f$. Теорема доказана.

В частном случае, когда $A = \Gamma$ — пространство, состоящее из двух изолированных точек, а $S = \Sigma$, мы получаем классификацию отображений тождественного функтора $E$ в функтор надстройки $\Sigma$: $\{E \to \Sigma\} = \{\Omega_\Gamma \to \Sigma\} = \Sigma(\Gamma) = S^1$ (см. стр. 15).

Рассмотрим теперь пространства $\{\Sigma_A \to \Sigma_B\}$ и $\{\Omega_A \to \Omega_B\}$, где $A$ и $B$ — любые пространства. В примере 13° указывалось, что отображение $f$: $A \to B$ индуцирует отображения $f_0$: $\Sigma_A \to \Sigma_B$ и $f^0$: $\Omega_B \to \Omega_A$. Теперь мы можем заключить, что других отображений $\Sigma_A \to \Sigma_B$ и $\Omega_B \to \Omega_A$ не существует и, более того, $\{\Sigma_A \to \Sigma_B\} = B^A$ и $\{\Omega_A \to \Omega_B\} = A^B$. Второе следует непосредственно из теоремы 2.3: $\{\Omega_A \to \Omega_B\} = \Omega_B A = A^B$. Первое получается, если к пространству $\{\Sigma_A \to \Sigma_B\}$ применить сначала теорему 2.1, а потом теорему 2.3:

$$\{\Sigma_A \to \Sigma_B\} = \{\Sigma_A E \to \Sigma_B\} = \{E \to \Omega_A \Sigma_B\} = \{\Omega_\Gamma \to \Omega_A \Sigma_B\} = \\ = \Omega_A \Sigma_B \Gamma = \Omega_A (B \# \Gamma) = \Omega_A B = B^A.$$

## § 3. Двойственность функторов

**1.** Как уже говорилось в § 1, мы ставим своей целью сопоставить каждому функтору $S$ функтор $DS$, двойственный функтору $S$ в смысле Экмана — Хилтона. Последнее нуждается в разъяснении, так как выражение «двойственно в смысле Экмана — Хилтона» не имеет точного смысла.

Прежде всего заметим, что взаимно двойственными в смысле Экмана — Хилтона являются функторы $\Sigma$ и $\Omega$, $B_k$ и $P_k$. Поэтому первая аксиома, которую мы наложим на оператор $D$, состоит в том, что для любого пространства $A$ выполнены равенства $D\Sigma_A = \Omega_A$ и $D\Omega_A = \Sigma_A$. Вторая аксиома, которую мы сформулируем, вытекает из того, что двойственность Экмана — Хилтона устанавливает соответствие между естественными отображениями двойственных функторов, причем исходное и двойственное отображения «направлены в противоположные стороны».

Определение 3.1 [1]). Говорят, что задан оператор двойственности функторов в категории топологических пространств с отмеченной точкой, если каждому функтору $S$ сопоставлен функтор $DS$ и каждому отображению $\varphi$: $S \to T$ функтора $S$ в функтор $T$ сопоставлено естественное отображение $D\varphi$: $DT \to DS$, причем если $\varphi_1$: $S_1 \to S_2$ и $\varphi_2$: $S_2 \to S_3$ — отображения, то $D(\varphi_2 \circ \varphi_1) = D\varphi_1 \circ D\varphi_2$ [2]) и выполнены следующие аксиомы.

---

[1]) В статье [15] определение двойственности давалось не аксиоматически, а непосредственно с помощью конструкции $DSA = \{S \to \Sigma_A\}$. Аксиоматическое определение этой двойственности было предложено также Накагава [25], который доказал, что двойственность, определенная автором в статье [15], является единственной, удовлетворяющей его системе аксиом. Впрочем, в работе Накагава имеется ошибка (см. сноску [2]) на стр. 22).

[2]) Все это можно сказать кратко: $D$ — контравариантный функтор в категории функторов в категории топологических пространств с отмеченной точкой.

D1. Для любого пространства $A$ (естественно по $A$) имеют место равенства

$$D\Sigma_A = \Omega_A, \tag{3.1}$$

$$D\Omega_A = \Sigma_A. \tag{3.2}$$

D2. Пусть $S$ и $T$ — любые функторы. Существует взаимнооднозначное соответствие между отображениями функтора $S$ в функтор $DT$ и отображениями функтора $T$ в функтор $DS$. Это соответствие естественно по $S$ и $T$[1]), и если определены пространства $\{S \to DT\}$ и $\{T \to DS\}$, то оно устанавливает гомеоморфизм между ними.

Теперь мы докажем основную теорему.

Теорема 3.1. *Оператор двойственности $D$ существует и единствен. Если $S$ — любой функтор, то функтор $DS$ сопоставляет пространству $A$ пространство $DSA = \{S \to \Sigma_A\}$, отображению $f$: $B \to C$ отображение $\{S \to \Sigma_B\} \to \{S \to \Sigma_C\}$, переводящее элемент $\varphi \in \{S \to \Sigma_B\}$ в элемент $f_0 \circ \varphi \in \in \{S \to \Sigma_C\}$.*

Доказательство. Пусть оператор двойственности $D$ существует. Тогда согласно аксиоме D2 имеет место равенство $\{\Omega_A \to DS\} = \{S \to D\Omega_A\}$. В силу аксиомы D1 и теоремы 2.3 отсюда следует, что $DSA = \{S \to \Sigma_A\}$. Из естественности равенства $\{S \to DT\} = \{T \to DS\}$ следует, что отображение $DSf$: $DSB \to DSC$, соответствующее отображению $f$: $B \to C$, устроено так, как указано в утверждении теоремы.

Покажем теперь, что оператор $D$, сопоставляющий функтору $S$ функтор $DS$, как указано выше, удовлетворяет определению 3.1. Действительно, $D$ есть контравариантный функтор. В самом деле, если $\varphi$: $S \to T$ — отображение функтора $S$ в функтор $T$, то отображение $D\varphi$: $DT \to DS$ определено по формуле $(D\varphi)_X \eta = \varphi \circ \eta$, где $X$ — произвольное пространство, $\eta \in DTX = \{T \to \Sigma_X\}$ — любой элемент.

Проверим теперь выполнение аксиом. Равенство $\{\Sigma_A \to \Sigma_B\} = \Omega_A B$, доказанное в конце предыдущего параграфа, означает, что $D\Sigma_A = \Omega_A$. Из теоремы 2.3 вытекает, что $D\Omega_A B = \{\Omega_A \to \Sigma_B\} = \Sigma_B A = \Sigma_A B$, т. е. $D\Omega_A = \Sigma_A$.

Для доказательства второй аксиомы мы определим для произвольных функторов $S$ и $T$ отображение $\varrho$: $\{S \to DT\} \to \{T \to DS\}$ (т. е. $\varrho$: $\{SY \to \to \{TX \to X \# Y\}_X\}_Y \to \{TX \to \{SY \to X \# Y\}_Y\}_X$) формулой $[(\varrho(\varphi))_X x]_Y y = = [\varphi_Y y]_X x$, где $x \in TX$, $y \in TY$ — точки. Ясно, что отображения $\varrho$ и $\varrho'$: $\{T \to DS\} \to \{S \to DT\}$ (отображение, которое строится так же, как и $\varrho$) взаимно обратны.

Теорема доказана.

Укажем, как устроены отображения некоторых конкретных функторов в функтор $\Sigma_A$. Нам известны равенства $\{X \to X \# Y\}_X = Y$ и

---

[1]) Иными словами, если $\varphi$: $S_1 \to S_2$, $\psi$: $T_1 \to T_2$ — любые отображения, $D\varphi$: $DS_2 \to DS_1$, $D\psi$: $DT_2 \to DT_1$ — отображения, определенные в силу контравариантности функтора $D$, и отображения $\alpha$: $S_2 \to DT_2$ и $\beta$: $T_2 \to DS_2$ соответствуют друг другу при указанном соответствии, то отображения $D\psi \circ \alpha \circ \varphi$ и $D\varphi \circ \beta \circ \psi$ также соответствуют друг другу при этом соответствии.

$\{X\times X\to X\#Y\}_X=Y\vee Y$ (они представляют собой частные случаи теоремы 2.3). Естественные по $X$ отображения $X\to X\#Y$ устроены следующим образом. Фиксируется точка $y\in Y$. Отображение $\varphi_X^{(y)}\colon X\to X\#Y$ сопоставляет точке $x\in X$ точку $(x, y)\in X\#Y$. Такие отображения для всех точек $y\in Y$ исчерпывают пространство $\{X\to X\#Y\}_X$. Естественное отображение $X\times X\to X\#Y$ представляет собой композицию проекции произведения $X\times X$ на один из сомножителей и отображения $\varphi_X^{(y)}$. Таким образом, естественные отображения $X\times X\to X\#Y$ находятся во взаимно однозначном соответствии с парами $(n, y)$, где $y\in Y$, $n=1$, 2, причем $(1, *)=(2, *)$. Это соответствует равенству $\{X\times X\to X\#Y\}_X=Y\vee Y$.

**2.** Выясним теперь связь между функторами $S$ и $DDS$. Согласно аксиоме D2 существует естественный гомеоморфизм $\{DS\to DS\}=$ $=\{S\to DDS\}$. Отображение $S\to DDS$, соответствующее при этом гомеоморфизме тождественному отображению $DS\to DS$, мы обозначим $\varkappa^S$ или просто $\varkappa$. Отображение $\varkappa^S$ можно определить также как естественное по $X$ отображение

$$\varkappa_X^S\colon SX\to\{\{SZ\to Z\#Y_Z\}\to X\#Y\}_Y,$$

действующее по формуле $[\varkappa_X^S(x)]\varphi=\varphi_X(x)$, где $X$ — любое пространство, $x\in SX$ — точка, $\varphi\colon S\to\Sigma_Y$ — отображение.

Определение 3.2. Если отображение $\varkappa^S$ устанавливает эквивалентность[1]) функторов $S$ и $DDS$, то функтор называется *рефлексивным.*

Примерами рефлексивных функторов являются, прежде всего, функторы $\Sigma_A$ и $\Omega_A$ для любого пространства $A$. На самом же деле почти все функторы, определенные в примерах 1°—10° § 2, рефлексивны. Однако для всех этих функторов (кроме функторов $\Sigma_A$ и $\Omega_A$) доказательства их рефлексивности в большей или меньшей степени сложны. Гораздо проще бывает убедиться в том, что какой-либо функтор не является рефлексивным.

Примеры нерефлексивных функторов. 1°. Рассмотрим функтор, сопоставляющий пространству $X$ пространство $X\#X$, отображению $f\colon X\to Y$ отображение $f\#f\colon X\#X\to Y\#Y$. Мы покажем, что функтор, двойственный к этому функтору, тривиален и, следовательно, исходный функтор нерефлексивен.

