Ю. В. Егоров, Микролокальный анализ, *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления*, 1988, том 33, 5–156

УДК 517.95+517.98

1. МИКРОЛОКАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Ю. В. Егоров

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Микролокальным анализом называется локальный анализ в пространстве кокасательного расслоения. Замечательные успехи теории дифференциальных уравнений в последние двадцать лет стали возможны именно благодаря широкому применению идеи микролокализации. Гамильтоновы системы, канонические преобразования, лагранжевы многообразия и другие понятия, которые используются в теоретической механике для изучения процессов в фазовом пространстве, становятся в последние годы центральными объектами теории дифференциальных уравнений. Например, эволюция особенностей решений дифференциального уравнения наиболее естественно описы-

вается в терминах лагранжевых многообразий и гамильтоновых систем, условия разрешимости формулируются в терминах поведения интегральных кривых гамильтоновой системы, гамильтонианом которой служит характеристическая форма, класс псевдодифференциальных уравнений естественно возникает из дифференциальных под действием канонических преобразований, класс субэллиптических операторов определяется с помощью скобок Пуассона и т. д. При этом трудность микролокального анализа связана с принципом неопределенностей, не позволяющим локализовать функцию в любой окрестности точки кокасательного пространства.

Статья содержит обзор наиболее интересных с нашей точки зрения достижений микролокального анализа за последние годы. К сожалению, многие важные результаты не нашли в ней отражения из-за недостатка места. Не является полным и список литературы, более полные списки можно найти в книгах [18], [47], [103], [108], [157], [160].

Автор благодарит В. Я. Иврия за полезные критические замечания.

Глава 1

МИКРОЛОКАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

§ 1. Микролокализация

Одной из важнейших задач теории дифференциальных уравнений является изучение особенностей решений. Так же, как и в других математических дисциплинах, функции в этой теории часто рассматриваются по модулю гладких, так что точками, в которых функция бесконечно дифференцируема, можно пренебрегать. Такой подход отражает физическую реальность: особые точки соответствуют явлениям, наиболее интересным с точки зрения каждой физической теории.

При изучении физических процессов, происходящих в ограниченном объеме, широко используется принцип *локальности*. Его сущность состоит в том, что зная состояние процесса в некоторый момент времени в фиксированной области Ω физического пространства, можно, используя физические законы, определить ход процесса в области Ω', лежащей строго внутри Ω для некоторого промежутка времени в будущем. В течение этого времени влияние процессов, происходящих вне Ω, еще не скажется на явлениях в Ω', поскольку оно распространяется с конечной скоростью.

Можно ввести и более общий принцип *микролокальности*, рассматривая явление в ограниченной области фазового про-

странства. Зная состояние процесса в такой области для некоторого момента времени, можно описать этот процесс для близкого будущего точек, лежащих строго внутри этой области. Физически это означает, что изменение импульса также происходит с конечной скоростью в силу конечности действующих сил.

Указанные принципы получают отражение в математической физике при изучении особенностей решений дифференциальных уравнений. Именно, локальными свойствами таких решений называются те свойства, которые не меняются при умножении этих решений на гладкие функции с малым носителем. Микролокальными свойствами решения естественно назвать те его свойства, которые не изменяются при «умножении» решения на гладкую функцию с носителем в малой окрестности данной точки в фазовом пространстве. Эта операция, однако, является более сложной и фактически состоит в умножении на обычную гладкую срезающую функцию с малым носителем, применении преобразования Фурье, последующем умножении на гладкую срезающую функцию двойственных координат и применении обратного преобразования Фурье. Вместо преобразования Фурье можно использовать другое разложение на плоские волны, например, преобразование Радона. Фактически же, микролокальный анализ — это локальный анализ на пространстве кокасательного расслоения.

При этом особенностью микролокального анализа является тот факт, что локализация в фазовом пространстве возможна лишь до определенного предела: локализация пространственных координат препятствует локализации импульсов. Этот факт носит в квантовой механике название принципа неопределенности.

Применение принципа микролокальности в теории дифференциальных уравнений с частными производными в последние два десятилетия оказалось чрезвычайно плодотворным. Каждую функцию (обычную или обобщенную) можно рассматривать как совокупность дифференциальных линейных уравнений, которым она удовлетворяет. Принцип микролокальности естественно расширяет эту совокупность до системы псевдодифференциальных уравнений, получающихся из дифференциальных при преобразованиях фазового пространства, сохраняющих его структуру. Применяя принцип микролокальности, мы не только получаем более точное описание особых точек распределения, но получаем также возможность более простого описания процесса распространения этих особенностей, а также возможность перенесения на распределение операций, определенных первоначально только для гладких функций: взятие следа, перемножения и пр.

Поясним идею микролокализации следующим простым примером. Пусть n — натуральное число, $n\geqslant 2$ и f — функция в $\mathbf{R}^n$,

имеющая вид $f(x)=g(\alpha\cdot x)$, где $\alpha\in\mathbf{R}^n\setminus 0$, $\alpha\cdot x=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j x_j$, g — функция одной переменной. Если функция $g(t)$ имеет особенность — например, недифференцируема, при $t=t_0$, то для f особыми будут все точки x, лежащие на плоскости $\alpha\cdot x=t_0$. Однако f является гладкой функцией в каждом направлении, лежащем на этой плоскости, так что особым для нее будет только направление вектора α. Теорема Радона позволяет представить каждое распределение f из $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ в виде интеграла от плоских волн

$$f(x)=\int\limits_{|\alpha|=1} g_\alpha(\alpha\cdot x)\,d\alpha.$$

Поэтому в каждой точке x особыми будут те направления α, для которых распределение $g_\alpha(t)$ имеет особенность в точке $t=x\cdot\alpha$. Если вместо теоремы Радона использовать преобразование Фурье, то f представляется в виде интеграла от плоских волн

$$f(x)=\int g(\alpha)\,e^{i\alpha\cdot x}\,d\alpha,$$

где интеграл берется по всему $\mathbf{R}^n$. При этом особыми для f оказываются те направления α, по которым функция $g(t\alpha)$ убывает недостаточно быстро при $t\to\infty$.

Как уже говорилось, принцип микролокальности широко применяется в современной теории дифференциальных уравнений при изучении особенностей решения. Многие важные результаты, полученные с помощью этого принципа в последние годы в теории краевых задач, в спектральной теории, в теории функций многих комплексных переменных и других областях математики, указывают на большие потенциальные возможности микролокального анализа.

§ 2. Волновой фронт распределения. Его функториальные свойства

2.1. Определение волнового фронта. Понятие особой точки распределения не является однозначным. В зависимости от рассматриваемой задачи особой может быть названа точка разрыва, или точка, в которой функция обращается в ∞, или точка, в которой функция имеет существенную особенность в смысле теории функции комплексной переменной и т. д. Для общей теории распределений наиболее естественным является следующее

Определение 2.1. Точка x_0 не является особой для распределения u, если существует такая функция φ из $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, что $\varphi(x_0)\neq 0$ и $\varphi u\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Из определения следует, что множество особых точек распределения замкнуто. Это множество называется носителем особенностей распределения u и обозначается $\operatorname{sing\,supp} u$. Легко видеть, что это множество инвариантно относительно диффеоморфизмов пространства, так что понятие носителя особенностей без труда может быть определено для распределений на гладком многообразии.

Для гладкого многообразия X будем обозначать $T^*(X)$ пространство кокасательного расслоения и $T^*(X)\setminus 0$ — это пространство с выброшенным нулевым сечением (см. например, [2], [18]). Следующее определение и примеры принадлежат Хёрмандеру. Сразу же отметим, что существуют и используются в общей теории многочисленные родственные понятия: аналитический волновой фронт, волновой фронт Жевре, фронт осцилляций и др. (см. [108], [160] и п. 4.2 главы 6).

Определение 2.2. Точка $(x_0, \xi_0)\in T^*(\mathbf{R}^n)\setminus 0$ не принадлежит *волновому фронту* распределения u из $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, если существует такая функция φ из пространства $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, что $\varphi(x_0)\neq 0$, и такой конус Γ в пространстве $\mathbf{R}^n$ с вершиной в начале координат, содержащий внутри себя луч $\{\xi;\ \xi=t\xi_0,\ t>0\}$, что для всех $\xi\in\Gamma$ и всех целых N выполнены соотношения

$$|\widetilde{\varphi u}(\xi)|=O((1+|\xi|)^{-N}).$$

Волновый фронт распределения u обозначается $\mathrm{WF}\,(u)$.

Пример 2.1. Если распределение u является плоской волной, т. е. $u(x)=g(\alpha\cdot x)$, где $\alpha\in\mathbf{R}^n\setminus 0$, $g\in\mathscr{D}'(\mathbf{R})$, то всякое направление ξ_0, неколлинеарное вектору α, является неособым для u, т. е. $\mathrm{WF}(u)$ состоит из тех точек (x_0, ξ_0), для которых $\xi_0=t\alpha$ при $t\in\mathbf{R}\setminus 0$ и $\alpha\cdot x_0\in\operatorname{sing\,supp} g$.

Пример 2.2. Пусть $\eta\in\mathbf{R}^n\setminus 0$, $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\tilde{\varphi}(0)=1$ и $\tilde{\varphi}(0)>0$. Тогда для непрерывной в $\mathbf{R}^n$ функции

$$u(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi(kx)}{k^2}\,e^{ik^2(x,\eta)}$$

волновой фронт состоит из луча $\{(0,t\eta),\ t>0\}$ ([106]).

Суммируя по η, можно получить из данного примера функцию, у которой волновой фронт совпадает с произвольным замкнутым коническим подмножеством в $T^*(\mathbf{R}^n)\setminus 0$.

2.2. Локализация волнового фронта. Сравнительно просто проверяются следующие свойства волнового фронта (см. [104], [108], [18]):

1°. Если $u\in\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, $\varphi\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, то

$$\mathrm{WF}\,(\varphi u)\subset\mathrm{WF}\,(u).$$

2°. Если $\pi: T^*(\mathbf{R}^n)\to\mathbf{R}^n$ — естественная проекция, то $\pi\mathrm{WF}\,(u)=\operatorname{sing\,supp} u$ для каждого распределения u из $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

2.3. Волновой фронт и особенности одномерных распределений. Пусть X и Y — гладкие многообразия и $f: X \to Y$ — гладкое отображение.

Отображение f называется *собственным*, если множество $f^{-1}(K)$ компактно для каждого компакта K из Y. Если $\varphi \in C_0^\infty(Y)$ и f — собственное отображение, положим

$$\langle f_* u, \varphi \rangle = \langle u, f^* \varphi \rangle.$$

Тогда $f^*\varphi \in C_0^\infty(X)$ и отображение f^* непрерывно из $\mathcal{D}(Y)$ в $\mathcal{D}(X)$. Это позволяет определить по двойственности *прямой образ* $f_* u$ для каждого *распределения* $u \in \mathcal{D}'(X)$ так, что

$$\langle f_* u, \varphi \rangle = \langle u, f^* \varphi \rangle.$$

Та же конструкция очевидно применима для произвольного (не обязательно собственного) отображения f в том случае, когда u имеет компактный носитель, т. е. $u \in \mathcal{E}'(X)$.

Обратный образ распределения $f^* u$ определен в том случае, когда f является наложением X на Y. Последнее означает, что для каждой точки $y \in Y$ множество $f^{-1}(y)$ является гладким подмногообразием в X и все эти подмногообразия диффеоморфны фиксированному гладкому многообразию размерности k. Локально такое отображение является проектированием и при подходящем выборе локальных координат сводится к проекции $\mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^l \to \mathbf{R}^k$. Если $\varphi \in C_0^\infty(X)$, носитель φ лежит в координатной окрестности и $x = (x', x'')$, где $x' \in \mathbf{R}^k$, $x'' \in \mathbf{R}^l$, то $f_*\varphi(x') = \int \varphi(x', x'')\, dx''$. Положим теперь для $u \in \mathcal{D}'(Y)$

$$\langle f^* u, \varphi \rangle = \langle u, f_* \varphi \rangle.$$

Если f одновременно является собственным отображением и наложением (например, f является диффеоморфизмом), то определены одновременно $f^* u$ и $f_* v$ для каждых $u \in \mathcal{D}'(Y)$, $v \in \mathcal{D}'(X)$.

Пример 2.3. Пусть π: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^1$ — проекция на ось x_1. В этом случае определены как $\pi^* u$ для $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$, так и $\pi_* v$ для $v \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$, причем

$$\pi^* v(x^1) = u(x^1) \otimes 1_{x_2, \ldots, x_n};$$

$$\pi_* v(x) = \int v(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_2 \ldots dx_n.$$

Используя эти понятия, можно показать, что справедлива

Теорема 2.1. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$, $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$. Точка (x_0, ξ_0) из $T^*\Omega \setminus 0$ не принадлежит $WF(u)$ тогда и только тогда, когда существует такая функция φ из $C_0^\infty(\Omega)$, что $\varphi(x_0) \neq 0$, и такое $\varepsilon > 0$, что для каждой гладкой функции $f: \operatorname{supp} \varphi \to \mathbf{R}$, для которой $|\operatorname{grad} f(x_0) - \xi_0| < \varepsilon$, функция $f_*(\varphi u)(t)$ бесконечно дифференцируема на прямой ([95], [19]).

2.4. Волновые фронты прямого и обратного образов распределения.

Теорема 2.2. Пусть отображение $f:X\to Y$ является наложением и $u\in\mathscr{E}'(X)$. Тогда

$$\mathrm{WF}(f_*u)\subset\{(f(x),\ \eta):x\in X,\ (x,\ {}^tf_x'\eta)\in\mathrm{WF}(u)\ \text{или}\ {}^tf_x'\eta=0\},$$

где ${}^tf_x'$ — матрица, транспонированная к матрице Якоби f_x' отображения f ([104]).

Пример 2.4. Пусть $\pi:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^1$ — проекция на ось x_1, т. е. $\pi(x_1, x_2)=x_1$.

Матрица Якоби имеет вид $\pi_x'=(1, 0)$ и

$$\mathrm{WF}\left(\int u(x_1,\ x_2)\,dx_2\right)\subset\{(x_1,\ \eta);\ \exists\, x_2,\ (x_1,\ x_2,\ \eta,\ 0)\in\mathrm{WF}(u)\}.$$

Таким образом, $\mathrm{WF}(\pi_*u)$ содержится в множестве проекций тех точек из волнового фронта распределения u, в которых особые направления параллельны оси x_1.

Обратный образ распределения f^*u был определен выше только для f, являющихся наложениями. Можно пытаться определить его в более общем случае по непрерывности, полагая $f^*u=\lim f^*u_j$, где $\{u_j\}$ — последовательность обычных функций, сходящаяся к u в $\mathscr{D}'(Y)$ и $f^*u_j(x)=u_j(f(x))$. Как показал Хёрмандер [104], такой подход приводит к следующему утверждению.

Теорема 2.3. Пусть $f:X\to Y$ — гладкое отображение. Положим

$$N_f=\{(y,\eta)\in T^*Y\setminus 0;\ \exists x\in X,\ y=f(x),\ {}^tf_x'\eta=0\}.$$

Если $u\in D'(Y)$, $\mathrm{WF}(u)\cap N_f=\varnothing$, то распределение f^*u может быть определено по непрерывности, причем

$$\mathrm{WF}(f^*u)\subset\{(x,\ \xi);\exists(y,\ \eta)\in\mathrm{WF}(u),\ y=f(x),\ \ \xi={}^tf'(x)\eta\}.$$

При этом обратный образ f^*u определяется однозначно.

Пример 2.5. Пусть M — гладкое k-мерное подмногообразие в $\mathbf{R}^n$ и ρ — гладкая функция, заданная на M. Пусть $u(x)=\rho\otimes\delta(M)$. Тогда

$$\mathrm{WF}(u)\subset N(M)\setminus 0,$$

где $N(M)$ — пучок конормалей к M, $N(M)\subset T^*(\mathbf{R}^n)$. Если $\rho(x_0)\neq 0$, то $(x_0,\ \xi)\in\mathrm{WF}(u)$ в том и только в том случае, когда вектор ξ направлен по нормали к M. Это следует из теоремы 2.3, если рассмотреть наложение $\mathbf{R}^n\to M$.

§ 3. Волновой фронт и операции над распределениями

3.1. След распределения. Произведение распределений. Покажем, как, используя теоремы предыдущего параграфа, можно ввести для распределений некоторые операции, определенные первоначально для гладких функций.

Теорема 3.1. Пусть X — гладкое многообразие, Y — глад-

кое подмногообразие в X, а $N(Y)$ — пучок нормалей к Y, касательных к X. Пусть $u \in \mathscr{D}'(X)$ и $\mathrm{WF}(u) \cap N(Y) = \varnothing$. Тогда сужение $u|_Y$ может быть определено как i^*u, где $i: Y \to X$ — вложение. При этом, если $(y, \eta) \in \mathrm{WF}(u|_Y)$, то существует такой вектор $\xi \in N(Y)$, что $(y, \eta+\xi) \in \mathrm{WF}(u)$ ([108]).

Эта теорема сразу следует из теоремы 2.3, поскольку $N_i = N(Y)$.

Теорема 3.2. Пусть X — гладкое многообразие, u_1 и $u_2 \in \mathscr{D}'(X)$, причем $\mathrm{WF}(u_1) + \mathrm{WF}(u_2) \subset T^*X \setminus 0$. Тогда распределение $u_1 u_2 \in \mathscr{D}'(X)$ может быть определено как $\Delta^*(u_1 \otimes u_2)$, где $\Delta: X \to X \times X$ — диагональное отображение. При этом

$$\mathrm{WF}(u_1, u_2) \subset \{(x, \xi+\eta);\ (x, \xi) \in \mathrm{WF}(u_1), \text{ или } \xi = 0,$$
$$(x, \eta) \in \mathrm{WF}(u_2) \text{ или } \eta = 0;\ \xi+\eta \neq 0\} \qquad [108]$$

И здесь применима теорема 2.3, поскольку $N_\Delta = \{(x, x, \xi, -\xi)\}$.

Пример 3.1. Если Y и Z — подмногообразия в X, пересекающиеся трансверсально, u и v — гладкие плотности на Y и Z, соответственно, то uv — гладкая плотность на $Y \cap Z$.

3.2. Волновой фронт решения дифференциального уравнения.

Теорема 3.3. Пусть $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, $P(x, D_x)$ — дифференциальный оператор с гладкими коэффициентами и $P(x, D_x)u = f \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Тогда

$$\mathrm{WF}(u) \subset \mathrm{Char}\, P = \{(x, \xi) \in T^*(\mathbf{R}^n) \setminus 0,\ P_0(x, \xi) = 0\},$$

где P_0 — характеристическая форма оператора P.

В общем случае $\mathrm{WF}(u) \subset \mathrm{WF}(Pu) \cup \mathrm{Char}\, P$. Если, в частности, P — *эллиптический* оператор, т. е. $\mathrm{Char}\, P = \varnothing$, то $\mathrm{WF}(Pu) = \mathrm{WF}(u)$ ([108]).

Напомним, что оператор P называется *гипоэллиптическим*, если $\operatorname{sing\,supp} Pu \supset \operatorname{sing\,supp} u$.

Если $\mathrm{WF}(Pu) \supset \mathrm{WF}(u)$ для каждого $u \in \mathscr{E}'(X)$, то оператор P называется *микролокально гипоэллиптическим*. Вопрос об особенностях решения дифференциального уравнения будет рассмотрен ниже, в главе 4, а сейчас отметим одно из следствий теорем 3.1. и 3.3.

Теорема 3.4. Пусть $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^{n+1})$, $P(t, x, D_t, D_x)u = f \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1})$, $t \in \mathbf{R}$, $x \in \mathbf{R}^n$. Если плоскость $t=0$ нехарактеристическая, т. е. $P_0(0, x; 1, 0) \neq 0$, то определены следы $D_t^k u(0, x) \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$ при всех $k \geqslant 0$. При этом

$$u \in C^\infty(\mathbf{R};\ \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)). \qquad ([108]).$$

Это утверждение следует из теоремы 3.1, поскольку точки $(0, x, \tau, 0)$ не лежат в $\mathrm{WF}(u)$, так что $\mathrm{WF}(u) \cap N(M_0) = \varnothing$, где M_0 — плоскость $t=0$.

3.3. Волновые фронты и интегральные операторы. Пусть Ω_1 и Ω_2 — области в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$ соответственно. Пусть A — линей-

ный непрерывный оператор из $\mathscr{D}(\Omega_2)$ в $D'(\Omega_1)$ с ядром Шварца K из $\mathscr{D}'(\Omega_1\times\Omega_2)$. Рассмотрим множества

$$M_1=\{(x,\ \xi);\exists y\in\Omega_2,\ (x,\ y,\ \xi,\ 0)\in\mathrm{WF}(K)\},$$
$$M_2=\{(y,\ \eta);\ \exists x\in\Omega_1,\ (x,\ y,\ 0,\ -\eta)\in\mathrm{WF}(K)\}.$$

Теорема 3.5. Пусть $K\in\mathscr{D}'(\Omega_1\times\Omega_2)$, $u\in\mathscr{E}'(\Omega_2)$, причем $M_1=\varnothing$, $M_2\cap\mathrm{WF}(u)=\varnothing$. Тогда определено распределение

$$Au(x)=\int K(x,\ y)\,u(y)\,dy\in\mathscr{D}'(\Omega_1)$$

$$\mathrm{WF}(Au)\subset\{(x,\ \xi);\ \exists(y,\ \eta),\ (x,\ y,\ \xi,\ -\eta)\in\mathrm{WF}(K),\ (y,\ \eta)\in\mathrm{WF}(u)\}.$$

Отметим, что произведение $K(x,\ y)u(y)$ определено по теореме 3.2, поскольку $M_2\cap\mathrm{WF}(u)=\varnothing$. Условие $M_1=\varnothing$ означает, что $A:C_0^\infty(\Omega_2)\to C^\infty(\Omega_1)$, т. е. гладкие функции при этом отображении переходят в гладкие.

Глава 2

ПСЕВДОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 1. Алгебра псевдодифференциальных операторов

1.1. Сингулярные интегральные операторы. Во многих вопросах теории дифференциальных уравнений с частными производными возникает необходимость использования *сингулярных операторов*, т. е. операторов вида

$$Au(x)=\int K(x,\ x-y)\,u(y)\,dy, \tag{1}$$

где $K(x,\ z)$ — функция, имеющая при $z=0$ особенность, и $K(x,\ tz)=t^{-n}K(x,\ z)$ при $t>0$. Предполагая, что

$$\int\limits_{|z|=1}K(x,\ z)\,dz=0,$$

можно корректно определить оператор A в смысле главного значения, т. е.

$$Au(x)=\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ R\to\infty}}\int\limits_{\varepsilon<|x-y|<R}K(x,\ x-y)\,u(y)\,dy.$$

В работах Жиро, Корна, Лихтенштейна было показано, что оператор A является ограниченным оператором в пространствах C^α при $0<\alpha<1$. В работах Кальдерона и Зигмунда доказана его ограниченность в пространствах L_p при $p>1$.

Эти теоремы важны для изучения гладкости решений эллиптических уравнений. Фундаментальное решение $F(x, x-y)$ эллиптического дифференциального оператора $L(x, D)$ порядка m имеет при $x=y$ особенность порядка $|x-y|^{m-n}$. Поэтому производные порядка m решения уравнения $Lu=f$ выражаются через f с помощью сингулярных интегральных операторов. Таким образом, если $Lu \in L_p(\Omega)$ при $p>1$, то $D^\alpha u \in L_p^{\mathrm{loc}}(\Omega)$ при $|\alpha| \leqslant m$, а если $Lu \in C^\alpha(\Omega)$, $0<\alpha<1$, то $u \in C^{m+\alpha}(\Omega)$.

Операторы вида $\Sigma(a_\alpha(x)+A^\alpha)D^\alpha$, где A_α — сингулярные интегральные операторы, называются *сингулярными интегро-дифференциальными операторами*. Нетрудно видеть, что такие операторы образуют алгебру. В этой алгебре эллиптические дифференциальные операторы являются обратимыми с точностью до компактных операторов.

1.2. Символ. В работах С. Г. Михлина было отмечено, что каждому оператору A вида (1) можно сопоставить функцию $a(x, \xi)$, определенную на кокасательном пространстве. Эта функция называется *символом* и играет важную роль в исчислении сингулярных интегродифференциальных операторов. Различные варианты этого исчисления разработаны в работах А. С. Дынина, М. С. Аграновича, М. И. Вишика, Г. И. Эскина, Кона, Хёрмандера, Ниренберга, Сили, Унтербергера и Бокобза. Наиболее популярной в настоящее время является теория псевдодифференциальных операторов, оформленная впервые в работе [114] Кона и Ниренберга.

Псевдодифференциальным называется оператор вида

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\int a(x, \xi)\,\tilde{u}(\xi)\,e^{i(x,\xi)}\,d\xi. \tag{2}$$

Здесь $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\tilde{u}(\xi)=\int u(y)\,e^{-i(y,\xi)}\,dy$ — преобразование Фурье функции u. Функция a называется *символом* оператора A. Предполагается, что

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|} \tag{3}$$

при всех α и β из $\mathbf{Z}_+{}^n$. Постоянные $C_{\alpha,\beta}$ могут зависеть от компакта K, которому принадлежит точка x. В том случае, когда a является многочленом от ξ, оператор A оказывается дифференциальным. В частности, если $a=1$, то $A=I$. Класс символов a, удовлетворяющих (3), обозначается S^m.

Число m называется *порядком* оператора A. В том случае, когда a удовлетворяет неравенствам (3) при любом $m \in \mathbf{R}$, говорят, что порядок оператора A равен $-\infty$. Множество таких символов обозначается $S^{-\infty}$. Псевдодифференциальный оператор A с символом a из S^m называется *классическим*, если определена такая последовательность символов $a_j \in S^{m-j}$, $j=0, 1,$

2, ..., что $a_j(x, t\xi)=t^{m-j}a_j(x, \xi)$ при $t>1$, $|\xi|>1$ и

$$\left|D_\xi^\alpha D_x^\beta\left(a(x, \xi)-\sum_{j=0}^{N} a_j(x, \xi)\right)\right| \leqslant C_{\alpha,\beta,N}|\xi|^{m-N-1-|\alpha|}$$

для всех α, β, $|\xi|>1$ и всех целых $N\geqslant 0$. В этом случае употребляется обозначение $a\sim\Sigma a_j$. Функция a_0 называется *главным символом* оператора A. Класс таких символов обозначается S_{cl}^m.

1.3. Ограниченность псевдодифференциальных операторов. Приведем несколько основных теорем об ограниченности рассматриваемых операторов.

1°. Оператор (2) переводит $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ в $C^\infty(\mathbf{R}^n)$ и может быть расширен до оператора $A:\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)\to\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$.

2°. Если $m<-n$, то $Au(x)=\int K(x, x-y)u(y)\,dy$, где $K(x, z)=(2\pi)^{-n}\int a(x, \xi)e^{iz\cdot\xi}d\xi\in C^{-m-n}(\mathbf{R}^{2n})$. В частности, если порядок оператора A равен $-\infty$, то $K\in C^\infty$. В этом случае, если $u\in\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, то $Au(x)=\langle u_y, K(x, x-y)\rangle\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Такие операторы называются *сглаживающими*.

Если $m\geqslant -n$, то ядро $K(x, z)$ может быть определено из равенства

$$|z|^{2N}K(x, z)=(2\pi)^{-n}\int[(-\Delta_\xi)^N a(x, \xi)]\,e^{iz\cdot\xi}d\xi$$

при $2N>m+n$, которое можно получить, интегрируя по частям. Из этого равенства видно, что $K\in C^\infty$ при $z\neq 0$ и $|K(x, z)|\leqslant\leqslant C|z|^{-2N}$, т. е. особенность ядра может быть только степенной.

Оператор A с ядром Шварца $K(x, x-y)$ называется собственным, если $K(x, z)=0$ при $|z|>\rho$, где $\rho>0$ и $K\in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$. Такой оператор переводит функции из $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ в функции из $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ и распределения из $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ в распределения $\mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$.

Пусть $h(z)$ — некоторая функция из $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, равная 0 при $|z|<\rho$, и $h(z)=1$ при $|z|>2\rho$, где $\rho>0$. Пусть A — псевдодифференциальный оператор с ядром Шварца $K(x, x-y)$. Положим $K_1(x, y)=h(x-y)\cdot K(x, x-y)$; $K_2(x, y)=[1-h(x-y)]K(x, x-y)$ и пусть A_1 и A_2 — операторы с ядрами K_1 и K_2, соответственно. Поскольку $K_1\in C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$, оператор A_1 является сглаживающим. Оператор A_2 является собственным. Отметим, что символ псевдодифференциального оператора восстанавливается по его ядру с помощью формулы

$$a(x, \xi)=(2\pi)^n\int K(x, x-y)\,e^{i(y-x)\cdot\xi}dy.$$

Таким образом, каждый псевдодифференциальный оператор является суммой собственного и сглаживающего операторов. Это обстоятельство позволяет определить алгебру псевдодифферен-

циальных операторов, рассматриваемых с точностью до сглаживающих.

3^0. Пусть A — псевдодифференциальный оператор порядка m и его символ равен нулю при больших значениях $|x|$. Тогда оператор A определяет непрерывное отображение

$$A: H_s \to H_{s-m}$$

для каждого вещественного s.

1.4. Композиция псевдодифференциальных операторов. Если A и B — псевдодифференциальные операторы порядков m и m' соответственно и оператор B является собственным, то определена композиция $C = A \circ B$, которая является псевдодифференциальным оператором порядка $m+m'$ с символом

$$C(x, \xi) \sim \sum \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha a(x, \xi) D_x^\alpha b(x, \xi). \tag{4}$$

Эта формула является обобщением классической формулы Лейбница.

1.5. Формально сопряженный оператор. Назовем оператор A^* *формально сопряженным* к оператору A, если

$$\int Au(x)\overline{v(x)}\,dx = \int u(x)\,\overline{A^*v(x)}\,dx; \quad u, v \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Если A — псевдодифференциальный оператор порядка m, то оператор A^* также является псевдодифференциальным, имеет тот же порядок и его символ

$$a^*(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_\xi^\alpha D_x^\alpha \overline{a(x, \xi)}. \tag{5}$$

Отметим, что псевдодифференциальные операторы могут быть определены в пространствах вектор-функций. В этом случае их символы являются матрицами. В правой части формулы (5) в таком случае должна стоять матрица ${}^t a$, сопряженная к a. Остальные формулы справедливы без изменения.

1.6. Псевдолокальность. Микролокальность. Хорошо известно (см. [103]), что дифференциальные операторы и только они являются *локальными* линейными операторами, действующими из $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ в $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, т. е. такими, что $\operatorname{supp} Pu \subset \operatorname{supp} u$ для всех функций $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Псевдодифференциальные операторы обладают более слабым свойством *псевдолокальности*:

$$\operatorname{sing\,supp} Au \subset \operatorname{sing\,supp} u,$$

а также свойством *микролокальности*:

$$WF(Au) \subset WF(u).$$

Волновой фронт распределения u можно определить с помощью псевдодифференциальных операторов: точка (x_0, ξ_0) не принадлежит $WF(u)$ для распределения u с компактным носи-

телем в $\mathbf{R}^n$ тогда и только тогда, когда существует псевдодифференциальный оператор A с главным символом $a(x, \xi)$, для которого $a(x_0, \xi_0) \neq 0$ и $Au \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

1.7. Эллиптические операторы. Оператор A порядка m называется *эллиптическим*, если $|a(x, \xi)| \geqslant C_0|\xi|^m - C_1$, где $C_0 = \mathrm{Const} > 0$. Эллилтические операторы обратимы в рассматриваемой алгебре с точностью до сглаживающих операторов. Точнее говоря, для каждого эллиптического оператора A порядка m и для каждого компакта K существует такой эллиптический оператор Q порядка $-m$, что $QA = I + T_1$, $AQ = I + T_2$, и операторы T_1, T_2 имеют порядок $-\infty$ в K. Отсюда сразу следует, что эллиптические операторы гипоэллиптичны, т. е. $u \in C^\infty$ в каждом открытом множестве, на котором $Au \in C^\infty$.

Оператор A порядка m называется эллиптическим в точке (x_0, ξ_0) из $T^*(\mathbf{R}^n) \setminus 0$, если $|a(x, \xi)| \geqslant C_0|\xi|^m - C_1$ для (x, ξ) из конической окрестности точки (x_0, ξ_0). *Конической окрестностью*, как обычно, называется множество

$$\left\{(x, \xi);\ |x - x_0| < \delta_1,\ \left|\frac{\xi}{|\xi|} - \frac{|\xi_0|}{|\xi_0|}\right| < \delta_2\right\}.$$

Для эллиптического в точке оператора A может быть построен микролокальный *параметрикс*, т. е. такой оператор Q порядка $-m$, что

$$Q\varphi A = \varphi I + T_1,\ A\varphi Q = \varphi I + T_2,$$

где $\varphi(x, D)$ — псевдодифференциальный оператор порядка 0, символ которого имеет носитель в достаточно малой конической окрестности точки (x_0, ξ_0) и равен единице в меньшей конической окрестности Γ этой точки, а символы операторов T_1 и T_2 равны нулю в Γ.

1.8. Неравенство Гординга. Если A — классический псевдодифференциальный оператор порядка m с главным символом $a_0(x, \xi)$ и $\mathrm{Re}\, a_0(x, \xi) \geqslant C_0|\xi|^m$, где $C_0 = \mathrm{Const}$, $|\xi| \geqslant 1$, то

$$\mathrm{Re}\,(Au, u) \geqslant C_0 \|u\|^2_{m/2} - C_1 \|u\|^2_{(m-1)/2}$$

для всех u из $C_0^\infty(K)$, $C_1 = C_1(K)$ ([108]).

