И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, Скобка Схоутена и гамильтоновы операторы, *Функц. анализ и его прил.*, 1980, том 14, выпуск 3, 71–74

Функциональный анализ и его приложения,
т. 14, вып. 3, 1980, 71—74.

УДК 519.3

СКОБКА СХОУТЕНА И ГАМИЛЬТОНОВЫ ОПЕРАТОРЫ

И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман

1. Основные объекты. Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная алгебра Ли, M — левый $\mathfrak{A}$-модуль, т. е. имеют место соотношения $a_1 a_2 m - a_2 a_1 m = [a_1, a_2] m$. Подобная ситуация следующим образом возникает в формальном вариационном исчислении: рассматривается алгебра полиномов от символов $u_\alpha^{(i)}$, где α пробегает множество I, $i = 0, 1, \ldots$, оператор $d/dx = \sum\limits_{i,\alpha} u_\alpha^{(i+1)} \partial / \partial u_\alpha^{(i)}$ играет в A роль дифференцирования по x; в качестве алгебры Ли $\mathfrak{A}$ берется пространство $\bar{A}$ последовательностей $h = \{h_\alpha\}$, $h_\alpha \in A$, снабженное коммутатором

$$[h, g]_\alpha = \sum_{i,\beta} \left(h_\beta^{(i)} \frac{\partial g_\alpha}{\partial u_\beta^{(i)}} - g_\beta^{(i)} \frac{\partial h_\alpha}{\partial u_\beta^{(i)}} \right), \tag{1}$$

в качестве же модуля M берется пространство $\tilde{A} = A / (d/dx) A$, элементы которого называются функционалами; действие $\bar{A}$ на $\tilde{A}$ задается формулой $h\tilde{f} = \int \sum\limits_\alpha (\delta f / \delta u_\alpha) h_\alpha \, dx$.

Коммутатор (1), введенный в работах [1] — [2], играет в данной теории чрезвычайно важную роль. Другим примером является следующий: $\mathfrak{A}$ — алгебра Ли векторных полей на многообразии X, $M = C^\infty(X)$.

Пусть C^q — пространство q-линейных кососимметричных функций $\omega(a_1, \ldots, a_q)$ на $\mathfrak{A}$ со значениями в M, $C^0 \equiv M$. Пространство $\bigoplus\limits_q C^q$ становится комплексом, если дифференциал $d\colon C^q \to C^{q+1}$ ввести обычным образом (формулу см. в [3]); если $m \in M$ — 0-форма, эта формула дает $dm(a) = am$, если $\xi\colon \mathfrak{A} \to M$ — 1-форма, то $d\xi(a_1, a_2) = a_1 \xi(a_2) - a_2 \xi(a_1) - \xi([a_1, a_2])$. Для $a \in \mathfrak{A}$ оператор $i_a\colon C^q \to C^{q-1}$ внутреннего умножения на a определяется так: $(i_a \omega)(a_1, \ldots, a_{q-1}) = \omega(a, a_1, \ldots, a_{q-1})$, $i_a \equiv 0$ на C^0. Оператор производной Ли L_a вводится следующим образом: $L_a = i_a d + d i_a$.

Ввиду того что в M нет, вообще говоря, структуры кольца (так, функционалы перемножать нельзя), выделить локальные формы так называемым условием $\mathcal{F}$-линейности мы не можем, поэтому мы вводим следующие дополнительные объекты: пусть в каждом C^q фиксировано подпространство $\Omega^q \subset C^q$ так, что выполнены следующие аксиомы: 1) $d\Omega^q \subset \Omega^{q+1}$, 2) $i_a \Omega^q \subset \Omega^{q-1}$. В дальнейшем для $\xi \in \Omega^1$, $a \in \mathfrak{A}$ значение $\xi(a) \in M$ обозначается через (ξ, a) или (a, ξ). Будем предполагать, что из $(\xi, a) = 0$ для всех $\xi \in \Omega^1$ следует $a = 0$.