Мы должны показать, что для любого пространства $C$ любое отображение $\varphi_X\colon X\#X\to C\#X$, естественное по $X$, тривиально. Рассмотрим отображение $\tilde\varphi_X\colon X\times X\to C\#X$, которое является композицией проекции $\pi\colon X\times X\to X\#X$ и отображения $\varphi_X$. Это отображение естественно по $X$ и тривиально на координатном кресте произведения $X\times X$. Но согласно сделанному выше замечанию отображение $\tilde\varphi_X$ есть в то же время композиция проекции произведения $X\times X$ на один из сомножителей и естественного отображения $X\to C\#X$. Поэтому из его тривиальности на координатном кресте вытекает его тривиальность на всем пространстве $X\times X$. Следовательно, и отображение $\varphi_X$ тривиально.

---

[1]) Отображение $\varphi\colon S\to T$ называется *эквивалентностью* функторов $S$ и $T$, если для любого пространства $X$ отображение $\varphi_X$ является гомеоморфизмом.

2°. Рассмотрим функтор $T_3$, сопоставляющий пространству $X$ подпространство $T_3X$ пространства $X\times X\times X$, состоящее из троек $(x, y, z)$ таких, что либо $x=*$, либо $y=*$, либо $z=*$. Мы покажем, что всякое естественное по $X$ отображение $\varphi_X$: $T_3X\to C\#X$ может быть единственным образом продолжено до естественного по $X$ отображения $\varphi'_X$: $X\times X\times X\to C\#X$. Для доказательства рассмотрим три отображения $f^i_X$: $X\times X\to T_3X$ $(i=1, 2, 3)$, естественные по $X$, определенные равенствами: $f^1_X(x, y)=(x, y, *)$, $f^2_X(x, y)=(y, *, x)$, $f^3_X(x, y)=(*, x, y)$.

Рассмотрим композиции $\varphi_Xf^1_X$, $\varphi_Xf^2_X$ и $\varphi_Xf^3_X$. Они являются естественными отображениями $X\times X\to X\#C$, причем $\varphi_Xf^1_X(x,*)=\varphi_Xf^2_X(*, x)$, $\varphi_Xf^2_X(x,*)=\varphi_Xf^3_X(*, x)$, $\varphi_Xf^3_X(x, *)=\varphi_Xf^1_X(*, x)$. Если все эти отображения тривиальны, то и $\varphi_X$ тривиально и продолжается до тривиального отображения $\varphi'_X$. Пусть для определенности отображение $\varphi_Xf^1_X$ нетривиально. Но тогда оно представляет собой композицию проекции произведения $X\times X$ на один из сомножителей (для определенности на первый) и нетривиального отображения $\alpha_X$: $X\to X\#C$, естественного по $X$. Отсюда $\varphi_Xf^1_X(*, x)=*$, а следовательно, и $\varphi_Xf^3_X(x, *)=*$. В то же время $\varphi_Xf^2_X(*, x)=\varphi_Xf^1_X(x, *)=\alpha(X)$. Отсюда отображение $\varphi_Xf^2_X$ есть композиция проекции произведения $X\times X$ на второй сомножитель и отображения $\alpha_X$ (мы снова пользуемся тем, что нам известны все естественные по $X$ отображения $X\times X\to X\#C$). Далее, $\varphi_Xf^2_X(x, *)=*$, а отсюда и $\varphi_Xf^3_X(*, x)=*$, т. е. отображение $\varphi_Xf^3_X$ тривиально.

Теперь отображение $\varphi_X$ полностью вычислено. Оно есть ограничение на $T_3X$ отображения $\varphi'_X$: $X\times X\times X\to X\#C$, равного композиции проекции произведения $X\times X\times X$ на первый сомножитель и отображения $\alpha_X$.

Таким образом, функторы $DT_3$ и $DP_3$ совпадают, откуда $DDT_3=DDP_3=P_3=T_3$, т. е. $T_3$ — нерефлексивный функтор.

3°. Рассмотрим функтор $E'$, сопоставляющий пространству $X$ линейно-связную компоненту его отмеченной точки. Мы покажем, что $DE'=E$ (тождественный функтор). Рассмотрим естественное по $X$ отображение $\varphi_X$: $X'\to C\#X$, где $X'$ — линейно-связная компонента отмеченной точки пространства $X$, $C$ — некоторое пространство. Пусть $I$ — отрезок $[0, 1]$ с отмеченной точкой $O$. Очевидно, $\Omega_IX'=\Omega_IX$. Отображение $\widetilde{\varphi}_X$: $\Omega_IX\to C\#X$ мы определим равенством

$$\widetilde{\varphi}_X(f)=\varphi_X(f(1)), \tag{3.3}$$

где $f$ — произвольный элемент пространства $\Omega_IX$, т. е. путь в пространстве $X$ с началом в отмеченной точке.

Полученное отображение $\widetilde{\varphi}_X$ естественно по $X$, и согласно замечанию к теореме 2.3 существует единственная пара $(t, \varphi')$, где $t\in I$ — точка и $\varphi'$: $E\to\Sigma_C$ — отображение функторов, такая, что $\widetilde{\varphi}_X(f)=\varphi'_X(f(t))$. Наряду с формулой (3.3) это означает, что $t=1$ и отображение $\varphi$: $E^{-1}\to\Sigma_C$ допускает единственное продолжение до отображения $\varphi'$: $E\to\Sigma_C$. Мы получаем, что $DE'=DE=E$.

Можно было бы показать, что ни один функтор из перечисленных в конце п. 2 § 2 не является рефлексивным.

**3.** Пусть $S$ — произвольный функтор. Рассмотрим отображения

$$\varkappa^{DS}\colon DS \to DDDS,$$
$$D\varkappa^{S}\colon DDDS \to DS.$$

Эти отображения естественны по $S$ [1]). Их можно следующим образом записать с помощью формул. Отображение $\varkappa_X^{DS}\colon \{SU \to U \# X\}_U \to \to \{\{\{SY \to Y \# Z\}_Y \to Z \# V\}_Z \to V \# X\} X$ действует по формуле $(\varkappa_X^{DS}\alpha)_V\beta = \beta_X\alpha$, где $\alpha \in \{SU - U \# X\}_U$, $\beta \in \{\{SY \to Y \# Z\}_Y \to Z \# U\}_Z$ — любые точки. Отображение

$$(D\varkappa^S)_X\colon \{\{\{SY \to Y \# Z\}_Y \to Z \# V\}_Z \to V \# X\}_V \to \{SU \to U \# X\}_U$$

действует по формуле $[(D\varkappa^S)_X\alpha]_Y\, y = \alpha_Y(\varkappa_Y^S y)$, где $\alpha \in \{\{\{SY \to Y \# Z\}_Y \to \to Z \# V\}_Z \to V \# X\}_V$, $y \in SY$ — любые точки.

Легко доказывается следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Отображение $D\varkappa^S \circ \varkappa^{DS}\colon DS \to DS$ тождественно для любого функтора $S$.*

В самом деле, пусть $\alpha \in DSX = \{SU \to U \# X\}_U$. Имеем $[D\varkappa_X^S \circ \varkappa_X^{DS}(\alpha)]_U x = = \varkappa_X^{DS}\alpha_U(\varkappa_U^S x) = [\varkappa_U^S(x)]_X\,\alpha = \alpha_U(x)$, где $U$ и $X$ — произвольные пространства, $x \in SU$ — произвольная точка. Предложение доказано.

Однако тождественность отображения $\varkappa^{DS} \circ D\varkappa^S$, $DDDS \to DDDS$ доказать не удается [2]).

Из доказанного вытекает, в частности, что для любых функтора $S$ и пространства $X$ отображение $\varkappa_X^{DS}$ является вложением, а отображение $(D\varkappa^S)_X$ является отображением на все пространство $DSX$. Иными словами, пространство $DSX$, если его рассматривать как подпространство пространства $DDDSX$, является ретрактом этого пространства.

Определение 3.3. Функтор $S$ назовем *правильным*, если отображение $\varkappa^{DS}\colon DS \to DDDS$ является эквивалентностью функторов.

Все функторы, которые рассматривались выше, были правильными. Примеров неправильных функторов автору неизвестно.

Предложение 3.2. *Если отображение $\varkappa^{DDS}\colon DDS \to DDDDS$ является эквивалентностью функторов, то и отображение $\varkappa^{DS} \circ D\varkappa^S\colon DDDS \to DDDS$ является эквивалентностью функторов.*

---

[1]) То есть если $S$ и $T$ — два функтора, $\varphi\colon S \to T$ — отображение, то диаграммы

$$\begin{tikzcd} DS \arrow[r, "\varkappa^{DS}"] & DDDS \\ DT \arrow[u, "D\varphi"] \arrow[r, "\varkappa^{DT}"] & DDDT \arrow[u, "DDD\varphi"'] \end{tikzcd}, \qquad \begin{tikzcd} DDDS \arrow[r, "D\varkappa^{S}"] & DS \\ DDDT \arrow[u, "DDD\varphi"] \arrow[r, "D\varkappa^{T}"] & DT \arrow[u] \end{tikzcd}$$

коммутативны.

[2]) В заметке [15] имеется ошибка: теорема 1, которая утверждает равенство $DS = = DDDS$ для любого функтора $S$, не доказана. Верна ли эта теорема, автору неизвестно.

Ошибочно и доказательство этого утверждения у Накагава [25]. Для функторов в категории множеств с отмеченным элементом, где действительность определяется аналогичным образом, равенство $DS = DDDS$ доказал Кузнецов [26].

Доказательство. В пространстве $\{DDDS \to DDDS\}$ рассмотрим два элемента: тождественное отображение $e$ и композицию $f = \varkappa^{DS_0} \circ D\varkappa^S$. Нужно доказать, что при сделанных предположениях отображения $e$ и $f$ совпадают (вместе с предложением 3.1 это будет означать совпадение функторов $DS$ и $DDDS$ и тождественность отображения $\varkappa^{DS}$). При гомеоморфизме $\varrho$: $\{DDDS \to DDDS\} \to \{DDS \to DDDS\}$ эти отображения переходят соответственно в $\varkappa^{DDS}$ и $DD\varkappa^S$ (это утверждение, как мы сейчас увидим, верно и без предположения о тождественности отображения $\varkappa^{DDS}$). Первое вытекает из определения отображения $\varkappa$, второе мы сейчас докажем.

В самом деле, $(f_X\alpha)_Y\beta = [\varkappa_X^{DS}(D\varkappa_X^S\alpha)]_Y\beta = \beta_X(D\varkappa_X^S\alpha)$ для любых пространств $X$ и $Y$ и элементов $\alpha \in DDDSX$ и $\beta \in DDSY$. При гомеоморфизме $\varrho$ отображению $f$ соответствует отображение, действующее по формуле $[\varrho(f)_Y\beta]_X\alpha = (f_Y(\alpha))_X\beta$, откуда $[\varrho(f)_Y\beta]_X\alpha = \beta_X(D\varkappa^S)_X\alpha$, т. е. $[\varrho(f)]_Y\beta = \beta \circ D\varkappa^S$, откуда вытекает равенство $\varrho(f) = DD\varkappa^S$.