Отсюда можно получить следующую точную оценку нормы оператора через его символ. Пусть $B(x, D)$ — псевдодифференциальный оператор порядка m с главным символом $b_0(x, \xi)$ и $|b_0(x, \xi)| \leqslant M$ при $|\xi| = 1$. Тогда для любого вещественного числа s можно найти такую постоянную $C = C(s)$, что

$$\|Bu\|_{s-m} \leqslant M\|u\|_s + C\|u\|_{s-1/2},\quad u \in C_0^\infty.$$

1.9. Расширение класса псевдодифференциальных операторов. Операторы вида

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int\int a(x, y, \xi)\, u(y)\, e^{i(x-y)\xi}\, dy\, d\xi, \tag{6}$$

где символ a удовлетворяет неравенствам

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta D_y^\gamma a(x, y, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|\xi|)^{m-|\alpha|},$$

также являются псевдодифференциальными. При этом символ b такого оператора имеет следующее асимптотическое представление

$$b(x, \xi) \sim \sum_\alpha \frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!} D_y^\alpha D_\xi^\alpha a(x, y, \xi)|_{y=x}.$$

Таким образом, классы операторов, определяемых формулами (2) и (6), совпадают. В форме (6) представляются *операторы Вейля*:

$$Wu(x) = (2\pi)^{-n} \int\int a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) e^{i(x-y)\xi} dy d\xi, \qquad (7)$$

где $a \in S^m$.

§ 2. Инвариантность главного символа относительно канонических преобразований

2.1. Инвариантность относительно замены переменных. Рассмотрим вначале вопрос об инвариантности определения псевдодифференциального оператора относительно замены переменных. Запишем псевдодифференциальный оператор A в форме (6) и заменим x на $f(x')$, y на $f(y')$. Заметим сразу, что

$$x - y = f(x') - f(y') = F(x', y')(x' - y'),$$

где $F(x', y') = \int\limits_0^1 \frac{\partial f(y' + t(x' - y'))}{\partial x} dt$. Если заменить ξ на ${}^tF(x', y')^{-1}\eta$, то получим

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int\int a(x, \xi) u(y) e^{i(x-y)\xi} dy d\xi =$$

$$= (2\pi)^{-n} \int\int a(f(x'), {}^tF(x', y')^{-1}\eta) V(y') e^{i(x'-y')\eta} \frac{|f'(y')|\, dy' d\eta}{|{}^tF(x', y')|},$$

где $v(y') = u(y)$. Полученный оператор имеет вид (1.6) и потому является псевдодифференциальным. Его главный символ вычисляется в соответствии с п. 1.9 и равен $a_0(f(x'), {}^tf'(x')^{-1}\xi)$. Это означает, что главный символ псевдодифференциального оператора инвариантно определен на кокасательном пространстве.

Таким образом, при замене переменных класс псевдодифференциальных операторов сохраняется. Это позволяет определить псевдодифференциальный оператор на гладком многообразии.

Определение 2.1. Пусть X — гладкое многообразие. Непрерывное линейное отображение $A: C_0^\infty(X) \to C_\infty(X)$ называется псевдодифференциальным оператором на X, если для каждой координатной окрестности $U \subset X$, которой соответствует координатное отображение $\varphi: U \to \omega$, где ω — область в $\mathbf{R}^n$, отображение $C_0^\infty(\omega) \ni u \to (\varphi^{-1})^* A(\varphi^* u) \in C^\infty(\omega)$ является оператором вида (2).

Определение 2.2 Пусть X — гладкое многообразие, E и F — гладкие комплексные расслоения над X. Непрерывное линейное отображение $A: C_0^\infty(X, E) \to C^\infty(X, F)$ называется псевдодифференциальным оператором, если для каждого открытого подмножества $V \subset X$, для которого $E|_V$ и $F|_V$ диффеоморфны $V \times \mathbf{C}^{m_1}$ и $V \times \mathbf{C}^{m_2}$, соответственно, существует такая $m_2 \times m_1$ — матрица псевдодифференциальных операторов A_{ij} над V, что

$$(Au|_V)_i = \sum_{j=1}^{m_1} A_{ij}(u|_V)_j, \quad u \in C_0^\infty(V, E).$$

2.2. Субглавный символ. Инвариантность главного символа относительно замены переменных позволяет определить для псевдодифференциальных операторов на многообразии различные классы, которые характеризуются главным символом: эллиптические, операторы главного типа и др. При изучении операторов с кратными характеристиками существенную роль играет *субглавный символ*

$$a_{\mathrm{sub}}(x, \xi) = a_1(x, \xi) - \frac{1}{2i} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 a_0(x, \xi)}{\partial x_j \partial \xi_j},$$

который инвариантно определен на множестве двойных характеристик оператора A:

$$\Sigma_2 = \{(x, \xi);\ a_0(x, \xi) = 0,\ d_{x,\xi} a_0(x, \xi) = 0\}.$$

2.3. Канонические преобразования. Можно рассмотреть более широкий класс преобразований, при которых псевдодифференциальные операторы переходят в псевдодифференциальные.

Положим

$$\Phi u(x) = (2\pi)^{-n} \int b(x, \xi) \tilde{u}(\xi) e^{iS(x, \xi)} d\xi, \tag{8}$$

где S — вещественнозначная гладкая функция на $T^*\mathbf{R}^n$, причем $S(x, t\xi) = tS(x, \xi)$ при $t \geqslant 1$, $|\xi| \geqslant 1$ и $\det \|\partial^2 S / \partial x_i \partial \xi_j\| \neq 0$ при $|\xi| \geqslant 1$. Относительно символа b будем предполагать, что $b \in S^0$ и $|b(x, \xi)| \geqslant C_0 > 0$ при $|\xi| \geqslant 1$.

Теорема 2.1 ([14], [18]). Каждому псевдодифференциальному оператору A порядка m соответствует такой псевдодифференциальный оператор A' того же порядка, что опера-

тор $\Phi A - A'\Phi$ является сглаживающим. Если $a_0(x, \xi)$ — главный символ оператора A, то главный символ оператора A' определяется равенством

$$a_0'\left(x, \frac{\partial S(x, \xi)}{\partial x}\right) = a_0\left(\frac{\partial S(x, \xi)}{\partial \xi}, \xi\right).$$

Утверждение из п. 2.1 вытекает отсюда, если положить $S(x, \xi) = f(x)\cdot\xi$.

Преобразование $(x, \xi)\mapsto(y, \eta)$, при котором

$$\xi = \frac{\partial S(x, \eta)}{\partial x}, \quad y = \frac{\partial S(x, \eta)}{\partial \eta},$$

называется каноническим, а функция S в этом случае называется производящей функцией канонического преобразования.

Канонические преобразования играют важную роль в классической механике (см. [2]). Вообще, каноническим называется такое преобразование пространства $\mathbf{R}^{2n}$ точек $(x, \xi) = (x_1, \ldots, x_n, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, при котором сохраняются скобки Пуассона

$$\{f, g\}(x, \xi) = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial f(x, \xi)}{\partial \xi_j}\frac{\partial g(x, \xi)}{\partial x_j} - \frac{\partial f(x, \xi)}{\partial x_j}\frac{\partial g(x, \xi)}{\partial \xi_j}\right)$$

для любой пары функций f, g из $C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$. Поскольку в теории дифференциальных уравнений переменные x и ξ неравноправны, мы рассматриваем здесь только однородные канонические преобразования, т. е. такие, производящие функции которых удовлетворяют условию однородности: $S(x, t\xi) = tS(x, \xi)$ при $t \geqslant 1$, $|\xi| \geqslant 1$. Однако в общей теории дифференциальных уравнений используются и произвольные канонические преобразования (см. [18], [35]).

2.4. Обратная теорема. Можно показать, что класс однородных канонических преобразований, указанный выше, является максимальным допустимым классом преобразований, сохраняющим алгебру классических псевдодифференциальных операторов. Это сразу видно из того, что главный символ оператора $[A, B] = AB - BA$ пропорционален скобке Пуассона главных символов операторов A и B. Поэтому каждому такому преобразованию соответствует однородное каноническое преобразование пространства T^*R^n и, следовательно, однородная производящая функция S и оператор Φ вида (8).

В действительности справедливо и более сильное утверждение (см. [50]; впервые утверждение такого рода получено Зингером). Пусть X, Y — гладкие многообразия, причем $H_1(T^*X\setminus 0, C) = 0$. Пусть $L^m(X)$ — пространство классических псевдодифференциальных операторов порядка m с символами $a(x, \xi)$, допускающими асимптотическое разложение $a \sim \Sigma a_j$, где $a_j(x, t\xi) = t^{m-j}a_j(x, \xi)$ при $t > 1$, $|\xi| > 1$, так что $L^\infty(X) = \cup L^m(X)$. Пусть i — такой изоморфизм алгебр $L^\infty(X) \to L^\infty(Y)$,

что $i: L^m(X) \to L^m(Y)$ для всех $m \in \mathbf{Z}$. Тогда существует такой обратимый интегральный оператор Фурье $A: C^\infty(Y) \to C^\infty(X)$, что $A \cdot i(P) = P \cdot A$. Фазовая функция этого оператора определяет микролокально каноническое преобразование, позволяющее вычислить главный символ оператора $i(P)$.

§ 3. Канонические формы символа

3.1. Простые характеристические точки. Использование канонических преобразований существенно облегчает изучение дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений. Отметим, что такой подход в рамках теории «чистых» дифференциальных уравнений невозможен. Класс псевдодифференциальных операторов получается естественным образом при применении канонических преобразований к дифференциальным операторам.

Микролокальное изучение уравнения $A(x, D)u = f(x)$ в нехарактеристической точке (x^0, ξ^0) легко проводится после построения в конической окрестности этой точки параметрикса, о чем говорилось в п. 1.7.

Следующими по сложности являются простые характеристические точки. Допустим, что главный символ a_0 оператора A является вещественнозначной функцией, $a_0(x^0, \xi^0) = 0$, $d_\xi a_0(x^0, \xi^0) \neq 0$, $|\xi^0| > 1$. Тогда в конической окрестности точки (x^0, ξ^0) символ оператора a может быть приведен к виду $q(x, \xi)\xi'$, где q — символ эллиптического оператора порядка $m-1$. Обращая оператор Q с символом q, мы можем, таким образом, свести исследование уравнения $Au = f$ к решению уравнения вида $D_1 v = g$.

Для построения искомого канонического преобразования укажем способ отыскания его производящей функции. Поскольку уравнение $Au = f$ эквивалентно уравнению вида $\Lambda^{1-m} Au = \Lambda^{1-m} f$, где Λ — оператор с символом $(1 + |\xi|^2)^{1/2}$, то можно считать, не ограничивая общности, что порядок m оператора A равен 1. С помощью поворота $x' = Tx$ можно добиться, чтобы выполнялось условие $da^0(x^0, \xi^0)/\partial\xi_1 \neq 0$. Искомое каноническое преобразование $\Phi: (x, \xi) \to (y, \eta)$ должно быть таким, что $a_0(x, \xi) = \eta_1$. Это дает дифференциальное уравнение

$$a_0\left(x, \frac{\partial S(x, \eta)}{\partial x}\right) = \eta_1.$$

Добавим к нему начальные условия:

$$S = \sum_{j=2}^{n} x_j \eta_j \text{ при } x_1 = x_1^0.$$

По построению, плоскость $x_1 = x_1^0$ нехарактеристическая и потому эта задача Коши имеет единственное решение в некоторой

окрестности точки (x^0, η^0), где вектор η^0 находится из условия $\frac{\partial S(x^0, \eta^0)}{\partial x}=\xi^0$, так что $\eta_j^0=\xi_j^0$ при $j=2, \ldots, n$, $\eta_1^0=0$. Легко проверяется, что $S(x, t\eta)=tS(x, \eta)$ при $t>0$ и что $\det\|\partial^2 S/\partial x_i \partial\eta_j\|(x^0, \eta^0)\neq 0$.

Аналогично находится каноническое преобразование, после которого $a_0(x, \xi)=\eta_1$, и в том случае, когда $d_\xi a_0(x^0, \xi^0)=0$, но $d_x a_0(x^0, \xi^0)\neq 0$ и форма $d_x a_0(x^0, \xi^0)$ неколлинеарна форме $\xi^0 dx$. В этом случае мы ищем производящую функцию $S=S(y, \xi)$. Пусть для определенности $d_x a_0(x^0, \xi^0)=dx_1$ и $\xi_1{}^0=0$, $|\xi^0|\geqslant 1$. Функция S должна удовлетворять уравнению

$$a^0\left(\frac{\partial S(y, \xi)}{\partial \xi}, \xi\right)=\frac{\partial S}{\partial y_1},$$

к которому добавляются начальные условия

$$S=\sum_{j=2}^{n} y_j\xi_j+\frac{\xi_1^2}{2|\xi|} \text{ при } y_1=0.$$

Такая задача имеет единственное решение в окрестности точки (y^0, ξ^0). Здесь вектор y определяется из условия $x^0=\frac{\partial S(y^0, \xi^0)}{\partial \xi}$, так что $x_j^0=y_j^0$ при $j=2, \ldots, n$, $y_1^0=0$. Легко проверяется, что $S(y, t\xi)=tS(y, \xi)$ при $t>0$ и что $\det\|\partial^2 S(y^0, \xi^0)/\partial y_i\partial\xi_j\|\neq 0$.

Построив производящую функцию $S(x, \eta)$ или $S(y, \xi)$ в конической окрестности рассматриваемой точки, можно затем продолжить ее на окрестность вида $\omega\times \mathbf{R}^n$, так что S останется при $|\xi|\geqslant 1$ невырожденной однородной функцией. Применяя оператор Φ вида

$$\Phi v(x)=(2\pi)^{-n}\int \tilde{v}(\xi)\, e^{iS(x,\xi)}d\xi,$$

можно привести уравнение $Au=f$ первого порядка к виду $Bv=g$, причем главный символ $b_0(y, \eta)$ в конической окрестности точки (y^0, η^0) совпадает с η_1. После этого можно найти такой эллиптический оператор Q нулевого порядка, что оператор RBQ будет иметь полный символ η_1 в конической окрестности точки (y^0, η^0). Здесь R — параметрикс для оператора Q.

В заключение приведем

Определение 3.1. Оператор $A(x, D)$ называется оператором *главного типа*, если в каждой характеристической точке $(x^0, \xi^0)\in T^*\Omega$ форма $d_{x,\xi}a_0(x, \xi)$ непропорциональна форме $\xi^0 dx$.

Из приведенных результатов видно, что исследование уравнения главного типа $Au=f$ с вещественнозначным главным символом сводится к решению эллиптических уравнений и уравнения вида $D_1 v=g$. Отметим следующее

Предложение 3.1. Если $A(x, D)$ и $B(x, D)$ — псевдодифференциальные операторы главного типа с одинаковыми

главными символами: $a_0=b_0$, то существуют такие эллиптические псевдодифференциальные операторы $R(x, D)$ и $S(x, D)$ нулевого порядка, что оператор $AR—SB$ является сглаживающим (см. [18]).

3.2. Двукратные характеристики. Если $a_0(x, \xi)=p^2(x, \xi)$, где p — вещественнозначный символ главного типа первого порядка, то оператор A с главным символом a_0 микролокально эквивалентен каждому оператору вида $D_1^2+C(x, D)$, где $C(x, D)$ — оператор первого порядка, главный символ которого при $\xi_1=0$ совпадает с субглавным символом оператора A.

В общем случае, когда главный символ $a_0(x, \xi)$ принимает вещественные значения, причем $a_0(x^0, \xi^0)=0$, $|\xi^0|\geqslant 1$, $da^0(x^0, \xi^0)=0$, но $d^2a_0(x^0, \xi^0)\neq 0$, вопрос о приведении символа к каноническому виду в окрестности точки (x^0, ξ^0) решается в случае общего положения, при условии отсутствия резонансов — см. [43].

3.3. Комплекснозначный символ. В том случае, когда главный символ a_0 оператора $A(x, D)$ является комплекснозначной функцией, возникает вопрос об одновременном приведении к каноническому виду пары функций $\alpha=\operatorname{Re} a_0$ и $\beta=\operatorname{Im} a_0$. Приведем несколько известных результатов. Два оператора А и В называются эквивалентными в точке (x^0, ξ^0), если существуют такой эллиптический псевдодифференциальный оператор Q и такой интегральный оператор Фурье Φ вида (7), что главные символы операторов $QA\Phi$ и ΦB совпадают в некоторой конической окрестности точки (x^0, ξ^0).

1°. Если $a_0(x^0, \xi^0)=0$, $\xi^0\neq 0$ и A — оператор главного типа с главным символом a_0, то A эквивалентен в точке (x^0, ξ^0) оператору с символом $i\xi_1+b(x, \xi')$, где $\xi'=(\xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\xi_1^0=0$, гладкая вещественнозначная функция b не зависит от ξ_1 и $b\in S^1(\mathrm{R}^{n-1})$ при каждом фиксированном значении переменной x_1 (см. [18]).

2°. Если $a_0(x^0, \xi^0)=0$, $\xi^0\neq 0$ и формы $d_\xi\alpha(x^0, \xi^0)$, $d_\xi\beta(x^0, \xi^0)$ линейно независимы, то оператор A эквивалентен в точке (x^0, ξ^0) оператору с символом $i\xi_1+\xi_2+a(x_1-x_1^0)|\xi|+\gamma(x, \xi')$, где $a=\mathrm{const}$, $\xi_1^0=\xi_2^0=0$, $\gamma(x^0, \xi^{0\prime})=0$, $d_x\gamma(x^0, \xi^{0\prime})=0$ (см. [18]).

3°. Если $a_0(x^0, \xi^0)=0$, $\{\alpha, \beta\}(x^0, \xi^0)\neq 0$, то оператор A эквивалентен в точке (x^0, ξ^0) оператору с символом $\xi_1+ix_1\xi_2$, $\xi_1^0=0$, $x_1^0=0$, $\xi_2^0\neq 0$ (см. [145]).

4°. Пусть $a_0(x^0, \xi^0)=0$ и формы $d\alpha(x^0, \xi^0)$, $d\beta(x^0, \xi^0)$ и ξ^0dx линейно независимы. Пусть $\{\alpha, \beta\}(x, \xi)=0$ во всех характеристических точках (x, ξ) из некоторой конической окрестности точки (x^0, ξ^0). Тогда оператор $A(x, D)$ эквивалентен в точке (x^0, ξ^0) оператору D_1+iD_2 (см. [152]).

3.4. Каноническая форма символа в окрестности границы. Пусть X — симплектическое многообразие, F и G — две гиперповерхности в X, определяемые уравнениями $f=0$ и $g=0$. По-

верхности F и G называются скользящими в точке $\rho \in \Gamma \cap G$, если df и dg линейно независимы в этой точке, $\{f, g\}(\rho)=0$, но $\{f, \{f, g\}\}(\rho) \neq 0$ и $\{g, \{f, g\}\}(\rho) \neq 0$. Мелроуз (см. [127]) доказал, что каждая пара скользящих поверхностей с помощью канонического преобразования приводится к виду $f=x_1$, $g=\xi_1^2-x_1-\xi_2$, а если рассматривать только однородные по ξ канонические преобразования, то к виду: $f=x_1$, $g=\xi_1^2-x_1\xi_2^2-\xi_2\xi_3$.

Пусть A — строго гиперболический оператор второго порядка в области $\Omega=\{x \in \mathbf{R}^n, \quad x_1>0\}$, $n \geqslant 3$, $a(x, \xi)$ — его главный символ, ρ — точка из $T^*(\partial\Omega)\setminus 0$, $a(\rho)=0$, $\{a, x_1\}(\rho)=0$. Теорема Мелроуза позволяет привести оператор A в окрестности точки ρ к каноническому виду, сохраняя плоскость $x_1=0$. Если $\{a, \{a, x_1\}\}(\rho)<0$, то оператор A эквивалентен оператору с символом $\xi_1^2+x_1\xi_n^2+\xi_2\xi_n$.

Если же $\{a, \{a, x_1\}\}(\rho)>0$ (в этом случае точка ρ называется точкой дифракции), то оператор A микролокально эквивалентен оператору $D_1^2-x_1D_n^2-D_2D_n$. Это позволяет построить микролокально параметрикс краевой задачи для A в виде интегрального оператора Эйри—Фурье, имеющего в локальных координатах форму:

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\int a(x, \xi)\tilde{u}(\xi)e^{iS(x,\xi)}\frac{A(S_1(x, \xi)|\xi|^{-1/3})}{A(S_2(x, \xi)|\xi|^{-1/3})}d\xi,$$

где S, S_1, S_2 — фазовые функции, а $A(s)$ — функции Эйри:

$$A(s)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(ts+t^3/3)}dt.$$

§ 4. Различные классы псевдодифференциальных операторов.

4.1. Классы $L^m_{\rho,\delta}$. До сих пор мы рассматривали псевдодифференциальные операторы из класса L^m вида (2) с символами из класса S^m, т. е. удовлетворяющими неравенствам (3). Важнейшим свойством пространства L^m является тот факт, что для эллиптических операторов в L^m существует параметрикс. Если $L^{-\infty}=\cap L^m$, то эллиптические операторы обратимы в классах $L^m/L^{-\infty}$. Однако никакие другие операторы не имеют обратных в этом классе. Более интересными в этом отношении являются пространства операторов $L^m_{\rho,\delta}$ вида (2) с символами из классов $S^m_{\rho,\delta}$. Эти классы характеризуются оценками

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|},$$

где $\rho \geqslant 0$ и $\delta \geqslant 0$. Как и в случае неравенств (3), постоянные $C_{\alpha,\beta}$ могут зависеть от $\mathbf{R}$ при $|x|<\mathbf{R}$.

Примеры. 1°. Пусть $P(D)$ — гипоэллиптический дифференциальный оператор порядка m с постоянными коэффициентами. Как известно (см. [103]), такие операторы характеризуются равенствами

$$\lim_{|\xi|\to\infty} |D^\alpha P(\xi)\cdot P(\xi)^{-1}|=0, \quad \forall\alpha\neq 0.$$

В частности, отсюда видно, что $P(\xi)\neq 0$ при всех достаточно больших $|\xi|$. Параметриксом для $P(D)$ может служить оператор $Q(D)$ с символом $q(\xi)=h(\xi)P(\xi)^{-1}$, где $h\in C^\infty$, $h(\xi)=0$ при $|\xi|\leqslant a$, $h(\xi)=1$ при $|\xi|\geqslant b$, где a настолько велико, что $P(\xi)\neq 0$ при $|\xi|\geqslant a$. Можно показать (см. [108]), что $Q\in L^{m'}_{\rho,0}$ с некоторыми m', $\rho>0$. Если $A(x)$ — обратимая матрица, гладко зависящая от x, то $q(A(x)\xi)\in S^{m'}_{\rho,1-\rho}$.

2°. Пусть $\Sigma\varphi_\alpha(x)=1$, $\alpha\in Z^n$, причем $\varphi_\alpha\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, $\varphi_\alpha(x)=0$ при $|x-\alpha|\geqslant 1$, $|D^\beta\varphi_\alpha(x)|\leqslant C_\beta$ для всех α и β. Пусть $a\in S^m_{\rho,\delta}$. Тогда функция вида

$$\sum_{\alpha,\beta}\varphi_\alpha(\xi|\xi|^{-\rho})\,\varphi_\beta(x|\xi^\alpha|^\delta)\,a(x_{\alpha\beta},\xi^\alpha),$$

где ξ^α — произвольная точки из $\operatorname{supp}\varphi_\alpha(\xi|\xi|^{-\rho})$, а $x_{\alpha\beta}$ — любая точка из $\operatorname{supp}\varphi_\beta(x|\xi^\alpha|^\delta)$, принадлежит классу $S^m_{\rho,\delta}$. Эту функцию можно рассматривать как аппроксимацию символа $a(x,\xi)$. Аналогичными свойствами обладает функция

$$\sum_{\alpha,\beta}\varphi_\alpha(\xi|\xi|^{-\rho})\,\varphi_\beta(x|\xi^\alpha|^\delta)\sum_{|\delta+\gamma|\leqslant N} a^{(\delta)}_{(\gamma)}(x_{\alpha\beta},\xi^\alpha)(x-x_{\alpha\beta})^\gamma(\xi-\xi^\alpha)\frac{1}{\gamma!\,\delta!},$$

где $a^{(\delta)}_{(\gamma)}(x,\xi)=(iD_\xi)^\delta(iD_x)^\gamma a(x,\xi)$.

Исчисление, построенное выше для операторов из класса L^m, переносится на операторы класса $L^m_{\rho,\delta}$ при $\rho>\delta$. Последнее условие требуется для того, чтобы асимптотические ряды, соответствующие символам произведения или сопряженного оператора, были рядами по убывающим степеням $|\xi|$. При замене переменных $x=\varphi(y)$ символ $a(x,\xi)$ переходит в $a(\varphi(y), {}^t\varphi'(y)^{-1}\eta)+\ldots$. Поэтому класс символов $S^m_{\rho,\delta}$ сохраняется при $1-\rho\leqslant\delta<\rho$. При этих условиях определен класс операторов $L^m_{\rho,\delta}(X)$ на гладком многообразии X. Это условие является достаточным для существования параметрикса у эллиптического оператора.

Если $\delta<\rho$, то операторы из класса $L^0_{\rho,\delta}$ ограничены в L_2. Для компактности оператора A с символом $a\in S^0_{\rho,\delta}$ необходимо и достаточно, чтобы $a(x,\xi)\to 0$ при $\xi\to\infty$, причем это стремление равномерно, когда x принадлежит компактному подмножеству (см. [114], [108]).

Кальдерон и Ваянкур доказали ограниченность в L_2 операторов A с символами из класса $S^0_{\rho,\rho}$, при $\rho<1$. Точнее говоря, они показали, что оператор A:

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\iint e^{i(x-y)\cdot\xi}a(x,y,\xi)\,u(y)\,dy\,d\xi$$

ограничен в L_2, если $0\leqslant\rho\leqslant\delta<1$, $m\leqslant(\rho-\delta)n$ и

$$|D^\alpha_x D^\beta_y D^\gamma_\xi a(x,y,\xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^{m+\delta|\alpha+\beta|-\rho|\gamma|}$$

при $0\leqslant|\gamma|\leqslant 2[n/2]+2$, $0\leqslant|\alpha+\beta|\leqslant 2m_j$, где m_j — наименьшее из целых чисел r, для которых $r(1-\delta)\geqslant 5n/4$ (См. [70]).

Хёрмандер доказал, что при $\rho>0$, $m\leqslant 0$, $2m<(\rho-\delta)n$ оператор A с символом a, имеющий компактный носитель по x и y, ограничен в L_2. Он показал также, что это неверно, если $m>0$ или $2m>(\rho-\delta)n$ (см. [108]). В работе Чин-Хан Ши показано также, что оператор A может быть не ограничен, если $\delta=\rho=1$, $m=0$.

Близкими свойствами обладают операторы с символами из классов $S^m_{\lambda,\rho,\delta}$, введенные Кумано-го и Танигучи (см. [115]).

Символ $a\in S^m_{\lambda,\rho,\delta}$, если

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x a(x,\xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta}\lambda(x,\xi)^{m+\delta|\beta|-\rho|\alpha|}.$$

Здесь λ — весовая функция, удовлетворяющая условиям:

$$1\leqslant\lambda(x,\xi)\leqslant A_0(1+|x|)^{\tau_0}(1+|\xi|),\quad \tau_0\geqslant 0;$$

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x\lambda(x,\xi)|\leqslant A_{\alpha,\beta}\lambda(x,\xi)^{1+\delta|\beta|-|\alpha|},\quad 0\leqslant\delta<1;$$

$$\lambda(x+y,\xi)\leqslant A_1(1+|y|)^{\tau_1}\lambda(x,\xi),\quad \tau_1\geqslant 0.$$

Близкие классы изучались также в работах М. И. Вишика и В. В. Грушина [6] и В. В. Грушина [10], [12]. В рамках такого исчисления можно, например, построить параметрикс для оператора $-\Delta+|x|^{2k}$ во всем пространстве. При этом удобно пользоваться пространствами Соболева с весом, например, пространством с нормой вида

$$\|u\|_m=\Big(\sum_{|\alpha|\leqslant m}\||x|^{(m-|\alpha|)k}D^\alpha u\|^2_{L_2}\Big)^{1/2}.$$

Отметим еще класс *операторов переменного порядка*, введенный в работе Унтербергера и Бокобзы [162]. Символы из этого класса являются однородными по ξ функциями, но порядок однородности $m(x)$ зависит от x, причем

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x a(x,\xi)|\leqslant C_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m(x)-|\alpha|}[\ln(1+|\xi|)]^{|\beta|}.$$

4.2 Классы $L^m_{\Phi,\varphi}$. Широкое обобщение классов символов псевдодифференциальных операторов предложено в работах [48], [49] Билса и Феффермана. Построенное ими исчисление позво-

ляет обратить операторы с символами вида

$$\xi_1+ip_1(x)\,x_1^{2k}\xi_2+p_2(x),\ \ p_1(0)\neq 0,\ \ p_1:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^1;$$

$$\xi_1^2+p_1(x)\,x_1^{2k}\xi_2^2+p_2(x)\,x_1^{k-1}\xi_2+p_3(x)\xi_1+p_4(x),\ \ p_1(0)>0;$$

$$x_1\xi_2^2+ip_1(x)\,\xi_1+p_2(x)\,\xi_2+p_3(x),\quad p_1(0)>0,$$

что не было возможным в других вариантах исчисления псевдодифференциальных операторов.

Определение классов символов в этом исчислении начинается с описания *весовых функций*. Положительные непрерывные функции φ, Φ, определенные на пространстве переменных $(x,\xi)\in\mathbf{R}^{2n}$, образуют пару весовых функций, если существуют такие положительные постоянные c, C и δ, что

(A_1) $\varphi\leqslant C$;

(A_2) $\Phi\varphi\geqslant c$;

(A_3) $c\leqslant\Phi(x,\xi)\Phi(y,\eta)^{-1}\leqslant C,\ \ c\leqslant\varphi(x,\xi)\,\varphi(y,\eta)^{-1}\leqslant C,$

если $|x-y|\leqslant c\varphi(x,\xi)$, $|\xi-\eta|\leqslant c\Phi(x,\xi)$;

(A_4) $R(x,0)\leqslant C(1+|x|)^c$, где $R=\Phi/\varphi$;

(A_5) $c\leqslant R(x,\xi)\,R(y,\eta)^{-1}\leqslant C,$

если $|x-y|\leqslant cR(x,\xi)^\delta R(y,\eta)^{-1/2}$, $|\xi-\eta|\leqslant cR(x,\xi)^{\delta+1/2}$.

Пара Φ, φ называется локализуемой, если для каждого компакта $K\subset\mathbf{R}^n$ найдется такая постоянная $\varepsilon>0$, что $\Phi\geqslant\varepsilon(1+|\xi|)^2$ на $K\times\mathbf{R}^n$.

Функции φ и Φ служат характерными единицами длины в направлениях переменных x и ξ в пространстве кокасательного расслоения. Условия (A_3) означают, что эти единицы меняются не слишком сильно с ростом расстояний. Условие (A_2) заменяет условие $\rho\geqslant\delta$ для классов $S_{\rho,\delta}{}^m$. Этим последним классам соответствуют функции $\varphi=(1+|\xi|)^{-\delta}$, $\Phi=(1+|\xi|)^\rho$, $0\leqslant\delta\leqslant\rho\leqslant 1$, $\delta\neq 1$.

Пусть φ, Φ — весовые функции. Порядок оператора определяется функцией λ из класса $0(\Phi,\varphi)$, который характеризуется условиями:

(0_1) $|\lambda(x,\xi)-\lambda(y,\eta)|\leqslant C$, если $|x-y|\leqslant c\varphi(x,\xi)$, $|\xi-\eta|\leqslant\Phi(x,\xi)$;

(0_2) $c\,(\Phi\varphi)^{-m}\leqslant e^\lambda\Phi^{-K}\varphi^{-K}\leqslant C\,(\Phi\varphi)^m$

для некоторых вещественных чисел k, K и m.

Определение. Функция $a\in S^\lambda_{\Phi,\varphi}$, если

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x,\xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta}e^\lambda\cdot\Phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|}$$

для всех α и β.

Примеры. 1°. Классы Хёрмандера $S^m_{\rho,\delta}$ получаются, если

$$\Phi=(1+|\xi|)^\rho,\quad \varphi=(1+|\xi|)^{-\delta},\quad \lambda=m\ln|\xi|.$$

2°. Классы Кумано-го — Танигучи $S^m_{\lambda,\rho,\delta}$ получаются при $\Phi=\lambda^\rho$, $\varphi=\lambda^{-\delta}$, $\mu=m\ln\lambda$.

3°. Классы Унтербергера — Бокобзы получаются при $\Phi=1+|\xi|$, $\varphi=[1+\ln(1+|\xi|)]^{-1}$, $\lambda=\rho(x)\ln(1+|\xi|)$.

Операторы

$$u\mapsto a(x, D)\,u(x)=(2\pi)^{-n}\int a(x, \xi)\,\tilde{u}(\xi)\,e^{ix\xi}d\xi$$

с символами a из $S^\lambda_{\Phi,\varphi}$ образуют класс операторов $L^\lambda_{\Phi,\varphi}$. Эти операторы непрерывно отображают пространство Шварца S в себя. Приведем основные факты исчисления таких операторов.

