В. В. Любашенко, Алгебры Хопфа и вектор-симметрии, *УМН*, 1986, том 41, выпуск 5(251), 185–186

АЛГЕБРЫ ХОПФА И ВЕКТОР-СИММЕТРИИ

В. В. Любашенко

По данному решению уравнения Янга — Бакстера со специальными свойствами в работе строятся тензорные категории. В них может рассматриваться аналог $\mathbb{Z}/2$-градуированного анализа, обобщающий [1].

1. Пусть $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ — семейство конечномерных комплексных векторных пространств. Всякому оператору S: $V_\lambda \otimes V_\mu \to V_\mu \otimes V_\lambda$ поставим в соответствие оператор $S^\flat$: $V_\mu^* \otimes V_\lambda \to V_\lambda \otimes V_\mu^*$, заданный с помощью матриц следующим образом. Пусть (x_i), (y_j) — базисы пространств V_λ, V_μ, (y^j) — двойственный базис пространства V_μ^*. Если $S(x_i \otimes y_j) = \sum_{k,l} S_{ij}^{kl} y_k \otimes x_l$ в матричной записи, то

$$S^\flat(y^j \otimes x_i) = \sum_{k,\,l} S_{ik}^{jl} x_l \otimes y^k.$$

О п р е д е л е н и е. Симметрией назовем семейство отображений $S = S_{\lambda\mu}$: $V_\lambda \otimes V_\mu \to V_\mu \otimes V_\lambda$, являющееся решением уравнения Янга — Бакстера

$$(S \otimes 1)(1 \otimes S)(S \otimes 1) = (1 \otimes S)(S \otimes 1)(1 \otimes S)\colon V_\lambda \otimes V_\mu \otimes V_\nu \to V_\nu \otimes V_\mu \otimes V_\lambda,$$

унитарное — $S_{\mu\lambda} \circ S_{\lambda\mu} = 1$, и замкнутое — оператор $S_{\lambda\mu}^\flat$ обратим для всех λ, $\mu \in \Lambda$.

П р и м е р 1. Семейство состоит из двумерного пространства V с базисом (v_1, v_2). Симметрия задана равенствами

$$S(v_1 \otimes v_1) = v_1 \otimes v_1, \quad S(v_1 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_1 - \beta v_1 \otimes v_1,$$
$$S(v_2 \otimes v_1) = v_1 \otimes v_2 + \beta v_1 \otimes v_1, \quad S(v_2 \otimes v_2) = v_2 \otimes v_2 + \alpha v_2 \otimes v_1 - \alpha v_1 \otimes v_2 - \alpha\beta v_1 \otimes v_1.$$

Этим примером автор обязан Д. И. Гуревичу. В [2], [3] описаны способы построения симметрий.

2. Симметрию можно расширить, определив ее на двойственных пространствах следующим образом: $S = S_{\lambda\mu}^\flat$: $V_\mu^* \otimes V_\lambda \to V_\lambda \otimes V_\mu^*$, $S = S_{\lambda\mu}^{\flat-1}$: $V_\lambda \otimes V_\mu^* \to V_\mu^* \otimes V_\lambda$, $S = S_{\lambda\mu}^{\flat\flat}$: $V_\lambda^* \otimes V_\mu^* \to V_\mu^* \otimes V_\lambda^*$. Далее симметрию можно распространить на тензорные произведения исходных пространств и их прямые суммы. Наконец, можно присоединить подпространства L, перестановочные с исходными пространствами — $S(L \otimes V_\lambda) = V_\lambda \otimes L$, и фактор-пространства по ним.

Рассмотрим отображения между полученными пространствами f: $X \to Y$, удовлетворяющие равенству $(f \otimes 1_Z)\circ S = S\circ(1_Z \otimes f)$: $Z \otimes X \to Y \otimes Z$ для всех Z. Взяв их в качестве морфизмов, получим категорию $\mathscr{C}$, которую назовем вектор-симметрией.

П р е д л о ж е н и е. *Вектор-симметрия является абелевой симметричной тензорной замкнутой категорией.*

Вместе со всяким конечномерным пространством $V \in \mathscr{C}$ в $\mathscr{C}$ содержится и двойственное пространство V^*, причем спаривание $V^* \otimes V \to \mathbb{C}$ — морфизм $\mathscr{C}$.

П р и м е р 2. Исходя из двумерного пространства с базисом $(x;\ \xi)$ и симметрией $S(\xi \otimes \xi) = -\xi \otimes \xi$, $S(x \otimes \xi) = \xi \otimes x$, $S(x \otimes x) = x \otimes x + \xi \otimes \xi$, получим вектор-симметрию, эквивалентную категории $\mathbb{Z}/2$-градуированных комплексов $M_0 \underset{d}{\overset{d}{\rightleftarrows}} M_1$ $d^2 = 0$. Симметрия для них задается формулой

$$S\,(a \otimes b) = (-1)^{\tilde{a}\tilde{b}}\, b \otimes a + (-1)^{(\widetilde{a+1})\tilde{b}}\, db \otimes da.$$

П р и м е р 3. Если все пространства исходного семейства одномерны, то соответствующая вектор-симметрия будет категорией G-градуированных пространств, G — абелева группа. Симметрия определяется формулой [4] $S(v_g \otimes w_h) = f(g, h) w_h \otimes v_g$, где v_g, w_h — однородные элементы и бихарактер f: $\Lambda_{\mathbb{Z}}^2 G \to \mathbb{C}\setminus\{0\}$ невырожден.