По предположению отображение $\varkappa^{DDS}$ тождественно. Покажем, что в этом случае отображение $DD\varkappa^S$ также тождественно (отсюда будет вытекать равенство $e = f$, так как отображение $\varrho$ взаимно однозначно). Согласно предложению 3.1

$$D\varkappa^S \circ \varkappa^{DS} = e, \tag{3.4}$$

$$D\varkappa^{DS} \circ \varkappa^{DDS} = e. \tag{3.5}$$

Применяя оператор $D$ к правой и левой частям равенства (3.4), получаем

$$D\varkappa^{DS} \circ DD\varkappa^S = e. \tag{3.4$'$}$$

Так как отображение $\varkappa^{DDS}$ тождественно, из (3.5) следует, что отображение $D\varkappa^{DS}$ тождественно, а из (3.4′) следует, что и отображение $DD\varkappa^S$ тождественно.

Предложение доказано.

Таким образом, из правильности функтора $DS$ вытекает правильность функтора $S$. Доказанное можно резюмировать следующим образом. Произвольный функтор $S$ может принадлежать к одному из следующих трех типов. Либо он сам рефлексивен, либо он сам нерефлексивен, но рефлексивен функтор $DS$ (тогда $S$ — правильный функтор), либо, наконец, ни $S$, ни $DS$ не рефлексивны. В последнем случае функторы $S$, $DS$, $DDS$, $DDDS$, ... все нерефлексивны и для любого пространства $X$ имеют место вложения $DSX \subset DDDSX \subset DDDDDSX \subset \ldots$ и $DDSX \subset DDDDSX \subset \ldots$

**4.** Этот пункт содержит вычисление некоторых двойственных функторов.

Предложение 3.3. *Для любых функторов $S$ и пространства $A$ имеют место равенства $D(\Sigma_A \circ S) = \Omega_A \circ DS$ и $D(S \circ \Omega_A) = DS \circ \Sigma_A$.*

Это непосредственно следует из теорем 2.1 и 2.2.

Рассмотрим теперь функтор $J$, сопоставляющий пространству $X$ соединение $X * X$ (см. пример 10° из § 2). Мы покажем, что двойственным к нему является функтор $K$, сопоставляющий пространству $X$ пространство $KX$ тех путей букета $X \vee X$, которые начинаются на его первом листе, а кончаются на втором (под листами букета понимаются составляющие его экземпляры пространства $X$).

Предложение 3.4. *Имеет место равенство $DJ = K$.*

Доказательство. Пространство $A * B$ можно представить как объединение замкнутых множеств $C_t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, пересекающихся только по отмеченной точке, таких, что $C_0 = A$, $C_1 = B$ и $C_t = A \times B$ при $0 < t < 1$ (для того чтобы получить множество $C_t$, мы фиксируем третью координату в произведении $A \times B \times I$, из которого пространство $A * B$ получено с помощью факторизации). В частности, $JX = X * X = \bigcup_{0 \leqslant t \leqslant 1} C_t$, причем $C_0 = C_1 = X$ и $C_t = X \times X$ при $0 < t < 1$.

Рассмотрим отображение $\varphi$: $J \to \Sigma_Z$. Если зафиксировать число $t$ и для каждого пространства $X$ рассмотреть ограничение отображения $\varphi_X$ на подпространстве $C_t$, мы получаем при $0 < t < 1$ отображение $\varphi_t$: $P_2 \to \Sigma_Z$, т. е. точку $\varphi_t$ пространства $Z \vee Z$, а при $t = 0$ и $t = 1$ — отображения $E \to \Sigma_Z$, т.е. точки $\varphi_0$ и $\varphi_1$ пространства $Z$. Сопоставим точке $t \in I$, где $I$ — отрезок $[0, 1]$, точку $\varphi_t \in Z \vee Z$ при $0 < t < 1$, точку $\varphi_0$ первого листа букета $Z \vee Z$ при $t = 0$ и точку $\varphi_1$ второго листа букета при $t = 1$. Получаем отображение отрезка $[0, 1]$ в букет $Z \vee Z$ (не сохраняющее, вообще говоря, отмеченной точки). Непрерывность этого отображения вытекает из того, что топология в пространстве $X * X$ есть фактор-топология пространства $X \times X \times I$.

Мы получаем, таким образом, взаимно однозначное соответствие между элементами пространства $\{J \to \Sigma_Z\}$ и теми путями букета $Z \vee Z$, которые начинаются на первом и кончаются на втором его листе. Читатель легко сможет показать, что это соответствие является гомеоморфизмом.

Предложение доказано.

Равенство $DK = J$ также имеет место. Оно доказано в [17].

Пусть $f$ — отображение пространства $A$ в пространство $B$. Цилиндром $Zf$ этого отображения называется пространство, полученное из объединения $(A \times I) \cup B$, где $I$ — отрезок $[0, 1]$, путем следующих отождествлений: $(x, 0) = y$ при $x \in A$, $y \in B$, $f(x) = y$; $(*, t_1) = (*, t_2)$, если $* \in A$ — отмеченная точка, $t_1$, $t_2 \in I$ — любые точки.

Известно, что цилиндр $Zf$ отображения $f$: $A \to B$ гомотопически эквивалентен пространству $B$. Естественное отображение $F$: $A \to Zf$ $(F(x) = (x, 1))$, гомотопически эквивалентное отображению $f$, является вложением и даже корасслоением.

Серр [22] дал двойственную конструкцию, позволяющую построить для каждого отображения $f$: $A \to B$ гомотопически эквивалентное ему расслоение. Эта конструкция состоит в следующем.

*Коцилиндром* $Rf$ отображения $f$ назовем пространство, точками которого являются пары $(x, \sigma)$, где $x \in A$ — точка, $\sigma$ — путь на пространстве $B$, начинающийся в точке $f(x)$, топология в котором индуцируется топологией прямого произведения пространства $A$ на пространство всех путей пространства $B$. Пространство $Rf$ гомотопически эквивалентно пространству $A$, и, сопоставляя каждой точке $(x, \sigma) \in Rf$ конец пути $\sigma$, мы получаем расслоение (в смысле Серра) $F$ : $Rf \to B$, гомотопически эквивалентное отображению $f$.

Пусть теперь $\varphi$: $S \to T$ — отображение функтора $S$ в функтор $T$. *Цилиндром* $Z\varphi$ отображения $\varphi$ назовем функтор, сопоставляющий пространству $X$ цилиндр отображения $\varphi_X$; *коцилиндром* $Rf$ отображения $\varphi$ назовем функтор, сопоставляющий пространству $X$ коцилиндр отображения $\varphi_X$.

Предложение 3.5. *Пусть* $\varphi$: $S \to T$ — *отображение функторов. Функтору* $Z\varphi$ *двойствен функтор* $R$ $(D\varphi)$, *где* $D\varphi$: $DT \to DS$ — *двойственное отображение.*

Доказательство. Пространство $Z\varphi X$ может быть естественным образом представлено в виде объединения пространств $Z_t$, пересекающихся только по отмеченной точке, причем пространство $Z_t$ гомеоморфно пространству $SX$ при $0 < t \leqslant 1$ и пространству $TX$ при $t = 0$. Отображение $f$: $Z\varphi \to \Sigma_C$ индуцирует, таким образом, отображение $f_t$: $S \to \Sigma_C$ при $0 < t \leqslant 1$ и отображение $\widetilde{f}_0$: $T \to \Sigma_C$ при $t = 0$. Обозначим через $f_0$: $S \to \Sigma_C$ композицию отображений $f_0$ и $\varphi$. Отображение $\widetilde{f}_0$ можно рассматривать как точку пространства $DTC$. Отображения $f_t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ образуют, как легко заметить, путь на пространстве $DSC$, начинающийся в точке $f_0 = D\varphi\, (\widetilde{f}_0)$. Таким образом, отображение $f$: $Z\varphi \to \Sigma_C$ взаимно однозначно характеризуется точкой пространства $R\,(D\varphi)\,C$. Полученное взаимно однозначное соответствие является, как легко показать, гомеоморфизмом. Предложение доказано.

Пусть теперь $S_1$, $S_2$, ..., $S_n$ — функторы. Вполне аналогично предложению 3.4 доказывается следующее утверждение.

Предложение 3.6. *Функтору* $S_1 * S_2$ *двойствен функтор* $K\,(DS_1,\, DS_2)$, *сопоставляющий пространству* $X$ *пространство тех путей букета* $DS_1X \vee DS_2X$, *которые начинаются на его первом листе и кончаются на втором.*

Очевидным является следующий факт.

Предложение 3.7. *Функтору* $S_1 \vee S_2 \vee \ldots \vee S_n$ *двойствен функтор* $DS_1 \times DS_2 \times \ldots \times DS_n$.

Следующее утверждение несколько более сложно.

Предложение 3.8. *Функтору* $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ *двойствен функтор* $DS_1 \vee DS_2 \vee \ldots \vee DS_n$. *Более точно, всякое отображение* $S_1 \times S_2 \times \ldots$ $\ldots \times S_n \to \Sigma_C$ *есть композиция проекции функтора* $S_1 \times \ldots \times S_n$ *на один из сомножителей* $S_i$ *и отображения этого сомножителя в* $\Sigma_C$.

Доказательство. Очевидно, утверждение сводится к случаю $n = 2$. Сначала мы докажем его в предположении, что $S_1 = S_2 = \Omega_A$, где $A$ — некоторое пространство. В этом случае оно тривиально, так как имеется равенство $\Omega_A \times \Omega_A = \Omega_{A \vee A}$. В самом деле, имеем $\{\Omega_A \times \Omega_A \to \Sigma_C\} = \{\Omega_{A\vee A} \to \Sigma_C\} = \Sigma_C\,\{A \vee A\} = C \# (A \vee A) = (C \# A) \vee (C \# A) = \{\Omega_A \to \Sigma_C\} \# \{\Omega_A \to \Sigma_C\}$.

Теперь рассмотрим в пространстве $\Omega_A A \times \Omega_A A$ три точки: $(*,\, e)$, $(e,\, e)$, $(e,\, *)$ (здесь $e$ и $*$ означают соответственно тождественное и тривиальное отображения пространства $A$ в себя). Если $f$: $\Omega_A \times \Omega_A \to \Sigma_C$ — отображение, то из точек $f_A\,(*,\, e)$ и $f_A\,(e,\, *)$ пространства $\Sigma_C A$ одна отмечена, а другая совпадает с $f_A\,(e,\, e)$. (Если $f_A\,(e,\, e) = *$, то $f$ представляет собой тривиальное отображение.)