2. Скобка Схоутена. Пусть $H\colon \Omega^1 \to \mathfrak{A}$ — линейный оператор. Назовем его кососимметричным, если $(H\xi_1, \xi_2) = -(\xi_1, H\xi_2)$ для любых $\xi_1, \xi_2 \in \Omega^1$. Для двух кососимметричных операторов $H, K\colon \Omega^1 \to \mathfrak{A}$ мы построим новый объект — их *скобку Схоутена* $[H, K]$. Это — трилинейное отображение Ω^1 в M, определенное формулой

$$[H, K](\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (K L_{H\xi_1} \xi_2, \xi_3) + (H L_{K\xi_1} \xi_2, \xi_3) + (\text{цикл}), \tag{2}$$

где слово (цикл) здесь и далее означает сумму по циклическим перестановкам индексов (1, 2, 3). Скажем, что кососимметричный оператор является *гамильтоновым*, если $[H, H] = 0$ *).

Предложение 1. *Если $H\colon \Omega^1 \to \mathfrak{A}$ — гамильтонов оператор, то M является алгеброй Ли относительно скобки $\{m_1, m_2\}_H = (H dm_1, dm_2)$. Отображение $Hd\colon M \to \mathfrak{A}$ является морфизмом алгебр Ли.*

---

*) В § 1 работы [3] было дано определение гамильтоновости в терминах симплектической структуры. Нетрудно показать, что принятое в данной работе определение обобщает определение из [3]; отличие заключается в том, что здесь мы не требуем, чтобы $\operatorname{Im} H$ был подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{A}$. Можно проверить также, что принятое в [3] определение скобки Схоутена (формула (5.2)) в рамках формального вариационного исчисления в точности совпадает с приведенным здесь.

Доказательство. Для произвольных m_1, m_2, $m_3 \in M$ имеем

$$0 = {}^1/_2\, [H, H]\, (dm_1, dm_2, dm_3) = (Hdi_{Hdm_1}dm_2, dm_3) + (\text{цикл}) = \\ = (Hd\,\{m_1, m_2\}_H, dm_3) + (\text{цикл}) = \{\{m_1, m_2\}_H, m_3\}_H + (\text{цикл}),$$

так что тождество Якоби имеет место. Далее,

$$(Hd\,\{m_1, m_2\}_H, \xi) = (L_{Hdm_2}\xi, Hdm_1) + (L_{H\xi}dm_1, Hdm_2) = ([Hdm_1, Hdm_2], \xi),$$

и, поскольку ξ — произвольный элемент Ω^1, это означает, что $Hd\,\{m_1, m_2\}_H = [Hdm_1, Hdm_2]$. Предложение доказано.

Естественно, таким образом, называть элемент $Hdm \in \mathfrak{A}$ *гамильтоновым полем* с гамильтонианом $m \in M$.

3. Гамильтоновы пары. Скажем, что два кососимметричных оператора $H, K\colon \Omega^1 \to \mathfrak{A}$ образуют гамильтонову пару, если всякая их линейная комбинация есть гамильтонов оператор или, что то же самое, выполнены равенства $[H, H] = [H, K] = [K, K] = 0$.

Теорема 2. *Пусть операторы H, $K\colon \Omega^1 \to \mathfrak{A}$ образуют гамильтонову пару. Пусть 1-формы φ, ψ, $\chi \in \Omega^1$ удовлетворяют равенствам*

$$K\psi = H\varphi, \qquad K\chi = H\psi. \tag{3}$$

Тогда для любых ξ, $\eta \in \Omega^1$ имеет место формула

$$d\chi\,(K\xi, K\eta) = d\psi\,(K\xi, H\eta) + d\psi\,(H\xi, K\eta) - d\varphi\,(H\xi, H\eta). \tag{4}$$