I. Если $A\in L^\lambda_{\Phi,\varphi}$, $B\in L^\mu_{\Phi,\varphi}$, то $AB\in L^{\lambda+\mu}_{\Phi,\varphi}$. Символ $a\circ b$ оператора AB имеет асимптотическое разложение

$$a\circ b\sim\sum\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}D^\alpha_\xi a(x, \xi)\,D^\alpha_x b(x, \xi)$$

в том смысле, что для каждого натурального числа N

$$a\circ b-\sum_{|\alpha|<N}\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}D^\alpha_\xi a\cdot D^\alpha_x b\in S^{\lambda+\mu-N\ln\Phi-N\ln\varphi}.$$

II. Если $A\in L^\lambda_{\Phi,\varphi}$, то формально сопряженный оператор A^* принадлежит $L^\lambda_{\Phi,\varphi}$ и его символ a^* допускает асимптотическое разложение

$$a^*(x, \xi)\sim\sum\frac{i^{|\alpha|}}{\alpha!}D^\alpha_\xi D^\alpha_x\overline{a(x, \xi)}.$$

III. Пусть $\lambda_j\in O(\Phi, \varphi)$ для $j=0, 1, \ldots$, причем

$$\lambda_{j+1}\leqslant\lambda_j+c_j,$$
$$\lambda_j-\lambda_{j+1}\leqslant d_j(\lambda_{j-1}-\lambda_j)+c_j,$$

где c_j и d_j — положительные постоянные. Пусть $a_j\in S^{\lambda_j}$. Тогда существует такой символ $a\in S^{\lambda_0}$, что $a\sim\sum a_j$, т. е.

$$a-\sum_{j<N}a_j\in S^{\lambda_N}.$$

IV. Если $A\in L^0$, то оператор $A: L_2\to L_2$ непрерывен.

V. Пусть $\lambda\in O(\Phi, \varphi)$. Положим

$$H^\lambda=H^\lambda_{\Phi,\varphi}=\{Au;\ u\in L_2,\ A\in L^{-\lambda}\}.$$

Тогда $H^0=L_2$, $S\subset H^\lambda\subset S'$, причем вложения непрерывны и образы всюду плотны; $(H^\lambda)'=H^{-\lambda}$ как топологические простран-

ства; если $A\in L^{\mu}$, $\mu\in 0(\Phi, \varphi)$, $\lambda\in 0(\Phi, \varphi)$, то отображение A: $H^{\lambda+\mu}\to H^{\lambda}$ — непрерывно; существует такой оператор $A\in L^{\mu}$, что оператор $A: H^{\lambda+\mu}\to H^{\lambda}$ осуществляет топологический изоморфизм; в частности, H^{λ} является гильбертовым пространством.

Если $a\in S^{\mu}$ и $e^{-\mu}\Phi^{\alpha}\varphi^{\beta}D_{\xi}^{\alpha}D_{x}^{\beta}a(x, \xi)\to 0$ при $|x|+|\xi|\to\infty$ для всех α и β, то оператор $a(x, D): H^{\lambda+\mu}\to H^{\lambda}$ является компактным. В частности, вложение $H_{K}^{\mu}\subset H^{\lambda}$ компактно, если $\mu-\lambda\to +\infty$ при $|\xi|\to\infty$ равномерно для x из окрестности компакта K. Здесь H_{K}^{μ} — подпространство в H^{μ} функций с носителями в K.

Билс рассматривает также более общие пространства, в которых Φ и φ являются векторами: $\Phi=(\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$, $\varphi=(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$, так что Φ_j, φ_j являются весовыми функциями по переменным x_j, ξ_j. При этом $\Phi_j(x, \xi)\leqslant C\Phi_k(x, \xi)^{C}$ для всех j и k и если $\pi(x, \xi)=\min\limits_{k}\Phi_k(x, \xi)\varphi_k(x, \xi)$, то

$$\Phi_j(x, \xi)\Phi_j(y, \eta)^{-1}\leqslant C[\pi(x, \xi)+\pi(y, \eta)]^{C},$$

$$\varphi_j(x, \xi)\varphi_j(y, \eta)^{-1}\leqslant C[\pi(x, \xi)+\pi(y, \eta)]^{C}$$

при

$$|x_k-y_k|\leqslant cR_k(x, \xi)^{\delta}R_k(y, \eta)^{-1/2}, \quad |\xi_k-\eta_k|\leqslant cR_k(x, \xi)^{\delta+\frac{1}{2}}.$$

Пример. Пусть $a(x, \xi)=\xi_1+ix_1^{2k}p_1(x, \xi)+p_0(x, \xi)$, причем $p_1\in S^1$, $p_0\in S^0$, p_1 — вещественнозначная функция и

$$|p_1(x, \xi)|\geqslant c|\xi'| \text{ при } |\xi'|\geqslant C.$$

Положим $g(x, \xi)=|\xi_1|+x_1^{2k}|\xi'|+(1+|\xi|)^{\delta}$, где $\delta=1/(2k+1)$,

$$\Phi_1=g^{1/2k}(1+|\xi|)^{\delta(2k-1)/2k}, \quad \varphi_1=g^{1/2k}(1+|\xi|)^{-1/2k},$$

$$\Phi_j=1+|\xi|, \quad \varphi_j=1 \text{ при } j=2, 3, \ldots, n.$$

Оператор A с символом a обладает правым и левым параметриксами из класса $S^{-\mu}$, где $\mu=\ln g$. В частности, верна оценка

$$\|u\|_{\mu}\leqslant C(\|Au\|_{\mathcal{L}_2}+\|u\|_{\mathcal{L}_2}), \quad u\in C_0^{\infty}(K).$$

Поскольку $e^{\mu}\geqslant c(1+|\xi|)^{\delta}$, отсюда следует субэллиптическая оценка (см. [50]).

4.3. Операторы Вейля. Более общие классы псевдодифференциальных операторов ввел в работе [107] Хёрмандер. Он предложил записывать их в форме А. Вейля

$$a(x, D)u(x)=(2\pi)^{-n}\int\int a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right)e^{i(x-y)\xi}u(y)\,dy\,d\xi. \qquad (9)$$

Если $a \in S^{\mu}$, то такой оператор отличается от обычного оператора с символом a на оператор порядка $m-1$. Однако операторы вида (9) обладают важным свойством инвариантности относительно линейных симплектических преобразований координат: $U^{-1}a(x, D)U=(a\cdot\chi)(x, D)$, где $\chi: \mathbf{R}^{2n}\to\mathbf{R}^{2n}$ — преобразование, сохраняющее форму $\sigma=\Sigma d\xi_j\wedge dx_j$, а оператор U определяется по χ единственным способом с точностью до постоянного множителя.

Пусть V — конечномерное векторное пространство и $g_x(y)$ — положительно определенная квадратичная форма в этом пространстве для каждого $x\in V$. Для функций $u: \omega\to\mathbf{C}$ класса $C^k(\omega)$, где ω — окрестность точки x в V, определим норму k-го дифференциала, положив

$$|u|_k^g(x)=\sup_{t_j\in V}\prod_1^k g(t_j)^{-1/2}.$$

Метрика g называется медленно изменяющейся, если существуют такие положительные постоянные c, C, что

$$g_x(y)\leqslant c\Rightarrow m(x)/C\leqslant m(x+y)\leqslant Cm(x).$$

Функция m, определенная на V и принимающая вещественные положительные значения, называется g-непрерывной, если существуют такие положительные постоянные c и C, что

$$g_x(y)\leqslant c\Rightarrow g_{x+y}(t)\leqslant Cg_x(t),\ \forall t\in V.$$

Если метрика g медленно изменяется, а m является g-непрерывной, то можно ввести класс $S(m, g)$ гладких в V функций u, для которых

$$\operatorname{Sup}|u|_k^g(x)/m(x)<\infty \text{ для каждого } k\in\mathbf{Z}_+.$$

Ясно, что $C_0^\infty(V)\subset S(m, g)$. Кроме того, $uv\in S(mm', g)$, если $u\in S(m, g)$, $v\in S(m', g)$. Если $|u|>cm$, то $u^{-1}\in S(1/m, g)$.

Пусть B — квадратичная форма на пространстве V', двойственном к V, с вещественными коэффициентами. Дифференциальный оператор $B(D)$ на функциях из $C^2(V)$ определяется равенством $B(D)e^{ix\xi}=B(\xi)e^{ix\xi}$. Положим

$$g_y^B(x)=\sup_\xi (x, \xi)^2/g(B\xi).$$

Пусть риманова метрика g медленно меняется в V, а m является g — непрерывной. Метрика g и функция m называются в этом случае согласованными с B, если существуют такие постоянные C, N, что для всех y, $t\in V$ выполнены неравенства

$$g_y(t)\leqslant Cg_x(t)[1+g_y^B(x-y)]^N,$$

$$m(y)\leqslant Cm(x)[1+g_y^B(x-y)]^N.$$

Предложение 4.1. Если g и m согласованы с B и $g_x(y) \leqslant g_x^B(y)$ для всех x, y, то для $u \in S(m, g)$ определена непрерывная функция $e^{iB(D)}u(x)$, причем

$$|e^{iB(D)}u(x)| \leqslant m(x) \| u \|,$$

где $\| \cdot \|$ — некоторая полунорма в $S(m, g)$, зависящая от C и N.

Если $u \in S$, то $v = e^{iB(D)}u = U(1, x)$ является значением при $t = 1$ решения задачи:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = iB(D)U, \quad U = u \text{ при } t = 0.$$

Нетрудно проверить, что ядром Шварца для оператора (9) служит функция

$$K(x, y) = (2\pi)^{-n} \int a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) e^{i(x-y)\xi} d\xi,$$

причем

$$a(x, \xi) = \int K\left(x + \frac{t}{2}, x - \frac{t}{2}\right) e^{-it\xi} dt.$$

Пусть

$$W = V \oplus V', \quad \sigma(x, \xi; y, \eta) = (y, \xi) - (x, \eta), \quad (x, \xi) \in W, \quad (y, \eta) \in W.$$

Из определения видно сразу, что формально сопряженный оператор $a(x, D)^*$ имеет символ $\overline{a(x, \xi)}$. Символ $a(x, \xi)$ композиции $a_1(x, D) \cdot a_2(x, D)$ можно найти, применяя предложение 4.1 к пространству $W \oplus W$ и форме σ, рассматриваемой как квадратичная форма на $W \oplus W$. Получаем

$$a(x, \xi) = e^{i\sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)/2} a_1(x, \xi)\, a_2(y, \eta)\,|_{(y, \eta) = (x, \xi)}$$

При этом предполагается, что выполнены условия предложения 4.1 т. е

$$g_w^\sigma \leqslant C g_{w_1}^\sigma (1 + g_{w_1}^\sigma (w_1 - w))^N,$$

$$m(w_1) \leqslant C m(w) (1 + g_{w_1}^\sigma (w_1 - w))^N, \quad w, w_1 \in W.$$

При этом, если $a_1 \in S(m_1, g)$, $a_2 \in S(m_2, g)$, то $a \in S(m_1 m_2, g)$ и

$$a(x, \xi) - \sum_{j<N} \frac{1}{j!} \left[\frac{i}{2} \sigma(D_x, D_\xi; D_y, D_\eta)\right]^j a_1(x, \xi)\, a_2(y, \eta)|_{(y, \eta) = (x, \xi)} \in$$

$$\in S(h^N m_1 m_2, g)$$

для всех N. Здесь $h(x, \xi)^2 = \sup g_{x, \xi}/g_{x, \xi}^\sigma$.

Прмеры. 1°. Пространство $S_{\rho, \delta}^m$ символов a, удовлетворяющих неравенствам

$$|D_\xi^\alpha D_x^\beta a(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha, \beta} (1 + |\xi|)^{\mu - \rho|\alpha| + \delta|\beta|},$$

получается как пространство $S(m, g)$, если положить

$$g_{x, \xi}(y, \eta) = |y|^2 (1 + |\xi|)^{2\delta} + |\eta|^2 (1 + |\xi|)^{-2\rho}, \quad m(x, \xi) = (1 + |\xi|)^\mu.$$

При этом g медленно меняется тогда и только тогда, когда $\rho \leqslant 1$. Поскольку

$$g^\sigma_{x,\xi}(y, \eta) = |y|^2(1+|\xi|)^{2\rho} + |\eta|^2(1+|\xi|)^{-2\delta},$$

неравенство $g_{x,\xi} \leqslant g^\sigma_{x,\xi}$ выполнено тогда и только тогда, когда $\delta \leqslant \rho$. Условие, что g согласовано с σ, означает, что

$$\left(\frac{1+|\eta|}{1+|\xi|}\right)^\delta + \left(\frac{1+|\xi|}{1+|\eta|}\right)^\rho \leqslant$$
$$\leqslant C[1+|x-y|(1+|\eta|)^\rho + |\xi-\eta|(1+|\eta|)^{-\delta}]^N,$$

т. е. что $\delta < 1$. Таким образом, исчисление строится при $0 \leqslant \delta \leqslant \leqslant \rho \leqslant 1$. Эти условия являются необходимыми для ограниченности в L_2 операторов из $S^0_{\rho,\delta}$ (см. [108]).

2°. Если положить

$$g_{x,\xi}(y, \eta) = |y|^2\varphi(x, \xi)^{-2} + |\eta|^2\Phi(x, \xi)^{-2},$$

то операторы из $S(m, g)$ становятся операторами из классов Биллса—Фефферманa. Условие $\Phi\varphi \geqslant 1$ совпадает в этом случае с условием $g \leqslant g^\sigma$. Остальные условия можно свести к условию

$$R(y, \eta) \leqslant CR(x, \xi), \text{ где } R(x, \xi) = \Phi(x, \xi)\varphi(x, \xi)^{-1}$$

и

$$R(x, \xi)|x-y|^2 + |\xi-\eta|^2 R^{-1}(y, \eta) \leqslant C[R(y, \eta)R(x, \xi)^{-1}]^\delta$$

при некотором $\delta > 0$.

Теорема. 4.1 ([107]). Пусть $g \leqslant g^\sigma$ и метрика g и функция m согласованы с формой σ. Оператор $a(x, D)$ с символом a из $S(m, g)$ ограничен в L_2 в том и только в том случае, когда функция m ограничена. Этот оператор является компактным в L_2 тогда и только тогда, когда $m(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Используя построенное им исчисление, Хёрмандер получил сявную формулу для индекса эллиптического оператора, обобщающую результаты Атьи—Зингера и Б. В. Федосова [45], [107].

Теорема. 4.2 ([107]). Пусть g — метрика, согласованная σ и $\frac{g(x, \xi)}{g^\sigma(x, \xi)} \leqslant (1+|x|+|\xi|)^{-\delta}$ для некоторого $\delta > 0$. Пусть $a \in S(1, g)$, причем $a(x, \xi) \in L(\mathbf{C}^\nu, \mathbf{C}^\nu)$, существует матрица $a^{-1}(x, \xi)$, которая ограничена вне некоторого шара B. Тогда оператор $a(x, D)$ является нетеровым и

$$\operatorname{ind} a = -(2\pi i)^{-n}\frac{(n-1)!}{(2n-1)!}\int\limits_{\partial B}\operatorname{tr}(a^{-1}da)^{2n-1}.$$

При этом ориентация в $\mathbf{R}^{2n}$ выбрана так, что $d\xi_1 \wedge dx_1 \wedge \ldots \ldots \wedge d\xi_n \wedge dx_n > 0$.

Отметим еще следующий результат, обобщающий теорему 2.1.

Теорема 4.3 ([107]). Пусть метрика g медленно меняется, m, g согласованы с σ, причем для каждой точки $(x, \xi)\in\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n$ можно найти такое значение $b=b(x, \xi)\leqslant 1+|\xi|^2)^{\frac{1}{3}}$, что

$$b(|dx|^2+|d\xi|^2(1+|\xi|^2)^{-1})\leqslant g_{x,\xi}(dx, d\xi)\leqslant$$
$$\leqslant b^2(|dx|^2+|d\xi|^2(1+|\xi|^2)^{-1}).$$

Пусть $a\in S(m, g)$ и $a=0$ при больших $|x|$. Пусть $\varphi\in S^0_{1\,0}$ и $\varphi=0$ при больших $|x|+|\xi|$. Пусть $A_1=\Phi A\Phi^*$, где Φ — интегральный оператор Фурье:

$$\Phi u(x)=\int\varphi(x, \xi)\tilde{u}(\xi)e^{iS(x,\xi)}d\xi$$

с невырожденной фазовой функцией S, определяющей каноническое преобразование

$$\chi:\left(\frac{\partial S(x, \xi)}{\partial\xi}, \xi\right)\mapsto\left(x, \frac{\partial S(x, \xi)}{\partial x}\right).$$

Тогда $a_1\in S^{-\infty}_{1,0}$ вне каждой конической окрестности множества

$$\{(x, \partial S(x, \xi)/\partial x);\ (x, \xi)\in\text{cone supp}\,\varphi\}$$

и $a_1\circ\chi\in S(m, g)$ в конической окрестности множества

$$\{(\partial S(x, \xi)/\partial\xi, \xi);\ (x, \xi)\in\text{cone supp}\,\varphi\}.$$

При этом $a_1\circ\chi$ выражается в явном виде через a, а если $b(x, \xi)<(1+|\xi|)^\delta$ при $\delta<2/3$, то главный член $a_1\circ\chi$ равен

$$|(2\pi)^n\varphi(x, \zeta)|^2|\det S''_{x\xi}(x, \zeta)|^{-1}a(z, \zeta),\text{ где }(z, \zeta)=\chi^{-1}(x, \xi).$$

§ 5. Комплексные степени эллиптических операторов

5.1. Определение комплексных степеней. Рассмотрим эллиптический псевдодифференциальный оператор A порядка m на замкнутом n-мерном многообразии M. Определим степени A^z этого оператора для $z\in\mathbf{C}$. Мы покажем ниже, как такие операторы используются в теории индекса и в спектральной теории эллиптических операторов (см. [150], [47]).

Предположим, что главная часть символа a_m оператора A нигде не принимает отрицательных значений. Тогда можно показать, что оператор $A-\lambda I$ обратим при достаточно больших по абсолютной величине отрицательных λ и для них $\|(A-\lambda I)^{-1}\|\leqslant C|\lambda|^{-1}$. Предположим дополнительно, что оператор $A-\lambda I$ обратим при всех λ таких, что $\lambda\leqslant 0$. Тогда в плоскости λ существует контур Γ, приходящий из $-\infty$ ниже вещественной оси, обходящий вокруг точки $\lambda=0$ по заданной кривой и уходящий вновь в $-\infty$, но выше вещественной оси, и такой,

что спектр оператора A лежит справа от Γ. Если $\operatorname{Re} z<0$, полагаем

$$A_z=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\lambda^z(A-\lambda I)^{-1}d\lambda,$$

где λ^z определяется как голоморфная функция от λ, равная $e^{z\ln\lambda}=|\lambda|^z e^{iz\arg\lambda}$ при $\lambda\in\Gamma$.

Используя тождество Гильберта

$$(\lambda-\mu)(A-\lambda I)^{-1}(A-\mu I)^{-1}=(A-\lambda I)^{-1}-(A-\mu I)^{-1},$$

легко проверить, что при $\operatorname{Re} z<0$, $\operatorname{Re} w<0$ справедливо полугрупповое свойство

$$A_z A_w=A_{z+w}$$

и, в частности, при целых неотрицательных k справедливо равенство $A_{-k}=(A^{-1})^k$. При этом операторы A_z при $\operatorname{Re} z<0$ ограничены в каждом пространстве $H_s(M)$.

Если $z\in\mathbf{C}$, то можно определить A^z по формуле: $A^z=A^k\cdot A_{z-k}$, где k — целое число и $k>\operatorname{Re} z$. При этом легко проверяется, что $A^0=I$, $A^1=A$, оператор A^{-1} является обратным к A, при $\operatorname{Re} z<0$ оператор A^z совпадает с A_z. Оператор A^z является при $\operatorname{Re} z<k$ линейным ограниченным оператором из пространства $H^s(M)$ в $H^{s-mk}(M)$, голоморфно зависящим от $z\in\mathbf{C}$. Семейство операторов A^z обладает групповым свойством: $A^zA^w=A^{z+w}$ для всех z, $w\in\mathbf{C}$.

5.2. Построение символа оператора A^z. Теория псевдодифференциальных операторов позволяет построить в явном виде символ оператора A^z.

Построим вначале символ параметрикса оператора $A-\lambda I$. Пусть X — координатная окрестность на M, которую мы можем отождествить с областью в $\mathbf{R}^n$, фиксируя систему координат. Представим символ $a(x,\xi)$ оператора A в области X в виде суммы

$$a(x,\xi)=\sum_{j=0}^{m}a_j(x,\xi),\ \text{где}\ a_j(x,\xi)=\sum_{|\alpha|=j}a_\alpha(x)\,\xi^\alpha,\quad j=0,1,\ldots,m.$$

Символ параметрикса оператора $A-\lambda I$ естественно искать в виде суммы функций, однородных по $(\xi,\lambda^{1/m})$. Обозначим эти функции через $b^0_{-m-j}(x,\xi,\lambda)$, $j=0,1,\ldots,$ где

$$b^0_{-m-j}(x,t\xi,t^m\lambda)=t^{-m-j}b^0_{-m-j}(x,\xi,\lambda)\ \text{ при }\ t>0,\quad |\xi|+|\lambda|\neq 0.$$

Эти функции определяются из рекуррентных соотношений:

$$[a_m(x,\xi)-\lambda]\,b^0_{-m}(x,\xi,\lambda)=1,$$

$$[a_m(x, \xi)-\lambda]\, b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda)+$$
$$+\sum_{\substack{|\alpha|+k+l=j\\ l<j}} \frac{1}{\alpha!}(iD_\xi)^\alpha a_{m-k}(x, \xi)\, D_x^\alpha b^0_{-m-l}(x, \xi, \lambda)=0, \quad j=1, 2, \ldots$$

Однородные компоненты $b^{(z),0}_{mz-j}(x, \xi)$ символа оператора A^z строятся теперь по построенным выше однородным компонентам параметрикса точно также, как сами степени A^z строились по резольвенте $(A-\lambda I)^{-1}$. Как видно из построения, функции $b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda)$ голоморфны по λ на контуре Γ и внутри его. Положим теперь при $\operatorname{Re} z<0$

$$b^{(z),0}_{mz-j}(x, \xi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^z b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda)\, d\lambda, \quad j=0, 1, \ldots,$$

определяя значения функции λ^z так же, как и выше. В частности, при $j=0$, по формуле Коши

$$b^{(z),0}_{mz}(x, \xi)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^z [a_m(x, \xi)-\lambda]^{-1} d\lambda=a^z_m(x, \xi).$$

Нетрудно видеть, что функции $b^{(z),0}_{mz-j}(x, \xi)$ положительно однородны по ξ порядка $mz-j$ и что при $\operatorname{Re} z<0$, $\operatorname{Re} w<0$, справедливо полугрупповое свойство:

$$\sum_{|\alpha|+p+q=j} (iD_\xi)^\alpha b^{(z),0}_{mz-p}(x, \xi)\cdot D_x^\alpha b^{(w),0}_{mw-q}(x, \xi)\frac{1}{\alpha!}=b^{(z+w),0}_{m(z+w)-j}(x, \xi).$$

Для произвольного $z\in\mathbf{C}$ можно положить

$$b^{(z),0}_{mz-j}(x, \xi)=\sum_{p+q+|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!}(iD_\xi)^\alpha a^{(k)}_{mk-p}(x, \xi)\cdot D_x^\alpha b^{(z-k),0}_{m(z-k)-q}(x, \xi),$$

если $k\in\mathbf{Z}$ выбрать так, что $\operatorname{Re} z<k$. Можно проверить, что эти функции $b^{(z),0}_{mz-j}$ не зависят от выбора числа k, при $\operatorname{Re} z<0$ она совпадают с первоначально определенными функциями, а при целых k имеет место равенство

$$b^{(k),0}_{mk-j}(x, \xi)=a^{(k)}_{mk-j}(x, \xi),$$

Здесь и выше $a^{(k)}_j(x, \xi)$ — однородные степени j компоненты символа оператора A^k.

Построив символы операторов A^z в координатной окрестности X, мы можем затем с помощью разбиения единицы построить эти символы на всем многообразии M. Особенность, которая может существовать у этих символов при $|\xi|=0$, устраняется с помощью умножения на гладкую срезающую функцию.

5.3. Построение ядра оператора A^z. Напомним, что ядро Шварца псевдодифференциального оператора

$$Bu(x)=\int\int e^{i(x-y)\xi}b(x, \xi)\, u(y)\, dyd\xi,$$

где $b\in S^m$, определяется при $m<-n$ формулой

$$K(x, y)=\int e^{i(x-y)\xi}b(x, \xi)\, d\xi.$$

Ядро Шварца K_z оператора A^z определено по этой формуле при $\operatorname{Re} z<-n/m$ и является голоморфной функцией от z. Можно показать (см. [150]), что при $x\neq y$ функция $K_z(x,y)$ продолжается до целой функции от z, равной нулю при $z=0, 1, \ldots$. При этом $K_z(x,x)$ продолжается до мероморфной функции с не более чем простыми полюсами в точках $z_j=(j-n)/m$; $j=0, 1, \ldots$ и вычетами $\gamma_j(x)$ в этих точках, равными

$$-\frac{(2\pi)^n}{m}\int\limits_{|\xi|=1} b_{-n}^{(z_j),0}(x, \xi)\, d\xi=-\frac{(2\pi)^{n-1}}{mi}\int\limits_{|\xi|=1} d\xi\int\limits_{\Gamma}\lambda^{\frac{j-n}{m}}b^0_{-m-j}(x, \xi, \lambda)d\lambda.$$

Если $z_j=l\in\mathbf{Z}_+$, то $\gamma_j(x)=0$ и

$$K_l(x, x)=\frac{(-1)^l(2\pi)^{-n}}{m}\int\limits_{|\xi|=1} d\xi\int\limits_0^\infty\lambda^l b^0_{-m-ml-n}(x, \xi, \lambda)\, d\lambda.$$

Отметим, что вычет γ_0 в самом левом полюсе $z_0=-n/m$ равен

$$\gamma_0(x)=-\frac{(2\pi)^{-n}}{m}\int\limits_{|\xi|=1} a_m^{-n/m}(x, \xi)\, d\xi,$$

а ядро K_0 регулярно при $x=y$ и

$$K_0(x, x)=\frac{(2\pi)^{-n}}{m}\int\limits_{|\xi|=1} d\xi\int\limits_0^{+\infty} b^0_{-m-n}(x, \xi, -\lambda)\, d\lambda.$$

Ясно, что $b_{-m}=(a_m-\lambda)^{-1}$ и в силу рекуррентных соотношений, определяющих b_{-m-j}, имеем

$$b_{-m-j}(x, \xi, \lambda)=\sum_{k=1}^{2j}\gamma_{k,j}(x, \xi)[a_m(x, \xi)-\lambda]^{-k-1},$$

где $\gamma_{k,j}$ — многочлен от $a_m, \ldots, a_{m-j}$ и их производных порядков $\leqslant j$. Поэтому

$$\gamma_j(x)=-\frac{(2\pi)^{-n}}{m}\int\limits_{|\xi|=1}\sum_{k=1}^{2j}\gamma_{k,j}(-1)^k s(s-1)\ldots(s-k+1)\, a_m^{s-k}/k!d\xi,$$

где $s=(j-n)/m$ и

$$K_0(x, x)=\frac{(2\pi)^{-n}}{m}\int\limits_{|\xi|=1}\sum_{k=1}^{2n}k^{-1}\gamma_{k,n}(x, \xi)\, a_m^{-k}(x, \xi)\, d\xi.$$

5.4. ζ—функция эллиптического оператора. Важную роль в спектральной теории играет ζ—функция, определяемая по формуле

$$\zeta_A(z)=\int_M K_z(x, x)\,dx$$

при $\operatorname{Re} z<-n/m$. Продолжая ее аналитически, можно получить мероморфную функцию с не более чем простыми полюсами в точках $z_j=(j-n)/m$, $j=0, 1, \ldots$, исключая точки $z_j=l=0, 1, 2, \ldots$, причем формулы для вычетов и значений $\zeta(l)$ можно легко получить, используя выписанные выше формулы для ядер.

Предположим, что на M фиксирована гладкая положительная плотность dx и оператор A является самосопряженным относительно этой плотности. Тогда $\zeta_A(z)=\sum\limits_{j=1}^{\infty}\lambda_j^z$ и ряд сходится абсолютно при $\operatorname{Re} z<-n/m$, равномерно по z при $\operatorname{Re} z<-n/m-\varepsilon$ для каждого $\varepsilon>0$.

Следующее рассуждение принадлежит Атье и Ботту. Пусть A — нормальный оператор, имеющий полную систему собственных функций ψ_j, соответствующих собственным значениям λ_j. Тогда оператор A^z имеет ядро $K_z(x, y)$, причем

$$K_z(x, x)=\sum\lambda_j^z|\psi_j(x)|^2, \quad \int_M K_z(x, x)\,dx=\sum\lambda_j^z.$$

Если ψ — собственная функция оператора L^*L с собственным значением $\lambda>0$, то $L\psi$ — собственная функция оператора LL^* с тем же собственным значением. Поэтому L взаимно однозначно отображает собственное подпространство $E_\lambda(L^*L)$ в $E_\lambda(LL^*)$ и $\dim E_\lambda(LL^*)\geqslant\dim E_\lambda(L^*L)$. Точно так же проверяется, что $\dim E_\lambda(L^*L)\geqslant\dim E_\lambda(LL^*)$. Следовательно, у операторов L^*L и LL^* совпадают ненулевые собственные значения и их кратности. Отсюда видно, что если $\zeta_1(z)$ — след оператора $(I+L^*L)^z$, а $\zeta_2(z)$ — след оператора $(I+LL^*)^z$, то

$$\zeta_1(z)-\zeta_2(z)=\dim\ker L-\dim\ker L^*=\operatorname{ind} L.$$

Полагая теперь $A=I+LL^*$, можно найти функцию $K_0(x, x)$, которая явно выражается через символ оператора L. То же справедливо и для оператора $I+L^*L$. Таким образом, можно получить явную аналитическую формулу для индекса оператора L.

Отметим, в частности, связь с классической дзета функцией Римана $\zeta(z)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^{-z}$. Для этого возьмем в качестве M единичную окружность, а в качестве A оператор $-D_x^2+P$, где P —

оператор проектирования на подпространство постоянных функций. Собственные значения оператора A равны n^2 при $n=1, 2, \ldots$ и кратность их равна 2 при $n>1$ и 3 при $n=1$. Таким образом,

$$\zeta_A(z)=\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^z=1+2\zeta(-z).$$

Символ оператора A равен ξ^2. Поэтому $b_{-2}=(\xi^2-\lambda)^{-1}$ и $b_{-2-j}=0$ при $j>0$. Отсюда и из приведенных выше формул видно, что $\gamma_j(x)=0$ при $j>0$ и

$$\gamma_0(x)=-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{|\xi|=1}|\xi|^{-1}d\xi=-\frac{1}{2}.$$

Таким образом, функция $\zeta(s)$ имеет полюс при $s=1$ с вычетом 1. Кроме того, $\zeta(0)=-1/2$.

5.5. Асимптотика спектральной функции и собственных значений. Мы приведем несколько простейших результатов относительно асимптотики спектральной функции самосопряженного эллиптического оператора A на гладком многообразии M (см. [47], [150]). Предположим, что $a_m(x, \xi)>0$ при $\xi\neq 0$. Тогда оператор A полуограничен, его собственные функции $\varphi_1, \varphi_2\ldots$ образуют полную ортогональную систему. Будем считать, что эти функции нормированы и им соответствуют собственные значения $\lambda_1, \lambda_2\ldots$, занумерованные в порядке возрастания.

Пусть E_t — спектральный проектор оператора A, т. е.

$$E_t u=\sum_{\lambda_j<t}(u, \varphi_j)\varphi_j.$$

Ядро этого оператора называется спектральной функцией оператора A и имеет вид

$$e(x, y, t)=\sum_{\lambda_j<t}\varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}.$$

Заметим, что

$$\int\limits_M e(x, x, t)\,dx=\sum_{\lambda_j<t}1=N(t),$$

где $N(t)$ — число собственных значений оператора A, не превосходящих t. Ясно, что $N(t)$ — неубывающая функция и

$$\zeta_A(z)=\int\limits_0^{\infty}t^z dN(t).$$

Допустим, что при $t\to+\infty$

$$N(t)=ct^{\alpha}+0(t^{\beta}),$$

где $\operatorname{Re}\beta<\operatorname{Re}\alpha$. Тогда

$$\zeta_A(z)=c\int_1^\infty t^z dt^\alpha+f(z)=-\frac{c\alpha}{z+\alpha}+f(z)$$

и функция f голоморфна при $\operatorname{Re} z<-\operatorname{Re}\beta$. Поэтому если мы знаем полюса функции $\zeta_A(z)$ и вычеты в них, то можно найти асимптотику функции $N(t)$.

Аналогично, из формулы

$$K_z(x, y)=\sum_{j=1}^\infty \lambda_j^z \varphi_j(x)\overline{\varphi_j(y)}$$

следует, что

$$K_z(x, x)=\int_0^\infty t^z de(x, x, t),$$

и если $e(x, x, t)=c_0(x)t^{\alpha_0}+O(t^{\beta_0})$ и $\operatorname{Re}\beta_0<\operatorname{Re}\alpha_0$, то

$$K_z(x, x)=-\frac{c_0(x)\alpha_0}{z+\alpha_0}+f_0(z),$$

где функция f_0 голоморфна при $\operatorname{Re} z<-\operatorname{Re}\beta_0$. Так как мы знаем полюса функции $K_z(x, x)$ и вычеты в них, можно, как и выше, найти асимптотику функции $e(x, x, t)$.

Таким образом мы приходим к формулам

$$e(x, x, t)\sim\frac{1}{n(2\pi)^n}\int_{|\xi|=1} a_m^{-n/m}(x, \xi)\, d\xi\cdot t^{n/m},$$

$$N(t)\sim\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{a_m(x, \xi)<t} dx\, d\xi,$$

$\lambda_k\sim ak^{m/n}$ при $t\to\infty$, $k\to\infty$, где $a=(2\pi)^m\left(\int_{a_m(x, \xi)<1} dx\, d\xi\right)^{-m/n}$.