Пусть теперь $\varphi: S_1 \times S_2 \to \Sigma_C$ — нетривиальное отображение. Согласно предложению 2.4 отображение $\varphi_I$, где $I$ — отрезок, также нетривиально, т. е. найдутся точки $\alpha \in S_1 I$, $\beta \in S_2 I$ такие, что $\varphi_I(\alpha, \beta) \neq *$. Точки $\alpha$ и $\beta$ определяют отображения соответственно $\eta_\alpha: \Omega_I \to S_1$ и $\eta_\beta: \Omega_I \to S_2$ (см. пример 4° из § 2). Вместе они определяют отображение $\gamma: \Omega_I \times \Omega_I \to \to S_1 \times S_2$ такое, что $\gamma_I(*, e) = (*, \beta)$, $\gamma_I(e, e) = (\alpha, \beta)$, $\gamma_I(e, *) = (\alpha, *)$. Композиция $\varphi \circ \gamma = f: \Omega_I \times \Omega_I \to \Sigma_C$ представляет собой нетривиальное отображение, так как $(\varphi \circ \gamma)_I(e, e) = \varphi_I(\alpha, \beta) \neq *$. Это означает, что из точек $f_I(*, e)$ и $f_I(e, *)$ одна (для определенности $f_I(*, e)$) есть $*$, а другая не есть $*$. Тогда

$$f_I(e, *) = f_I(e, e),$$

откуда

$$\varphi_I(\alpha, *) = \varphi_I(\alpha, \beta) \tag{3.6}$$

и

$$\varphi_I(*, \beta) = *. \tag{3.7}$$

Аналогично, если бы было $\varphi_I(\alpha, \beta) = *$, то $\varphi_I(\alpha, *) = \varphi(*, \beta) = *$.

Заменим теперь точку $\beta$ любой другой точкой $\beta'$. Отображение $\gamma$ заменится отображением $\gamma'$, но равенство $\gamma'(e, *) = (\alpha, *)$ по-прежнему будет справедливо. Так как $\varphi_I(\alpha, *) \neq *$, т. е. $(\varphi \circ \gamma')_I(e, *) = *$, то

$$(\varphi \circ \gamma')_I(e, e) = (\varphi \circ \gamma')_I(e, *)$$

и

$$\varphi_I(\alpha, \beta') = \varphi_I(\alpha, *)$$

для любой точки $\beta' \in S_2 I$.

Пусть, наконец, $(\alpha', \beta') \in S_1 I \times S_2 I$ — произвольная точка. Тогда из доказанного следует, что либо $\varphi_I(\alpha', \beta') = \varphi_I(\alpha', *)$, либо $\varphi_I(\alpha', \beta') = = \varphi_I(*, \beta')$. Но если верно второе, то и $\varphi_I(\alpha, \beta') = \varphi_I(*, \beta')$. Отсюда $\varphi_I(\alpha, *) = *$, что противоречит (3.6). Следовательно, равенство

$$\varphi_I(\alpha, \beta) = \varphi_I(\alpha, *)$$

справедливо для любой точки $(\alpha, \beta) \in S_1 I \times S_2 I$.

Рассмотрим отображение $\bar{\varphi}: S_1 \times S_2 \to \Sigma_C$, определенное формулой $\bar{\varphi}_X(x_1, x_2) = \varphi_X(x_1, *)$ (здесь $X$ — любое пространство, $x_1 \in S_1 X$, $x_2 \in S_2 X$). По доказанному $\varphi_I = \bar{\varphi}_I$. Следовательно (предложение 2.4), $\varphi_X = \bar{\varphi}_X$ для любого пространства $X$, и если $x_1 \in S_1 X$ и $x_2 \in S_2 X$, то выполняется равенство

$$\varphi_X(x_1, x_2) = \varphi_X(x_1, *);$$

это эквивалентно утверждению предложения 3.8.

Напомним, что до сих пор была доказана рефлексивность только двух функторов: $\Sigma_A$ и $\Omega_A$ — для любого пространства. Из предложения 3.8 вытекает еще рефлексивность функторов $S_1 \vee S_2 \vee \ldots \vee S_n$ и $S_1 \times S_2 \times \ldots \times S_n$ для любых рефлексивных функторов $S_1, S_2, \ldots, S_n$.

Мы не касались здесь вопросов, связанных с вычислением двойственных функторов к таким, например, функторам, как $\Omega_A S$, $K$, $R\varphi$ и т. д. Они подробно исследованы в статье [17].

## § 4. Двойственность функторов в некоторых других категориях

Как уже говорилось в § 1, двойственность функторов, аналогичная двойственности $D$, может быть определена в некоторых других категориях. Примером тому является построенная А. С. Шварцем и Б. С. Митягиным двойственность функторов в категории банаховых пространств (см. [20], [21]). А. С. Шварцем [19] были сформулированы условия, которым должна удовлетворять категория для того, чтобы в ней можно было определить двойственность функторов. Здесь мы ограничимся рассмотрением двух примеров, интересных с точки зрения двойственности Экмана — Хилтона.

**1. Функторы, определенные в категории непрерывных отображений.** Рассмотрим категорию, объектами которой являются отображения $f\colon X \to Y$, где $X$ и $Y$ — функционально хаусдорфовы $k$-пространства с отмеченными точками, $f$ — непрерывное отображение, переводящее отмеченную точку в отмеченную точку, морфизм $\varphi\colon f \to g$ которой ($f\colon X_1 \to Y_1$, $g\colon X_2 \to Y_2$ — объекты категории) есть коммутативная диаграмма

$$(\varphi)\quad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & Y_1 \\ {\scriptstyle\varphi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} \\ X_2 & \xrightarrow{g} & Y_2 \end{array}$$

Совокупность $g^f$ всех морфизмов $\varphi\colon f \to g$ топологизируется как подпространство пространства $X_2^{X_1} \times Y_2^{Y_1}$.

Определение 4.1. Будем говорить, что задан функтор $S$ в категории отображений (на протяжении пункта — просто функтор), если для любого объекта категории $f\colon X \to Y$ определено пространство $Sf$ и каждой коммутативной диаграмме

$$(\varphi)\quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ {\scriptstyle\varphi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} \\ X' & \xrightarrow{g} & Y' \end{array} \tag{4.1}$$

сопоставлено отображение $S\varphi\colon Sf \to Sg$, причем выполняются следующие аксиомы.

S′1. Если заданы коммутативные диаграммы

$$(\varphi')\quad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_1'} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2'} \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y_2 \end{array}, \qquad (\varphi'')\quad \begin{array}{ccc} X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y_2 \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_1''} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2''} \\ X_3 & \xrightarrow{f_3} & Y_3 \end{array}, \qquad (\varphi)\quad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \\ \downarrow{\scriptstyle\varphi_1} & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} \\ X_3 & \xrightarrow{f_3} & Y_3 \end{array},$$

где $\varphi_1 = \varphi_1'' \circ \varphi_1'$ и $\varphi_2 = \varphi_2'' \circ \varphi_2'$, то $S\varphi = S\varphi'' \circ S\varphi'$.

S′2. Если в коммутативной диаграмме (4.1) пространства $X$ и $Y$ совпадают соответственно с пространствами $X'$ и $Y'$, а отображения $\varphi_1$ и $\varphi_2$ тождественны, то и отображение $S\varphi$ тождественно.

S′3. Всякому тривиальному отображению $f\colon X \to Y$ соответствует одноточечное пространство $Sf$.

S′4. Сопоставление $\varphi \to S\varphi$ определяет непрерывное отображение $g^f \to (Sg)^{Sf}$.

Примеры. 1°. Тривиальный функтор 0 сопоставляет всякому отображению $f$ одноточечное пространство.

2°. Функторы $A_1$ и $A_2$ сопоставляют отображению $f\colon X \to Y$ соответственно пространства $X$ и $Y$.

3°. Функторы $R$ и $Z$ сопоставляют отображению $f$ соответственно его цилиндр и коцилиндр.

4°. Пусть $f_0\colon X_0 \to Y_0$ — отображение. Функтор $\Sigma_{f_0}$ сопоставляет отображению $f\colon X \to Y$ пространство $f \# f_0$, получающееся из объединения $X \# Y_0 \cup X_0 \# Y_0$ отождествлениями $(x, y_0) = (x_0, y)$, где $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, $x \in X$, $y \in Y$, $f(x_0) = y_0$ и $f(x) = y$.

5°. Пусть $f_0\colon X_0 \to Y_0$ — отображение. Функтор $\Omega_{f_0}$ сопоставляет отображению $f\colon X \to Y$ пространство $f^{f_0}$.

Можно заметить, что функторы $A_1$ и $A_2$, например, являются частными случаями соответственно функторов $\Omega_f$ и $\Sigma_f$.

Разумеется, можно рассматривать композицию $S \circ T$, где $T$ — функтор в категории отображений, $S$ — функтор в категории пространств. Полученная композиция будет при этом функтором в категории отображений.

Определение 4.2. Будем говорить, что задано отображение $F$ функтора $S$ в функтор $T$, если для каждого отображения $f\colon X \to Y$ определено отображение $F_f\colon Sf \to Tf$, причем если диаграмма

$$(\varphi)\qquad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f_1} & Y_1 \\ {\scriptstyle\varphi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi_2} \\ X_2 & \xrightarrow{f_2} & Y_2 \end{array}$$

коммутативна, то диаграмма

$$\begin{array}{ccc} Sf_1 & \xrightarrow{F_{f_1}} & Tf_1 \\ {\scriptstyle S\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle T\varphi} \\ Sf_2 & \xrightarrow{F_{f_2}} & Tf_2 \end{array}$$

также коммутативна.

Например, отображение $F\colon A_1 \to A_2$ можно определить формулой $F_f = f$.

Пространство отображений функтора в функтор определяется и обозначается так же, как в случае функторов в категории топологических пространств.

Аналогично теореме 2.3 доказывается следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Имеет место равенство* $\{\Omega_f \to S\} = Sf$.

Теперь дадим основное определение.

Определение 4.3. *Функтором, двойственным к данному функтору* $S$, называется функтор $DS$, определенный равенством $DSf = \{S \to \Sigma_f\}$.

Теорема 4.2. $D\Omega_f = \Sigma_f$.

Доказательство. $(D\Omega_f)g = \{\Omega_f \to \Sigma_g\} = \Sigma_g f = \Sigma_f g$.

Теорема 4.3. $D\Sigma_f = \Omega_f$.

Доказательство. Пусть $f$: $X_1 \to Y_1$, $g$: $X_2 \to Y_2$ — отображения. Мы должны показать, что естественно по $g$ имеет место гомеоморфизм

$$\{f \# h \to g \# h\}_h = g^f.$$

Пусть $h$: $X \to Y$ — отображение. Если $\varphi \in g^f$, т. е. имеет место коммутативная диаграмма

$$(\varphi)\quad \begin{array}{ccc} X_1 & \xrightarrow{f} & Y_1 \\ {\scriptstyle\varphi_1}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi_2} \\ X_2 & \xrightarrow{g} & Y_2 \end{array}, \tag{4.2}$$

то определены отображения $\varphi_1 \# e$: $X_1 \# Y \to X_2 \# Y$ и $e \# \varphi_2$: $X \# Y_1 \to X \# Y_2$. По определению $f \# h = X_1 \# Y \cup X \# Y_1$, $g \# h = X_2 \# Y \cup X \# Y_2$, причем производятся отождествления: $(x_1, y) = (x, y_1)$ в $f \# h$, если $x \in X$, $y \in Y$, $x_1 \in X_1$, $y_1 \in Y_1$, $h(x) = y$, $f(x_1) = y_1$, и $(x_2, y) = (x, y_2)$ в $g \# h$, если $x \in X$, $y \in Y$, $x_2 \in X_2$, $y_2 \in Y_2$, $h(x) = y$, $g(x_2) = y_2$. Для того чтобы доказать, что отображения $\varphi_1 \# e$ и $e \# f_1$ вместе определяют отображение $f \# h \to g \# h$, необходимо усмотреть, что из $h(x) = y$, $f(x_1) = y_1$ вытекает $h(x) = y$, $f(x_2) = y_2$. Но это сразу следует из коммутативности диаграммы (4.2).