Доказательство. Имеем

$$d\chi\,(K\xi, K\eta) = (L_{K\xi}\chi, K\eta) - (K\eta)\,(\psi, H\xi) = \\ = -(L_{K\chi}\,\eta, K\xi) - (L_{K\eta}\xi, K\chi) - (K\eta)\,(\psi, H\xi) = -(L_{H\psi}\eta, K\xi) - (L_{K\eta}\xi, H\psi) - \\ - (K\eta)\,(\psi, H\xi) = (L_{H\eta}\xi, K\psi) + (L_{H\xi}\psi, K\eta) + (L_{K\xi}\psi, H\eta) + (L_{K\psi}\eta, H\xi) - \\ - (K\eta)\,(\psi, H\xi) = -(L_{H\xi}\varphi, H\eta) + (L_{H\xi}\psi, K\eta) + (L_{K\xi}\psi, H\eta) - (K\eta)\,(\psi, H\xi) = \\ = -d\varphi\,(H\xi, H\eta) - (H\eta)\,(\varphi, H\xi) + d\psi\,(H\xi, K\eta) + (K\eta)\,(\psi, H\xi) + d\psi\,(K\xi, H\eta) + \\ + (H\eta)\,(\psi, K\xi) - (K\eta)\,(\psi, H\xi) = d\psi\,(K\xi, H\eta) + d\psi\,(H\xi, K\eta) - d\varphi\,(H\xi, H\eta).$$

Мы использовали здесь последовательно условия $[K, K] = 0$, $[H, K] = 0$ и $[H, H] = 0$, учитывая всюду равенства (3).

Следующий результат представляет собой алгебраизацию так называемой схемы Ленарта (см. [3], §§ 3, 7). Введем следующее

Определение. Если $m \in M$, $a \in \mathfrak{A}$ и $am = 0$, будем называть m *законом сохранения* для a.

Обозначим через $\mathscr{H}^1_K(\mathfrak{A}, M, \Omega^1)$ фактор-пространство $\{\chi \in \Omega^1\colon d\chi\,(K\xi, K\eta) = 0\ \forall \xi, \eta \in \Omega^1\}/dM$.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{H}^1_K(\mathfrak{A}, M, \Omega^1) = 0$ и пусть задана гамильтонова пара операторов H, $K\colon \Omega^1 \to \mathfrak{A}$. Если последовательность $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots \in \Omega^1$ удовлетворяет равенствам $K\xi_{i+1} = H\xi_i$, причем ξ_0, $\xi_1 \in dM$, то*

а) *существуют $m_0, m_1, m_2, \ldots \in M$, такие, что $\xi_i = dm_i$, $i = 0, 1, \ldots$,*

б) *при фиксированном j элементы m_j являются законами сохранения для каждого из гамильтоновых полей $a_i = Kdm_i$,*

в) *законы сохранения m_i находятся в инволюции как относительно скобки $\{\ ,\ \}_H$, так и относительно скобки $\{\ ,\ \}_K$.*

Доказательство проводится по аналогии с доказательством теоремы 3.4 работы [3].

4. Скобка Нейенхейса. Пусть имеется соотношение между элементами $\mathfrak{A}$, т. е. в $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ зафиксировано подмножество $\mathscr{A} \subset \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$. По $\mathscr{A}$ построим соотношение между элементами Ω^1, т. е. подмножество $\mathscr{A}^* \subset \Omega^1 \times \Omega^1$, определяемое так: $(\eta_1, \eta_2) \in \mathscr{A}^* \Leftrightarrow \eta_2(a_1) - \eta_1(a_2) = 0$ для всех $(a_1, a_2) \in \mathscr{A}$ ($\mathscr{A}^*$ естественно называть сопряженным к $\mathscr{A}$). Определим еще соотношение между тройками $\eta_1, \eta_2, \eta_3 \in \Omega^1$, т. е. подмножество $\mathscr{A}^*_1 \subset \Omega^1 \times \Omega^1 \times \Omega^1$, следующим образом: $(\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathscr{A}^*_1 \Leftrightarrow (\eta_1, \eta_2) \in \mathscr{A}^*$ & $(\eta_2, \eta_3) \in \mathscr{A}^*$. *Скобкой Нейенхейса* $\mathscr{A}$ (с собой) мы будем называть отображение $[\mathscr{A}, \mathscr{A}]\colon \mathscr{A} \times \mathscr{A} \times \mathscr{A}^*_1 \to M$, действующее на элементы $\bar{a} = (a_1, a_2) \in \mathscr{A}$, $\bar{b} = (b_1, b_2) \in \mathscr{A}$, $\bar{\eta} = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathscr{A}^*_1$ по формуле