5.6. Комплексные степени эллиптического оператора с краевыми условиями. Приведенные выше конструкции переносятся и на гораздо более сложный случай краевой задачи для системы эллиптических уравнений (см. [151]).

Пусть A — эллиптическая система гладких дифференциальных операторов в области G, B — система дифференциальных операторов на границе ∂G. Рассмотрим неограниченный оператор A_B, определенный в $L_p(G)$, $1<p<\infty$, на пространстве функций, удовлетворяющих условиям $Bu=0$ на ∂G.

Предположим, что (1) матрица $A_0(x, \xi)-\lambda I$ обратима при $\lambda\leqslant 0$, $(\xi, \lambda)\neq 0$; (2) краевая задача

$$A_0(x', 0;\ \xi', D_t)u(t)=\lambda u(t),\ t>0;$$
$$B_{j0}(x', \xi', D_t)u(0)=c_j,\ j=1, \ldots, k,$$
$$u(+\infty)=0$$

имеет единственное решение для любых постоянных $c_j \in \mathbf{C}$, $\lambda \leqslant 0$, $(\xi', \lambda) \neq 0$. Здесь (x', t) — локальные координаты в окрестности некоторой граничной точки и $t > 0$ в G.

Эти условия гарантируют существование резольвенты $R_\lambda = (A_B - \lambda I)^{-1}$ при $\lambda < 0$ (см. [151]). При этом, если величина $|\lambda|$ велика, то

$$(A_B - \lambda I)^{-1} \sim \Sigma 0p\,(C_{-m-j}) + \Sigma 0p'\,(d_{-m-j}),$$

где

$$0p\,(c)\,f\,(x) = (2\pi)^{-n} \iint e^{i(x-y)\xi} C\,(x,\,\xi)\,f\,(y)\,dy d\xi,$$

$$0p'\,(d)\,f\,(x',\,t) = (2\pi)^{1-n} \int\limits_0^\infty ds \int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbf{R}^{n-1}} e^{i(x'-y')\xi'} d\,(x',\,t,\,\xi',\,s) \times$$
$$\times f\,(y',\,s)\,dy' d\xi'$$

$C_{-m} = [A_0\,(x\,,\,\xi) - \lambda I]^{-1}$, $C_{-m-j}\,(x,\,\xi,\,\lambda)$ однородны по $(\xi,\,\lambda^{1/m})$ степеней $-m-j$, $d_{-m-j}\,(x',\,t,\,\xi',\,s,\,\lambda)$ однородны по $(\xi,\,\lambda^{1/m},\,t^{-1},\,s^{-1})$ степеней $1-m-j$. Функции C_{-m-j}, d_{-m-j} явно вычисляются по коэффициентам операторов A и B.

Если оператор A_B имеет полную ортонормальную систему собственных функций φ_j, то можно положить

$$A_B^z f = \Sigma \lambda_j^z\,(f,\,\varphi_j)\,\varphi_j.$$

При $\operatorname{Re} z < n/m$ оператор A_B^z имеет ядро

$$K_z\,(x,\,y) = \sum \lambda_j^z \varphi_j\,(x)\,\overline{\varphi_j\,(y)}.$$

След этого оператора равен

$$\int\limits_G \operatorname{Trace} K_z\,(x,\,x)\,dx = \int\limits_G \sum \lambda_j^z\,|\,\varphi_j\,(x)\,|^2 dx = \sum \lambda_j^z.$$

Представляя A_B^z в виде

$$A_B^z = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \lambda^z\,(A_B - \lambda I)^{-1} d\lambda,$$

можно продолжить функцию $K_z\,(x,\,x)$ при $x \notin \partial G$ до мероморфной функции с не более чем простыми полюсами в точках $z_j = (j-n)/m$, $j = 0,\,1,\ldots,\,z \notin \mathbf{Z}_+$. Вычет $\gamma_j\,(x)$ этой функции в точке z_j зависит только от c_{-m-j}. Если же $z_j = (j-n)/m = l \in \mathbf{Z}_+$, то значение $\mathbf{K}_l\,(x,\,x)$ явно выражается через c_{-m-j}.

Аналогичные особенности имеет функция $\int\limits_G K_z\,(x,\,x)\,dx$. Можно показать, что вычеты в точке $z_j = (j-n)/m$ равны

$$\int\limits_G \gamma_j\,(x)\,dx + \int\limits_{\partial G} \delta_j\,(x')\,dx',$$

где $\delta_j(x')$ явно определяются по функциям d_{-m-j+1}. То же верно и для значений этой функции в точках $z_j=l\in\mathbf{Z}_+$.

В последние годы в работах В. Я. Иврия, Д. Г. Васильева, Мелроуза (см. [27], [28], [4], [5]) получены более точные результаты об асимптотике функции $N(t)$ при $t\to\infty$ вида $N(t)=a_0t^{n/m}+a_1t^{(n-1)/m}+0(t^{(n-1)/m})$ для краевых задач для эллиптических уравнений. Эти работы основываются на изучении волновых фронтов решений краевых задач для соответствующих гиперболических уравнений.

§ 6. Псевдодифференциальные операторы в $\mathbf{R}^n$ и квантование

6.1. Аналогия между микролокальным анализом и квантованием. Напомним, в чем состоит процесс квантования классической нерелятивистской динамической системы с n степенями свободы. Состояние такой системы однозначно определяется набором значений обобщенных координат $(x_1, \ldots, x_n)$ и обобщенных импульсов $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$, где $\xi_j=m_j\dot{x}_j$. Наблюдаемыми величинами в классической механике являются значения функций $F(x, \xi)$. Результатом наблюдения функции F в состоянии (x_0, ξ_0) является значение $F(x_0, \xi_0)$. Особую роль в классической теории играет функция

$$H(x, \xi)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2m_i}\xi_i^2+V(x),$$

которая называется полной энергией системы или гамильтонианом. Функция V — это потенциал поля, в котором движутся частицы. В соответствии со вторым законом Ньютона, $m_i\ddot{x}_i=-\partial V/\partial x_i$, откуда следует, что

$$\dot{x}_i=\frac{\partial H(x, \xi)}{\partial \xi_i},\quad \dot{\xi}_i=-\frac{\partial H(x, \xi)}{\partial x_i},\quad i=1,\ldots,n.$$

Ясно, что эволюция во времени каждой наблюдаемой $F(x, \xi)$ описывается уравнением

$$\frac{dF}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial \xi_i}\frac{\partial F}{\partial x_i}-\frac{\partial H}{\partial x_i}\frac{\partial F}{\partial \xi_i}\right).$$

Последнее выражение называется *скобкой Пуассона* функций H и F и обозначается $\{H, F\}$. Из этого уравнения следует, что все законы классической механики инвариантны относительно канонических преобразований, сохраняющих значения скобки Пуассона для любой пары функций.

В квантовой теории наблюдаемыми величинами являются самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Состояние системы определяется волновой функцией ψ из $\mathscr{H}$.

Роль координат играют здесь операторы умножения: $\psi \to x_j\psi$, а роль импульсов — операторы дифференцирования: $\psi \to D_j\psi$. Результат измерения величины A в состоянии ψ является случайной величиной, имеющей математическое ожидание $\langle A\psi, \psi\rangle$. Оператор Гамильтона H определяет эволюцию состояния системы ψ в соответствии с уравнением Шрёдингера

$$\frac{d\psi}{dt} = iH\psi.$$

В эквивалентной теории Гейзенберга состояние системы ψ не меняется, а каждая наблюдаемая A подчиняется уравнению:

$$\frac{dA}{dt} = i(HA - AH) \equiv i[H, A].$$

Поэтому все законы квантовой механики инвариантны относительно унитарных преобразований $U : \mathscr{H} \to \mathscr{H}$.

Квантованием называется переход от классической механической системы к квантовомеханической, осуществляемой по следующим правилам. В качестве пространства $\mathscr{H}$ берется пространство $\mathscr{L}_2(\mathbf{R}^n)$ комплекснозначных функций $u(x)$ с интегрируемым по мере Лебега квадратом. Каждой координате x_j сопоставляется оператор умножения на x_j, каждому импульсу ξ_j — оператор дифференцирования: $u \to hD_ju$. Величина h называется постоянной Планка. Задача квантования состоит в том, чтобы сопоставить каждой вещественнозначной функции $a(x, \xi)$ самосопряженный оператор A в $\mathscr{H}$. При этом должны выполняться два условия:

1°. Оператор A зависит от параметра h, причем коммутатор $[A, B]$ имеет вид $ihC + 0(h)$, где C — оператор, сопоставляемый скобке Пуассона $\{a, b\}$;

2°. В некотором смысле $\lim\limits_{h \to 0} A = a(x, \xi)$, т. е. исходная классическая система должна при $h \to 0$ получаться из построенной квантовомеханической.

Эти условия не определяют операцию квантования однозначно. Мы не будет обсуждать здесь различные способы квантования, а отметим аналогию с микролокальным анализом, в котором функции $a(x, \xi)$ сопоставляется псевдодифференциальным оператор $a(x, D)$, причем скобка Пуассона $\{a, b\}$ двух функций a и b является главным символом коммутатора $[A, B]$.

Особенно хорошо теория псевдодифференциальных операторов отвечает нуждам квантовой механики, если вещественному символу соответствует (хотя бы формально) самосопряженный оператор и переход от координатного представления к импульсному не вызывает затруднений, т. е. переменные x и ξ играют одинаковую роль.

6.2. Псевдодифференциальные операторы в $\mathbf{R}^n$. Отметим, что правила квантования не определяют однозначно оператора, соответствующего функции $a(x, \xi)$, даже для простейших

дифференциальных операторов. Так, функции $x_j\xi_j$ можно сопоставить операторы

$$u \to hx_jD_ju; \quad u \to hD_j(x_ju); \quad u \to \frac{h}{2}x_jD_ju + \frac{h}{2}D_j(x_ju).$$

Последний оператор является наиболее предпочтительным, поскольку он является формально самосопряженным. Поэтому функции $a(x, \xi)$ общего вида естественно сопоставить оператор Вейля, имеющий форму (9).

При этом функция a не обязательно является однородной по ξ, и, вообще, переменные x и ξ могут быть равноправными. Это особенно удобно при исследовании некоторых задач квантовой механики, в которых естественным является переход от координатного представления к импульсному.

Определение 6.1. Функция $a(x, \xi)$ принадлежит классу T^m, если выполнены условия:

1) $a \in C^\infty(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_\xi)$.

2) Для любых мультииндексов α, β

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x a(x, \xi)| < C_{\alpha\beta}(1+|x|)^m (1+|\xi|)^m, \quad (x, \xi) \in \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n.$$

Для того, чтобы в этом классе можно было построить исчисление псевдодифференциальных операторов, естественно ввести малый параметр ε и рассматривать символы $a(\varepsilon, x, \xi)$ при $\varepsilon > 0$.

Определение 6.2. Функция $a(\varepsilon, x, \xi)$ принадлежит классу T^m_+, если выполнены условия:

1) $a \in C^\infty(\mathbf{R}^+_\varepsilon \times \mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_\xi)$.

2) Для любого целого $N > 0$

$$a(\varepsilon, x, \xi) = \sum_{k=0}^{N} \varepsilon^k a_k(x, \xi) + \varepsilon^{N+1} R_N(\varepsilon, x, \xi),$$

где $a_k \in T^m$ и для любых мультииндексов α, β и для любого целого $\gamma \geqslant 0$.

$$|D^\alpha_\xi D^\beta_x D^\gamma_\varepsilon R_N(\varepsilon, x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma}(1+|x|)^m (1+|\xi|)^m.$$

Ясно, что если $a \in T^m_+$, то

$$D^\alpha_x a \in T^m_+, \ D^\alpha_\xi a \in T^m_+, \ x^\alpha a \in T^{m+|\alpha|}_+, \ \xi^\alpha a \in T^{m+|\alpha|}_+.$$

Эти соотношения позволяют построить алгебру псевдодифференциальных операторов с символами из классов T^m_+ ([35]).

Примеры. 1. Уравнение Шрёдингера

$$\mathrm{i}h\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\Delta\psi + V(x)\psi$$

описывает движение нерелятивистской квантовой частицы массы m в поле с потенциальной энергией $V(x)$. Ему соответствует символ

$$\varepsilon\tau+\frac{\varepsilon^2}{2m}|\xi|^2+V(x),\quad \varepsilon=h,$$

принадлежащий классу T_+^2, если $|V(x)|\leqslant C(1+|x|)^2$.

2. Уравнение Гельмголька

$$(\Delta+k^2n^2(x))u(x)=0$$

описывает распространение волн частоты k в среде с коэффициентом преломления $n^?(x)$. Ему соответствует символ

$$\varepsilon^2|\xi|^2+n^2(x),\quad \varepsilon=k^{-1},$$

принадлежащий классу T_+^2, если $|n(x)|\leqslant C(1+|x|)$.

3. Разностное уравнение

$$\frac{u_m^{n+1}-2u_m^n+u_m^{n-1}}{h^2}=a^2\frac{u_{m+1}^n-2u_m^n+u_{m-1}^u}{h^2}$$

соответствует волновому уравнению $u_{tt}=a^2u_{xx}$, где $u_m{}^n=$ $=u(hn, hm)$. Используя формулы

$$e^{hd/dx}f(x)=f(x+h),\quad e^{hd/dt}f(t)=f(t+h),$$

получаем уравнение

$$[\sin^2(hD_t)-a^2\sin^2(hD_x)]u(t,x)=0,$$

которое совпадает с приведенным выше разностным, если брать значения $u(t,x)$ в точках сетки.

Этому уравнению соответствует символ

$$\sin^2\varepsilon\tau-a^2\sin^2\varepsilon\xi,\quad \varepsilon=h,$$

принадлежащий классу T_+^0 ([35]).

Глава 3

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ФУРЬЕ

§ 1. Параметрикс задачи Коши для гиперболических уравнений

1.1. Задача Коши для волнового уравнения. Рассмотрим вначале решение задачи Коши для волнового уравнения:

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\Delta u\quad \text{при } t>0,$$

$$u=\varphi,\quad \frac{\partial u}{\partial t}=\psi\quad \text{при } t=0,$$

где $a=\mathrm{const}$, φ и ψ — заданные функции из класса $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$. Если положить

$$v(t,\xi)=\int u(t,x)e^{-ix\xi}dx,$$

то задача переходит в задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{d^2v}{dt^2}=-a^2|\xi|^2 v \quad \text{при } t>0,$$

$$v=\tilde{\varphi},\quad \frac{dv}{dt}=\tilde{\psi} \quad \text{при } t=0,$$

Отсюда следует, что

$$v(t,\xi)=\tilde{\varphi}(\xi)\cos at|\xi|+\tilde{\psi}(\xi)\frac{\sin at|\xi|}{a|\xi|},$$

так что

$$u(t,x)=(2\pi)^{-n}\int\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(\xi)+\frac{1}{ia|\xi|}\tilde{\psi}(\xi)\right]e^{iat|\xi|+ix\xi}d\xi+$$
$$+(2\pi)^{-n}\int\frac{1}{2}\left[\tilde{\varphi}(\xi)-\frac{1}{ia|\xi|}\tilde{\psi}(\xi)\right]e^{-iat|\xi|+ix\xi}d\xi.$$

Таким образом, решение задачи Коши представлено в виде суммы двух интегралов, определяющих интегральные операторы Фурье с фазовыми функциями $\pm at|\xi|+x\xi$.

В общем случае интегральным оператором Фурье называется оператор, переводящий функцию u в функцию

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\int a(x,\xi)\tilde{u}(\xi)e^{iS(x,\xi)}d\xi.$$

Здесь $a\in S^m$ — символ оператора, S — фазовая функция. Обычно предполагается, что выполнено следующее условие невырожденности фазовой функции

$$\det\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial x_i\partial\xi_j}\right\|\neq 0, \text{ и что } S(x,t\xi)=tS(x,\xi) \text{ при } t>0,$$

так что интегральный оператор Фурье можно рассматривать как обобщение псевдодифференциального оператора.

1.2. Задача Коши для гиперболического уравнения произвольного порядка. Пусть $P(t, x, D_t, D_x)$ — строго гиперболический дифференциальный оператор порядка m с гладкими коэффициентами в полосе $\Omega=\{(t, x):0<t<T, x\in\mathbf{R}^n\}$. Это означает, что корни $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ характеристического уравнения

$$P_0(t, x, \lambda, \xi)=0$$

вещественны и различны при $\xi\neq 0$, причём

$$|\lambda_j(t,x,\xi)-\lambda_k(t,x,\xi)|\geqslant c_0=\text{const}>0,$$

если $(t, x)\in\Omega$, $|\xi|=1$, $j\neq k$.

Рассмотрим задачу Коши

$$P(t, x, D_t, D_x)u=0 \text{ при } (t, x)\in\Omega,$$

$$D_t^j u(0, x)=\varphi_j(x) \text{ при } x\in\mathbf{R}^n,\ j=0, 1,\ldots, m-1.$$

Решение указанной задачи дается при достаточно малом t формулой вида

$$u(t, x) = (2\pi)^{-n} \int \sum_{j,k=0}^{m-1} a_{jk}(t, x, \xi)\, \tilde{\varphi}_j(\xi)\, e^{iS_k(t,x,\xi)} d\xi, \qquad (1)$$

где функции S_k удовлетворяют уравнениям эйконала

$$\frac{\partial S_k}{\partial t} = \lambda_k\left(t, x, \frac{\partial S_k}{\partial x}\right) \text{ при } t > 0$$

и начальным условиям:

$$S_k = x \cdot \xi \quad \text{при } t = 0.$$

Физически S_k обозначает расстояние, которое проходит за время t луч света, выходящий из точки x по направлению вектора ξ, в среде, оптические свойства которой характеризуются функцией λ_k. Нетрудно видеть, что если T достаточно мало, то для S_k выполнено условие невырожденности, поскольку при $t=0$ мы имеем

$$\det \|\partial^2 S_k / \partial x_i \partial \xi_j\| = 1, \quad k = 0, \ldots, m-1.$$

Функции a_{jk} (точнее, асимптотические ряды для них) легко находятся из линейных уравнений переноса, которые возникают, если приравнять нулю функции b_{jk} в следующем равенстве, вытекающем из (1):

$$Pu(t, x) = (2\pi)^{-n} \int \sum_{j,k=0}^{m-1} b_{jk}(t, x, \xi)\, \tilde{\varphi}_j(\xi)\, e^{iS_k(t,x,\xi)} d\xi.$$

Для решения задачи Коши на большом отрезке $[0, T]$ необходимо использовать канонический оператор Маслова (см. § 3.3 ниже).

1.3. Метод стационарной фазы. Если $\operatorname{Re} a \geqslant 0$, $a \neq 0$, то преобразование Фурье функции e^{-ay^2} равно $\sqrt{\frac{2\pi}{a}} e^{-\xi^2/2a}$. Здесь и ниже $\sqrt{z}$ определяется так, что $\sqrt{1} = 1$. Поэтому преобразование Фурье функции $e^{i\Sigma a_j y_j^2/2}$, где $a_j \in \mathbf{R} \setminus 0$, совпадает с функцией

$$(2\pi)^{n/2} \Pi |a_j|^{-1/2} e^{\pi i \sigma/4} e^{-i\Sigma \eta_j^2/2a_j},$$

где $\sigma = \Sigma \operatorname{sgn} a_j$. Аналогично, если A — невырожденная симметрическая матрица, то преобразование Фурье функции $e^{i(Ay,y)/2}$ дается формулой

$$(2\pi)^{n/2} |\det A|^{-1/2} e^{\pi i \operatorname{sgn} A/4} e^{-i(A^{-1}\eta, \eta)/2},$$

где $\operatorname{sgn} A$ — сигнатура матрицы A.

Если $f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, то, по теореме Парсеваля,

$$\int f(y)\, e^{i\lambda(Ay,y)/2} dy =$$

$$= (2\pi\lambda)^{-n/2} |\det A|^{-1/2} e^{\pi i \operatorname{sgn} A/4} \int \tilde{f}(\eta)\, e^{-i(A^{-1}\eta,\eta)/2} d\eta.$$

Разложим экспоненту в правой части равенства в ряд Тейлора. Поскольку

$$\left| e^{iz} - \sum_{k=0}^{N-1} \frac{(iz)^k}{k!} \right| \leqslant \frac{|z|^N}{N!}, \quad z \in \mathbb{R},$$

получаем

$$\left| \int f(y)\, e^{i\lambda(Ay,y)/2} dy - S_N(\lambda) \right| \leqslant C\lambda^{-N-\frac{n}{2}} \sum_{|\alpha| \leqslant 2N+n+1} \int |D^\alpha f(y)|\, dy,$$

где

$$S_N(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} |\det A|^{-\frac{1}{2}} e^{\pi i \operatorname{sgn} A/4} \sum_{|\alpha|<2N} C_\alpha D^\alpha f(0)\, \lambda^{-|\alpha|/2}.$$

Коэффициенты C_α здесь не зависят от λ и f и имеют вид

$$C_\alpha = \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial \eta^\alpha} e^{-i(A^{-1}\eta,\eta)/2} \Big|_{\eta=0}.$$

При нечетных $|\alpha|$ эти коэффициенты обращаются в нуль.

Рассмотрим теперь интеграл

$$I(\lambda) = \int f(y)\, e^{i\lambda S(y)} dy,$$

где $S \in C^\infty$, $f \in C_0^\infty$ и S имеет единственную критическую точку x_0 в $\operatorname{supp} f$. Будем предполагать, что эта точка невырожденна, т. е. $\det \partial^2 S(x_0)/\partial x^2 \neq 0$. Тогда невырожденной заменой переменных можно привести $S(x)$ в окрестности x_0 к виду $S = \Sigma a_j y_j^2/2$. Применяя полученную выше оценку, получим

$$|I(\lambda) - S_N(\lambda)| \leqslant C\lambda^{-N-\frac{n}{2}} \sum_{|\alpha| \leqslant 2N+n+1} \int |D^\alpha f(y)|\, dy,$$

где

$$S_N(\lambda) = \lambda^{-\frac{n}{2}} e^{i\lambda S(x_0)} \sum_{j=0}^{N-1} a_j(\varphi, S)\, \lambda^{-j}.$$

Главный член асимптотики

$$S_1(\lambda) = \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} \left| \det \frac{\partial^2 S(x_0)}{\partial x^2} \right|^{-\frac{1}{2}} e^{i\lambda S(x_0)} e^{\frac{\pi}{4} i \operatorname{sgn} \frac{\partial^2 S(x_0)}{\partial x^2}} \varphi(x_0).$$

§ 2. Канонический оператор Маслова

2.1. Индекс Маслова. Для построения канонического оператора Маслова или глобального интегрального оператора Фурье понадобятся некоторые топологические понятия, введенные в работах В. П. Маслова [32] и В. И. Арнольда [1].

Рассмотрим пространство $\mathbf{C}^n$ точек $z=x+i\xi$, $x\in\mathbf{R}^n$, $\xi\in\mathbf{R}^n$ с унитарной структурой, заданной скалярным произведением

$$(z^1, z^2)=\sum_{j=1}^{n}(z^1)_j\overline{(z^2)_j}=\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^1x_j^2+\xi_j^1\xi_j^2\right)+i\sum_{j=1}^{n}\left(x_j^1\xi_j^2-x_j^2\xi_j^1\right).$$

Линейное n-мерное подпространство Λ в $\mathbf{C}^n$ называется лагранжевым, если $\operatorname{Im}(z^1, z^2)=0$ для любых точек z^1, $z^2\in\Lambda$.

Например, лагранжевыми являются подпространства $x=0$ или $\xi=0$. Лагранжевы подпространства естественно называть вещественноподобными, поскольку каждое такое подпространство унитарным преобразованием U может быть переведено в вещественное подпространство $\xi=0$. При этом преобразование U определено с точностью до ортогонального преобразования вещественного подпространства, так что многообразие $\Lambda(n)$ лагранжевых подпространств изоморфно факторгруппе $U(n)/$ $/O(n)$.

Поскольку определитель ортогонального преобразования равен ±1, величина $(\det U)^2$ зависит только от Λ и так как $|\det U|=1$, она определяет точку на $S_1\subset\mathbf{C}$. Таким образом, если рассмотреть замкнутую кривую $\gamma: S^1\to\Lambda(n)$, то ей соответствует отображение $S^1\to S^1$, которое характеризуется своим индексом. Отсюда можно вывести, что $H^1(\Lambda(n), \mathbf{Z})\simeq\mathbf{Z}$ и за образующую α группы когомологий $H^1(\Lambda(n), \mathbf{Z})$ можно принять значение этого индекса.

Определение 2.1. Подмногообразие M^n в $\mathbf{C}^n$ называется лагранжевым, если в каждой его точке касательное пространство является лагранжевым.

Пусть M — лагранжево многообразие и $\tau: M\to\Lambda(n)$ — отображение, сопоставляющее каждой точке $x\in M$ касательное пространство. Это отображение индуцирует отображение $\tau^*: H^1(\Lambda(n), \mathbf{Z})\to H^1(M, \mathbf{Z})$, при котором образующей α соответствует класс α^* одномерных когомологий многообразия M.

Определение 2.2. Класс $\alpha^*\in H^1(M, \mathbf{Z})$ называется *индексом Маслова*.

Индекс Маслова можно определить так же, как индекс пересечения с некоторым двусторонним $(n-1)$-мерным циклом на M — циклом особенностей.

Пусть M есть n-мерное лагранжево многообразие и $f: M\to$ $\to\mathbf{R}^n$ — это проекция M на плоскость $\xi=0$, т. е. $f(x, \xi)=x$. Множество Σ точек M, в которых ранг df меньше n, называется множеством особенностей отображения f. Это множество состоит, вообще говоря, из открытого $(n-1)$-мерного многообразия Σ^1, на котором ранг df равен $n-1$, и границы $\Sigma-\Sigma^1$, размерность которой строго меньше $n-2$, так что Σ определяет $(n-1)$-мерный цикл в M. В окрестности каждой точки $x\in\Sigma^1$ лагранжево многообразие M задается n уравнениями вида

$$x_k=x_k(\xi_k, x_{\hat{k}}),\quad \xi_{\hat{k}}=\xi_{\hat{k}}(\xi_k, x_{\hat{k}}),$$

где $\hat{k}=1, \ldots, k-1, k+1, \ldots, n$ при некотором k, $1\leqslant k\leqslant n$. Оказывается, что многообразие Σ^1 можно ориентировать, назвав положительной ту его сторону, на которой $\partial x_k/\partial\xi_k>0$. Выражение «вообще говоря», использованное выше, означает, что сказанное становится справедливым после сколь угодно малого унитарного поворота.

Если на лагранжевом многообразии M «общего положения» задана кривая γ, трансверсальная циклу Σ, с концами, лежащими вне Σ, то индексом Маслова называется ее индекс пересечения с Σ, т. е. разность между числом точек перехода с отрицательной стороны на положительную и числом точек перехода в обратном направлении.

2.2. Предканонический оператор. Пусть M — лагранжево многообразие в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$ точек (x, ξ). Будем обозначать буквой α подмножества множества $(1, 2, \ldots, n)$. При этом $|\alpha|$ — число элементов множества α, $\bar{\alpha}=(1, 2, \ldots$ $\ldots, n)\setminus\alpha$.

Предложение 2.1. Для каждой точки $A\in M$ существует такое α, что в некоторой окрестности этой точки в качестве локальных координат для M можно взять координаты $(x_\alpha, \xi_{\bar{\alpha}})$.

Атлас многообразия M, в котором локальные координаты выбраны в соответствии с этим предложением, называется *каноническим*, а сами эти координаты — *локальными каноническими*.

Предложение 2.2. Пусть $(x_\alpha, \xi_{\bar{\alpha}})$ — локальные канонические координаты на M в окрестности точки A. Тогда существует такая гладкая скалярная функция $S(x_\alpha, \xi_{\bar{\alpha}})$, что в этой окрестности

$$x_{\bar{\alpha}}=-\frac{\partial S}{\partial\xi_{\bar{\alpha}}},\quad \xi_\alpha=\frac{\partial S}{\partial x_\alpha}.$$

Функция S называется производящей. При этом

$$S=-x_\alpha\cdot\xi_\alpha+\int\limits_{(x^0,\xi^0)}^{(x,\xi)}\xi dx$$

и последний интеграл не зависит от выбора пути, соединяющего точки (x^0, ξ^0) и (x, ξ), поскольку M — лагранжево многообразие.

Допустим вначале, что M однозначно проектируется на x — пространство. Введем оператор

$$K: C_0^\infty(M)\to C^\infty(\mathbf{R}_x^n)$$

по формуле

$$(K\varphi)(x)=\sqrt{\left|\frac{d\sigma}{dx}\right|}e^{i\lambda S(x)}\varphi(x),$$

где S — производящая функция, $d\sigma$ — плотность объема на M, определяемая с помощью проекции по стандартной плотности dx.

Отметим, что K сохраняет норму в L_2:

$$\int |K\varphi(x)|^2 dx = \int |\varphi|^2 d\sigma.$$

Пусть теперь M однозначно проектируется на ξ-пространство. Тогда можно считать, что производящая функция S_1 зависит только от ξ и уравнение $x = -\partial S_1/\partial\xi$ определяет M. В этом случае полагаем

$$(K_1\varphi)(x) = \lambda^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{-n} \int \sqrt{\frac{d\sigma(\xi)}{d\xi}}\, e^{i\lambda S_1(\xi)} \varphi(x(\xi))\, e^{i\lambda x\cdot\xi} d\xi.$$

Допустим теперь, что M однозначно проектируется как на x — пространство, так и на ξ — пространство и сравним значение операторов K и K_1, так что $x = x(\xi)$ и $\xi = \xi(x)$ на M.

Вычислим последний интеграл методом стационарной фазы (см. § 3.1), учитывая, что на M

$$S(x) = \int\limits_{(x^0,\xi^0)}^{(x,\xi)} \xi dx, \quad S_1(\xi) = -x\xi + \int\limits_{(x^0,\xi^0)}^{(x,\xi)} \xi dx = -x\xi + S(x).$$

Получим, предполагая, что $|\partial^2 S_1(\xi)/\partial\xi^2| \neq 0$:

$$(K_1\varphi)(x) = \sqrt{\left|\frac{\partial\sigma}{\partial\xi}\right|} \left|\frac{\partial^2 S_1(\xi)}{\partial\xi^2}\right|^{-1/2} e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}\frac{\partial^2 S_1}{\partial\xi^2}} e^{i\lambda S(x)}\varphi(x) + r(x) =$$

$$= e^{\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}\frac{\partial^2 S_1}{\partial\xi^2}} K\varphi(x) + r(x),$$

где $r(x)$ — такая функция, что $\|r\|_{L_2} = O(\lambda^{-1})$.

Поэтому, если M однозначно проектируется на ξ — пространство, то следует положить

$$K\varphi(x) = e^{-i\frac{\pi}{4}\operatorname{sgn}\frac{\partial^2 S_1}{\partial\xi^2}} \lambda^{\frac{n}{2}} (2\pi)^{-n} \int \sqrt{\left|\frac{d\sigma(\xi)}{d\xi}\right|}\, e^{i\lambda S_1(\xi) + i\lambda x\xi} \varphi(x(\xi))\, d\xi,$$

где $\operatorname{sgn}\frac{\partial^2 S_1}{\partial\xi^2}$ — сигнатура матрицы $\frac{\partial^2 S_1}{\partial\xi^2}$ (т. е. разность количеств положительных и отрицательных собственных чисел).

В том случае, когда каноническими координатами на M служат x_α, $\xi_{\bar\alpha}$, полагаем

$$K\varphi(x) = e^{-\frac{i\pi}{4}\operatorname{sgn}\frac{\partial^2 S}{\partial\xi^2_{\bar\alpha}}} \lambda^{\frac{|\bar\alpha|}{2}} (2\pi)^{-|\bar\alpha|} \int \sqrt{\left|\frac{d\sigma}{dx_\alpha d\xi_{\bar\alpha}}\right|}\, e^{i\lambda S(x_\alpha, \xi_{\bar\alpha}) + i\lambda x_{\bar\alpha}\xi_{\bar\alpha}} \times$$

$$\times \varphi(x_\alpha, \xi_{\bar\alpha})\, d\xi_{\bar\alpha}.$$

2.3. Канонический оператор. Пусть M — лагранжево односвязное многообразие и $\Sigma\varphi_j = 1$ — разбиение единицы на M, подчиненное фиксированному каноническому атласу. *Каноническим оператором Маслова* называется оператор

$$K_M(\varphi): C_0^\infty(M) \to C^\infty(\mathbf{R}_x^n),$$

определяемый формулой

$$K_M(\varphi) = \sum_{j=1}^{N} K_j(\varphi_j \varphi),$$

где K_j — оператор, построенный для j-ой окрестности по указанному выше правилу.

Величина $\operatorname{sgn} \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_{\bar\alpha}^2}$ — сигнатура матрицы $\frac{\partial^2 S}{\partial \xi_{\bar\alpha}^2}$ — определена неоднозначно, поскольку локальные координаты могут быть выбраны, вообще говоря, не единственным способом. Однако рассуждения, аналогичные проведенному выше, показывают, что значение оператора $K(\varphi)$ для функций φ, имеющих носитель в такой координатной окрестности, определено корректно с точностью до функций, норма которых в L_2 имеет порядок $0(\lambda^{-1})$. Во всяком случае, это верно для односвязного многообразия M, на котором производящая функция для каждой окрестности может быть выбрана с помощью интегрирования от одной, общей точки (x_0, ξ_0).

В общем случае, когда многообразие M неодносвязно, канонический оператор может быть корректно определен на M (с точностью до $0(\lambda^{-1})$) в том и только в том случае, когда

1°. $\int\limits_\gamma \xi dx = 0$ для любой замкнутой кривой γ на M;

2°. для любой замкнутой кривой γ на M ее индекс Маслова равен нулю.

2.4. Некоторые приложения.