Итак, мы построили отображение $f \# h \to g \# h$. Естественность этого отображения по $h$ очевидна. Следовательно, мы сопоставили элементу из $g^f$ элемент из $\{f \# h \to g \# h\}_h$.

Пусть теперь $\Phi \in \{f \# h \to g \# h\}_h$. Мы сопоставим элементу $\Phi$ коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} X_1 & \longrightarrow & Y_1 \\ \Big\downarrow & & \Big\downarrow \\ X_2 & \longrightarrow & Y_2 \end{array}$$

Пусть $X$ — любое пространство, $\nu(X)$: $* \to X$ — отображение одноточечного пространства $*$ в $X$. Очевидно, что $f \# \nu(X) = X_1 \# X$, $g \# \nu(X) = X_2 \# X$. Отображение $\Phi_{\nu(X)}$: $X_1 \# X \to X_2 \# X$ естественно по $X$ и определяется поэтому отображением $\varphi_1$: $X_1 \to X_2$. Пусть, далее, $e(X)$: $X \to X$ — тождественное отображение. Очевидно, $f \# e(X) = X \# Y_1$, $g \# e(X) = X \# Y_2$. Естественное по $X$ отображение $\Phi_{e(X)}$: $X \# Y_1 \to X \# Y_2$ определяется отображением $\varphi_2$: $Y_1 \to Y_2$.

Для доказательства равенства $g\varphi_1 = \varphi_2 f$ рассмотрим коммутативную диаграмму

$$(\alpha)\quad \begin{array}{ccc} * & \xrightarrow{\nu(\Gamma)} & \Gamma \\ {\scriptstyle\nu(\Gamma)}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle e(\Gamma)} \\ \Gamma & \xrightarrow{e(\Gamma)} & \Gamma \end{array},$$

где $\Gamma$ — двоеточие. Согласно определению отображения функторов, диаграмма

$$\begin{tikzcd} f \# \nu(\Gamma) \arrow[r, "\Phi_{\nu(\Gamma)}"] \arrow[d] & g \# \nu(\Gamma) \arrow[d] \\ f \# e(\Gamma) \arrow[r, "\Phi_{e(\Gamma)}"] & g \# e(\Gamma) \end{tikzcd},$$

в которой вертикальные отображения индуцированы диаграммой ($\alpha$), коммутативна. В то же время $f \# \nu(\Gamma) = X_1$, $f \# e(\Gamma) = Y_1$, $g \# \nu(\Gamma) = X_2$, $g \# e(\Gamma) = Y_2$, а отображения диаграммы совпадают соответственно с $f$, $g$, $\varphi_1$ и $\varphi_2$.

Итак, мы сопоставили элементу из $\{\Sigma_f \to \Sigma_g\}$ элемент из $g^f$ и элементу из $g^f$ — элемент из $\{\Sigma_f \to \Sigma_g\}$. Доказательство взаимной обратности этих сопоставлений и непрерывности каждого из них предоставляется читателю.

Частными случаями двух доказанных теорем являются равенства $DA_1 = A_2$ и $DA_2 = A_1$.

Теорема 4.4. $DZ = R$.

Доказательство. Пусть $g$: $X_1 \to Y_1$ — отображение, $\alpha \in Rg$, т. е. $\alpha = (x_0, s)$, где $x_0 \in X_1$, $s$ — путь на $Y_1$, начинающийся в точке $g(x)$. Отображение $\beta$: $Z \to \Sigma_g$ мы построим следующим образом. Пусть $h$: $X \to Y$ — произвольное отображение, $Zh$ — его цилиндр, т. е. $Zh = X \times I \cup Y$, где $I = [0, 1]$, $\Sigma_g h = g \# h$. Отображения $\xi$: $X \times I \to X \# Y_1$ и $\eta$: $Y \to X_1 \# Y$, заданные формулами $\xi(x, t) = (x, s(t))$ и $\eta(y) = (x_0, y)$, определяют отображение $Zh \to \Sigma_g h$, естественное по $h$, т. е. отображение $\beta$: $Z \to \Sigma_g$. Сопоставление $\alpha \to \beta$ определяет естественный по $g$ гомеоморфизм $Rg \approx \{Z \to \Sigma_g\}$. Доказательство этого утверждения предоставляется читателю.

Можно было бы развить теорию двойственности и дальше, перенеся на рассматриваемый случай результаты § 3 и статьи [17].

Естественно рассмотреть две оставшиеся комбинации: функторы из категории пространств в категорию отображений и функторы из категории отображений в категорию отображений. Однако эти функторы могут быть отождествлены с отображениями функторов рассмотренных ранее типов. Например, функтор, сопоставляющий пространству $X$ отображение $f(X)$: $SX \to TX$, может быть отождествлен с отображением $f$: $S \to T$ функторов из категории пространств в категорию пространств. Двойственный функтор есть отображение $Df$: $DT \to DS$.

**2. Функторы нескольких переменных.** Для простоты ограничимся случаем категории топологических пространств (в смысле данного в начале статьи определения). Определение (ковариантного) функтора может быть без труда перенесено на случай нескольких переменных. Мы определим для любого (ковариантного) функтора $S$ нескольких переменных двойственный функтор $DS$.

Заметим, что, в силу теоремы 2.2, для любого функтора $S$ (одного переменного) и пространства $A$ имеет место равенство

$$DSA = \{S \to \Sigma_A\} = \{S\Omega_A \to E\} = \{S(\Omega_A X) \to X\}_X.$$

Определение 4.4. Функтор $DS$, двойственный функтору $S$, сопоставляет набору пространств $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ пространство $DS(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \{S(\Omega_{Y_1}X, \Omega_{Y_2}X, \ldots, \Omega_{Y_n}X) \to X\}_X$.

Таким образом, пространство $DS(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n)$ определяется как пространство отображений функторов одного переменного.

Примеры. 6°. Пусть $P(X_1, \ldots, X_n) = X_1 \times \ldots \times X_n$. Тогда

$$(Y_1, \ldots, Y_n) = \{\Omega_{Y_1}X \times \ldots \times \Omega_{Y_n}X \to X\}_X = \\ = \{\Omega_{Y_1 \vee \ldots \vee Y_n}X \to X\}_X = Y_1 \vee \ldots \vee Y_n.$$

7°. Пусть $B(X_1, \ldots, X_n) = X_1 \vee \ldots \vee X_n$. Тогда

$$DB(Y_1, \ldots, Y_n) = \{\Omega_{Y_1}X \vee \ldots \vee \Omega_{Y_n}X \to X\}_X = \\ = \{\Omega_{Y_1}X \to X\}_X \times \ldots \times \{\Omega_{Y_n}X \to X\}_X = Y_1 \times \ldots \times Y_n.$$

Функторы $P$ и $B$, таким образом, являются рефлексивными.

8°. Пусть $J(X_1, X_2) = X_1 \ast X_2$. Тогда $DJ(Y_1, Y_2) = K(Y_1, Y_2)$ есть пространство путей букета $Y_1 \vee Y_2$, начинающихся на первом и кончающихся на втором его листе. Можно показать, что функторы $J$ и $K$ рефлексивны (это хотя и не содержится в статье [17], но может быть доказано дословно так же, как доказывается аналогичное утверждение для функторов одного переменного).

Теорема 4.5. *Пусть $S$ — функтор $n$ переменных, $X$ — любое пространство, $T$ — функтор одного переменного, определенный равенством $TX = S(X, \ldots, X)$. Тогда $DTY = DS(Y, \ldots, Y)$ для любого пространства $Y$.*

Доказательство. $DTY = \{T \to \Sigma_Y\} = \{T\Omega_Y \to E\} = \{T(\Omega_Y X) \to X\}_X = \{S(\Omega_Y X, \ldots, \Omega_Y X) \to X\}_X = DS(Y, \ldots, Y)$.

## § 5. Расслоения и корасслоения

Основные результаты этого параграфа опубликованы в [16].

Этот параграф содержит построение теории расслоений и корасслоений функторов. В § 1 отмечалось, что некоторые естественные отображения $SX \to TX$ обладают тем свойством, что для всех пространств $X$ эти отображения оказываются расслоением в смысле Серра. Тогда двойственное отображение оказывается корасслоением, причем слой и кослой двойственны друг другу. Таковы интуитивные заключения теории Экмана — Хилтона. В этом параграфе мы введем понятия расслоения и корасслоения функторов. Грубо говоря, отображение $p\colon E \to B$ функтора $E$ в функтор $B$ является расслоением, когда для любого пространства $X$ отображение $p_X$ является расслоением в смысле Серра, причем это явление носит не случайный характер, а является естественным (по $X$) свойством отображения $p_X$. Аналогичный смысл имеет понятие корасслоения функторов. Будет доказано, в частности, что если естественное отображение $i_X\colon BX \to EX$ является корасслоением функторов и $\Phi X$ — кослой корасслоения $i_X$, то отображение $Di\colon DE \to DB$ является расслоением функторов, в частности, отображение $Di_Y\colon DEY \to DBY$ является расслоением для любого пространства $Y$ и слой последнего есть пространство $D\Phi Y$.

1. Начнем с нескольких определений.

Определение 5.1. Пусть $S$ и $T$ — два функтора. Говорят, что задана гомотопия $f_t$: $S \to T$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ функтора $S$ в функтор $T$, если для каждого $t$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ задано отображение $f_t$: $S \to T$, непрерывно зависящее от $t$ в смысле топологии в пространстве $\{S \to T\}$.

Так же, как и в обычной гомотопической топологии, определяются понятия гомотопической эквивалентности функторов, стягиваемости функторов и т. д.

Для удобства условимся, что во всех случаях, когда рассматривается отображение, зависящее от параметра $t$, но не указано, в каких пределах изменяется параметр, подразумевается, что $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Определение 5.2. Отображение $p$: $E \to B$ функтора $E$ в функтор $B$ называется *расслоением функторов*, если для любого функтора $Z$, отображения $F$: $Z \to E$ и гомотопии $f_t$: $Z \to B$ такой, что $f_0 = p \circ F$, найдется гомотопия $F_t$: $Z \to E$ такая, что $p \circ F_t = f_t$ и $F_0 = F$.