$$[\mathscr{A}, \mathscr{A}]\,(\bar{a}, \bar{b}, \bar{\eta}) = \eta_1([a_2, b_2]) - \eta_2([a_2, b_1]) + [a_1, b_2]) + \eta_3([a_1, b_1]). \tag{5}$$

Поляризацией можно определить и скобку двух соотношений $[\mathscr{A}, \mathscr{B}]$. Отметим, что, как нетрудно вывести из формулы (5), если $[\mathscr{A}, \mathscr{A}] = 0$, то и $[\mathscr{A}^{-1}, \mathscr{A}^{-1}] = 0$, где через $\mathscr{A}^{-1}$ обозначено обратное соотношение, определяемое таким образом: $(a, b) \in \mathscr{A}^{-1} \Leftrightarrow \Leftrightarrow (b, a) \in \mathscr{A}$.

Поясним причину названия «скобка Нейенхейса». Если $\mathscr{A}$ есть график линейного оператора $A\colon \mathfrak{A} \to \mathfrak{A}$, то $\bar{a} = (a_1, Aa_1)$, $\bar{b} = (b_1, Ab_1)$ и формула (5) приобретает вид $\eta_1([Aa_1, Ab_1] - A[Aa_1, b_1] - A[a_1, Ab_1] + A^2[a_1, b_1])$. Именно таким образом определяется в дифференциальной геометрии скобка Нейенхейса оператора A с собой (см., например, [4]).

Предложение 4. *Пусть $H, K\colon \Omega^1 \to \mathfrak{A}$ — гамильтонова пара. Тогда соотношение $\mathscr{A}_{HK} = \{(H\xi, K\xi), \xi \in \Omega^1\} \subset \mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ удовлетворяет условию $[\mathscr{A}_{HK}, \mathscr{A}_{HK}] = 0$.*

Доказательство получается непосредственно из определений. Этот результат — алгебраизация теоремы 4.2 работы [3], утверждающей, что «частное» двух гамильтоновых операторов (если оно имеет смысл) удовлетворяет условию обращения в 0 скобки Нейенхейса.

5. Реализация $\bar{A}$. Рассмотрим кольцо A многочленов от символов $u^{(i)}_{k\alpha\beta}$, $1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant l$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, $i = 0, 1, \ldots$ Как уже было сказано в п. 1, алгебра Ли $\mathfrak{A}$ состоит из всевозможных наборов $h = \{h_{k\alpha\beta}\}$, $h_{k\alpha\beta} \in A$. Необходимо еще задать Ω^1. Элемент $\xi \in \Omega^1$ будет определяться набором $\{\xi_{k\alpha\beta}\}$, $\xi_{k\alpha\beta} \in A$; значение 1-формы ξ на элементе $h \in \bar{A}$ задается формулой $(\xi, h) = \int \Big(\sum\limits_{k, \alpha, \beta} \xi_{k\alpha\beta} h_{k\alpha\beta}\Big)\, dx \in \tilde{A}$.

Введем кольцо формальных интегродифференциальных операторов. Использование этого кольца в данной теории было независимо проведено в работах Ю. И. Манина [5] и И. М. Гельфанда и Л. А. Дикого [6]. Итак, формальным интегродифференциальным оператором мы называем здесь формальный ряд вида $\sum\limits_{-\infty}^{N} a_k (d/dx)^k$, где a_k — матрицы порядка $l \times l$, элементы которых лежат в A. Если ввести операцию умножения с помощью соотношения $(d/dx)^{-1} a = \sum\limits_{j=0}^{\infty} (-1)^j a^{(j)} (d/dx)^{-j-1}$, то множество R всех формальных интегродифференциальных операторов превращается в ассоциативное кольцо. R является прямой суммой подколец R_+ дифференциальных операторов и R_- — интегральных операторов. Мы используем далее обозначение B_+ (B_-) для дифференциальной (интегральной) части оператора $B \in R$. На пространстве R вводится след Sp по формуле $\mathrm{Sp}\Big(\sum\limits_{-\infty}^{N} a_k (d/dx)^k\Big) = \int (\mathrm{tr}\, a_{-1})\, dx \in \tilde{A}$, где tr — обычный матричный след. След Sp обладает важным свойством: $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$.