1°. Правило квантования Бора. Пусть V — вещественно-значная непрерывная функция на $\mathbf{R}$ и $V(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$. Рассмотрим одномерное уравнение Шрёдингера

$$-h^2 \psi'' + V(x)\psi = E\psi.$$

При каждом фиксированном $h > 0$ спектр этого оператора чисто дискретен и состоит из простых собственных значений

$$E_0(h) < E_1(h) < \ldots < E_m(h) < \ldots,$$

причем $E_m(h) \to +\infty$ при $m \to +\infty$. При этом

$$E_m(h) = \lambda_m(h) + 0(h^2),$$

где λ_m находится из уравнения

$$\int\limits_{x_-}^{x_+} \sqrt{\lambda - V(x)}\, dx = \pi h \left(m + \frac{1}{2}\right),$$

в котором x_+, x_- — корни уравнения $V(x_\pm) = \lambda$, $x_- < x_+$. Это условие, называемое формулой квантования Бора, является

условием, по которому канонический оператор Маслова может быть построен на одномерном лагранжевом многообразии ξ^2+ $+V(x)=\lambda$, т. е. выполнены условия 1° и 2° п. 2.3 выше.

2°. Квазиклассическая асимптотика задачи Коши для уравнения Шрёдингера. Рассмотрим уравнение

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t}=-\frac{h^2}{2}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+V(x)\psi,\quad t>0,\quad x\in\mathbf{R},$$

с начальным условием

$$\psi=\varphi(x)\,e^{\frac{i}{h}f(x)}\ \text{при}\ t=0.$$

Пусть M — лагранжево многообразие $\{(x,\xi),\ \xi=f'(x)\}$. Рассмотрим классическую динамическую систему

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial\xi},\quad \dot{\xi}=-\frac{\partial H}{\partial x},\quad H=\frac{1}{2}\xi^2+V(x).$$

Эта система определяет фазовый поток $g_t:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}^2$ с помощью сдвигов по ее траекториям. Кривые $M_t=g_tM$ являются лагранжевым многообразием при каждом $t>0$. Будем предполагать, что эти кривые гладкие и что гладким является многообразие $M_T=\bigcup\limits_{0<t<T}M_t$. Нетрудно проверить, что тогда M_T является двумерным лагранжевым многообразием. В. П. Масловым показано (см. [32]), что при $0<t<T$

$$\psi(t,x,h)=K\sum_{j=0}^{N}(ih)^k\psi_k+R_{N+1}(t,x,h),$$

причем $\max\limits_t\|R_{N+1}(t,x,h)\|_{L_2(\mathbf{R})}\leqslant C_Nh^{N+1}$. Здесь K — канонический оператор, построенный по многообразию M_T.

§ 3. Интегральные операторы Фурье

3.1. Осциллирующие интегралы. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$, $u\in C_0^\infty(\Omega)$. Рассмотрим интеграл

$$I_S(au)=\iint e^{iS(x,\theta)}a(x,\theta)\,u(x)\,dx\,d\theta, \tag{2}$$

где $\theta\in\mathbf{R}^N$, $x\in\Omega$. Будем предполагать, что для всех α, β и для любого компакта $K\subset\Omega$ существует такая постоянная $C_{\alpha,\beta,K}$, что справедлива оценка

$$|\partial_\theta^\alpha\partial_x^\beta a(x,\theta)|\leqslant C_{\alpha,\beta,K}(1+|\theta|)^{m-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}.$$

Эти неравенства определяют класс $S^m_{\rho,\delta}(\Omega\times\mathbf{R}^N)$ символов, введенный Хёрмандером (см. [104]). Класс $S^m_{1,0}$ обычно обозначается просто S^m, вместо $S^m_{\rho,1-\rho}$ пишут обычно просто S^m_ρ, $S^{-\infty}=\bigcap S^m$.

Функция $S(x, \theta)$ называется *фазовой функцией*. При этом предполагается, что $S \in C^\infty(\Omega \times \mathbf{R}^N \setminus 0)$, S — вещественнозначна, положительно однородна первого порядка по θ и $\operatorname{grad}_{x,\theta} S \neq 0$. Фазовая функция S называется *невырожденной*, если дифференциалы $d(\partial S/\partial \theta_k)$ линейно независимы, $k=1, \ldots, N$, в тех точках, где $\partial S/\partial \theta = 0$.

Интеграл (2), в котором $a \in S^m_{\rho,\delta}$, а S — фазовая функция, называется *осциллирующим интегралом*.

Предложение 3.1. Существует такой оператор

$$L = \sum_{j=1}^{N} a_j(x, \theta) \frac{\partial}{\partial \theta_j} + \sum_{k=1}^{n} b_k(x, \theta) \frac{\partial}{\partial x_k} + C(x, \theta),$$

где $a_j \in S^0$, $b_k \in S^{-1}$, $C \in S^{-1}$, что

$${}^tLe^{iS} = e^{iS},$$

где ${}^tL$ — оператор, транспонированный к L, т. е.

$${}^tLu = -\sum \frac{\partial}{\partial \theta_j}(a_j u) - \sum \frac{\partial}{\partial x_k}(b_k u) + Cu.$$

Интеграл (2) абсолютно сходится, если $m < -N$. В этом случае для любого целого $k \geqslant 0$

$$I_s(au) = \iint e^{iS(x,\theta)} L^k (a(x, \theta)\, u(x))\, dx d\theta, \tag{3}$$

причем $L^k(au) \in S^{m-k\sigma}_{\rho,\delta}$, где $\sigma = \min(\rho, 1-\delta)$. Будем предполагать, что $\sigma > 0$. Тогда интеграл (2) можно определить формулой (3), если k настолько велико, что $m - k\sigma < -N$, так что интеграл (3) абсолютно сходится.

Можно определить интеграл (2) и иначе. Если $h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, $h(\theta) = 1$ в окрестности точки $0 \in \mathbf{R}^N$, положим

$$I_{S,\varepsilon}(au) = \iint h(\varepsilon\theta)\, e^{iS(x,\theta)}\, a(x, \theta)\, u(x)\, dx d\theta, \quad \varepsilon > 0.$$

Поскольку для любого k

$$I_{S,\varepsilon}(au) = \iint e^{iS(x,\theta)} L^k (h(\varepsilon\theta)\, a(x, \theta)\, u(x))\, dx d\theta,$$

можно выбрать k так, чтобы $m - k\sigma < -N$ и затем перейти к пределу при $\varepsilon \to 0$. Таким образом, существует

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_{S,\varepsilon}(au),$$

который не зависит от выбора функции h. Этот предел можно, естественно, считать равным значению $I_S(au)$.

3.2. Локальное определение интегрального оператора Фурье. Пусть Ω и Ω' — области в $\mathbf{R}^n$ и $\mathbf{R}^m$. Рассмотрим интеграл

$$Au(x) = \iint e^{iS(x,y,\theta)} a(x, y, \theta)\, u(y)\, dy d\theta, \tag{4}$$

где $u \in C_0^\infty(\Omega')$, $x \in \Omega$, S — фазовая функция на $\Omega \times \Omega' \times \mathbf{R}^N$, $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \Omega' \times \mathbf{R}^N)$, причем $\rho > 0$, $\delta < 1$.

Если $v \in C_0^\infty(\Omega)$, то имеет смысл интеграл

$$(Au, v) = \iiint e^{iS(x,y,\theta)} a(x, y, \theta)\, u(y)\, v(x)\, dx dy d\theta,$$

который является осциллирующим. Поэтому A является линейным оператором, действующим из $C_0^\infty(\Omega)$ в $\mathcal{D}'(\Omega)$. Этот оператор и называется *интегральным оператором Фурье*. Ядром оператора A называется распределение $K_A \in \mathcal{D}'(\Omega \times \Omega')$, определяемое осциллирующим интегралом

$$(K_A, w) = \iiint e^{iS(x,y,\theta)} a(x, y, \theta)\, w(x, y)\, dx dy d\theta, \quad w \in C_0^\infty(\Omega \times \Omega').$$

Нетрудно видеть, что K_A является ядром оператора A в смысле Л. Шварца и что оператор A продолжается до непрерывного линейного отображения

$$A : \mathcal{E}'(\Omega') \to \mathcal{D}'(\Omega).$$

Примеры интегральных операторов Фурье приведены в п. 3.1, в связи с решением задачи Коши для гиперболических уравнений.

Простейшим вариантом интегрального оператора Фурье является оператор вида

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int a(x, \xi)\, \tilde{u}(\xi)\, e^{iS(x,\xi)} d\xi, \tag{5}$$

который рассматривался выше в п. 2.3.

Частным случаем интегрального оператора Фурье является псевдодифференциальный оператор, соответствующий фазовой функции $S(x, \xi) = (x, \xi)$ в (5) или $S(x, y, \theta) = (x - y, \theta)$ в формуле (4). С помощью замены переменных можно преобразовать к псевдодифференциальному оператору интегральный оператор Фурье с фазовой функцией $S(x, y, \theta)$, если эта функция линейна по θ и равенство $\partial S/\partial\theta = 0$ эквивалентно равенству $x = y$.

3.3. Эквивалентность фазовых функций. Рассмотрим осциллирующий интеграл

$$I_S(au) = \iint a(x, \theta)\, u(x)\, e^{iS(x,\theta)} dx d\theta,$$

где S — фазовая функция, $a \in S^m_{\rho,\delta}$. Если сделать замену переменных, сохраняющую слои в $T^*(\Omega)$:

$$(x, \theta) \to (x, \tilde{\theta}(x, \theta)),$$

то получим, что

$$I_S(au) = \iint e^{i\tilde{S}(x,\tilde{\theta})} \tilde{a}(x, \tilde{\theta})\, u(x)\, dx d\tilde{\theta},$$

где

$$S(x, \tilde\theta(x, \theta)) = S(x, \theta), \ \tilde a(x, \tilde\theta(x, \theta))|D\tilde\theta/D\theta| = a(x, \theta).$$

Если указанная замена диффеоморфна, то $\tilde S$ является фазовой функцией и $\tilde a \in S^m_{\rho, \delta}$. В этом случае S и $\tilde S$ называются локально эквивалентными.

Рассмотрим отображение

$$C_S \ni (x, \theta) \mapsto \left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) \in T^*(\Omega) \setminus 0,$$

где

$$C_S = \left\{(x, \theta): \frac{\partial S(x, \theta)}{\partial \theta} = 0\right\}.$$

Нетрудно видеть, что область значений этого отображения не меняется при переходе к эквивалентной фазовой функции и что множество Λ точек, принадлежащих этой области значений, образует коническое по ξ лагранжево многообразие.

Пример 3.1. Если функция S линейна по θ, то $C_S = Y \times \mathbf{R}^N$, где Y — подмногообразие коразмерности N.

Пример 3.2. Пусть $H(\xi)$ — положительно однородная первой степени гладкая при $\xi \neq 0$ функция и

$$S(x, \xi) = (x, \xi) - H(\xi).$$

Тогда условие $\partial S/\partial\xi = 0$ эквивалентно условию $x = H'(\xi)$ и

$$\Lambda = \{H'(\xi), \xi\}.$$

Как показывает следующая теорема, этот пример имеет общий характер.

Теорема ([35]). Пусть $\Lambda \subset T^*(X)$ — коническое по ξ лагранжево многообразие. Для каждой точки $\lambda_0 \in \Lambda$ можно выбрать локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ таким образом, что в некоторой окрестности этой точки Λ определяется с помощью фазовой функции $S(x, \xi) = x \cdot \xi - H(\xi)$, где H — некоторая гладкая при $\xi \neq 0$ функция, положительно однородная первой степени.

Ответ на поставленный выше вопрос об эквивалентности фазовых функций дается следующей теоремой Хёрмандера.

Теорема ([104]). Пусть S и $\tilde S$ — невырожденные фазовые функции в конических окрестностях точек $(x_0, \theta_0) \in \Omega \times (\mathbf{R}^N \setminus 0)$ и $(x_0, \tilde\theta_0) \in \Omega \times (\mathbf{R}^{\tilde N} \setminus 0)$, соответственно. Функции S и $\tilde S$ эквивалентны в том и только в том случае, когда

(I) Они определяют в соответствующих точках одно и то же лагранжево многообразие.

(II) $N = \tilde N$.

(III) Совпадают сигнатуры матриц

$$\partial^2 S(x_0, \theta_0)/\partial\theta^2 \quad \text{и} \quad \partial^2 \tilde S(x_0, \tilde\theta_0)/\partial\theta^2.$$

3.4. Связь с лагранжевым многообразием. Покажем, что значения интегрального оператора Фурье инвариантным образом связаны с лагранжевым многообразием. Для этого рассмотрим интеграл

$$\iint e^{iS(x,\theta)}a(x,\theta)\,u(x)\,dx\,d\theta.$$

После диффеоморфной замены переменных

$$x=x(\tilde{x}),\quad \theta=\theta(\tilde{x},\tilde{\theta})$$

этот интеграл перейдет в

$$\iint e^{i\tilde{S}(\tilde{x},\tilde{\theta})}\,\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{\theta})\,\tilde{u}(\tilde{x})\,d\tilde{x}\,d\tilde{\theta},$$

где

$$\tilde{S}(\tilde{x},\tilde{\theta})=S(x(\tilde{x}),\ \theta(\tilde{x},\tilde{\theta})),\quad \tilde{u}(\tilde{x})=|Dx/D\tilde{x}|^{1/2}u(x),$$
$$\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{\theta})=a(x(\tilde{x}),\ \theta(\tilde{x},\tilde{\theta}))\left|\frac{Dx}{D\tilde{x}}\right|^{1/2}\left|\frac{D\theta}{D\tilde{\theta}}\right|.$$

Эти формулы показывают, что вместо распределений u удобнее рассматривать плотности порядка 1/2, которые преобразуются по указанному правилу.

Пусть $C=\{(x,\theta),\ \partial S(x\theta)/\partial\theta=0\}$. Пусть d_C — плотность на C, являющаяся обратным образом меры Дирака в $\mathbf{R}^N$ при отображении $(x,\theta)\to\partial S(x,\theta)/\partial\theta$. Пусть, наконец, $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — локальные координаты на C, продолженные на некоторую окрестность этого многообразия. Тогда

$$d_C=|D(\lambda_1,\ \ldots,\lambda_n,\quad \partial S/\partial\theta_1,\ \ldots,\ \partial S/\partial\theta_n)/D(x,\theta)|^{-1}d\lambda_1\ \ldots\ d\lambda_n.$$

Можно показать ([104]), что

$$|D(\lambda,\ \partial S/\partial\theta)/D(x,\theta)|^{-1/2}a(x,\theta)=$$
$$=|D(\tilde{\lambda},\ \partial\tilde{S}/\partial\tilde{\theta})/D(\tilde{x},\tilde{\theta})|^{-1/2}\tilde{a}(\tilde{x},\tilde{\theta}),$$

т. е. плотность порядка 1/2 на Λ, являющаяся образом плотности $a\sqrt{d_C}$ при отображении $C\ni(x,\theta)\to(x,\partial S/\partial x)\in\Lambda$, совпадает с плотностью, полученной тем же путем из $\tilde{S}$ и $\tilde{a}$.

Таким образом, рассматриваемый интеграл инвариантно связан с лагранжевым многообразием, по крайней мере, в том случае, когда при замене координат не меняется число N независимых переменных. Инвариантность интеграла относительно перехода к другой параметризации $\theta'=(\theta_1,\ldots,\theta)_{N'}$ проверяется с помощью метода стационарной фазы. Суммируя сказанное, можно сформулировать следующий результат.

Теорема ([104]). Пусть $S(x,\theta)$ и $\tilde{S}(x,\tilde{\theta})$ — невырожденные фазовые функции в окрестностях точек $(x_0,\theta_0)\in\Omega\times\mathbf{R}^N$ и $(x_0,\tilde{\theta}_0)\in\Omega\times\mathbf{R}^{\tilde{N}}$, определяющие элементы одного общего лагран-

жевого многообразия, причем $\partial S(x_0, \theta_0)/\partial x = \partial \tilde{S}(x_0, \tilde{\theta}_0)/\partial x = \xi_0$. Тогда

(I) Разность $\sigma = \operatorname{sgn} \partial^2 S(x, \theta)/\partial\theta^2 - \operatorname{sgn} \partial^2 \tilde{S}(x, \tilde{\theta})/\partial\tilde{\theta}^2$ для точек θ и $\tilde{\theta}$, связанных соотношениями

$$\partial S(x, \theta)/\partial\theta = 0, \quad \partial S(x, \tilde{\theta})/\partial\tilde{\theta} = 0,$$

$$\partial S(x, \theta)/\partial x = \partial \tilde{S}(x, \tilde{\theta})/\partial x = \xi \in T^*_x,$$

постоянна в некоторой окрестности точки (x_0, ξ_0) на Λ.

(II) Каждое распределение A, имеющее вид

$$(A, u) = (2\pi)^{-(n+2N)/4} \iint e^{iS(x,\theta)} a(x, \theta) u(x)\, dx\, d\theta, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n),$$

где $a \in S_\rho^{\mu+(n-2N)/4}$, $\rho > 1/2$ и конический носитель распределения a лежит в достаточно малой конической окрестности точки (x_0, θ_0), может быть записано в той же форме с заменой S на $\tilde{S}$, a на $\tilde{a} \in S_\rho^{\mu+(n-2\tilde{N})/4}$, причем конический носитель $\tilde{a}$ лежит в некоторой малой окрестности точки $(x_0, \tilde{\theta}_0)$. При этом

$$e^{\pi i\sigma/4} a(x, \theta) \sqrt{d_C} - \tilde{a}(x, \tilde{\theta}) \sqrt{d_{\tilde{C}}} \in S_\rho^{\mu+n/4+1-2\rho}(\Lambda, \Omega_{1/2}).$$

3.5. Глобальное определение распределения Фурье. Пусть Ω — гладкое многообразие, Λ — замкнутое коническое лагранжево подмногообразие в $T^*(\Omega) \setminus 0$. Пусть $\bigcup U_j$ — локально конечное покрытие многообразия Ω координатными окрестностями и в конической окрестности V_j каждой области $U_j \times (\mathbf{R}^N \setminus 0)$, где $N = N(j)$ — некоторое целое число, определена невырожденная фазовая функция $S_j(x, \theta)$, причем отображение

$$(x, \theta) \to (x, \partial S/\partial x)$$

является диффеоморфизмом области $\{(x, \theta) \in V_j,\ \partial S_j(x, \theta)/\partial\theta = 0\}$ на открытое подмножество U^Λ многообразия Λ.

Рассмотрим распределение $A = \Sigma A_j \in \mathcal{D}'(\Omega, \Omega_{1/2})$, где

$$(A_j, u) = (2\pi)^{-(n+2N(j))/4} \iint e^{i(S_j(x,\theta) - \pi N(j)/4} a_j(x, \theta) u(x)\, dx\, d\theta,$$

$u \in C^\infty(\Omega)$, dx — лебегова мера в U_j, $\theta \in \mathbf{R}^{N(j)}$,

$$a_j \in S_\rho^{m+(n-2N(j))/4}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{N(j)}), \quad \operatorname{supp} a_j \subset \{(x, t\theta);\ t \geqslant 1,\ (x, \theta) \in K\},$$

где K — компактное подмножество образа V_j в $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^{N(j)}$, при указанном диффеоморфизме.

Множество таких распределений обозначим через $I_\rho^m(\Omega, \Lambda)$. Пусть

$$\sigma_{jk} = \frac{1}{2}\left[\left(\operatorname{sgn} \frac{\partial^2 S_k(x, \theta_k)}{\partial\theta^2} - N(k)\right) - \left(\operatorname{sgn} \frac{\partial^2 S_j(x, \theta_j)}{\partial\theta^2} - N(j)\right)\right],$$

где точки θ_k и θ_j таковы, что

$$\frac{\partial S_k(x,\theta_k)}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial S_j(x,\theta_j)}{\partial\theta}=0,\quad \frac{\partial S_k(x,\theta_k)}{\partial x}=\frac{\partial S_j(x,\theta_j)}{\partial x}=$$
$$=\xi\in T_x^*\cap\Lambda.$$

Нетрудно видеть, что $\sigma_{jk}\in\mathbf{Z}$, причем в силу сформулированной выше теоремы эта функция локально постоянна в $U_j^\Lambda\cap U_k^\Lambda$, так что мы получаем целочисленную коцепь, определяющую элемент $\sigma\in H^1(\Lambda,\mathbf{Z})$.

Рассмотрим соответствующий линейный одномерный комплексный пучок L на Λ, получающийся из этой коцепи таким образом, что элементу σ соответствует умножение в $\mathbf{C}$ на σi, где i — мнимая единица. Разумеется, L тривиален как комплексный векторный пучок и определяется образом σ в $H^1(\Lambda,\mathbf{Z}_4)$. Ясно, что L является $\mathbf{R}_+$-пучком, поскольку $\mathbf{R}_+$ тривиально действует на $\mathbf{C}$. Поэтому корректно определяются пространства $S_\rho^m(\Lambda,\Omega_{1/2}\otimes L)$.

Можно показать существование изоморфизма

$$S_\rho^{m+n/4}(\Lambda,\Omega_{1/2}\otimes L)/S_\rho^{m+n/4+1-2\rho}(\Lambda,\Omega_{1/2}\otimes L)\to$$
$$\to I_\rho^m(\Omega,\Lambda)/I_\rho^{m+1-2\rho}(\Omega,\Lambda).$$

Этот изоморфизм устанавливается следующим образом. Если $s\in S_\rho^{m+n/4}(\Lambda,\Omega_{1/2}\otimes L)$, то для каждого j определен такой элемент

$$s_j\in S_\rho^{m+n/4}\left(U_j^\Lambda,\Omega_{1/2}\otimes L\right),$$

что

$$s_j=i^{\sigma_{jk}}s_k \text{ в } U_j^\Lambda\cap U_k^\Lambda.$$

Если cone supp $s\subset U_j^\Lambda$, то, как и выше, можно определить элемент $A_j=A_j(s)\in I_\rho^m(\Omega,\Lambda)$, соответствующий символу $a_j\in S_\rho^{m+(n-2N_j)/4}(U_j)$ и $a_j\sqrt{dc_j}$ переходит в s_j при отображении

$$C_j=\left\{(x,\theta)\in U_j;\ \frac{\partial S_j(x,\theta)}{\partial\theta}=0\right\}\ni(x,\theta)\to\left(x,\frac{\partial S_j}{\partial x}\right)\in U_j^\Lambda.$$

Из этого условия a_j определяется как элемент из $S_\rho^{m+(n-2N_j)/4}(C_j)$. Окончательно a_j получается с помощью умножения на однородную срезающую функцию в U_j. По теореме п. 3.4. изменение выбора распределения a_j приводит к изменению A на элемент из $I_\rho^{m+n/4+(1-2\rho)}(\Omega)$.

3.6. Глобальные интегральные операторы Фурье. Пусть X и Y — многообразия размерностей, соответственно, n_X и n_Y. Точки многообразия X будем обозначать через x, точки Y — через y, точки $X\times Y$ — через (x,y).

Определение 3.1. Подмногообразие $C\subset T^*(X\times Y)\setminus 0$ называется *однородным каноническим отношением* из T^*Y в T^*X, если оно, во-первых, замкнутое и коническое, во-вторых,

содержится в $(T^*X\setminus 0)\times(T^*Y\setminus 0)$ и, в-третьих, лагранжево относительно 1 — формы $\alpha_X-\alpha_Y$, где $\alpha_X=\xi\cdot dx$, $\alpha_Y=\eta\cdot dy$.

Пример 3.3. Пусть $n_X=n_Y$ и f — C^∞ — отображение из $T^*Y\setminus 0$ в $T^*X\setminus 0$, положительно однородное порядка 1 по переменным η. Множество $\{(f(y,\eta),y,\eta);\ (y,\eta)\in T^*Y\setminus 0\}$ является каноническим отношением тогда и только тогда, когда $\sigma_Y=f^*\sigma_X$, т. е. когда отображение f является симплектическим.

Пример 3.4. Пусть $X=Y$ и f — тождественное отображение. Его график — это множество $\Delta_X{}^*=\{(x,\xi,x,\xi),\ x\in X,\ \xi\neq 0\}$, т. е. диагональ в $(T^*X\setminus 0)\times(T^*X\setminus 0)$. Ясно, что $\Delta_X{}^*$ является однородным каноническим отношением.

Пусть C — однородное каноническое отношение из T^*Y в T^*X. Образ C при отображении, переводящем точку (x,ξ,y,η) в $(x,\xi,y,-\eta)$, является коническим лагранжевым подмногообразием в $T^*(X\times Y)\setminus 0$ относительно стандартной симплектической формы $\sigma_X+\sigma_Y$. Обозначим этот образ через C'. С этим многообразием можно связать распределения Фурье, как это делалось в п. 3.5. Микролокально они определяются интегралами вида:

$$(2\pi)^{-(n_X+n_Y)/4-N/2}\int e^{iS(x,y,\theta)}a(x,\ y,\ \theta)\,d\theta.$$

Фазовая функция определена в некотором коническом открытом множестве $\Gamma\subset X\times Y\times(\mathbf{R}_1^N\setminus 0)$ и отображение

$$(x,\ y,\ \theta)\to\left(x,\ \frac{\partial S(x,\ y,\ \theta)}{\partial x},\ y,\ -\frac{\partial S(x,\ y,\ \theta)}{\partial y}\right)$$

гладко отображает Γ в коническое открытое подмножество $\Gamma^0\subset(T^*X\setminus 0)\times(T^*Y\setminus 0)$, а множество C_S нулей $\partial S/\partial\theta$ в Γ — на $C\cap\Gamma^0$.

Предложение 3.2. Дифференциал отображения $C\to T^*(X)$ является биективным тогда и только тогда, когда $n_X=n_Y$ и

$$D(S)=\det\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 S}{\partial\theta^2} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial\theta\partial x}\\ \dfrac{\partial^2 S}{\partial y\partial\theta} & \dfrac{\partial^2 S}{\partial y\partial x}\end{pmatrix}\neq 0 \text{ в } \Gamma.$$

Отображение $C_S\to C\to T^*(X)$ индуцирует локальные координаты (x,ξ) в некоторой окрестности на C_S и плотность $dc_S=|D(S)|^{-1}dx\,d\xi$.

Определение 3.2. Однородное каноническое отношение C из $T^*(Y)$ в $T^*(X)$ называется локальным каноническим графиком, если проекция $C\to T^*(X)$ (а следовательно и проекция $C\to T^*(Y)$) является локальным диффеоморфизмом, так что C является локальным графиком канонического преобразования. (Ясно, что в этом случае $n_X=n_Y$.)

Плотность μ на локальном каноническом графике можно определить с помощью стандартной плотности в $T^*(X)$ (или

$T^*(Y)$) и отображения $C \to T^*(X)$ (или $C \to T^*(Y)$). Ясно, что $\sqrt{\mu} \in S_1^{n/2}(C, \Omega_{1/2})$, где $n = n_X = n_Y$. Если L — линейный пучок на C, полученный из линейного пучка, ассоциированного с лагранжевым многообразием $\Lambda = C'$, то отображение

$$S_\rho^m(C, L) \to S_\rho^{m+n/2}(C, \Omega_{1/2} \otimes L),$$

определяемое с помощью умножения на $\sqrt{\mu}$, является биективным. Поэтому мы получаем изоморфизм

$$S_\rho^m(C, L) / S_\rho^{m+1-2\rho}(C, L) \to I_\rho^m(X \times Y, C') / I_\rho^{m+1-2\rho}(X \times Y, C').$$

Пусть S — невырожденная фазовая функция в конической окрестности U точки (x_0, y_0, θ_0) в $X \times Y \times (\mathbf{R}^N \setminus 0)$, которой соответствует окрестность точки c_0 в C. Пусть $a \in S_\rho^{m+(n-N)/2}$ и $a = 0$ вне достаточно малой конической окрестности точки (x_0, y_0, θ_0). Рассмотрим оператор A с ядром Шварца K_A, которое определяется равенством

$$(K_A, u) = (2\pi)^{-(n+N)/2} \int\int\int e^{iS(x, y, \theta)} a(x, y, \theta)\, u(x, y)\, dx dy d\theta,$$

где $u \in C_0^\infty(X \times Y)$. Тогда символ оператора A совпадает с образом $a\sqrt{d_C}$ на C при отображении $C_S \to \Lambda \to C$. В силу предложения 3.2, плотности d_C соответствует при этом отображении плотность $d_{C_S} = |D(S)|^{-1} dx d\xi$, причем

$$b(x, y, \theta) = a(x, y, \theta)\, |D(S)|^{-1/2} \in S_\rho^m(X \times Y \times (\mathbf{R}^N \setminus 0)).$$

Поэтому

$$(K_A, u) = (2\pi)^{-(n+N)/2} \int\int\int e^{iS(x, y, \theta)} b(x, y, \theta)\, |D(S)|^{1/2} \times \\ \times u(x, y)\, dx dy d\theta,$$

или, что эквивалентно,

$$Au(x) = (2\pi)^{-(n+N)/2} \int\int e^{iS(x, y, \theta)} b(x, y, \theta)\, |D(S)|^{1/2} u(y)\, dy d\theta$$

для $u \in C_0^\infty(Y)$. Этому оператору соответствует символ, который получается из b композицией с отображением, обратным к отображению

$$C_S \ni (x, y, \theta) \mapsto \left(x, \frac{\partial S}{\partial x}, y, -\frac{\partial S}{\partial y}\right) \in C,$$

и который может рассматриваться как элемент пространства $S_\rho^m(C, L)$. Как было показано выше, этот символ определен инвариантно с точностью до элемента из $S_\rho^{m+1-2\rho}(C, L)$. Поэтому его естественно называть главным символом.

Используя предложение 3.1, можно показать, что $A\colon \mathscr{E}'(Y) \to \mathscr{D}'(X)$, если $d_{x,\theta} S \neq 0$. Если предположить, что $d_{y,\theta} S \neq 0$, то A является непрерывным оператором из $C_0^\infty(Y)$ в $C^\infty(X)$.

§ 4. Исчисление интегральных операторов Фурье

4.1. Сопряженный оператор. Если u и v — две плотности порядка 1/2 на многообразии X и множество $\operatorname{supp} u \cap \operatorname{supp} v$ компактно, то

$$(u, v) = \langle u, \bar{v} \rangle = \int u\bar{v}.$$

Сопряженный к оператору A с ядром из $I_\rho^m(X \times Y, C')$, где C — однородное каноническое отношение из $T^*(Y)$ в $T^*(X)$, определяется равенством

$$(Au, v) = (u, A^*v), \quad u \in C_0^\infty(Y, \Omega_{1/2}), \quad v \in C_0^\infty(X, \Omega_{1/2}).$$

В локальных координатах, если ядро $K_A(x, y)$ оператора A имеет вид

$$\langle K_A, u \rangle = (2\pi)^{-(n_X+n_Y+2N)/4} \iiint e^{iS(x,y,\theta)} a(x, y, \theta)\, u(x, y)\, dx dy d\theta,$$

то

$$\langle K_{A^*}, u \rangle = (2\pi)^{-(n_X+n_Y+2N)/4} \iiint e^{-iS(x,y,\theta)} \overline{a(x, y, \theta)} \times$$
$$\times u(x, y)\, dx dy d\theta$$

для $u \in C_0^\infty$. Функция $-S$ является фазовой функцией в $X \times Y \times \times (\mathbf{R}^N \setminus 0)$ и соответствующее каноническое отношение определяется образом отображения

$$C_S \ni (x, y, \theta) \to \left(y, \ -\frac{\partial S}{\partial y}, \ x, \ \frac{\partial S}{\partial x}\right).$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме (см. [104]):

Теорема 4.1. Пусть C — однородное каноническое отношение из $T^*(Y)$ в $T^*(X)$, $K_A \in I_\rho^m(X \times Y, C)$, $\rho > 1/2$. Тогда ядро сопряженного оператора $K_{A^*} \in I_\rho^m(Y \times X, C_S')$, где C_S — обратный образ C при отображении $s: T^*Y \times T^*X \to T^*X \times T^*Y$, переставляющем сомножители. Если $a \in S_\rho^{m+(n_X+n_Y)/4}(C, \Omega_{1/2} \otimes L_C)$ главный символ оператора A, то главным символом оператора A^* является $s^*\bar{a} \in S_\rho^{m+(n_X+n_Y)/4}(C_S, \Omega_{1/2} \otimes L_{C_S})$, поскольку имеется естественный изоморфизм пучков L_{C_S} и $s^*L_C^{-1}$.

4.2. Композиция интегральных операторов Фурье. Пусть A_1 и A_2 — интегральные операторы Фурье с ядрами Шварца K_1 и K_2, соответственно. Пусть $K_1 \in I_\rho^{m_1}(X \times Y, C_1')$, где C_1 — каноническое отношение между $T^*(Y)$ и $T^*(X)$, и $K_2 \in I_\rho^{m_2}(Y \times Z, C_2')$, где C_2 — каноническое отношение между $T^*(Z)$ и $T^*(Y)$. Пусть A_2 является собственным, $A_2: C_0^\infty(Z) \to C_0^\infty(Y)$, $A_1: C_0^\infty(Y) \to \to C^\infty(X)$. Покажем, что оператор $A_1 A_2$ имеет ядро Шварца

$K \in I_{\rho}^{m_1+m_2}(X \times Z, C')$, где C получается композицией канонических отношений C_1 и C_2.