Определение 5.3. Отображение $p$: $E \to B$ рефлексивного функтора $E$ в рефлексивный функтор $B$ называется *R-расслоением функторов*, если для любого рефлексивного функтора $Z$, отображения $F$: $Z \to E$ и гомотопии $f_t$: $Z \to B$ такой, что $F_0 = p \circ F$, найдется гомотопия $F_t$: $Z \to E$ такая, что $p \circ F_t = f_t$ и $F_0 = F$.

Определение 5.4. Отображение $i$: $B \to E$ функтора $B$ в функтор $B$ называется *корасслоением функторов*, если для любого функтора $Z$, отображения $F$: $E \to Z$ и гомотопии $f_t$: $B \to Z$ такой, что $f_0 = F \circ i$, найдется гомотопия $F_t$: $E \to Z$ такая, что $F_t \circ i = f_t$ и $F_0 = F$.

Определение 5.5. Отображение $i$: $B \to E$ рефлексивного функтора $B$ в рефлексивный функтор $E$ называется *R-корасслоением функторов*, если для любого рефлексивного функтора $Z$, отображения $F$: $E \to Z$ и гомотопии $f$: $B \to Z$ такой, что $f_0 = F \circ i$, найдется гомотопия $F_t$ : $E \to Z$ такая, что $F_t \circ i = f_t$ и $F_0 = F$.

Предложение 5.1. *Для того чтобы отображение $p$: $E \to B$ было расслоением, необходимо и достаточно, чтобы существовала гомотопия $\Phi_t$: $R_p \to E$ ($R_p$ — коцилиндр отображения $p$) такая, что $(\Phi_0)_X(\sigma, s) = \sigma$ и $p_X(\Phi_t)_X(\sigma, s) = s(t)$ при $t > 0$ для любого пространства $X$, точки $\sigma \in EX$ и пути $s$ на пространстве $BX$, начинающегося в точке $p_X\sigma$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $p$: $E \to B$ — расслоение. Обозначим через $\Phi$: $R_p \to E$ и $\varphi_t$: $R_p \to B$ отображение и гомотопию, заданные соответственно формулами $\Phi_X(\sigma, s) = \sigma$ и $(\varphi_t)_X(\sigma, s) = s(t)$. Очевидно, $p\Phi = \varphi_0$. Согласно определению расслоения, существует гомотопия $\Phi_t$: $R_p \to E$, такая, что $p\Phi_t = \varphi_t$ и $\Phi_0 = \Phi$, т. е. обладающая требуемыми свойствами.

Достаточность. Пусть $Z$ — любой функтор, $F$: $Z \to E$ и $f_t$: $Z \to B$ — отображение и гомотопия такие, что $p \circ F = f_0$. Отображение $p$: $Z \to R_p$ определим равенством $P_X(x) = F_X(x, s)$, где $s$ — путь на пространстве $BX$, заданный формулой $s(t) = (f_t)_X(x)$ ($X$ — пространство, $x \in ZX$ — точка). Ясно, что $F = \Phi \circ P$, $f_t = \varphi_t \circ P$. Поэтому гомотопия $\Phi_t \circ P = F_t$: $Z \to E$ удовлетворяет требованиям определения расслоения.

Предложение 5.2. *Для того чтобы отображение* $i$: $B \to E$ *было корасслоением, необходимо и достаточно, чтобы существовала гомотопия* $\Phi_t$: $E \to Zi$ ($Zi$ — *цилиндр отображения* $i$) *такая, что* $(\Phi_0)_X = (x, 0)$ *и* $(\Phi_t)_X i_X (y) = (y, t)$ *при* $t > 0$. *Здесь* $X$ — *пространство* $x \in EX$, $y \in BX$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $i$: $B \to E$ — корасслоение. Обозначим через $\Phi$: $E \to Zi$ и $\varphi_t$: $B \to Zi$ отображение и гомотопию, заданные формулами соответственно $\Phi_X(x) = (x, 0)$ при $x \in EX$, $(\varphi_0)_X(x) = (i_X x;\ 0)$, $(\varphi_t)_X(x) = (x, t)$ $(t > 0)$ при $x \in BX$. Очевидно, $\Phi \circ i = \varphi_0$. Согласно определению корасслоения, существует гомотопия $\Phi_t$: $E \to Zi$ такая, что $\Phi_t \circ i = \varphi_t$ и $\Phi_0 = \Phi$, т. е. обладающая требуемыми свойствами.

Достаточность. Пусть $Z$ — любой функтор, $F$: $E \to Z$ и $f_t$: $B \to Z$ — отображение и гомотопия такие, что $F \circ i = f_0$. Отображение $P$: $Zi \to Z$ определим равенствами $P_X(x, 0) = F_X(x)$ и $P_X(x, t) = (f_t)_X(x)$ при $t > 0$ (в первом случае $x \in EX$, во втором — $x \in BX$). Ясно, что $F = P \circ \Phi$ и $f_t = P \circ \varphi_t$. Поэтому гомотопия $P \circ \Phi_t = F_t$: $E \to Z$ удовлетворяет требованиям определения корасслоения.

Доказательство следующего утверждения содержится в [18] (теоремы 5.5—5.8).

Теорема 5.1. *Пусть* $S$ *и* $T$ — *функторы*, $f$: $S \to T$ — *отображение, пространства* $SI$, $TI$ *и* $RfI$, *где* $I$ — *отрезок, локально стягиваемы.*

а) *Функтор, двойственный функтору* $Rf$, *с точностью до топологии в окрестности отмеченной точки совпадает с функтором* $Z(Df)$ (*более точно, существует отображение* $P$: $Z(Df) — D(Rf)$ *такое, что для любого пространства* $X$ *отображение* $P_X$ *взаимно однозначно и на дополнении отмеченной точки пространства* $Z(Df)X$ *является гомеоморфизмом*).

б) *Если* $S$ *и* $T$ — *рефлексивные функторы, то функтор* $Rf$ *рефлексивен.*

в) *Если отображение* $f$ *таково, что для любого пространства* $X$ *отображение* $(Df)_X$ *является топологическим вложением, то* $D(Rf) = Z(Df)$. *Если* $S$ *и* $T$ — *рефлексивные функторы, то функтор* $Z(Df)$ *рефлексивен.*

г) *Отображения* $\psi$: $DTX \to D(Rf)X$ *и* $(\varphi_t)_X$: $DSX \to D(Rf)X$ $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, *определенные равенствами* $\psi_X(x) = P_X(x, 0)$, $(\varphi_t)_X(y) = P_X(x, t)$, *где* $X$ — *пространство*, $x \in DTX$, $y \in DSX$ — *точки, являются топологическими вложениями для любого пространства* $X$.

Замечание. Утверждение более сильное, чем теорема 5.1, сформулировано в статье [17] (см. теорему 3).

Теорема 5.1 составляет ту часть теоремы 3 статьи [17], на которую не распространяется замечание при корректуре, сделанное на стр. 172.

В дальнейшем, не оговаривая этого специально, мы будем предполагать, что пространства $EI$, $DEI$, $BI$, $DBI$, $RfI$, $RDfI$ локально стягиваемы.

Предложение 5.3. *Если в предложении* 5.2 $B = DB'$, $E = DE'$ *и* $i = Dp$, *где* $p$: $E' \to B'$ — *отображение, то функтор* $Zi$ *в этом предложении может быть заменен функтором* $D(Rp)$.

Доказательство. Часть предложения 5.2, относящаяся к необходимости содержащегося в нем условия, сохраняется при замене функтора $Zi$ функтором $D(Rp)$ в силу утверждения а) теоремы 5.1.

Предположим теперь, что существует гомотопия $\Phi_t$: $E \to D\,(Rp)$ такая, что $(\Phi_0)_X\,(x) = P_X\,(x,\ 0)$ и $(\Phi_t)_X\, i_X\,(y) = P_X\,(y,\ t)$ при $t > 0$. В этом случае отображение $i_X$ является топологическим вложением для любого пространства $X$. В самом деле, согласно утверждению г) теоремы 5.1 композиция $(\Phi_1)_X i_X$: $BX \to D\,(Rp)\,X$ является топологическим вложением. Отсюда следует, что и отображение $i_X$ является вложением. Наше утверждение вытекает теперь из утверждения в) теоремы 5.1 и предложения 5.2.

Теорема 5.2. *Всякое R-расслоение является расслоением.*

Доказательство. Если $p$: $E \to B$ — $R$-расслоение, то функтор $Rp$ рефлексивен (утверждение б) теоремы 5.1). Через $\Phi$: $Rp \to E$ и $\varphi_t$: $Rp \to B$ обозначим те же отображение и гомотопию, что и при доказательстве предложения 5.1. По определению $R$-расслоения существует гомотопия $\Phi_t$: $Rp \to E$ такая, что $p \circ \Phi_t = \varphi_t$ и $\Phi_0 = \Phi$, т. е. $(\Phi_0)_X\,(\sigma,\ s) = \sigma$ и $p_X\,(\Phi_t)_X\,(\sigma,\ s) = s\,(t)$. Согласно предложению 5.1 отображение $p$ является расслоением.

Теорема 5.3. *Всякое R-корасслоение является корасслоением.*

Это утверждение вытекает из предложений 5.3 и 5.2.

Используя предложения 5.1, 5.2 и 5.3, мы получаем также следующие теоремы.

Теорема 5.4. *Если $p$: $E \to B$ — расслоение, то $Dp$: $DB \to DE$ — корасслоение.*

Теорема 5.5. *Если $i$: $B \to E$ — корасслоение, то $Di$: $DE \to DB$-расслоение.*

Теорема 5.6. *Если $p$: $E \to B$ — расслоение, то для любого пространства $X$ отображение $p_X$: $EX \to BX$ является расслоением в смысле Серра.*

Теорема 5.7. *Если $i$: $B \to E$ — корасслоение, то для любого пространства $X$ отображение $i_X$: $BX \to EX$ является корасслоением.*

**2.** Теперь дадим определение слоя и кослоя расслоения и корасслоения функторов.

Определение 5.6. Функтор $F$ называется *слоем расслоения* $p$: $E \to B$, если существует отображение $\eta$: $F \to E$ такое, что $p \circ \eta = 0$ (через 0 мы обозначаем тривиальное отображение), и для любого рефлексивного функтора и отображения $f$: $R \to E$ такого, что $p \circ f = 0$, существует и единственно отображение $\varphi$: $R \to F$ такое, что $f = \eta \circ \varphi$.

Определение 5.7. Функтор $\Phi$ называется *кослоем корасслоения* $i$: $B \to E$, если существует отображение $\pi$: $E \to B$ такое, что $\pi \circ i = 0$, и для любого рефлексивного функтора $R$ и отображения $f$: $E \to R$ такого, что $f \circ i = 0$, существует и единственно отображение $\varphi$: $\Phi \to R$ такое, что $f = \varphi \circ \pi$.