Установим соответствие между 1-формами и элементами R_-. Каждой 1-форме $\xi = \{\xi_{k\alpha\beta}\} \in \Omega^1$ сопоставим $X_\xi \in R_-$ согласно формуле $X_\xi = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (d/dx)^{-k-1} \xi_k^t$, где ξ_k^t — матрица, транспонированная к матрице с элементами $(\xi_{k\alpha\beta})$. Кроме того, сопоставим всякому элементу $h \in \mathfrak{A} = \bar{A}$ дифференциальный оператор $F_h \in R_+$ согласно формуле $F_h = \sum\limits_{k=0}^{n-1} h_k (d/dx)^k$, где h_k — матрица с элементами $(h_{k\alpha\beta})$. Таким образом, Ω^1 реализовано в R_-, а $\bar{A}$ — в R_+. При этом $(\xi, h) = \mathrm{Sp}(X_\xi F_h)$.

Формула $hf = \sum\limits_{k, \alpha, \beta, i} (\partial f / \partial u^{(i)}_{k\alpha\beta})\, h^{(i)}_{k\alpha\beta}$, $h \in \bar{A}$, $f \in A$, определяет действие $\bar{A}$ на A; очевидно, что $h(fg) = (hf)g + f(hg)$, так что $\bar{A}$ реализуется в алгебре Ли дифференцирований кольца A. Для $B = \sum\limits_{-\infty}^{N} b_k (d/dx)^k \in R$ положим $hB = \sum\limits_{-\infty}^{N} (hb_k)(d/dx)^k$, где h действует на матрицы b_k поэлементно. Тогда, как нетрудно проверить, $h(BC) = (hB)C + B(hC)$, так что $\bar{A}$ реализуется в алгебре Ли дифференцирований кольца R. Формула (1) переходит в соотношение $F_{[a, b]} = aF_b - bF_a$, откуда получаем $(L_a\xi, h) = \mathrm{Sp}((aX_\xi)F_h + X_\xi(hF_a))$.

6. Пример: вторая гамильтонова структура уравнения Лакса. Перейдем к описанию так называемой второй гамильтоновой структуры уравнения Лакса. Гипотеза

о ее гамильтоновости была выдвинута в работе М. Адлера [7]; доказательство гамильтоновости было дано в [8]. Данное изложение следует идее работы [8].

Выберем фиксированный оператор L порядка n и для данного $\xi \in \Omega^1$ построим дифференциальный оператор

$$F_h = L\,(X_\xi L)_+ - (LX_\xi)_+ L \equiv (LX_\xi)_- L - L\,(X_\xi L)_-. \tag{6}$$

Всякому $\xi \in \Omega^1$ сопоставлен, таким образом, элемент $h = H\xi \in \mathfrak{A} = \overline{A}$. Легко проверить, что построенный оператор H: $\Omega^1 \to \mathfrak{A}$ кососимметричный.