Прямое произведение $C_1 \times C_2$ является симплектическим многообразием относительно симплектической формы $\sigma_X - \sigma_{Y_1} + \sigma_{Y_2} - \sigma_Z$, где Y_1 и Y_2 — копии многообразия Y. Предположим, что $C_1 \times C_2$ пересекаются с диагональю Δ в $T^*(X) \times T^*(Y_1) \times T^*(Y_2) \times T^*(Z)$, состоящей из элементов, у которых совпадают их компоненты в $T^*(Y_1)$ и $T^*(Y_2)$, трансверсально. Это означает, что не существует ненулевого вектора, нормального к касательным плоскостям к $C_1 \times C_2$ и к Δ относительно симплектической формы, или, что эквивалентно, что не существует ненулевого вектора, касательного к $C_1 \times C_2$ и к Δ с нулевыми компотентами в $T(T^*(X))$ и $T(T^*(Z))$. При этом условии проекция $(C_1 \times C_2) \cap \Delta$ в $T^*(X) \times T^*(Z)$ является локально многообразием размерности $\dim X + \dim Z$, на котором $\sigma_X - \sigma_Z = 0$, поскольку $\sigma_{Y_1} - \sigma_{Y_2} = 0$ на Δ. Определим теперь композицию C_1 и C_2 как проекцию на $T^*(X) \times T^*(Z)$ пересечения $(C_1 \times C_2) \cap \Delta$.

Ясно, что $\dim (C_1 \times C_2) \cap \Delta = \dim C_1 \times C_2 - \operatorname{Codim} \Delta = n_X + n_Z$. Предположим, что проекция $(C_1 \times C_2) \cap \Delta \to T^*(X) \times T^*(Z) \setminus 0$ является собственным инъективным отображением.

Опишем условие трансверсальности в терминах фазовых функций. Пусть S_1 — фазовая функция, определенная в окрестности точки $(x_0, y_0, \theta_0) \in X \times Y \times (\mathbf{R}^{N_1} \setminus 0)$ и S_2 — фазовая функция в окрестности точки $(y_0, z_0, \sigma_0) \in Y \times Z \times (\mathbf{R}^{N_2} \setminus 0)$. Предположим, что эти функции невырождены и определяют локально C_1 уравнением $\frac{\partial S_1(x, y, \theta)}{\partial \theta} = 0$, C_2 — уравнением $\frac{\partial S_2(y, z, \sigma)}{\partial \sigma} = 0$ и что при $x = x_0, \ldots, \sigma = \sigma_0$

$$\left(x, \frac{\partial S_1(x, y, \theta)}{\partial x}, y, -\frac{\partial S_1(x, y, \theta)}{\partial y}, y, \frac{\partial S_2(y, z, \sigma)}{\partial y}, z, -\frac{\partial S_2(y, z, \sigma)}{\partial z}\right) \in \Delta$$

т. е. что

$$\partial S_1(x_0, y_0, \theta_0)/\partial y + \partial S_2(y_0, z_0, \sigma_0)/\partial y = 0.$$

Как указывалось, трансверсальность означает, что не существует вектора $(0, 0, t, \tau, t, \tau, 0, 0) \neq 0$, ортогонального к касательной плоскости к $C_1 \times C_2$ относительно симплектической формы $\sigma_X - \sigma_{Y_1} + \sigma_{Y_2} - \sigma_Z$. Нетрудно видеть, что это в точности означает, что из равенства

$$d \left\langle \frac{\partial S_1(x, y, \theta)}{\partial \theta}, a \right\rangle + d \left\langle \frac{\partial S_2(y, z, \sigma)}{\partial \sigma}, b \right\rangle + \\ + d \left\langle \frac{\partial S_1(x, y, \theta)}{\partial y} + \frac{\partial S_2(y, z, \sigma)}{\partial y}, t \right\rangle = 0$$

следует, что $a = b = t = 0$ (здесь $d = d_{x, y, \theta, \sigma}$).

Рассмотрим теперь функцию

$$S(x, z, \omega) = S_1(x, y, \theta) + S_2(y, z, \sigma),$$

где

$$\omega = ((|\theta|^2 + |\sigma|^2)^{1/2} y, \theta, \sigma) \in \mathbf{R}^{N_1+N_2+n_Y} \setminus 0.$$

Ясно, что S однородна по ω степени 1 и уравнение $\partial S / \partial \omega = 0$ означает, что

$$\frac{\partial S_1}{\partial \theta_1} = \frac{\partial S_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial S_1}{\partial y} + \frac{\partial S_2}{\partial y} = 0. \tag{6}$$

Поэтому условие трансверсальности означает в точности, что S — невырожденная фазовая функция в окрестности точки (x_0, z_0, ω_0). Соответствующее каноническое отношение имеет вид

$$\left\{\left(x, \frac{\partial S_1}{\partial x}, z, -\frac{\partial S_2}{\partial z}\right); \quad \frac{\partial S_1}{\partial \theta} = \frac{\partial S_2}{\partial \sigma} = \frac{\partial S_1}{\partial y} + \frac{\partial S_2}{\partial y} = 0\right\},$$

т. е. S локально определяет $C_1 \circ C_2$.

Если

$$A_1 v(x) = (2\pi)^{-(n_X+n_Y+2N_1)/4} \iint e^{iS_1(x,y,\theta)} a_1(x, y, \theta)\, v(y)\, dy d\theta,$$

$$A_2 u(y) = (2\pi)^{-(n_Y+n_Z+2N_2)/4} \iint e^{iS_2(y,z,\sigma)} a_2(y, z, \sigma)\, u(z)\, dz d\sigma,$$

где

$$a_1 \in S_\rho^{m_1+(n_X+n_Y-2N_1)/4}(X \times Y \times \mathbf{R}^{N_1}),$$

$$a_2 \in S_\rho^{m_2+(n_Y+n_Z-2N_2)/4}(Y \times Z \times \mathbf{R}^{N_2}),$$

S_1 и S_2 — невырожденные фазовые функции, a_1 и a_2 обращаются в нуль в окрестности сечений $\theta = 0$ и $\sigma = 0$, причем $\operatorname{cone\,supp} a_1 \subset \Gamma_1$, $\operatorname{cone\,supp} a_2 \subset \Gamma_2$, S_1 и S_2 определяют локально многообразия C_1 и C_2, то

$$A_1 A_2 u(x) = (2\pi)^{-(n_X+n_Z+2N)/4} \iiiint e^{i(S_1(x,y,\theta)+S_2(y,z,\sigma))} \times$$
$$\times a_1(x, y, \theta)\, a_2(y, z, \sigma)\, u(z)\, dz dy d\theta d\sigma.$$

Здесь $N = N_1 + N_2 + n_Y$. Важно отметить, что $a_1(x, y, \theta) \times a_2(y, z, \sigma)$ является символом в окрестности точек, удовлетворяющих условию (6). В самом деле, существуют такие положительные постоянные c_1 и c_2, что $c_1|\sigma| < |\theta| < c_2|\sigma|$, если $\dfrac{\partial S_1(x, y, \theta)}{\partial y} + \dfrac{\partial S_2(y, z, \sigma)}{\partial y} = 0$. Пусть $\chi(\theta, \sigma)$ — однородная нулевой степени функция, равная 1 при $c_1|\sigma|/2 < |\theta| < 2c_2|\sigma|$ и равная 0 при $c_1|\sigma|/3 > |\theta|$ и при $|\theta| > 3c_2|\sigma|$. Тогда оператор $A_1 A_2 - B$ имеет C^∞ ядро, если

$$Bu(x) = (2\pi)^{-(n_X+n_Z+2N)/4} \iiiint e^{i(S_1(x,y,\theta)+S_2(y,z,\sigma))} \times$$
$$\times b(x, z, y, \theta, \sigma)\, u(z)\, dz dy d\theta d\sigma,$$

где

$$b(x, z, y, \theta, \sigma) = \chi(\theta, \sigma)\, a_1(x, y, \theta)\, a_2(y, z, \sigma) \in S_\rho^m$$

при

$$m = m_1 + m_2 + (n_X + n_Z - 2N)/4 + n_Y.$$

Главный символ композиции $A_1 \circ A_2$ получается сужением на диагональ прямого произведения главных символов операторов A_1 и A_2.

Проверяется, что соответствующая $\frac{1}{2}$ — плотность на $C_1 \circ C_2$ получается из произведения плотностей на C_1 и C_2 с помощью проекции $C_1 \times C_2$ на диагональ.

4.3. Ограниченность в L^2. Пусть A — собственный интегральный оператор Фурье с главным символом $a \in S_\rho^0(C, L)$. Тогда сопряженный оператор A^* ассоциируется с однородным каноническим отношением C^*, получающимся из C с помощью перестановки X и Y (или T^*X и T^*Y). Ясно, что $C \circ C^*$ является графиком тождественного преобразования в $T^*Y \setminus 0$. Так как условие трансверсальности в этом случае всегда выполнено, оператор A^*A определен и является псевдодифференциальным оператором с главным символом $|a|^2$. Поэтому оператор A является ограниченным из $L^2_{\text{comp}}(Y, \Omega_{1/2})$ в $L^2_{\text{comp}}(X, \Omega_{1/2})$ и из $L^2_{\text{loc}}(Y, \Omega_{1/2})$ в $L^2_{\text{loc}}(X, \Omega_{1/2})$, если C локально является каноническим графиком. Если главный символ оператора A стремится к нулю, когда точка стремится к ∞ вдоль C над каждым компактным подмножеством в $X \times Y$, то A является компактным оператором (см. [104]).

Пусть теперь A — собственный интегральный оператор Фурье с главным символом $a \in S^m(C, L)$, а B и B_1 — псевдодифференциальные операторы с главными символами $b \in S^{m'}(X)$ и $b_1 \in S^{m'}(Y)$. Так как такие операторы ассоциируются с графиком тождественного отображения, условия трансверсальности выполнены и определены композиции BA и AB_1. Они являются интегральными операторами Фурье с ядрами из класса $I^{m+m'}(X \times Y, C, \Omega_{1/2})$. Главный символ оператора BA имеет вид

$$b(x, x, \partial S(x, y, \theta)/\partial x)\, a(x, y, \theta)\, (\sqrt{d_C})^{-1},$$

главный символ оператора AB_1 —

$$a(x, y, \theta)\, b_1(y, y, -\partial S(x, y, \theta)/\partial y)\, (\sqrt{d_C})^{-1}.$$

Отсюда и из предыдущего видно, что если A является собственным интегральным оператором Фурье с ядром из $I_\rho^m(X \times Y, C')$, то он является ограниченным из $H^s_{\text{comp}}(Y, \Omega_{1/2})$ в $H^{s-m}_{\text{comp}}(X, \Omega_{1/2})$ и из $H^s_{\text{loc}}(Y, \Omega_{1/2})$ в $H^{s-m}_{\text{loc}}(X, \Omega_{1/2})$ при любом вещественном s.

Определение 4.1. Интегральный оператор Фурье A из $I^m(X\times Y,\ C,\ \Omega_{1/2})$ называется *эллиптическим* в открытом коническом подмножестве $\Gamma_X\times\Gamma_Y\subset(T^*X\setminus 0)\times(T^*Y\setminus 0)$, если его главный символ нигде не равен нулю на $C\cap(\Gamma_X\times\Gamma_Y)$.

Ясно, что условие эллиптичности означает существование таких постоянных K_1 и K_2, что

$$|a(x,y,\theta)|\geqslant K_1|\theta|^{m+(n-N)/2}-K_2.$$

Если A — эллиптический оператор, то можно построить приближенный обратный оператор E в $\Gamma_Y\times\Gamma_X$. В самом деле, оператор AA^* — эллиптический псевдодифференциальный оператор порядка $2m$ в $\Gamma_X\times\Gamma_X$, а A^*A — эллиптический оператор порядка $2m$ в $\Gamma_Y\times\Gamma_Y$. Поэтому существуют параметриксы R_1 и R_2:

$$R_1(A^*A)\sim I,\quad (AA^*)R_2\sim I.$$

Если положить

$$E_1=R_1A^*,\quad E_2=A^*R_2,$$

то будем иметь: $E_1A\sim I$ в Γ_Y, $AE_2\sim I$ в Γ_X, где знак $\sim$ означает эквивалентность по модулю сглаживающих операторов. При этом оператор называется сглаживающим в Γ, если его символ и все производные этого символа убывают быстрее любой степени $|\theta|^{-N}$ при $|\theta|\to\infty$, $\theta\in\Gamma$.

Пусть $Y=X$. Оператор A назовем унитарным, если он эллиптический порядка 0 и $A^*A=I$, $AA^*=I$.

Следующая теорема обобщает теорему 2.1 главы 2 (см. [160]).

Теорема 4.2. Если A — унитарный интегральный оператор Фурье, ассоциированный с локальным каноническим графиком C, то локально главный символ оператора A^*PA для любого псевдодифференциального оператора P равен обратному образу главного символа P относительно локального симплектоморфизма $T^*X\to T^*X$, графиком которого является C.

§ 5. Отображение волнового фронта под действием интегрального оператора Фурье

5.1. Особенности интегралов Фурье. Пусть $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, $S(x,\theta)$ — фазовая функция, определенная в $\Omega\times\mathbf{R}^N$, и Ω' — множество точек из Ω, в которых $d_\theta S(x,\theta)\neq 0$ при $\theta\neq 0$.

Если $u\in C_0^\infty(\Omega')$, то

$$I_S(au)=\iint a(x,\theta)\,e^{iS(x,\theta)}u(x)\,dx\,d\theta=\int A(x)\,u(x)\,dx,\qquad (7)$$

где

$$A(x)=\int a(x,\theta)\,e^{iS(x,\theta)}d\theta,\quad x\in\Omega'.$$

Нетрудно видеть, что $A\in C^\infty(\Omega')$. Поэтому если распределение A определено равенством (7), то

$$\operatorname{sing\,supp} A \subset \{x \in \Omega,\ \partial S(x, \theta)/\partial\theta = 0 \text{ для некоторого } \theta \neq 0\}.$$

Если $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbf{R}^N)$, причем $a = 0$ в конической окрестности множества

$$C = \{(x, \theta);\ x \in \Omega,\ \theta \in \mathbf{R}^N \setminus \{0\},\ \partial S(x, \theta)/\partial\theta = 0\},$$

то распределение $u \mapsto I_S(au)$, определенное выше, является C^∞ функцией.

Более точно, справедливо

Предложение 5.1. Пусть S — невырожденная фазовая функция в конусе $\Gamma \subset \Omega \times \mathbf{R}^N$ и $a \in S^m_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbf{R}^N)$, $\operatorname{cone\,supp} a \subset \Gamma \setminus (\Omega \times 0)$. Предположим, что $\rho > \delta$ и что либо $\rho + \delta = 1$, либо S линейна по θ. Тогда распределение $u \mapsto I_S(au)$ является C^∞-функцией, если a имеет нуль бесконечного порядка в точках множества

$$C = \{(x, \theta) \in \Gamma,\quad \partial S(x, \theta)/\partial\theta = 0\}.$$

Если $a = 0$ в точках C, то существует такой символ $b \in S^{m+\delta+\rho}_{\rho,\delta}(\Omega \times \mathbf{R}^N)$ с $\operatorname{Cone\,supp} b \subset \Gamma \setminus (\Omega \times 0)$, что $I_S(au) = I_S(bu)$ для $u \in C^\infty(\Omega)$.

Определение 5.1. Вещественнозначная функция S, определенная в $X \times Y \times \mathbf{R}^N$, бесконечно гладкая при $\theta \neq 0$ и положительно однородная первой степени по θ, называется операторной фазовой функцией, если для каждого фиксированного x дифференциал $d_{y,\theta} S$ не обращается в нуль, или если $d_{x,\theta} S \neq 0$ для каждого фиксированного y при $\theta \neq 0$.

Пусть

$$C_S = \{(x, y) \in X \times Y,\ \exists \theta \in \mathbf{R}^N \setminus 0,\ \partial S(x, y, \theta)/\partial\theta = 0\}.$$

Из предложения 5.1 можно вывести, что

$$\operatorname{sing\,supp} Au \subset C_S \circ \operatorname{sing\,supp} u,\quad u \in \mathscr{E}'(Y),$$

где C_S — отношение между Y и X. Например, для псевдодифференциальных операторов

$$\operatorname{sing\,supp} Au \subset \operatorname{sing\,supp} u,$$

т. е. имеет место псевдолокальность.

5.2. Волновой фронт интеграла Фурье. Возможность микролокализации под знаком интеграла Фурье позволяет уточнить приведенные выше результаты, заменяя носитель особенностей волновым фронтом распределения.

Предложение 5.2. Пусть $\Omega \subset \mathbf{R}^n$, Γ — открытый конус в $\Omega \times (\mathbf{R}^N \setminus 0)$, S — фазовая функция в Γ. Если $a \in S_{\rho,\delta}{}^m(\Omega \times \mathbf{R}^N)$, $\rho > 0$, $\delta < 1$, $a = 0$ в окрестности множества $\theta = 0$ и $\operatorname{cone\,supp} a \subset \Gamma$, то

$$\operatorname{WF}(A) \subset \{(x, \partial S/\partial x);\ (x, \theta) \in \operatorname{cone\,supp} a,\ \partial S(x, \theta)/\partial\theta = 0\},$$

где A такое распределение, что $A(u) = I_S(au)$.

В частности, если собственный псевдодифференциальный оператор P таков, что $P\sim 0$ в $\mathrm{WF}(u)$ (см. выше, п. 4.2), то $Pu\in C^\infty$ для всех u из $\mathscr{D}'(\Omega)$.

В общем случае справедлива

Теорема 5.1. Пусть $K\in I_\rho^m(X, \Lambda)$, $a\in S_\rho^{m+n/4}\left(\Lambda, \Omega_{\frac{1}{2}}\otimes L\right)$ и $K(u)=I_S(au)$ для $u\in\mathscr{D}(X)$. Тогда $\mathrm{WF}(K)\subset\Lambda$ и $a\in S_\rho^{m+n/4+1-2\rho}$ в $\Lambda\setminus\mathrm{WF}(K)$.

Используя пространства С. Л. Соболева, можно получить следующий результат (см. [104]):

Теорема 5.2. $I_\rho^m(X, \Lambda)\subset H_{(s)}(X)$ тогда и только тогда, когда $m+n/4+s<0$. Кроме того, если $K(u)=I_S(au)$, $K\in I_\rho^m(X, \Lambda)$ и $a\neq 0$ на том множестве, где $d_\theta S=0$, то $K\notin H_{(s)}(X)$ при $0\leqslant m+n/4+s$.

5.3. Действие интегрального оператора Фурье на волновые фронты. Пусть A — интегральный оператор Фурье, имеющий вид

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\iint a(x, y, \theta)\,u(y)\,e^{iS(x, y, \theta)}dy d\theta. \tag{8}$$

Его ядро Шварца

$$K(x, y)=(2\pi)^{-n}\int a(x, y, \theta)\,e^{iS(x, y, \theta)}d\theta.$$

Для того, чтобы применить теорему 3.4 главы 1, надо знать волновой фронт этого ядра.

Лемма 5.1.

$$\mathrm{WF}(K)\subset$$
$$\subset\left\{(x, y, \xi, \eta);\ \xi=\frac{\partial S(x, y, \theta)}{\partial x},\ \eta=\frac{\partial S(x, y, \theta)}{\partial y},\ \frac{\partial S(x, y, \theta)}{\partial\theta}=0\right\}.$$

Доказательство этой леммы легко провести, вычисляя преобразование Фурье распределения $K(x, y)$ и применяя метод стационарной фазы.

Эта лемма позволяет найти $\mathrm{WF}(Au)$ ([104]).

Теорема 5.3. Пусть $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$ и A — оператор вида (8), причем выполнено два условия:

1°. если $\dfrac{\partial S(x, y, \theta)}{\partial x}=0$, $\dfrac{\partial S(x, y, \theta)}{\partial\theta}=0$, то $\left(y, -\dfrac{\partial S(x, y, \theta)}{\partial y}\right)\notin\mathrm{WF}(u)$;

2°. если $\dfrac{\partial S(x, y, \theta)}{\partial\theta}=0$, $\theta\neq 0$, то $\dfrac{\partial S(x, y, \theta)}{\partial y}\neq 0$. Тогда определено распределение $Au\in\mathscr{D}'(X)$ и

$$\mathrm{WF}(Au)\subset\left\{(x, \xi);\ \xi=\frac{\partial S(x, y, \theta)}{\partial x},\ \eta=-\frac{\partial S(x, y, \theta)}{\partial y},\right.$$
$$\left.\frac{\partial S(x, y, \theta)}{\partial\theta}=0,\ (y, \eta)\in\mathrm{WF}(u)\right\}.$$

Доказательство этой теоремы легко следует из теоремы 3.4 главы 1. В частном случае, когда $n=N$, $S(x,y,\theta)=S(x,\theta)-(y,\theta)$, условие 2° выполняется автоматически и справедлива (см. [104]).

Теорема 5.4. Пусть $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$ и A — оператор вида

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\int a(x,\xi)\,\tilde{u}(\xi)\,e^{iS(x,\xi)}d\xi.$$

Пусть выполнено условие: если $\frac{\partial S(x,\xi)}{\partial x}=0$, то $\left(\frac{\partial S(x,\xi)}{\partial \xi},\xi\right)\notin WF(u)$. Тогда определено распределение $Au\in\mathscr{D}'(\Omega)$ и

$$\mathrm{WF}(Au)\subset\left\{\left(x,\frac{\partial S(x,\eta)}{\partial x}\right);\ \left(\frac{\partial S(x,\eta)}{\partial\eta},\eta\right)\in\mathrm{WF}(u)\right\}.$$

Таким образом, $\mathrm{WF}(Au)$ содержится в образе $\mathrm{WF}(u)$ при каноническом преобразовании $(y,\eta)\to(x,\xi)$, порожденном функцией $S(x,\eta)$. Поскольку каноническое преобразование обратимо, для эллиптического оператора A знак включения в теореме 5.4 можно заменить знаком равенства.

В качестве примера отметим, что теорема 5.4 позволяет полностью определить волновой фронт решения задачи Коши для строго гиперболических уравнений по волновому фронту начальных данных.

§ 6. *Интегральные операторы Фурье с комплексной фазой*

6.1. Комплексная фаза. При рассмотрении операторов с комплекснозначными символами естественным образом возникают интегральные операторы Фурье с *комплексной фазой*. Микролокально такие операторы представляются в виде

$$Au(x)=(2\pi)^{-n}\int\int e^{iS(x,y,\theta)}a(x,y,\theta)\,u(y)\,dy d\theta.$$

Такой интеграл имеет смысл при условии, что $\operatorname{Im}S\geqslant 0$. Кроме того, предполагается обычно, что

$$S(x,y,t\theta)=tS(x,y,\theta)\ \text{при}\ t>0;$$
$$\text{если}\ \operatorname{Im}S(x,y,\theta)=0,\ \text{то}\ dS(x,y,\theta)\neq 0.$$

Комплексная фаза S называется невырожденной, если дифференциалы $d(\partial S/\partial\theta_j)$, $j=1,\dots,N$, линейно независимы над полем $\mathbf{C}$ в каждой точке множества C_S, на котором $\partial S/\partial\theta=0$.

6.2. Почти-аналитическое продолжение. Пусть Ω — открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$, $\rho(x)$ — неотрицательная функция в Ω, удовлетворяющая условию Липшица.

Определение 6.1. Функция f называется *ρ-плоской* на Ω, если для любого компактного подмножества $K\subset\Omega$ и любого целого $N\geqslant 0$ существует такая постоянная $C=C(K,N)>0$, что $|f(x)|\leqslant C|\rho(x)|^N$, $x\in K$.

Функции f и g называются ρ-эквивалентными, если разность $f-g$ является ρ-плоской функцией. Функция f называется плоской на компакте $K\subset\Omega$, если она является ρ-плоской при $\rho(x)=\operatorname{dist}(x, K)$.

Нетрудно видеть, что если $f\in C^\infty(\Omega)$ и f является ρ-плоской функцией, то любая производная $D^\alpha f$ также является ρ-плоской. В частности, такая функция является плоской на K тогда и только тогда, когда $D^\alpha f(x)=0$ при $x\in K$ и всех $|\alpha|$.

Определение 6.2. Пусть O — открытое подмножество в $\mathbf{C}^n$, K — замкнутое подмножество в O. Функция $f\in C^\infty(O)$ называется *почти-аналитической* на K, если функции $\partial_j f$ плоски на K при $j=1, \ldots, n$.

Множество функций в $C^\infty(O)$, почти аналитических на K, обозначается через $A(O, K)$. Пусть $O_{\mathbf{R}}=O\cap\mathbf{R}^n$.

Если $f\in A(O, O_{\mathbf{R}})$, $f|_{O_{\mathbf{R}}}=0$, то f является плоской на $O_{\mathbf{R}}$)

Пусть $z=x+iy$ — координаты в $\mathbf{C}^n$, Ω — открытое подмножество в $\mathbf{R}^n$. Обозначим через $\tilde\Omega$ подмножество $\Omega+i\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{C}^n$. Будем отождествлять Ω с $\tilde\Omega\cap\{y=0\}$.

Предложение 6.1. Пусть O — открытое подмножество в $\mathbf{C}^n$, содержащееся в $\tilde O_{\mathbf{R}}$. Пусть $N(O, O_{\mathbf{R}})$ — пространство C^∞ функций на O, которые являются плоскими на $O_{\mathbf{R}}$. Ограничение на $O_{\mathbf{R}}$ задает тогда изоморфизм пространства $A(O, O_{\mathbf{R}})/N(O, O_{\mathbf{R}}$ на $C^\infty(O_{\mathbf{R}})$.

Таким образом, функцию f из $C^\infty(O_{\mathbf{R}})$ можно рассматривать как класс эквивалентности (по модулю функций, плоских на $O_{\mathbf{R}}$) почти-аналитических функций на $O_{\mathbf{R}}$. Представитель этого класса эквивалентности называется почти - аналитическим продолжением функции f в O.

Это почти-аналитическое продолжение может быть построено следующим способом. Пусть $h\in C^\infty(\mathbf{R}^1)$, причем $h(t)=1$ при $t|<1$, $h(t)=0$ при $|t|>2$. Пусть $f\in C^\infty(O_{\mathbf{R}})$. Положим

$$\tilde f(z)=\sum_{\alpha\in \mathbf{Z}_+^n}\frac{1}{\alpha!}(iy)^\alpha f^{(\alpha)}(x)\,h\left(\frac{|y|}{\varepsilon_{|\alpha|}}\right),$$

где $\varepsilon_j>0$ подбираются при $j=0, 1, \ldots$, таким образом, что этот ряд сходится в $C^\infty(O_{\mathbf{R}})$.

Определение 6.3. Пусть O — открытое подмножество в $\mathbf{C}^n$, M — гладкое подмногообразие в O коразмерности $2k$, K — замкнутое подмножество в O. M называется *почти-аналитическим* на K, если любая точка $z_0\in K$ имеет такую открытую окрестность U в O, в которой существуют k комплексных гладких функций $f_1, \ldots, f_k$, почти-аналитических на $K\cap U$ и таких, что M определяется на U уравнениями $f_1(z)=0, \ldots, f_k(z)=0$, причем $df_1, \ldots, df_k$ линейно независимы. При этом M локально

эквивалентно M_1, $M \sim M_1$, если M_1 определяется в U с помощью таких функций $g_1, \ldots, g_k$, что $f_j \sim g_j$ при $j=1, \ldots, k$, т. е. функции $f_j - g_j$ плоские на $K \cap U$.

6.3. Формула стационарной комплексной фазы. Рассмотрим интеграл

$$I(\lambda) = \int e^{i\lambda f(x)} g(x)\, dx,$$

предполагая, что $\operatorname{Im} f \geqslant 0$ в $\operatorname{supp} g$. Предположим, что в $\operatorname{supp} g$ функция f имеет единственную критическую точку $x=0$, которая невырождена. Последнее означает, что матрица $\| \partial^2 f(x)/\partial x_i \partial x_j \|$ невырождена. Пусть функция f зависит еще от параметров $t=(t_1, \ldots, t_l)$, меняющихся в некоторой окрестности V точки o в $\mathbf{R}^l$. Пусть $\tilde{f}$ — почти-аналитическое продолжение функции f в окрестности точки $x=0$. Пусть $x=\varphi(t)$ — единственное решение уравнения $d_x \tilde{f}(\varphi(t), t)=0$ и $\tilde{H}(t) = \| \partial^2 \tilde{f}(\varphi(t), t)/\partial x_i \partial x_j \|$. По условию, $\tilde{H}(o)$ обратима и $\operatorname{Im} \tilde{H}(o)$ неотрицательно определена. Поэтому ни одно собственное значение матрицы $\tilde{H}(o)/i$ не является вещественным и отрицательным. Если окрестность V достаточно мала, то имеет смысл матрица $[\tilde{H}(t)/i]^{-1/2}$, где $t \in V$ и выбрана такая ветвь функции $\sqrt{z}$, что $\sqrt{1}=1$. Как и в п. 1.3, можно показать, что

$$I(\lambda) \sim \left(\frac{\pi}{\lambda}\right)^{\frac{n}{2}} \det [\tilde{H}(t)/i]^{-1/2} e^{i\lambda \tilde{f}(\varphi(t), t)} \sum_{j=0}^{\infty} \lambda^{-j} Q_j(D_x) \tilde{g}(\varphi(t)),$$

где Q_j — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами порядка $2j$, прием $Q_0(D_x)=I$. Эти операторы зависят от выбора почти-аналитических продолжений функций f и g.

6.4. Лагранжево многообразие. Пусть M — вещественное симплектическое многообразие размерности $2n$, $\tilde{M}$ — его почти аналитическое продолжение в $\mathbf{C}^{2n}$. Пусть $\Lambda \subset \tilde{M}$ — почти аналитическое подмногообразие, содержащее вещественную точку $\rho_0 \in M$, пусть (x, ξ) — вещественные симплектические координаты в окрестности $W \subset \mathbf{R}^{2n}$ точки ρ_0. Пусть $\tilde{W}$ — открытое подмножество в $\mathbf{C}^{2n}$, для которого $\tilde{W} \cap \mathbf{R}^{2n} = W$. Предположим, что $(\tilde{x}, \tilde{\xi})$ — почти аналитическое продолжение координат в $\tilde{W}$, так что $(\tilde{x}, \tilde{\xi})$ диффеоморфно отображают $\tilde{W}$ на открытое подмножество в $\mathbf{C}^{2n}$. Допустим, что Λ определяется в окрестности точки ρ_0 уравнениями $\tilde{\xi} = \partial g(x)/\partial \tilde{x}$, $\tilde{x} \in \mathbf{C}^n$, где g — почти аналитическая функция, причем $\operatorname{Im} \tilde{g} \geqslant 0$ в $\mathbf{R}^n$.

Теорема 6.1. Если $(\tilde{y}, \tilde{\eta})$ — другое почти аналитическое продолжение координат в $\tilde{W}$, и Λ определяется уравнением $\tilde{\eta} = H(\tilde{y})$ в окрестности точки ρ_0, то Λ локально эквивалентно

многообразию $\tilde{\eta}=\partial h(\tilde{y})/\partial\tilde{y}$, $\tilde{y}\in\mathbf{C}^n$, причем h — почти аналитическая функция и $\operatorname{Im} h\geqslant 0$ в $\mathbf{R}^n$.

Определение 6.4. Почти аналитическое многообразие Λ, удовлетворяющее условиям теоремы 6.1 в каждой вещественной точке в некоторой системе вещественных симплектических координат (x, ξ), называется положительным лагранжевым многообразием.

Определение 6.5. Почти аналитическое многообразие $\Lambda\subset\tilde{M}$ называется строго положительным лагранжевым многообразием, если $\dim_{\mathbf{R}}\Lambda=2n$, $\Lambda_{\mathbf{R}}$ является подмногообразием в M; $\sigma_\alpha|_{\Lambda_\alpha}\sim 0$ для всех локальных представителей Λ_α многообразия Λ и всех локальных почти аналитических продолжений σ_α симплектической формы σ на $T_\rho(\tilde{M})$; и наконец, $i^{-1}\sigma(v,\bar{v})>0$ для всех $v\in T_\rho(\Lambda)\setminus\widetilde{T_\rho(\Lambda_{\mathbf{R}})}$, $\rho\in\Lambda_{\mathbf{R}}$, где $\widetilde{T_\rho(\Lambda_{\mathbf{R}})}$ — комплексификация $T_\rho(\Lambda_{\mathbf{R}})$.

Как и в вещественном случае, для конического почти аналитического многообразия $\Lambda\subset\widetilde{T^*X\setminus 0}$, на котором $\sigma_\alpha|_{\Lambda_\alpha}\sim 0$ для всех локальных представителей Λ_α и всех почти аналитических продолжений σ_α формы σ, локальные координаты x в окрестности каждой точки $\rho_0\in\Lambda_{\mathbf{R}}$ могут быть выбраны так, что Λ представляется в виде $\tilde{x}=\partial g(\tilde{\xi})/\partial\tilde{\xi}$. Здесь ξ — двойственные к x координаты и $(\tilde{x},\tilde{\xi})$ — почти аналитическое продолжение координат (x,ξ). Функция g здесь является почти аналитической и положительно однородной первой степени.

Определение 6.6. Гладкая (C^∞) функция $S(x,\theta)$ определённая в открытом коническом множестве $\Gamma\subset\mathbf{R}^n\times(\mathbf{R}^n\setminus 0)$, называется *регулярной фазовой функцией* положительного типа, если

1°. Она не имеет критических точек;

2°. $S(x, t\theta)=tS(x,\theta)$ при $t>0$;

3°. Дифференциалы $d(\partial S/\partial\theta_1), \ldots, d(\partial S/\partial\theta_N)$ линейно независимы над полем $\mathbf{C}$ на множестве $C_{S\mathbf{R}}=\{(x,\theta)\in\Gamma,\ \partial S/\partial\theta=0\}$.

4°. $\operatorname{Im} S(x,\theta)\geqslant 0$.