Сначала заметим, что любое расслоение обладает слоем, а любое корасслоение обладает кослоем. Это вытекает соответственно из теорем 5.6 и 5.7 (например, если $p$: $E \to B$ — расслоение, то его слоем является функтор $F$ такой, что $FX = (p_X)^{-1}\,(*) \subset EX$ для любого пространства $X$). Оказывается, что в случае расслоения слой единствен, в то время как корасслоение, вообще говоря, может иметь много разных кослоев.

Теорема 5.8. *Пусть* $p: E \to B$ — *расслоение*, $F'$ — *его слой*, $F$ — *функтор, определенный равенством* $FX = (p_X)^{-1}(*) \subset EX$ *для любого пространства* $X$. *Тогда* $F = F'$.

Доказательство. Отображение $\eta_X: F'X \to EX$, в силу равенства $p \circ \eta = 0$, обладает тем свойством, что для любого пространства $X$ его образ содержится в $FX \subset EX$. Иначе говоря, отображение $\eta$ можно рассматривать как отображение $F' \to F$. Взаимная однозначность этого отображения доказывается следующим образом. Точки пространства $FX$ находятся во взаимно однозначном соответствии с отображениями $\alpha: \Omega_X \to E$ такими, что $p \circ \alpha = 0$. Но по определению слоя для каждого такого отображения однозначно определено отображение $\beta: \Omega_X \to F'$ такое, что $\alpha = \eta \circ \beta$, т. е. точка пространства $F'X$.

Теперь покажем, что отображение $\eta_X: F'X \to EX$ является топологическим вложением для любого пространства $X$. Для этого достаточно показать, что если $A$ — бикомпакт, $f: A \to F'X$ — отображение (не переводящее, возможно, отмеченную точку в отмеченную точку) такое, что отображение $\eta_X \circ f$ непрерывно, то и отображение $f$ непрерывно. Иначе говоря, нужно доказать, что если $g: A \to EX$ — непрерывное отображение такое, что $p_X \circ g = 0$, то существует непрерывное отображение $f: A \to F'X$ такое, что $g = \eta_X \circ f$. Через $A'$ обозначим объединение компакта $A$ и точки $*$, которую будем считать отмеченной в пространстве $A'$. Функтор $\Sigma_{A'}\Omega_X$ рефлексивен (см. теорему 1 статьи [17]). Отображение $g$ можно рассматривать как точку пространства $\Omega_{A'} EX$, т. е. как отображение $\Omega_X \to \Omega_{A'} E$, т. е. как отображение $\varphi: \Sigma_{A'}\Omega_X \to E$. При этом композиция $i \circ \varphi: \Sigma_{A'}\Omega_X \to B$ тривиальна. Следовательно, по определению слоя существует отображение $\psi: \Sigma_{A'}\Omega_X \to F$ такое, что $\eta \circ \psi = \varphi$. Последнее можно рассматривать как отображение $f: A \to FX$. Ясно, что $g = \eta_X \circ f$. Теорема доказана.

Теорема 5.9. *Пусть* $i: B \to E$ — *корасслоение*, $\Phi_1$ *и* $\Phi_2$ — *два его кослоя. Тогда* $D\Phi_1 = D\Phi_2$.

Это доказывается так же, как и теорема 5.8, только вместо функтора $\Sigma_{A'}\Omega_X$ следует рассматривать функтор $\Omega_A \Sigma_X$.

В случае рефлексивного $E$ это вытекает также из теоремы 5.8 и следующего утверждения.

Теорема 5.10. *Пусть* $E$ — *рефлексивный функтор*, $i: B \to E$ — *корасслоение*, $\Phi$ — *его кослой. Тогда функтор* $D\Phi$ *является слоем расслоения* $Di: DE \to DB$.

Доказательство. Поскольку $\Phi$ — кослой корасслоения $i$, существует отображение $\pi: E \to \Phi$ такое, что $\pi \circ i = 0$, и для любых рефлексивного функтора $R$ и отображения $\alpha: E \to R$ такого, что $\alpha \circ i = 0$, найдется отображение $\beta: \Phi \to R$ такое, что $\alpha = \beta \circ \pi$.

Отображение $D\pi$ обладает, очевидно, тем свойством, что $Di \circ D\pi = D(\pi \circ i) = 0$. Пусть $R$ — рефлексивный функтор, $\gamma: R \to DE$ — отображение такое, что $Di \circ \gamma = 0$. Тогда $\alpha = D\gamma$ есть отображение функтора $E$ в функтор $DR$, причем композиция $\alpha \circ i = D\gamma \circ i$ тривиальна. Следовательно, существует отображение $\beta: \Phi \to DR$ такое, что $\alpha = \beta \circ \pi$.

Рассмотрим гомеоморфизм $h$: $\{\Phi \to DR\} \approx \{R \to D\Phi\}$. Очевидно, $h(\beta) = D\beta$ и если $\varphi \in \{R \to D\Phi\}$, то $h^{-1}(\varphi) = D\varphi \circ \varkappa^\Phi$.

Отображение $\delta = h(\beta)$: $R \to D\Phi$ обладает тем свойством, что $\gamma = 2\pi \circ \delta$ (в самом деле, $\alpha = D\gamma = \beta \circ \pi$, и, следовательно, $\gamma = DD\gamma = D\pi \circ D\beta = D\pi \circ \delta$). Таким образом, по всякому отображению $\gamma$: $R \to DE$ нам удалось построить отображение $\delta$: $R \to D\Phi$ такое, что $\gamma = D\pi \circ \delta$. Остается показать, что отображение $\delta$ единственно.

В самом деле, пусть существует отображение $\delta'$, отличное от $\delta$, такое, что $\gamma = D\pi \circ \delta'$. Но тогда $h^{-1}(\delta') \neq \beta$, так как $h$ есть взаимно однозначное соответствие. Поэтому, если мы докажем, что $\alpha = \beta' \circ i$, где $\beta' = h^{-1}\delta'$), то мы получим противоречие с определением кослоя.

Но $\beta' \circ i = h^{-1}(\delta') \circ \pi = D\delta' \circ \varkappa^\Phi \circ \pi = D\delta' \circ DD\pi = D(D\pi \circ \delta') = D\gamma = \alpha$. Мы использовали здесь равенство $\varkappa^\Phi \circ \pi = DD\pi$, вытекающее из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varkappa^{E=e}"'] & \Phi \arrow[d, "\varkappa\Phi"] \\ E = DDE \arrow[r, "DD\pi"] & DD\Phi \end{tikzcd}$$

Теорема доказана.

Теорема, аналогичная теореме 5.10, касающаяся функтора, двойственного слою, может быть доказана только при некоторых дополнительных предположениях. Мы ограничимся разбором простейшего случая. Предположим, что функторы $E$ и $B$ рефлексивны и один из кослоев корасслоения $i$: $B \to E$ является правильным функтором. Тогда все кослои этого корасслоения являются правильными функторами и один из них рефлексивен. Последний двойствен слою расслоения $Di$: $DE \to DB$, который также является рефлексивным функтором.

В самом деле, если кослой $\Phi$ корасслоения $i$ правилен, то функтор $D\Phi$ рефлексивен. Если $\Phi'$ — любой другой кослой корасслоения $i$, то функтор $D\Phi' = D\Phi$ рефлексивен, а поэтому функтор $\Phi'$ правилен. Слоем расслоения $Di$ является рефлексивный функтор $D\Phi$. Наконец, функтор $DD\Phi$ рефлексивен и является кослоем корасслоения $i$. Это следует из того, что для любого рефлексивного функтора $R$ и правильного функтора $\Phi$ имеет место равенство

$$\{\Phi \to R\} = \{DD\Phi \to R\}.$$

В самом деле, $\{\Phi \to R\} = \{\Phi \to DDR\} = \{DR \to D\Phi\} = \{DR \to DDD\Phi\} = \{DD\Phi \to DDR\} = \{DD\Phi \to R\}$.

Заметим, что если $f$: $S \to T$ — любое отображение функторов, то легко строятся гомотопически эквивалентные ему расслоение и корасслоение функторов, а именно: функтор $Rf$ гомотопически эквивалентен функтору $S$, функтор $Zf$ гомотопически эквивалентен функтору $T$, естественные отображения $p$: $Rf \to T$ и $i$: $S \to Zf$ являются соответственно расслоением и корасслоением.

В заключение этого параграфа я остановлюсь на одной принадлежащей А. С. Шварцу идее. Эта идея легла в основу заметки [16], однако, к сожа-

лению, не получила дальнейшего развития (если не считать изложенных в этом параграфе результатов, относящихся к теории расслоений и корасслоений функторов).

Идея состоит в построении гомотопической теории функторов, аналогичной гомотопической теории топологических пространств. Мы уже определили понятия отображения функторов, гомотопии отображений функторов, гомотопической эквивалентности функторов, расслоения функторов, корасслоения функторов. Можно определить также гомотопические и когомологические группы функторов (с коэффициентами в функторе), мультипликативную структуру в этих группах и даже такие понятия, как категория функтора в смысле Люстерника — Шнирельмана. Гомотопическая теория функторов связана с гомотопической теорией топологических пространств аналогией и некоторыми другими соотношениями (например, для любого пространства $A$ можно сопоставить функтору $S$ пространство $SA$, мы получаем отображение категории функторов в категорию топологических пространств). В гомотопической теории функторов с помощью оператора $D$ определяется двойственность. С помощью указанных связей некоторые факты этой двойственности переносятся в гомотопическую теорию топологических пространств, где они и порождают двойственность Экмана — Хилтона.

Мы приведем в качестве примера определение и простейшие свойства групп гомотопий и когомологий функтора.