3. Пусть $L \in \mathscr{C}$, (l_i) — базис L. В каждом пространстве $X \in \mathscr{C}$ действуют операторы $\mathscr{T}_i^j = {}^L\mathscr{T}_i^j$, определяемые формулой $S(l_i \otimes x) = \sum_j \mathscr{T}_i^j x \otimes l_j$. Морфизмы $\mathscr{C}$ перестановочны с операторами $\mathscr{T}_i^j$.

Предложение. а) *Линейная оболочка A операторов ${}^{L}\mathcal{T}^{j}_{i}$ является алгеброй Хопфа с биективным антиподом. Коумножение в A задается формулами* $\Delta\mathcal{T}^{j}_{i} = \sum_{k} \mathcal{T}^{k}_{i} \otimes \mathcal{T}^{j}_{k}$, $\varepsilon(\mathcal{T}^{j}_{i}) = \delta^{j}_{i}$.

б) *Действие алгебры A в пространствах из $\mathcal{C}$ определяет полное вложение тензорных замкнутых категорий* $\mathcal{C} \hookrightarrow A$-mod.

В примере 1 алгебра A является фактор-алгеброй алгебры Хопфа $\mathfrak{A} = \mathbb{C}\langle a, b, x, a^{-1}, b^{-1}\rangle$ с коумножением $\Delta a = a \otimes a$, $\Delta b = b \otimes b$, $\Delta x = x \otimes a + b \otimes x$, $\varepsilon(x) = 0$, $\varepsilon(a) = \varepsilon(b) = 1$ и соотношениями $ab = ba$, $a^{-1}xa = x + \beta(a - b)$, $b^{-1}xb = x + \alpha(a - b)$. Образы элементов a, b, x совпадают с ${}^{V}\mathcal{T}^{1}_{1}$, ${}^{V}\mathcal{T}^{2}_{2}$, ${}^{V}\mathcal{T}^{1}_{2}$ соответственно.

В примере 2 $A = \mathbb{C}\langle d, r\rangle$ с коумножением $\Delta r = r \otimes r$, $\Delta d = d \otimes 1 + r \otimes d$, $\varepsilon(d) = 0$, $\varepsilon(r) = 1$ и соотношениями $d^2 = dr + rd = 0$, $r^2 = 1$. Здесь $r|_{M_0} = 1_{M_0}$, $r|_{M_1} = -1_{M_1}$.

4. Пусть алгебра Хопфа A построена по вектор-симметрии $\mathcal{C}$. Обозначим через $A^0 \subset A^*$ дуальную алгебру Хопфа [5]. Коумножение на элементе $h \in A^0$ будет обозначаться $\Delta h = h_{(1)} \otimes h_{(2)}$, на элементе A^0-комодуля M — $\Delta m = m_{(0)} \otimes m_{(1)} \in M \otimes A^0$.

Теорема. а) *Существует подалгебра Хопфа $H \subset A^0$ с биективным антиподом γ такая, что $\mathcal{C}$ эквивалентна категории правых комодулей* comod-$H \hookrightarrow A$-mod.

б) *Симметрия в* comod-H *определяется некоторой билинейной невырожденной формой* $\rho\colon H \otimes H \to \mathbb{C}$ *по формуле*

$$S\,(m \otimes n) = n_{(0)} \otimes m_{(0)}\rho(m_{(1)} \otimes n_{(1)}).$$

в) *Форма ρ удовлетворяет тождествам*

$$\rho(g_{(1)} \otimes h_{(1)})\rho(h_{(2)} \otimes g_{(2)}) = \varepsilon(g)\varepsilon(h), \quad g_{(1)}h_{(1)}\rho(h_{(2)} \otimes g_{(2)}) = \rho(h_{(1)} \otimes g_{(1)})h_{(2)}g_{(2)},$$
$$\rho(hx \otimes g) = \rho(h \otimes g_{(1)})\,\rho\,(x \otimes g_{(2)}), \qquad \rho(g, h) = \rho(\gamma h, g).$$

В примере 3 $H = \mathbb{C}G$ — групповая алгебра, $\rho(g, h) = f(g, h)$, $g, h \in G$.

Предложение. *Существуют изоморфизм алгебр, антиизоморфизм коалгебр $\chi_1\colon H \to A$ и антиизоморфизм алгебр, изоморфизм коалгебр $\chi_2\colon H \to A$ такие, что $\langle h, \chi_1 g\rangle = \rho(g, h) = \langle g, \chi_2 h\rangle$. Антиподы алгебр A и H определяются формулами* $\gamma_A = \chi_1 \circ \chi_2^{-1}$, $\gamma_H = \chi_1^{-1} \circ \chi_2$.

Автор искренне благодарен Ю. Л. Далецкому и Л. И. Вайнерману за внимание к работе и за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Trostel R. Generalized Grassmanian analysis, vector-valued differential forms on Banach spaces, and generalized variational self-adjointness//Hadr. J. — 1983. — V. 6, № 6. — P. 1518—1578.

[2] Гуревич Д. И. Операторы обобщенного сдвига на группах Ли//Изв. АН АрмССР. 1983. — Т. 18, № 4. — С. 305—317.

[3] Дринфельд В. Г. О постоянных квазиклассических решениях квантового уравнения Янга — Бакстера//ДАН СССР. — 1983. — Т. 273, № 3. — С. 531—535.

[4] Мосолова М. В. О функциях от некоммутирующих операторов, порождающих градуированную алгебру Ли//Мат. заметки. — 1981. — Т. 29, вып. 1. — С. 35—44.

[5] Sweedler M. E. Hopf algebras. — New York: Benjamin, 1969.

Киевский политехнический институт

Поступило в Правление общества 12 мая 1986 г.