Теорема 6.2. Пусть S — регулярная фазовая функция положительного типа, определенная в некоторой конической окрестности. Пусть $\tilde{S}(\tilde{x},\tilde{\theta})$ — почти аналитическое однородное продолжение функции S в некоторой конической окрестности в $\mathbf{C}^n\times(\mathbf{C}^N\setminus 0)$. Пусть

$$C_{\tilde{S}}=\{(\tilde{x},\tilde{\theta})\in\mathbf{C}^n\times(\mathbf{C}^N\setminus 0);\quad \partial\tilde{S}(\tilde{x},\tilde{\theta})/\partial\tilde{\theta}=0\}.$$

Тогда образ $\Lambda_{\tilde{S}}$ множества $C_{\tilde{S}}$ при отображении

$$C_{\tilde{S}}\ni(\tilde{x},\tilde{\theta})\mapsto\left(x,\ \frac{\partial\tilde{S}(\tilde{x},\tilde{\theta})}{\partial\tilde{x}}\right)\in\mathbf{C}^n\times(\mathbf{C}^n\setminus 0)$$

является локально коническим положительным лагранжевым многообразием. При этом $\Lambda_{S\tilde{R}}$ является образом C_{SR} и при замене $\tilde{S}$ эквивалентным почти аналитическим продолжением многообразие $\Lambda_{\tilde{S}}$ заменяется эквивалентным коническим положительным лагранжевым многообразием.

6.5. Эквивалентность фазовых функций. Пусть $S \in C^\infty(\Gamma)$ — регулярная фазовая функция положительного типа, $a \in S_\rho^m(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N)$, $\rho > 1/2$, Γ — открытое коническое множество, $\operatorname{supp} a$ содержится в замкнутом коническом подмножестве в Γ Рассмотрим интеграл

$$I_S(au) = \int\int e^{iS(x,\theta)} a(x, \theta)\, u(x)\, dx d\theta, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Как и в вещественном случае, можно показать, что

$$\mathrm{WF}\ (A) \subset \{(x, \partial S(x, \theta)/\partial x),\ (x, \theta) \in \operatorname{cone} \operatorname{supp} a \cap C_{S_\mathbf{R}}\},$$

где A — распределение: $A(u) = I_S(au)$.

Пусть теперь $S_1(x, \omega)$ — другая регулярная фазовая функция положительного типа, определенная в открытом коническом множестве $\Gamma \subset \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^M \setminus 0)$. Пусть $\lambda_0 = (x_0, \xi_0)$, причем

$$\xi_0 = \partial S(x_0, \theta_0)/\partial x = \partial S_1(x_0, \omega_0)/\partial x$$

и

$$\partial S(x_0, \theta_0)/\partial\theta = 0, \quad \partial S_1(x_0, \omega_0)/\partial\omega = 0.$$

Два распределения A и $B \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ называются микролокально эквивалентными в точке λ_0, если $\lambda_0 \notin \mathrm{WF}(A - B)$. Пусть $\mathcal{D}'_{\lambda_0}$ — класс распределений из $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$, локально эквивалентных в точке λ_0.

Фазовая функция S определяет отображение из $S_\rho^m(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N)$ в $\mathcal{D}'_{\lambda_0}$ по следующему правилу: если $a \in S_\rho^m(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N)$ и $a = a_0$ при больших θ в малой конической окрестности луча $\{(x_0, t\theta_0),\ t > 0\}$, причем $\operatorname{supp} a_0$ лежит в этой окрестности, то распределения A и A_0, определяемые равенствами $A(u) = I_S(au)$, $A_0(u) = I_S(a_0 u)$, эквивалентны в точке λ_0.

Определение 6.7. Фазовые функции S и S_1 эквивалентны в точке λ_0 для символов из S_ρ, если образы $S_\rho^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N)$ и $S_\rho^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^M)$ при отображениях, определяемых функциями S и S_1, совпадают в $\mathcal{D}'_{\lambda_0}$.

Теорема 6.3. Пусть S и S_1 — регулярные фазовые функции положительного типа, определенные в конических окрестностях точек $(x_0, \theta_0) \in \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^N \setminus 0)$ и $(x_0, \omega_0) \in \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^M \setminus 0)$, соответственно. Предположим, что Λ_S и Λ_{S_1} эквивалентны в окрестности точки $\xi_0 = \dfrac{\partial S}{\partial x}(x_0, \theta_0) = \dfrac{\partial S_1}{\partial x}(x_0, \omega_0)$. Тогда S и S_1 эквивалентны в точке (x_0, ξ_0) для символов из S_ρ, $\rho > 1/2$.

Определение 6.8. $I_\rho^m(X, \Lambda)$, $\rho > \frac{1}{2}$ — это подпространство распределений A из $\mathcal{D}'(X, \Omega_{1/2})$, для которого:

1°. $\mathrm{WF}(A) \subset \Lambda_{\mathbf{R}}$;

2°. Для каждой точки $\lambda_0 \in \Lambda_{\mathbf{R}}$ и любых локальных координат $x_1, \ldots, x_n$ в окрестности точки $\pi(\lambda_0) \in X$, A имеет вид: $A(u) = I_S(au)$, где S — положительная регулярная фазовая функция, порождающая Λ вблизи λ_0 и $a \in S_\rho^{m+(n-2N)/4}(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N)$ с носителем в малой конической окрестности точки $(x_0, \theta_0) \in C_{S_{\mathbf{R}}}$, соответствующей λ_0.

6.6. Главный символ. Определим главный символ для элементов из $I_\rho^m(X, \Lambda)$. В случае вещественной функции S главный символ является сечением в тензорном произведении линейного пучка плотностей 1/2 на Λ и линейного пучка Маслова, дающего функции перехода вида i^ν, $\nu \in \mathbf{Z}$.

В комплексном случае не удается определить почти аналитические плотности порядка 1/2 на комплексных многообразиях так, чтобы функции перехода были непрерывны относительно малых возмущений.

Рассмотрим вначале линеаризованную ситуацию. Пусть M — вещественное симплектическое векторное пространство размерности $2n$ с симплектической билинейной формой σ и $\tilde{M}$ — его комплексификация. Лагранжева плоскость $\Lambda \subset \tilde{M}$ называется положительной (положительно определенной), если $\operatorname{Im}\sigma(u, \bar{u}) \geqslant 0$ (соответственно, > 0) для всех $u \in \Lambda$, $u \neq 0$. Аналогично определяются отрицательные и отрицательно определенные плоскости. Обозначим $\mathcal{L}^-$ множество всех отрицательно определенных лагранжевых плоскостей.

Ясно, что если $L \in \mathcal{L}^-$, то L трансверсальна ко всем положительным лагранжевым плоскостям и имеет вид $\tilde{\xi} = B\tilde{x}$, где (x, ξ) — вещественные линейные симплектические координаты в M, а B — симметрическая матрица.

Пусть F — фиксированная вещественная лагранжева плоскость в M и $\tilde{F}$ — ее комплексификация.

Определение 6.9. Пусть $\Lambda \subset \tilde{M}$ — положительная лагранжева плоскость. Базис $e = (e_1, \ldots, e_n)$ в Λ называется допустимым, если существуют такой базис $f = (f_1, \ldots, f_n)$ в $\tilde{F}$ и такая плоскость $L \in \mathcal{L}^-$, что e_j является проекцией f_j вдоль L для всех j.

Множество всех допустимых базисов обозначается $B(\Lambda)$. В частности, $B(\tilde{F})$ — множество вещественных базисов в F.

Отметим, что базис e определяется по f и L не однозначно.

Предложение 6.2. $B(\Lambda)$ является объединением двух непересекающихся связных подмножеств, так что два базиса e и e', соответствующие данным f и L, принадлежат одной компоненте в том и только в том случае, когда их ориентации совпадают. Более того, существует единственная такая функция

$s=s_\Lambda$: $B(\Lambda)\times B(\Lambda)\to\mathbf{C}\setminus 0$, что для каждого компакта $K\subset B(\tilde F)\times\mathscr{L}^-$, $s_\Lambda(e, e')$ — непрерывно зависит от e, e' и Λ, если $e, e'\in E_\Lambda(K)'$, причем если положить $e/e'=e_1\wedge\ldots\wedge e_n/e_1'\wedge\ldots\wedge e_n'$, то $s^2(e, e')=\pm e/e'$, где знак плюс соответствует случаю одинаковой ориентации базисов, и если e, e', $e''\in B(\Lambda)$, то $s(e, e')\,s(e, e'')=s(e, e'')$.

Пусть теперь X — паракомпактное гладкое n-мерное многообразие и $\Lambda\subset T^*(X)\setminus 0$ — положительное замкнутое коническое лагранжево многообразие. Если $\rho\in\Lambda_{\mathbf{R}}$, то можно определить $B(T_\rho(\Lambda))$, как и выше, полагая $M=T_\rho(T^*X)$, причем в качестве F берется касательное к слою пространство. При любом выборе локальных координат в X возникают естественные линейные симплектические координаты в $T_\rho(T^*X)$, так что пространства $T_\rho(T^*X)$ и $T_\mu(T^*X)$ можно отождествить, если ρ, $\mu\in\Lambda_{\mathbf{R}}$ и достаточно близки. Поэтому если рассмотреть сечение

$$\Lambda_{\mathbf{R}}\ni\rho\to e(\rho)\in B(T_\rho(\Lambda)),$$

то имеет смысл говорить, что $e(\rho)$ локально (по ρ) принадлежит $B_K(T_\rho(\Lambda))$ для некоторого компакта $K\subset B(\tilde F)\times\mathscr{L}^-$.

Определение 6.10. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — почти аналитические функции на Λ, определенные в некоторой комплексной окрестности U^λ, $\lambda=(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Эти функции называются допустимыми координатами на Λ, если

1° $d\lambda_1, \ldots, d\lambda_n$ линейно независимы над $\mathbf{C}$ в вещественных точках.

2°. Пусть $(\delta\lambda_1, \ldots, \delta\lambda_n)$ — базис, двойственный к $(d\lambda_1, \ldots, d\lambda_n)$ в $T_\rho(\Lambda)^*$. Тогда $(\delta\lambda_1, \ldots, \delta\lambda_n)$ принадлежит множеству $B_K(T_\rho(\Lambda)$ локально по $\rho\in U^\lambda\cap\Lambda_{\mathbf{R}}$ для некоторого компакта $K\subset B(\tilde F)\times\mathscr{L}^-$. Если U^μ, $\mu=(\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — другая система локальных координат, то $s(\delta\lambda, \delta\mu)$ — непрерывная функция в $U^\lambda\cap U^\mu\cap\Lambda_{\mathbf{R}}$ и

$$s^2(\delta\lambda,\ \delta\mu)=\pm\frac{d(\mu)}{d(\lambda)}=\pm\det\left(\frac{\partial\mu_j}{\partial\lambda_k}\right).$$

При этом производные $\partial/\partial\lambda_k$ определяются равенством $d\mu_j=\sum(\partial\mu_j/\partial\lambda_k)\,d\lambda_k+\sum(\partial\mu_j/\partial\bar\lambda_k)\,d\bar\lambda_k$. Ясно, что $s(\delta\lambda, \delta\mu)$ имеет единственное (с точностью до эквивалентности) почти аналитическое продолжение в некоторую комплексную окрестность в Λ множества $U^\lambda\cap U^\mu\cap\Lambda_{\mathbf{R}}$, удовлетворяющее условию

$$(s_{\lambda,\mu})^2\sim\pm\frac{d(\mu)}{d(\lambda)}.$$

При этом $s_{\lambda,\lambda}\sim 1$, $s_{\lambda,\mu}s_{\mu,\omega}\sim s_{\lambda,\omega}$ и $s_{\lambda,\mu}$ непрерывны относительно малых возмущений λ, μ, при которых $\delta\lambda$, $\delta\mu$ остаются локально в $B_K(T_\rho(\Lambda))$ для некоторого компакта K из $B(\tilde F)\times\mathscr{L}$.

Определим теперь почти аналитический линейный пучок Маслова $\mathscr{L}$ на Λ как семейство допустимых координатных систем U^λ на Λ с функциями переноса $s_{\lambda,\mu}$. Сечение $f \in \Gamma(\Lambda; \mathscr{L})$; определяется тогда почти аналитической функцией f_λ на U^λ, для которой $f_\lambda \sim f_{\lambda,\mu} f_\mu$ для всех λ и μ.

Теорема 6.4. Пусть Λ — замкнутое коническое положительное лагранжево многообразие в $\widetilde{T^*X \setminus 0}$, где X — гладкое паракомпактное n-мерное многообразие.

Тогда существует «естественное» биективное линейное отображение

$$P: \Gamma^{m+n/4}(\Lambda; \mathscr{L}) \to I_\rho^m(X, \Lambda)/I_\rho^{m-1}(X, \Lambda).$$

Здесь $\Gamma^k(\Lambda; \mathscr{L})$ — пространство классов эквивалентности однородных сечений степени k.

Покажем, как P строится локально. Пусть $s \in \Gamma^{m+n/4}(\Lambda; \mathscr{L})$ и $\operatorname{supp} s$ лежит в малой конической окрестности точки ρ_0. Выберем локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$ и регулярную фазовую функцию положительного типа $S \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^N)$, которая порождает Λ в окрестности точки ρ_0 в этих координатах. Тогда существует такая почти аналитическая функция a на Λ, положительно однородная степени $m+n/4-N/2$, единственная с точностью до эквивалентности, что

$$s \sim a\sqrt{d\tilde{S}}.$$

Рассмотрим a как функцию на $C_{\tilde{S}}$ и ее почти аналитическое однородное продолжение a на $\mathbf{C}^n \times \mathbf{C}^N$ с носителем в малой конической окрестности точки (x_0, θ_0), соответствующей ρ_0. Элемент $P(s)$ определяется теперь как распределение

$$(2\pi)^{-(n+2N)/4} \int e^{iS(x,\theta)} \tilde{a}(x, \theta)\, d\theta$$

из класса $I_\rho^m(X, \Lambda)$. Доказательство корректности этой конструкции приведено в работе [126] Мелина и Шестранда.

6.7. Интегральные операторы Фурье с комплексной фазой. Пусть X и Y — гладкие паракомпактные многообразия. Если C-произвольное подмногообразие в $T^*(X) \times T^*(Y) = T^*(X \times Y)$, то C' определяется как $\{(x, \xi, y, -\eta);\ (x, \xi, y, \eta) \in C\}$.

Определение 6.11. Многообразие $C \subset \widetilde{T^*(X \times Y) \setminus 0}$ называется положительным каноническим отношением, если $C' \subset \widetilde{T^*(X \times Y) \setminus 0}$ — замкнутое коническое положительное лагранжево многообразие и $C_{\mathbf{R}} \subset (T^*X \setminus 0) \times (T^*Y \setminus 0)$.

Пусть $A \in I_\rho^m(X \times Y, \Lambda)$, где $\rho > \frac{1}{2}$ и $\Lambda \subset \widetilde{T^*(X \times Y) \setminus 0}$ — замкнутое коническое положительное лагранжево многообразие. Тогда A является ядром непрерывного оператора $A: C_0^\infty(Y, \Omega_{1/2}) \to$

$\to \mathscr{D}'(X, \Omega_{1/2})$. Заметим, что $\mathrm{WF}(A) \subset \Lambda_{\mathbf{R}}$. Если $C = \Lambda'$ — каноническое отношение, то $A: C_0^\infty(Y, \Omega_{1/2}) \to C^\infty(X, \Omega_{1/2})$ и можно продолжить A до непрерывного оператора из $\mathscr{E}'(Y, \Omega_{1/2})$ в $\mathscr{D}'(X, \Omega_{1/2})$.

Пусть X, Y, Z — паракомпактные гладкие многообразия размерностей n_X, n_Y, n_Z, соответственно, и операторы

$$A_1 \in I_\rho^{m_1}(X \times Y, \Lambda_1), \quad A_2 \in I_\rho^{m_2}(Y \times Z, \Lambda_2) \quad \left(\rho > \frac{1}{2}\right)$$

являются собственными, причем $C_j = \Lambda_j'$ — положительные канонические отношения. Тогда композиция $A_1 \circ A_2$ корректно определена и

$$\mathrm{WF}'(A_1 \circ A_2) \subset \mathrm{WF}'(A_1) \cdot \mathrm{WF}'(A_2) \subset C_{1\mathbf{R}} \cdot C_{2\mathbf{R}},$$

где $C_{1\mathbf{R}}, C_{2\mathbf{R}}$ — отношения, порождаемые пересечением C_1 и C_2 с $\mathbf{R}^n$.

Эта композиция является интегральным оператором Фурье, если выполнено следующее условие:

Пусть $\Delta = T^*(X) \times \operatorname{diag} T^*(Y) \times T^*(Z)$ и $\tilde{\Delta}$ — ее почти аналитическая комплексификация. Тогда $C_1 \times C_2$ пересекается трансверсально с $\tilde{\Delta}$ в точках из $(C_{1\mathbf{R}} \times C_{2\mathbf{R}}) \cap \Delta$, а естественная проекция

$$C_{1\mathbf{R}} \times C_{2\mathbf{R}} \to (T^*(X) \setminus 0) \times (T^*(Z) \setminus 0)$$

является инъективным и собственным отображением.

6.8. Некоторые приложения. 1. Пусть A — классический псевдодифференциальный оператор порядка 1 на компактном многообразии X и для главного символа a выполнено неравенство

$$\operatorname{Im} a(x, \xi) \geqslant 0, \quad \forall (x, \xi) \in T^*X \setminus 0.$$

Методами теории полугрупп можно показать, что тогда существует единственная гладкая функция $U(t)$ со значениями в пространстве линейных ограниченных операторов на $\mathscr{D}'(X, \Omega_{1/2})$, определенная при $t \geqslant 0$ и удовлетворяющая уравнению $D_t U = AU$ при $t > 0$, $U(0) = I$.

Можно показать, что $U(t)$ — интегральный оператор Фурье с комплексной фазой, ассоциированный с положительным каноническим отношением из X в X. Это отношение в некотором смысле является графиком гамильтонова потока функции $-a$ ([160]).

2. Пусть P — псевдодифференциальный оператор глвного типа (см. п. 3.1 главы 2). Пусть точка $(x_0, \xi_0) \in T^*X \setminus 0$ имеет открытую коническую окрестность, образ которой при отображении $(x, \xi) \to p(x, \xi)$ не пересекается с некоторым лучом $\{z = \rho e^{i\alpha}, 0 < \rho < \infty\}$ в комплексной плоскости. Тогда существует такая открытая коническая окрестность Γ точки (x_0, ξ_0) и такой непрерывный линейный оператор E на $\mathscr{D}'(X, \Omega_{1/2})$, что

$PE \sim I$ в Г. При этом оказывается, что E можно представить в виде интегрального оператора Фурье с комплексной фазой ([160]).

3. Рассмотрим в $\mathbf{R}^2$ оператор $P=D_t+it|D_x|$. С помощью преобразования Фурье по переменной x легко показать, что каждое решение из класса $S'(R^2)$ однородного уравнения $Pu=0$ имет вид $u(t, x)=U(t)\varphi$, где $\varphi \in S'(R)$,

$$U(t)\varphi = \frac{1}{2\pi}\int e^{ix\xi - t^2|\xi|/2}\tilde{\varphi}(\xi)\,d\xi.$$

Хотя формально этот оператор является интегральным оператором Фурье с комплекснозначной фазовой функцией, его можно рассматривать как псевдодифференциальный оператор с амплитудой $e^{-t^2|\xi|/2}$ из класса $S^0_{1/2;1/2}$.

Операторы с комплексной фазой изучались также в работах [29], [36], [37], [154], [157], [160] и др.

Глава 4

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ

§ 1. Регулярность решения в нехарактеристических точках

1.1. Микролокальная гладкость. Результаты § 2 главы 1 могут быть уточнены с помощью градуировки волнового фронта, использующей пространства Соболева.

Определение. Распределение $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ принадлежит пространству $H_s(x_0, \xi_0)$, где $s \in \mathbf{R}$, $(x_0, \xi_0) \in T^*\Omega \setminus 0$, если $u=u_1+u_2$, где $u_1 \in H_s(\Omega)$ и $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}(u_2)$.

Множество точек $(x, \xi) \in T^*\Omega \setminus 0$, в которых u не принадлежит H_s, обозначается через $\mathrm{WF}_s(u)$.

Разумеется, вместо пространства H_s можно использовать другие пространства, например, C^k, $C^{k,\alpha}$ и т. д.

Предложение 1.1. Пусть A — псевдодифференциальный оператор порядка m, распределение $u \in \mathcal{E}'(\Omega)$ таково, что $u \in H_s(x_0, \xi_0)$, где $(x_0, \xi_0) \in T^*\Omega \setminus 0$. Тогда $Au \in H_{s-m}(x_0, \xi_0)$.

Используя разбиение единицы, несложно доказать следующее утверждение (см. 108]).

Предложение 1.2. Если $u \in H_s(x_0, \xi_0)$ для всех точек $(x_0, \xi_0) \in T^*\Omega \setminus 0$, то $u \in H_{s,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

С другой стороны, поскольку $\mathcal{E}'=\bigcup(H_s \cap \mathcal{E}')$, справедливо

Предложение 1.3. Если $(x_0, \xi_0) \in \mathrm{WF}(u)$, то существует такое s, что $(x_0, \xi_0) \in \mathrm{WF}_{s+\varepsilon}(u)$, но $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}_{s-\varepsilon}(u)$ при всех $\varepsilon>0$.

Большинство утверждений из § 2 главы 1 можно передока-

зать, заменяя $\mathrm{WF}(u)$ на $\mathrm{WF}_s(u)$. Из определения видно, что $\mathrm{WF}_s(u)$ — коническое множество. Можно определить $\mathrm{WF}_s(u)$, так же и как $\bigcap \mathrm{Char}\, A$, где пересечение берется по множеству всех собственных классических псевдодифференциальных операторов A порядка O, для которых $Au \in H_s$, $\mathrm{char}\, A$ — множество характеристических точек оператора A.

1.2. Гладкость решения в нехарактеристической точке. Пусть $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$, $P(x, D)u = f$, где P — псевдодифференциальный оператор порядка m.

Теорема 1.1. Если $(x_0, \xi_0) \in T^*\Omega \setminus 0$, $p_0(x_0, \xi_0) \neq 0$, $f \in H_s(x_0, \xi_0)$, то $u \in H_{s+m}(x_0, \xi_0)$.

Доказательство. Для доказательства достаточно построить микролокальный левый параметрикс Q для оператора P. Его символ $q(x, \xi)$ строится в конической окрестности точки (x^0, ξ_0) так, что $q \sim \sum_0^\infty q_j$, где $q_0 = p_0^{-1}$, q_1 определяется из равенства

$$q_1 p_0 + q_0 p_1 + \frac{1}{i} \sum_{j=1}^n \frac{\partial q_0}{\partial \xi_j} \frac{\partial p_0}{\partial x_j} = 0,$$

и последующие слагаемые q_j при $j \geqslant 2$, имеющие порядок однородности $-j-m$, находятся из условий:

$$\sum_{|\alpha|+k+l=j} \frac{1}{i^{|\alpha|}} \partial_\xi^\alpha q_k \partial_x^\alpha p_e = 0.$$

Оператор Q имеет порядок $-m$, причем

$$u + Tu = Qf,$$

где T — сглаживающий оператор, так что $Tu \in C^\infty$. Отсюда и из предложения 1.1 сразу следует наше утверждение.

Следствие 1.1. Если $Pu = f$, то

$$\mathrm{WF}_s(u) \subset \mathrm{Char}\, P \cup \mathrm{WF}_{s-m}(f),$$

где, как и выше, $\mathrm{Char}\, P = \{(x, \xi) \in \Omega \times (\mathbf{R}^n \setminus 0),\ p_0(x, \xi) = 0\}$.

Следствие 1.2. Если P — эллиптический оператор, то

$$\mathrm{WF}_s(u) = \mathrm{WF}_{s-m}(Pu).$$

§ 2. Теоремы об устранимых особенностях

2.1. Устранимые особенности в правых частях уравнений. Известная теорема Римана гласит, что функция, голоморфная в $\Omega \setminus 0$, является голоморфной в Ω, если $|f(z)| = 0(|z|^{-1})$.

Известно также, что для гармонических в $\Omega \setminus 0$ функций, где Ω — область в $\mathbf{R}^n$, особенность при $x=0$ является *устранимой*, если $|u(x)| = 0(|x|^{2-n})$ при $n > 2$ и если $|u(x)| = 0(\ln \frac{1}{|x|})$ при $n = 2$.

Менее известно, что особенность в точке $x=0$ является устранимой для произвольного линейного дифференциального оператора $P(x, D)$ порядка m, если $|u(x)|=0(|x|^{m-n})$ при $n\geqslant m$ ([98]). В этом случае, конечно, решение может иметь особенность при $x=0$, но если $P(x, D)u=0$ в $\Omega\setminus 0$, то $P(x, D)u=0$ в Ω.

В том случае, когда $P(x, D)u=0$ на множестве $\Omega\setminus A$, где A — измеримое замкнутое множество, важную роль играет его мера Хаусдорфа. Напомним, что мерой Хаусдорфа порядка d называется величина

$$H_d(A)=\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\inf\sum r_j^d,$$

где нижняя грань берется по всем покрытиям множества A шарами $\bigcup B_j$ таким, что радиус r_j шара B_j не превосходит ε.

Теорема 2.1 ([98]). Особенность на множестве A является устранимой, т. е. из $Pu=0$ на $\Omega\setminus A$ следует, что $Pu=0$ в Ω, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1^0. $u\in W^p_{k,\text{loc}}(\Omega)$, $1<p<\infty$, $H_{n-(m-k)q}(K)<\infty$, $K\subset\subset A$, $q\text{-}p\ (q-1)$;

2^0. $u\in W^\infty_{k,\text{loc}}(\Omega)$, $H_{n-m+k}(A)=0$;

3^0. $u\in C^k\text{-}(\Omega)$, $H_{n-m+k}(K)<\infty$ для $K\subset\subset A$;

4^0. $u\in C^{k,\alpha}(\Omega)$, $0<\alpha<1$, $H_{n-m+k+\alpha}(A)=0$.

2.2. Устранимые особенности в граничных условиях. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$, $P(x, D)$ — линейный дифференциальный оператор порядка m с гладкими в Ω коэффициентами. Пусть Γ — часть границы $\partial\Omega$, являющаяся гладким $(n-1)$-мерным многообразием. Предположим, что на Γ заданы линейные дифференциальные операторы $B_1(x, D),\ldots$ $\ldots, B_k(x, D)$ с гладкими коэффициентами, имеющие порядки $m_j\leqslant m-1$; $1\leqslant k\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant k$.

Пусть A — компактное подмножество в Γ и функция $u(x)$ удовлетворяет уравнению $P(x, D)u=0$ в Ω, причем

$$B_j(x, D)u=0 \text{ на } \Gamma\setminus A,\ j=1,\ldots, k.$$

Рассмотрим вопрос о том, когда $B_ju=0$ на Γ. Предположим, что направление нормали к Γ не является характеристическим для оператора P и что справедлива формула Грина

$$\int_\Omega (Pu\cdot\bar{v}-u\overline{P^*v})\,dx=\sum_{j=1}^{t}\int_\Gamma B_j(x, D)\,u\cdot S_j(x, D)\,v\,d\Gamma \qquad (1)$$

для гладких функций v, равных нулю в окрестности множества $\partial\Omega\setminus\Gamma$. Здесь $k\leqslant t\leqslant m$, P^* — формально сопряженный к P оператор, дифференциальные операторы B_j и S_j имеют гладкие коэффициенты, причем порядки μ_j операторов S_j различны, $0\leqslant\mu_j\leqslant m-1$ и коэффициент при производной по нормали порядка μ_j у оператора S_j отличен от нуля.

В частности, эти условия выполнены, если $m=2k$ и операторы $P, B_1, \ldots, B_k$ определяют на Γ регулярную эллиптическую задачу [123].

Теорема 2.2 ([20]). Пусть $Pu=0$ в Ω, $B_ju=0$ на $\Gamma\setminus A$ при $j=1, \ldots, k$, причем справедлива формула Грина (1). Можно утверждать, что $B_ju=0$ на Γ при $j=1, \ldots, k$, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1⁰. $u\in W^p_{l,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $1<p<\infty$, $-\infty<l<m$, $H_{n-(m-l)q}(K)<\infty$;

2⁰. $u\in W^\infty_{l,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $-\infty<l<m$, $H_{n-m+l}(A)=0$;

3⁰. $u\in C^l(\Omega\cup\Gamma)$, $-\infty<l<m$, $H_{n-m+l}(K)<\infty$;

4⁰. $u\in C^{l,\alpha}(\Omega\cup\Gamma)$, $0<\alpha<1$, $0\leqslant l<m$, $H_{n-m+l+}(A)=0$.

§ 3. Распространение особенностей для решений уравнения вещественного главного типа

3.1. Определение и пример. Напомним, что оператор $P(x, D)$ порядка m имеет вещественный главный тип, если его характеристическая форма (главный символ) P_0 вещественнозначна и форма $dP_0(x, \xi)$ не пропорциональна форме ξdx.

Простейшим неэллиптическим оператором вещественного главного типа является оператор D_1. Рассмотрим уравнение $D_1u=f(x)$, где $f\in C^\infty(\Omega)$.

Из теоремы 1.1 следует, что если $(x, \xi)\in \mathrm{WF}(u)$ то $\xi_1=0$. Поэтому определено сужение u на плоскость $x_1=C$ при каждом C. Бихарактеристиками оператора D_1, являются прямые в $\mathbf{R}^{2n}$, параллельные оси x_1. В силу теоремы 3.3 главы 1, если $(x, \xi)\in\mathrm{WF}(u)$, то $(x, \xi')\subset \mathrm{WF}(u)_{x=c})$. Но $\psi(D')\varphi(x')u(x)=$ $=\psi(D')\varphi(x')u(C, x')+\int\psi(D')\varphi(x')f(t, x')dt$. Отсюда видно, что если $(x^0, \xi^0)\notin\mathrm{WF}(u)$ и $x_1{}^0=C$, то все точки отрезка прямой, параллельной оси x_1, лежащего в $T^*\Omega\setminus 0$ и проходящего через (x^0, ξ^0), не лежат в $\mathrm{WF}(u)$. Поэтому каждый отрезок бихарактеристики, лежащий в $T^*\Omega$, либо не пересекается с $\mathrm{WF}(u)$, либо целиком содержится в $\mathrm{WF}(u)$. То же верно и для $\mathrm{WF}_s(u)$, если $f\in H_s(\Omega)$.

3.2. Теорема Хёрмандера. С помощью канонического преобразования оператор вещественного главного типа можно привести к виду $Q(x, D)D_1$, где Q — эллиптический оператор. Это позволяет рассмотреть общее уравнение $Pu=f$, где P — псевдодифференциальный оператор вещественного главного типа порядка m. Пусть $f\in C^\infty(\Omega)$. *Бихарактеристиками* оператора P называются интегральные кривые системы уравнений

$$\frac{dx_j}{dt}=\frac{\partial P_0(x(t), \xi(t))}{\partial\xi_j}, \quad \frac{d\xi_j}{dt}=-\frac{\partial P_0(x(t), \xi(t))}{\partial x_j}, \quad j=1, \ldots, n, \quad (2)$$

если, $p_0(x(t), \xi(t))\equiv 0$

Теорема 3.1 ([78]). Если $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$, I — связный кусок

бихарактеристики и $I\cap \mathrm{WF}(Pu)=\varnothing$, то либо $I\subset \mathrm{WF}(u)$, либо $I\cap \mathrm{WF}(u)=\varnothing$.

Доказательство. Можно считать, что $m=1$, поскольку $\mathrm{WF}(Pu)$ и нулевые бихарактеристики оператора P сохраняются при умножении P на эллиптический оператор.

В силу п. 3.1, существует такой интегральный оператор Фурье A нулевого порядка, что $P=A^*D_1A+T$, $AA^*=I+T_1$, где T, T_1 — сглаживающие операторы и поэтому, если положить $Au=v$, то $D_1v=Af+T_2v$. Таким образом, доказательство сводится к рассмотренному выше случаю. Поскольку при преобразовании с оператором A бихарактеристикам оператора P соответствуют прямые, параллельные оси x_1, теорема доказана и в общем случае.

Таким образом, на дополнении к $\mathrm{WF}(Pu)$ множество $\mathrm{WF}(u)$ инвариантно относительно сдвигов по траекториям гамильтоновой системы (2).

Совершенно так же доказывается

Теорема 3.2. Если $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$, I — связный кусок бихарактеристики и $I\cap \mathrm{WF}_s(Pu)=\varnothing$, где P — псевдодифференциальный оператор вещественного главного типа порядка m, то либо $I\subset \mathrm{WF}_{s+m-1}(u)$, либо $I\cap \mathrm{WF}_{s+m-1}(u)=\varnothing$.

3.3. Локальная разрешимость. Пусть P — псевдодифференциальный оператор главного типа порядка m в области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ с вещественнозначным главным символом. Бихарактеристиками оператора P называются интегральные кривые системы (2), вдоль которых $p_0(x(t), \xi(t))=0$.

Теорема 3.3. Пусть P — псевдодифференциальный оператор с вещественным главным символом p_0 и $d_\xi p_0(x, \xi)\neq 0$ в $T^*\Omega\setminus 0$. Тогда для каждой точки $x_0\in\Omega$ найдется такая окрестность U, что если $f\in H_s(\Omega)$, то существует функция u из $H_{s+m-1}(\Omega)\cap\mathscr{E}'(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению $Pu=f$ в U, причем $\|u\|_{s+m-1}\leqslant c\|f\|_s$, где постоянная c зависит только от s.

Доказательство. Пусть U — такая окрестность точки x_0, что каждая нулевая бихарактеристика функции p_0, проходящая через точку (x, ξ) при $x\in U$, $\xi\neq 0$, проходит и через некоторую точку (x_1, ξ_1) при $x_1\in\partial U$, $\xi_1\neq 0$. Такая окрестность всегда существует, поскольку P — оператор главного типа.