Через $\Sigma$, $\Sigma^i$, $\Omega$, $\Omega^i$ мы будем обозначать функторы, сопоставляющие каждому пространству соответственно его надстройку, его $i$-кратную надстройку, его пространство петель, его $i$-кратное пространство петель. Если $T$ и $U$ — функторы, то через $\{T \to U\}'$ мы будем обозначать множество гомотопических классов отображений $T$ в $U$, т. е. множество линейно связных компонент пространства $\{T \to U\}$. Множество $\{\Sigma^i T \to U\}' = \{T \to \Omega^i U\}'$ при $i \geqslant 1$ в естественном смысле является группой, коммутативной при $i \geqslant 2$. Под $i$-мерной гомотопической, соответственно когомологической, группой функтора $T$ с коэффициентами в функторе $U$ будем понимать группу $\{\Sigma^i U \to T\}$, соответственно группу $\{T \to \Omega^i U\}$. Эти группы обозначаются соответственно $\pi_i(T, U)$ и $H^i(T, U)$. Отметим некоторые простые соотношения между гомотопическими и когомологическими группами функторов и пространств. Очевидно, $\pi_i(T, U) = H^i(U, T)$. Далее, $\pi_i(\Sigma_A, E) = \pi_i(A)$, где под $E$ понимается тождественный функтор. Для любого пространства $A$ и любой абелевой группы $G$ имеет место равенство $H^i(\Sigma_A, E_{K(G,n)}) = H^{n-i}(A; G)$. Если функторы $T$ и $U$ рефлексивны, то $H^i(DT, DU) = \pi_i(T, U)$ и $\pi_i(DT, DU) = H^i(T, U)$. Пусть $p\colon E \to B$ — расслоение, $T$ — рефлексивный функтор, $F$ — слой расслоения $p$. Тогда имеют место точные последовательности

$$\ldots \to \pi_i(E, T) \to \pi_i(B, T) \to \pi_{i-1}(F, T) \to \pi_{i-1}(E, T) \to \ldots, \tag{5.1}$$

$$\ldots \to H^i(T, E) \to H^i(T, B) \to H^{i-1}(T, F) \to H^{i-1}(TE) \to \ldots, \tag{5.2}$$

переходящие одна в другую при подстановке по формуле $\pi_i(T,U) = H^i(U,T)$. Пусть $i$: $B \to E$ — корасслоение, $\Phi$ — его кослой, $T$ — рефлексивный

функтор. Имеют место точные последовательности

$$\ldots \to H^i(E, T) \to H^i(B, T) \to H^{i-1}(\Phi, T) \to H^{i-1}(E, T) \to \ldots, \quad (5.3)$$

$$\ldots \to \pi_i(T, E) \to \pi_i(T, B) \to \pi_{i-1}(T, \Phi) \to \pi_{i-1}(T, E) \to \ldots, \quad (5.4)$$

переходящие одна в другую при подстановке по формуле $\pi_i(T, U) = H^i(U, T)$. Если все функторы, участвующие в этих точных последовательностях, являются рефлексивными, то последовательности (5.1) и (5.2) переходят в последовательности (5.3) и (5.4) при подстановке по формулам $H^i(DT, DU) = \pi_i(T, U)$ и $\pi_i(DT, DU) = H^i(T, U)$. Частными случаями последовательностей (5.1)—(5.4) являются точная гомотопическая последовательность расслоения, точная когомологическая последовательность корасслоения и точные последовательности гомотопических и когомологических групп пространства, индуцированные точной последовательностью коэффициентов $0 \to G' \to G \to G'' \to 0$.

## § 6. О функторах, сопряженных в смысле Д. Кана

Как уже отмечалось во введении, заметка [15] не является первой попыткой установить двойственность между функторами. Понятие «сопряженности функторов» в широком классе категорий содержится в статье Д. Кана [14]. Мы покажем, что если ограничиться рассмотрением «аддитивных» функторов (т. е. функторов, удовлетворяющих аксиоме S4 нашего определения) в категории топологических пространств с отмеченной точкой, то сопряженность, абстрактным образом описанная Д. Каном, исчерпывается тривиальным примером сопряженных функторов $\Sigma_A$ и $\Omega_A$, т. е. других сопряженных функторов не существует. Наша теорема без труда переносится на широкий класс категорий, например на категории абелевых групп, топологических пространств без отмеченной точки и т. д. Для функторов, не удовлетворяющих аксиоме S4, можно показать во всяком случае, что если $S$ и $T$ — функторы, сопряженные в смысле Кана, то для любого пространства $X$ существует естественное взаимно однозначное соответствие $TX \approx \Omega_A X$, где $A$ — некоторое пространство.

Понятие функтора на протяжении параграфа сохраняет прежний смысл.

Определение 6.1. Будем говорить, что функтор $T$ сопряжен в смысле Д. Кана функтору $S$, если для любых двух пространств $X$ и $Y$ имеет место взаимно однозначное соответствие

$$K_{X, Y}\colon Y^{SX} \to (TY)^X,$$

естественное по $X$ и $Y$ (при этом не требуется непрерывности отображения $K_{X,Y}$ в какой-либо топологии).

Из предложения 2.1 следует, что функтор $\Omega_A$ сопряжен в смысле Кана функтору $\Sigma_A$ (это доказано и в статье Кана).

Теорема 6.1. *Если функтор $T$ сопряжен в смысле Кана функтору $S$, то существует пространство $A$ такое, что $S = \Sigma_A$ и $T = \Omega_A$.*

Доказательство. Сначала покажем, что отображение $K_{X,Y}$ является гомеоморфизмом. Зафиксируем пространство $X$ и положим $X = A$,

$SX = B$. Получаем отображение $\alpha_Y$: $\Omega_B Y \to \Omega_A TY$, естественное по $Y$. Обозначим $\Omega_A T = U$. Покажем, что такое отображение не может быть разрывным. Обозначим $\alpha_B(e) \in UB$ через $a$ ($e$: $B \to B$ — тождественное отображение). Тогда $\alpha_Y(f) = \alpha_Y[(\Omega_B f) e] = (Uf)\alpha_B e = (Uf)\alpha$. Таким образом, отображение $\alpha_Y$ есть композиция отображений $\Omega_B Y \to \Omega_{UB} UY \to UY$, первое из которых сопоставляет отображению $f$ отображение $Uf$ и непрерывно по аксиоме S4 определения функторов, второе сопоставляет отображению $g$: $UB \to UY$ точку $g(a)$ и также непрерывно.

Итак, отображение $K_{X,Y}$ непрерывно при любых $X$ и $Y$.

Покажем теперь, что обратное отображение $K^{-1}_{X,Y}$: $(TY)^X \to Y^{SX}$ также непрерывно. Зафиксируем $Y$ и положим $A = Y$, $B = TY$. Имеем отображение $\beta_X$: $B^X \to A^{SX}$, естественное по $X$. Обозначим $\beta_B(e) = \beta \in A^{SB}$. Если $g$: $Y \to X$, то через $B^g$ и $A^{Sg}$ мы обозначим индуцированные отображения $B^X \to B^Y$ и $A^{SX} \to A^{SY}$. Имеем $\beta_X(f) = \beta_X[B^f(e)] = A^{Sf}[\beta_B(e)] = A^{Sf}(b)$. Таким образом, отображение $\beta_X$ непрерывно при любом $X$, откуда отображение $K^{-1}_{X,Y}$ непрерывно при любых $X$ и $Y$.

Итак, отображение $K_{X,Y}$ является гомеоморфизмом, естественным по $X$ и $Y$. Обозначим $S\Gamma = A$ ($\Gamma$ — двоеточие). Тогда $X^{S\Gamma} = (TX)^\Gamma = UX$ естественно по $X$, т. е. $T = \Omega_A$. Отсюда получаем гомеоморфизм $Y^{SX} = (TY)^X = (\Omega_A Y)^X = Y^{A \neq X}$, естественный по $X$ и $Y$. Таким образом, функторы $\Omega_{SX}$ и $\Omega_{A\neq X}$ эквивалентны при любом $X$ естественно по $X$, откуда получаем, что пространства $SX$ и $A \neq X$ гомеоморфны естественно по $X$, т. е. $S = \Sigma_A$. (Гомеоморфизм $SX = A \neq X$ можно получить, например, так: $SX = \{\Omega_{SX} Z \to Z\}_Z = \{\Omega_{A\neq X} Z \to Z\}_Z = A \neq X$. Теорема доказана.

Эта теорема без изменения переносится на любую категорию, объекты которой представляют собой множества, которой вместе с двумя объектами $X$ и $Y$ принадлежит объект $X^Y$ — множество морфизмов объекта $X$ в объект $Y$ — и которая содержит объект $\Gamma$ такой, что $X^\Gamma = X$ естественно по $X$. При этом на функторы должно быть наложено условие «аддитивности», т. е. для любого функтора $S$ отображение $X^Y \to SX^{SY}$, сопоставляющее элементу $f \in X^Y$ элемент $Sf \in SX^{SY}$, должно быть морфизмом.

Поступило в редакцию 24 августа 1964 г.

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. Г. Болтянский, Гомотопическая теория непрерывных отображений и векторных полей, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова 47 (1955).

[2] Н. Стинрод, Топология косых произведений, М., ИЛ, 1953.

[3] S. Eilenberg and S. MakLane, Relations between homology and homotopy groups of spaces, Ann. Math. 46 (1945), 480—509.

[4] S. Eilenberg and S. MacLane, Relations between homology and homotopy groups of spaces, Ann. Math. 51 (1950), 514—533.

[5] N. Steenrold, Cohomology operations (русск. перевод: Н. Стинрод, Когомологические операции, сб. перев. «Математика»).

[6] B. Eckmann, Groupes d'homotopie et dualité, Bull. Soc. Math. France 86 (1958), 271.

[7] B. Eckmann and P. J. Hilton, Groupes d'homotopie et dualité. Groupes absolus, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **246** (1958), 2444—2447.
[8] B. Eckmann and P. J. Hilton, Groupes d'homotopie et dualité. Suites exactes Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **246** (1958), 2555—2558.
[9] B. Eckmann and P. J. Hilton, Groupes d'homotopie et dualité. Coefficients, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris) **246** (1958), 2991—2993.
[10] P. J. Hilton, Homotopy theory and duality, Lecture notes Com. Univ. (1959).
[11] T. Ganea, Lusternik — Schnirelmann category and cocategory, Proc. Lond. Math. Soc. **10** (1960), 623—639.
[12] T. Ganea, Fibrations and cocategory, Comm. Math. Helv. **35**, fasc. 1 (1961), 15—24.
[13] J. Berstein and T. Ganea, Homotopical nilpotency, Illinois Journ. Math. **5**, № 1 (1961), 99—130.
[14] D. Kahn, Adjointed functors (русск. перевод: Д. Кан, Сопряженные функторы, сб. перев. «Математика»).
[15] Д. Б. Фукс, О гомотопической двойственности, ДАН **141**, № 4 (1961), 818—821.
[16] Д. Б. Фукс и А. С. Шварц, К гомотопической теории функторов в категории топологических пространств с отмеченной точкой, ДАН **143**, № 3 (1962), 543—546.
[17] Д. Б. Фукс, О естественных отображениях функторов в категории топологических пространств, Матем. сб. **62** (104): 2 (1963), 160—179.
[18] Д. Б. Фукс, Двойственность функторов в категории топологических пространств с отмеченной точкой, Диссертация, Москва, МГУ, 1963.
[19] А. С. Шварц, Двойственность функторов, ДАН **148**, № 2 (1963), 288—291.
[20] А. С. Шварц, Функторы в категории банаховых пространств, ДАН **149**, № 1 (1963), 44—47.
[21] А. С. Шварц и Б. С. Митягин, Функторы в категории банаховых пространств, УМН **19**, вып. 2 (116) (1964), 65—130.
[22] J. P. Serre, Cohomologie modulo 2 des complexes d'Eilenberg — MacLane, Comm. Math. Helv. **27** (1953), 198—231.
[23] Ху Сы-цзен, Гомотопическая топология, М., ИЛ, 1964.
[24] P. J. Hilton and D. Rees, Natural maps of extension functors and a theorem of R. G. Swan, Proc. Camb. Philos. Soc. **57**, 3 (1961), 489—502.
[25] R. Nakagawa, On Fuks' homotopy duality, Sci. Rep. Tokyo Kyoiku Daigaku, Sec. A **8**, № 191 (1963), 93—98.
[26] В. В. Кузнецов, Двойственность функторов в категории множеств с отмеченной точкой, ДАН **160**, № 5 (1964).