Теорема 5. *Пусть* $L = \sum_{k=0}^{n-1} u_k\,(d/dx)^k + C$, *где* u_k — *матрицы с элементами* $(u_{k\alpha\beta})$, C — *дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами порядка не выше* n. *Тогда соответствующий* L *оператор* H *является гамильтоновым.*

Доказательство. Положим для краткости $X_i = X_{\xi_i}$. Имеем

$$-(HL_{H\xi_1}\xi_3, \xi_2) + (\text{цикл}) = \operatorname{Sp}\,(((H\xi_1)\,X_3)\,F_{H\xi_2} + X_3\,(H\xi_2)\,F_{H\xi_1}) + (\text{цикл}) =$$
$$= \operatorname{Sp}(((H\xi_2)X_1)F_{H\xi_3} + ((H\xi_2)F_{H\xi_1})X_3) + (\text{цикл}) =$$
$$= \operatorname{Sp}\,([F_{H\xi_2}(X_1L)_+ + L\,(X_1F_{H\xi_2})_+ - (F_{H\xi_2}X_1)_+L - (LX_1)_+F_{H\xi_2}]\,X_3) + (\text{цикл}) =$$
$$= \operatorname{Sp}\,(F_{H\xi_2}\,[(X_1L)_+X_3 + (X_3L)_-X_1 - X_1\,(LX_3)_- - X_3\,(LX_1)_+]) + (\text{цикл}) =$$
$$= \sum_{\sigma\in S_3} \operatorname{sgn}\sigma\,\operatorname{Sp}\,(F_{H\xi\sigma(2)}\,[X_{\sigma(1)}\,(LX_{\sigma(3)})_+ - (X_{\sigma(1)}L)_-X_{\sigma(3)}]) =$$
$$= \sum_{\sigma\in S_3} \operatorname{sgn}\sigma\,\operatorname{Sp}\,[(LX_{\sigma(2)})_-LX_{\sigma(1)}\,(LX_{\sigma(3)})_+ - (X_{\sigma(1)}L)_-X_{\sigma(3)}L\,(X_{\sigma(2)}L)_+] = 0.$$

Мы использовали при преобразованиях приведенные в п. 5 формулы, равенство $hL = F_h$, перестановочное свойство следа и в последнем равенстве следующий факт: $\sum_{\sigma\in S_3} \operatorname{sgn}\sigma\,\operatorname{Sp}\,(P_{\sigma(1)})_-P_{\sigma(2)}\,(P_{\sigma(3)})_+ = 0$ для любых $P_1, P_2, P_3 \in R$.

Следствие. *Пусть оператор* L *удовлетворяет условиям теоремы* 5, H — *соответствующий ему, согласно* (6), *оператор*, $A_1, \ldots, A_s$ — *постоянные* $l \times l$-*матрицы*, $K_1, \ldots, K_s$: $\Omega^1 \to \mathfrak{A}$ — *операторы, определенные соотношениями* $F_{K_i\xi} = A_i\,(X_\xi L)_+ - (LX_\xi)_+A_i$. *Тогда операторы* $H, K_1, \ldots, K_s$ *образуют гамильтоново семейство, т. е. каждые два из них образуют гамильтонову пару.*

Доказательство получаем переходом от L к $L - \sum_1^s \zeta_i A_i$. В частном случае $C = (d/dx)^n$, $s = 1$, $A_1 = E$, соответствующие операторы K и H — это первая и вторая гамильтоновы структуры уравнения Лакса.

Институт прикладной математики
АН СССР
Институт химической физики
АН СССР

Поступило в редакцию
19 марта 1980 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Дикий Л. А., УМН XXX, вып. 5 (1975), 67—100. 2. Гельфанд И. М., Дикий Л. А., Функц. анализ 10, вып. 1 (1976), 18—25. 3. Гельфанд И. М., Дорфман И. Я., Функц. анализ 13, вып. 4 (1979), 13—30. 4. Stone A. P., Canad. J. Math. 25, № 5 (1973), 903—907. 5. Манин Ю. И., Современные проблемы математики 11 (1978), 5—152. 6. Гельфанд И. М., Дикий Л. А., Функц. анализ 10, вып. 4 (1976), 13—29. 7. Adler M., On a trace functional for formal pseudodifferential operators and the symplectic structure of the Korteweg—de Vries equation, Preprint, 1979. 9. Гельфанд И. М., Дикий Л. А., Семейство гамильтоновых структур, связанных с интегрируемыми нелинейными дифференциальными уравнениями, Препринт ИПМ АН СССР, № 136, 1978.