Заметим, что P^* также является оператором главного типа и если $P^*\varphi\in H_{s-m+1}(U)$, $\varphi\in\mathscr{E}'(U)$, то $\varphi\in H_s(U)$. В самом деле, по теореме 3.2, множество точек, в которых $\varphi\in H_s$, инвариантно относительно гамильтонова потока H_{p_0}, и так как $\varphi=0$ в окрестности границы ∂U, каждая нулевая бихарактеристика содержит точки, в которых $\varphi\in C^\infty$. Таким образом, $\varphi\in H_s$ в каждой точке из T^*U.

В силу предложения 1.2, $\varphi\in H_s(U)$.

По теореме Банаха об открытом отображении существует такая постоянная C, зависящая только от s, что

$$\|\varphi\|_s\leqslant C\|P^*\varphi\|_{s-m+1},\quad \varphi\in C_0^\infty(U).$$

Поэтому интеграл $\int f\overline{\varphi}dx$ при $f\in H_s(\Omega)$ является линейным непрерывным функционалом от $\overline{P^*\varphi}\in H_{-s-m+1}$. По теореме Хана — Банаха отсюда вытекает существование функции $u\in H_{s+m-1}$, для которой

$$\int f\overline{\varphi}dx=\int u\cdot\overline{P^*\varphi}dx,\quad \varphi\in C_0^\infty(U),$$

причем $\|u\|_{s+m-1}\leqslant C\|f\|_s$. По определению, u является обобщенным решением уравнения $Pu=f$, и теорема доказана.

3.4. Полуглобальная разрешимость. Под полуглобальной понимается разрешимость в каждом компактном подмножестве. Полуглобальная разрешимость не вытекает из локальной, что видно из следующего примера.

Пример 3.1. Пусть Ω — кольцо на плоскости:

$$\Omega=\{(x, y),\ 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}.$$

Уравнение $\partial u/\partial\varphi=f$ всегда разрешимо локально, но для разрешимости его в Ω необходимо, чтобы

$$\int\limits_0^{2\pi} f(r, \varphi)\, d\varphi=0$$

при $1\leqslant r\leqslant 2$.

Этот пример показывает естественность следующего условия.

Условие A. Пусть $K\ll\Omega$. Каждая нулевая бихарактеристика, проходящая через точку (x, ξ), где $x\in K$, $\xi\neq 0$, имеет точки, проекция которых на Ω лежит вне K.

Теорема 3.4 ([78]). Пусть P — псевдодифференциальный оператор главного типа порядка m с вещественнозначным главным символов p_0 в области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$. Пусть $K\ll\Omega$ и выполнено условие A. Тогда множество

$$N(K)=\{\varphi;\ \varphi\in C_0^\infty(K),\ P^*\varphi=0\}$$

имеет конечную размерность. Если $f\in H_s(\Omega)$, $\int f\overline{\varphi}dx=0$ для всех $\varphi\in N(K)$, то существует функция $u\in H_{s+m-1}(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению $Pu=f$ в K и такая, что

$$\|u\|_{s+m-1}\leqslant C\|f\|_s,$$

где постоянная C не зависит от f.

Теорема доказывается с помощью теоремы 3.2 и теоремы о замкнутом графике. При этом используется тот факт, что каждое решение уравнения $P^*\varphi=0$ из $\mathscr{E}'(K)$ принадлежит $C_0^\infty(\Omega)$ в силу условия A и теоремы 3.2.

§ 4. Распространение особенностей для уравнений главного типа с комплексным символом

4.1. Пример ([106]). Рассмотрим уравнение

$$(D_1+ix_1^kD_2)u=0,$$

где $k>0$ — нечетное число. Пусть $\eta_0=(0, -1, \eta'')$, $\eta''\in\mathbf{R}^{n-2}$. Пусть $v(x')\in C^1$, $x'=(x_2, \ldots, x_n)$ — функция с компактным носителем, для которой

$$\mathrm{WF}\, v=\{(0, t\eta_0'),\ t>0\}$$

(см. пример 2.2 главы 1). Тогда $\tilde{v}$ быстро убывает вне каждой конической окрестности Γ точки η_0'. Положим

$$u(x)=(2\pi)^{1-n}\int\limits_{\Gamma_0} e^{\xi_2 x_1^{k+1}/(k+1)+i(x',\xi')}\tilde{v}(\xi')\,d\xi',$$

где Γ_0 — такая окрестность η_0', что $\xi_2<-C|\xi'|$ в Γ. Тогда $u\in C^1$, причем $u\in C^\infty$ при $x_1\neq 0$. Можно показать, что

$$\mathrm{WF}(u)=\{(0, t\eta_0),\ t>0\},$$

так что решение имеет особенность при $x=0$, которая не распространяется.

4.2. Неподвижная особенность. Явление, отмеченное в приведенном выше примере, характерно для большого класса операторов. Пусть P — собственный псевдодифференциальный оператор порядка m в области Ω. Пусть $(x_0, \xi_0)\in T^*\Omega\setminus 0$ — характеристическая точка, в которой $H_{p_0}\neq 0$. Умножая P, если это необходимо, на i, можно всегда добиться, чтобы $H_{\mathrm{Re}\, p_0}\neq 0$. Тогда уравнение $\mathrm{Re}\, p_0=0$ определяет гладкую поверхность, проходящую через точку (x_0, ξ_0) и состоящую из бихарактеристик функции $\mathrm{Re}\, p_0$.

Предположим, что $\mathrm{Im}\, p_0$ имеет нуль конечного порядка $k\neq 0$ на каждой бихарактеристике функции $\mathrm{Re}\, p_0$, близкой к той, которая проходит через точку (x_0, ξ_0).

Из этого условия следует, в частности, что $H_{\mathrm{Re}\, p_0}$ не имеет радиального направления, поскольку функция $\mathrm{Im}\, p_0$ в этом случае обращалась бы тождественно в нуль на бихарактеристике, проходящей через (x_0, ξ_0).

Теорема 4.1 ([147]). При сделанных предположениях существует такой интегральный оператор Фурье A, что

$$A^*A=\Lambda^{1-m}+T,$$
$$A^*PA=D_1+ix_1^kD_2+T_1,$$

где T и T_1 — операторы, имеющие символы порядка $-\infty$ в окрестности точки $(0, \eta_0)$.

Используя изученный выше пример, получаем

Следствие 4.1. Если k нечетно и $(H_{\mathrm{Re}\,p_0})^k \operatorname{Im} p_0 (x_0\ \xi_0) < 0$, то существует распределение u, для которого

$$Pu \in C^\infty \text{ и } \mathrm{WF}(u) = \{(x_0, t\xi_0),\ t > 0\}.$$

4.3. Один специальный случай. Пусть P — псевдодифференциальный оператор порядка m главного типа с главным символом $p_0 = a + ib$. Предположим, что выполнены следующие условия:

1°. В каждой характеристической точке из $T^*\Omega \setminus 0$ скобка Пуассона $\{a, b\}$ обращается в нуль.

2°. Поля H_a, H_b и $\sum \xi_j \frac{\partial}{\partial \xi_j}$ линейно независимы в каждой характеристической точке из $T^*\Omega \setminus 0$.

При этих условиях существует такое однородное каноническое преобразование χ окрестности точки $(0, \eta^0) \in T^*\mathbb{R}^n \setminus 0$ на окрестность точки (x^0, ξ^0) в $T^*\Omega \setminus 0$ и такие интегральные операторы Фурье F, F_1, соответствующие χ и χ^{-1}, что оператор $F_1 P F - (D_1 + iD_2)$ имеет символ порядка $-\infty$ в конической окрестности точки $(0, \eta^0)$.

Из условия 1° следует, что $\{a, b\} = \alpha a + \beta b$ и $[H_a, H_b] = \alpha H_a + \beta H_b$. По теореме Фробениуса многообразие $p_0 = 0$ расслаивается на двумерные многообразия, касательные плоскости к которым порождаются полями H_a и H_b. Эти многообразия называются бихарактеристиками. Поля H_a и H_b определяют на бихарактеристиках аналитическую структуру, в которой аналитическими функциями являются решения уравнения $(H_a + iH_b) v = 0$. Для этой структуры можно определить также классы гармонических и супергармонических функций. Если $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, то гладкость u в точке $(x, \xi) \in T^*\Omega \setminus 0$ можно измерять с помощью функции $s_u^*(x, \xi) = \operatorname{supp}\{s;\ u \in H_s(x, \xi)\}$. Эта функция полунепрерывна снизу и положительно однородна степени 0.

Теорема 4.2 ([78]). Пусть выполнены условия 1° и 2°. Пусть $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, $Pu = f$ в Ω. Пусть B — область на двумерной бихарактеристике и s — такая супергармоническая функция в B, что $s \leqslant s_f^*$. Тогда функция $\min(s_u^*, s + m - 1)$ является супергармонической в B.

4.4. Распространение особенностей в случае комплексного символа общего вида. Наиболее общие результаты в этом направлении получены Хёрмандером, Шапира, Денкером. Большую часть этих результатов и соответствующие ссылки можно найти в [108]. Мы приведем здесь только один результат Хёрмандера.

Теорема 4.3. Пусть $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$ и $Pu = f$ в Ω. Пусть $I = \{t \in R,\ t_1 \leqslant t \leqslant t_2\}$, $\gamma(I)$ — отрезок нулевой бихарактеристики функции $\mathrm{Re}\, p_0$. Предположим, что $\operatorname{Im} p_0 \geqslant 0$ в окрестности отрезка $\gamma(I)$. Если $\gamma(I) \cap \mathrm{WF}(f) = \varnothing$ и $\gamma(t_2) \notin \mathrm{WF}(u)$, то $\gamma(I) \cap \mathrm{WF}(u) = \varnothing$. Более точно, если $f \in H_s(\gamma(I))$ и $u \in H_{s+m-1}(\gamma(t_2))$, то $u \in H_{s+m-1}$ в точках из $\gamma(I)$

Если $\operatorname{Im} p_0 \leqslant 0$ в окрестности отрезка $\gamma(I)$, то теорема сохраняется, но вместо правого конца отрезка следует взять его левый конец.

§ 5. Кратные характеристики

5.1. Двукратные неинволютивные характеристики. Пусть $P=P_1P_2+Q$, где P_1 и P_2 — псевдодифференциальные операторы порядков m_1 и m_2, соответственно, а оператор Q имеет порядок $m+m_2-1$. Предположим, что главные символы p_1 и p_2 вещественнозначны.

Рассмотрим точку $z_0 \in T^*\Omega \diagdown 0$, в которой

$$p_1(z_0)=0,\ p_2(z_0)=0,\ \{p_1,\ p_2\}(z_0)\neq 0. \qquad (2)$$

Из этого условия следует, что поля $H_{;p_1}$, $H_{;p_2}$ и $\xi\partial/\partial\xi$ линейно независимы в точке z_0. В частности, найдется такой открытый интервал $I\subset\mathbf{R}$, $0\in\mathbf{I}$, что бихарактеристики γ_j функций p_j, проходящие через z_0, определяют инъективное отображение

$$\gamma_j: I\to\Sigma_j=\{z\in T^*\diagdown 0,\ p_j(z)=0\},\quad {}_j(0)=z_0.$$

Заметим, что в точках окрестности U_{z_0}, лежащих вне $\Sigma_1\cap\Sigma_2$, оператор P является оператором вещественного главного типа, и для этих точек распространение особенностей изучено в § 3.

Если $I_k=\{t\in I,\ (-1)^k t>0\}$, то можно определить 4 полубихарактеристики в точке 2 как кривые $\gamma_{jk}: I_k\to\Sigma_j$, для которых $\gamma_{jk}=\gamma_j|_{I_k}$ при $j,\ k=1,\ 2$.

Теорема 5.1. Пусть $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$, $z_0\notin \mathrm{WF}(Pu)$ и выполнено (2). Предположим, что для каждого $j\in\{1, 2\}$ существует такое $k\in$ $\in\{1, 2\}$, что $\gamma_{jk}(I_k)\cap\mathrm{WF}(u)=\varnothing$. Тогда $z_0\notin\mathrm{WF}(u)$.

Пусть S_P — субглавный символ оператора P.

Теорема 5.2. Пусть выполнено (2) и

$$iS_P(z_0)/\{p_1,\ p_2\}(z_0)-\frac{1}{2}\notin\{0,\ 1,\ 2,\ \ldots\}.$$

Пусть $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$, $z_0\notin\mathrm{WF}(Pu)$ и $(\gamma_1(I)\diagdown z_0)\cap\mathrm{WF}(u)=\varnothing$. Тогда $z_0\notin\mathrm{WF}(u)$. Аналогично, если

$$iS_P(z_0)/\{p_1,\ p_2\}(z_0)+\frac{1}{2}\notin\{0,\ -1,\ -2,\ \ldots\}$$

и $(\gamma_2(I)\diagdown z_0)\cap\mathrm{WF}(u)=\varnothing$, то $z_0\notin\mathrm{WF}(u)$.

Следствие 5.1. Пусть выполнено (2) и

$$iS_P(z_0)/\{p_1,\ p_2\}(z_0)-\frac{1}{2}\notin\mathbf{Z}.$$

Если $z_0\notin\mathrm{WF}(Pu)$ и на каких-нибудь двух полубихарактеристиках, проходящих через z_0, u является гладкой функцией, то $z_0\notin\mathrm{WF}(u)$. (Эти и более общие результаты можно найти в работах [24], [26], [68], [97], [130].)

5.2. Условие Леви. В том случае, когда оператор P имеет кратные характеристики, его свойства могут существенно зависеть от младших членов. В этом случае важную роль играет *условие Леви*, введенное впервые в связи с излучением задачи Коши. Это условие означает, что транспортные уравнения являются дифференциальными уравнениями вдоль бихарактеристик и их порядок равен кратности соответствующей характеристики.

Определение 5.1. Оператор $P\in\mathscr{L}^m(\Omega)$ имеет постоянную кратность характеристик, если его главный символ p имеет вид

$$p=q_1^{r_1}\ldots q_s^{r_s},\text{ где } r_j\in\mathbf{N}$$

и q_j являются символами операторов главного типа, причем множества $q_j^{-1}(0)$ не пересекаются в $T^*\Omega\setminus 0$.

Определение 5.2. Пусть оператор $P\in\mathscr{L}^m(X)$, причем его главный символ является вещественнозначным и P имеет постоянную кратность характеристик. Оператор P удовлетворяет *условию Леви* $\mathscr{L}(x_0, \xi_0)$ в точке (x_0, ξ_0) из $p^{-1}(0)\subset T^*\Omega\setminus 0$, если для каждой функции $\varphi(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$q_j(x, d\varphi(x))=0 \quad (\text{если } q_j(x_0, \xi_0)=0),$$

в окрестности точки x_0 и такой, что $d\varphi(x_0)=\xi_0$, и для каждой функции $a\in C_0^\infty(\Omega)$ с носителем в некоторой окрестности точки x_0, где $d\varphi\neq 0$,

$$e^{-it\varphi}P(ae^{it\varphi})=0(t^{m-r_j}),\quad t\to+\infty.$$

Оператор P удовлетворяет *условию Леви* $(\mathscr{L})$, если условие $\mathscr{L}(x_0, \xi_0)$ выполнено во всех точках из $p^{-1}(0)$.

Ясно, что $(\mathscr{L})$ — это условие на члены порядка $\geqslant m-\max r_j$. Это условие было введено в работе [85].

5.3. Операторы с характеристиками постоянной кратности. Рассмотрим оператор $P\in\mathscr{L}^m(\Omega)$ с постоянной кратностью характеристик, удовлетворяющий условию Леви $(\mathscr{L})$. В этом случае в окрестности каждой характеристической точки (x^0, ξ^0) оператор P представляется в виде $\sum_{k=0}^{r_j}B_kQ_j^k+T_0$ при некотором j, $1\leqslant j\leqslant s$, где T_0—оператор нулевого порядка, Q_j—оператор с вещественным главным символом $q_j(x, \xi)\in S^{s_j}(\Omega)$, $B_k\in\mathscr{L}^{m-ks_j}(\Omega)$. Это представление позволяет получить следующий результат, являющийся частным случаем теоремы из работы [44].

Теорема 5.3. Пусть оператор $P\in\mathscr{L}^m(\Omega)$ имеет характеристики постоянной кратности и удовлетворяет условию $(\mathscr{L})$ Леви. Пусть $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$. Тогда множество $\mathrm{WF}(u)\setminus\mathrm{WF}(Pu)$ содержится в $p^{-1}(0)$ и является инвариантным относительно сдвигов по бихарактеристикам.

5.4. Операторы с кратными инволютивными характеристиками. Допустим теперь, что $\Sigma\subset T^*X\setminus 0$ — замкнутое коническое многообразие коразмерности d, которое определяется уравнениями $q_1(x,\xi)=0,\dots,q_d(x,\xi)=0$, причем функции q_j гладкие, вещественнозначные и таковы, что

1°. Поля $H_{q_1},\dots,H_{q_d}$ и ξD_ξ линейно независимы в каждой точке Σ;

2°. $\{q_j,q_k\}=0$ на Σ, $j,k=1,\dots,d$.

Можно считать, что q_j однородны по ξ первой степени. Рассмотрим теперь классический собственный псевдодифференциальный оператор $P\in\mathscr{L}^{m+k}(X)$, где $m\in\mathbf{N}$, $k\in\mathbf{R}$. Пусть p_{m+k} — его главный символ, причем $p_{m+k}=0$ на Σ, $p_{m+k}\neq 0$ вне Σ и порядок нуля функции p_{m+k} равен m в каждой точке Σ. Пусть ρ — точка на Σ, $a_\rho(t)$ — однородный полином степени m от $t\in T_\rho(T^*(X))/$ $/T_\rho(\Sigma)=F_\rho$, который возникает при рассмотрении разложения функции p_{m+k} по формуле Тейлора в точке ρ. Предположим, что

3° $a_\rho(t)\neq 0$, когда $0\neq t\in F_\rho$, для всех $\rho\in\Sigma$.

Следующее условие на младшие члены естественно обобщает условие Леви:

4°. Если $Q_j=q_j(x,D)$, то существуют такие классические псевдодифференциальные операторы A_α порядка k, что $P=\sum\limits_{|\alpha|\leqslant m}A_\alpha Q_1^{\alpha_1}\dots Q_d^{\alpha_d}$ микролокально.

Например, при $m=2$ это условие означает, что субглавный символ оператора P обращается в нуль на Σ.

Теорема 5.4 ([153]). Пусть выполнены условия (1)—(4). Пусть $F=T_\Sigma(T^*X)/T(\Sigma)$ и $F\times_\Sigma F$ — произведение пучков над Σ. Пусть $z_1(s,t),\dots,z_m(s,t)$ — корни уравнения $a_\rho(s+zt)=0$; $s,t\in F_\rho$. Предположим, что для $(s,t)\in F\times_\Sigma F$ и линейно независимых s и t кратность корней z_j постоянна и не превышает двух. Тогда если $u\in\mathscr{D}'(X)$, $Pu\in C^\infty(X)$ и $\rho\in\mathrm{WF}(u)$, то $\Gamma_\rho\subset\mathrm{WF}(u)$, Γ_ρ — интегральное многообразие для полей $H_{q_1},\dots,H_{q_d}$, проходящее через точку ρ.

5.5. Оператор Шрёдингера. Пусть Ω — область в R^n и $P(x,D)$ — псевдодифференциальный оператор порядка m в Ω с вещественным главным символом $p_0(x,\xi)$. Предположим, что характеристики P — двукратные, так что множество $\Sigma=$ $=\{(x,\xi)\in T^*\Omega\setminus 0,\ p_0(x,\xi)=0\}$ определяется уравнениями $u_1(x,\xi)=0,\dots,u_k(x,\xi)=0$, где $u_j(x,t\xi)=u_j(x,\xi)$ при $t>0$ и формы $du_1,\dots,du_k$, ξdx линейно независимы.

Предположим, что Σ является инволютивным многообразием, т. е. $\{u_i,u_j\}=0$ на Σ. Тогда Σ расслаивается на гладкие одномерные кривые, которые являются интегральными кривыми для полей H_{u_j} при каждом $j=1,\dots,k$. Предположим, что в окрестности каждой точки из Σ главный символ представляется в виде $\Sigma a_{ij}u_iu_j$, $i,j=1,\dots,k$, и матрица $\|a_{ij}\|$ положитель-

но определена. Эта матрица определяет на Σ риманову метрику g_A.

Предположим еще, что $p_{m-1}(x, \xi) - \frac{1}{2i}\sum \frac{\partial^2 p_0(x, \xi)}{\partial x_j \partial \xi_j} < 0$ на Σ.

Теорема 5.5 ([64]). Пусть выполнены все приведенные выше условия. Если $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$, $Pu \in C^\infty(\Omega)$, то $\mathrm{WF}(u)$ является объединением геодезических в метрике g_A, лежащих в Σ. Обратно, если $(x, \xi) \in \Sigma$ и γ — дуга геодезической в метрике g_A, проходящая через точку (x, ξ), то существует такое распределение $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$, что $\mathrm{WF}(u) \cap U = \gamma \cap U$, $Pu \in C^\infty(U)$, где U — достаточно малая коническая окрестность точки (x, ξ).

Примером оператора, удовлетворяющего условиям теоремы 5.5, может служить оператор Шрёдингера $P = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t} - a^2\Delta$. В этом случае, если $Pu \in C^\infty$, то $\mathrm{WF}(u)$ состоит из прямых, параллельных подпространству $t=0$, $\tau=0$ и лежащих в конусе $\xi_1 = \ldots = \xi_n = 0$, $\tau < 0$ (см. [64]).

Отметим, что много других важных результатов о распространении особенностей для операторов с кратными характеристиками получено в работах Бони, Григиса, В. Я. Иврия, Б. Ласкара, Р. Ласкара, Шапира, Шестранда и др. См., в частности, работы [24], [25], [26], [59], [72], [90], [91], [116], [118], [119], [120], [131], [153], [161].

Глава 5

РАЗРЕШИМОСТЬ (ПСЕВДО)ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Примеры

1.1. Пример Леви. Рассмотрим единичную сферу Ω в $\mathbf{C}^2$: $\{(z_1, z_2);\ |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$. После замены переменных $z_1' = (z_1 - 1)^{-1}$, $z_2' = z_2(z_1 - 1)^{-1}$ поверхность Ω определяется уравнением

$$1 + z_1 + \bar{z}_1 + |z_2|^2 = 0,$$

так что оператор

$$\mathscr{L} = 2\frac{\partial}{\partial \bar{z}_2} - z_2\left(\frac{\partial}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}_1}\right)$$

является касательным к Ω. Оператор $\mathscr{L}$ и называется оператором Ганса Леви. В 1956 году Г. Леви построил такую функцию $f(x_1, x_2, x_3) \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$, что уравнение

$$\mathscr{L}u \equiv \frac{\partial u}{\partial x_1} + i\frac{\partial u}{\partial x_2} - (x_1 + ix_2)\frac{\partial u}{\partial x_3} = f(x_1, x_2\, x_3)$$

не имеет решений в классе непрерывных функций ни в какой подобласти $\omega \subset \mathbf{R}^3$.

1.2. Уравнение Мизохаты. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i x^k \frac{\partial u}{\partial y} = f(x, y) \tag{1}$$

Если k чётно, то после замены $t = x^{k+1}/(k+1)$ это уравнение переходит в уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + i \frac{\partial u}{\partial y} = g(t, y), \quad g(t, y) = f(x, y)\, x^{-k},$$

разрешимое для любого распределения $g \in \mathscr{D}'$.

Если же k нечетно, уравнение (1), вообще говоря, неразрешимо ни в какой окрестности начала координат (см. [11]).

В самом деле, пусть $\{\Omega_j\}$ — последовательность непересекающихся кругов, сходящаяся к началу координат, причем все круги лежат при $x > 0$. Пусть $f = 0$ вне $\bigcup \Omega_j$, $f \in C^\infty$, $f(x, y) = f(-x, y)$, $f > 0$ в Ω_j.

Если положить

$$v(x, y) = \frac{u(x, y) + u(-x, y)}{2}, \quad w(x, y) = \frac{u(x, y) - u(-x, y)}{2},$$

то из (1) следует, что

$$\frac{\partial v}{d x} + i x^k \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} + i x^k \frac{\partial w}{\partial y} = f(x, y).$$

Ясно, что $v = F(x^{k+1}/(k+1) + iy)$, где F — аналитическая функция. Что же касается функции w, то $w(0, y) = 0$ и $w = G(x^{k+1}/(k+1) + iy)$, где G — аналитическая функция, в точках дополнения к $\bigcup \Omega_j$. Отсюда следует, что $w = 0$ в $\mathbf{R}^2 \setminus \bigcup \Omega_j$, так что, в частности, $w = 0$ на $\partial \Omega_j$ при $j = 1, 2, \ldots$. Но тогда

$$\iint_{\Omega_j} f(x, y)\, dx\, dy = \int_{\partial \Omega_j} w (\cos\alpha + i \cos\beta)\, ds = 0,$$

и мы приходим к противоречию с определением функции f.

1.3. Другие примеры. Простые соображения показывают, что множество гладких функций f, для которых уравнение (1) имеет решение (хотя бы обобщенное), является множеством первой категории.

Заметим, что при $\mathscr{L} = \frac{\partial}{\partial x} - i x \frac{\partial}{\partial y}$, оператор $\mathscr{L}\overline{\mathscr{L}}$ имеет вид $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + i \frac{\partial}{\partial y}$, а оператор

$$P = L\bar{L}\bar{L}L = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

имеет вещественные коэффициенты, причем уравнение $Pu = f$ неразрешимо в начале координат для множества функций f второй категории в $C_0^\infty(\mathbf{R}^2)$ (Трев).

Существует такая функция $f \in C^\infty(\mathbf{R}^2)$, что уравнение

$$Pu - fu = 0$$

не имеет решений, кроме $u=0$, в прямоугольнике $|x| < r$, $|y| < r'$.

Каннаи [110] показал, что уравнение $Au=f$, где

$$A = D_1 + ix_1 D_2^2,$$

неразрешимо в начале координат, причем оператор A является гипоэллиптическим.

Хёрмандер [103] показал неразрешимость линейного самосопряженного дифференциального оператора второго порядка с вещественными коэффициентами, определяемого формулой

$$Pu = (x_2^2 - x_3^2) D_1^2 u + (1 + x_1^2)(D_2^2 u - D_3^2 u) - x_1 x_2 D_1 D_2 u -$$
$$- D_1 D_2 (x_1 x_2 u) + x_1 x_3 D_1 D_3 u + D_1 D_3 (x_1 x_3 u).$$

Как и выше, для каждой окрестности начала координат Ω существует такая функция $f \in C_0^\infty(\Omega)$, что уравнение $Pu=f$ не имеет решений u из $\mathscr{D}'(\Omega)$. Из этого следует, что найдется функция $f_0 \in S(\mathbf{R}^3)$, для которой уравнение $Pu=f_0$ не имеет решения u из класса $\mathscr{D}'(\Omega)$ ни в какой окрестности начала координат.

Определение 1.1. Псевдодифференциальный оператор P *разрешим* в точке x_0, если существуют такие две окрестности U, V точки x_0, что $U \subset V$ и для каждой функции f из $C_0^\infty(U)$ существует распределение u с носителем в V, удовлетворяющее уравнению $Pu=f$ в U.

В случае дифференциального оператора можно считать, что $U=V$.

§ 2. Необходимые условия локальной разрешимости

2.1. Теорема Хёрмандера. Хёрмандеру удалось объяснить приведенные выше примеры. Он получил следующий результат ([103]):

Теорема 2.1. Если $(x_0, \xi_0) \in T^*\Omega \setminus 0$, $p_0(x_0, \xi_0) = 0$, $c_1(x_0, \xi_0) < 0$, где

$$c_1(x, \xi) = 2 \operatorname{Im} \sum_{j=1}^{n} \overline{\frac{\partial p_0(x, \xi)}{\partial \xi_j}} \frac{\partial p_0(x, \xi)}{\partial x_j},$$

то псевдодифференциальный оператор с главным символом p_0 является неразрешимым в точке x_0.

Следствие 2.1. Если $P(x, D)$ — дифференциальный оператор, $p_0(x_0, \xi_0) = 0$, $c_1(x_0, \xi_0) \neq 0$, то P неразрешим в точке x_0.

Для доказательства следствия 2.1 достаточно заметить, что функции $c_1(x, \xi)$ является однородной по ξ степени $2m-1$ и потому нечетной.

Доказательство теоремы 2.1 основывается на том факте, что из разрешимости оператора P вытекает оценка

$$\|\varphi\|_{s_1} \leqslant c \|P^*\varphi\|_{s_2}, \quad \varphi \in G_0^\infty(\omega), \tag{2}$$

с некоторыми вещественными C, s_1 и s_2. Например, для оператора Леви $P = \frac{\partial}{\partial z} + iz\frac{\partial}{\partial t}$ сопряженный оператор имеет вид $P^* = -\frac{\partial}{\partial z} + i\bar{z}\frac{\partial}{\partial t}$. При этом функция

$$\varphi_0 = e^{-\lambda(2|z|^2 + t_2 - |z|^4 - 2it + 2it|z|^2)}$$

удовлетворяет уравнению $P^*\varphi_0 = 0$. Пусть $\omega = \{(x, y, t), x^2 + y^2 + t^2 \leqslant 1\}$, $h \in C_0^\infty(\omega)$ — такая функция, что $h = 1$ при $\rho^2 \equiv x^2 + y^2 + t^2 \leqslant \frac{1}{4}$. Тогда функция $f = P^*(h\varphi_0)$ равна нулю при $\rho \geqslant 1$ и $\rho \leqslant \frac{1}{2}$. Нетрудно проверить, что $\|f\|_{s_2} \leqslant C\lambda^{s_2}e^{-\lambda/4}$. С другой стороны, $\|h\varphi_0\|_{s_1} \geqslant C_0\lambda^{s_1 - 3/4}$, где постоянная $C_0 > 0$ зависит от s_1, но не от λ. Поэтому, подставляя в (2) функцию $\varphi = h\varphi_0$, получаем неравенство, которое не может выполняться при $\lambda \geqslant \lambda_0$, если λ_0 достаточно велико. Этим доказывается неразрешимость оператора P в ω.

В общем случае, когда P — псевдодифференциальный оператор произвольного порядка, доказательство проводится по той-же схеме. Условия теоремы позволяют построить функцию w, для которой

$$p_0(x, \operatorname{grad} w(x)) = 0, \quad w(0) = 0, \quad \operatorname{grad} w(0) = \xi_0$$

и $\operatorname{Im} w(x) > 0$ при $x \neq 0$. В качестве φ берется теперь функция вида

$$\varphi(x) = h(x)e^{i\lambda w(x)}\sum_{j=0}^{N}\lambda^{-j}a_j(x), \quad a_j \in C^\infty(\omega).$$

2.2. Нуль конечного порядка. Пусть $p_0(x, \xi)$ — символ оператора главного типа, $a = \operatorname{Re} p_0$, $b = \operatorname{Im} p_0$. Рассмотрим бихарактеристику функции b, т. е. интегральную кривую системы уравнений

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial b(x(t), \xi(t))}{\partial \xi_k}, \quad \frac{\partial \xi_k}{\partial t} = -\frac{\partial b(x(t), \xi(t))}{\partial x_k}, \quad k = 1, \ldots, n,$$

проходящую при $t = 0$ через характеристическую точку (x_0, ξ_0). Ясно, что в этом случае $b(x(t), \xi(t)) \equiv 0$. Рассмотрим функцию $\gamma(t) = a(x(t), \xi(t))$. Заметим, что

$$c_1(x(t), \xi(t)) = \gamma'(t),$$

так что условие теоремы 2.1 означает, что функция $\gamma(t)$ имеет

при $t=0$ нуль первого порядка. Можно обобщить эту теорему, заменив её условие условием

$$\gamma'(0)=\ldots=\gamma^{(k-1)}(0)=0, \quad \gamma^{(k)}(0)>0, \; k \text{ нечетно} \tag{3}$$

(см. [15], [137]).

2.3. Нуль бесконечного порядка. Следующее условие (Ψ) является необходимым для разрешимости оператора P в общем случае ([108], § 26.4).

(Ψ) функция $\gamma(t)$ не может менять знака при $t=0$ с минуса на плюс при возрастании t. (Ясно, что это условие обобщает условие 3°.)

2.4. Кратные характеристики. Случай кратных характеристик изучен мало. Известные необходимые условия разрешимомости в случае характеристической точки (x_0, ξ_0), в которой $dp_0(x_0, \xi_0)=0$, сводятся к тому, что в окрестности этой точки не должно быть простых характеристических точек, в которых нарушается условие (Ψ). Приведем несколько результатов другого рода.

Теорема 2.2 ([22]). Пусть $p_0(x_0, \xi_0)=0$, $d_{x,\xi}p_0(x_0, \xi_0)=0$, $(x_0, \xi_0)\in T^*\Omega\setminus 0$. Пусть в некоторой окрестности точки (x_0, ξ_0) выполнено неравенство $c_1(x, \xi)\geqslant m_0(|x-x_0|^2+|\xi-\xi_0|^2)$, $m_0>0$. Тогда псевдодифференциальный оператор P с главным символом p_0 является неразрешимым в точке x_0.

Рассмотрим случай, когда $P=Q^2+R$, причем порядки операторов Q и R равны, соответственно, m и $2m-1$.

Теорема 2.3 ([41]). Пусть Q — оператор вещественного главного типа. Если $q_0(x_0, \xi_0)=0$, $\operatorname{Re} r_0(x_0, \xi_0)<0$ и функция $\operatorname{Im} r_0$ имеет нуль конечного нечетного порядка вдоль бихарактеристики функции q_0, проходящей через точку (x_0, ξ_0), то оператор P неразрешим в точке x_0.

Теорема 2.4 ([41]). Пусть $\operatorname{Re} q_0(x, \xi)=a(x, \xi)$, $\operatorname{Im} q_0(x, \xi)=b(x, \xi)$. Пусть $q_0(x_0, \xi_0)=0$, $\xi_0\neq 0$. Пусть $k\in\mathbf{N}$, k — нечетно и

$$H_a^j b\,(x_0, \xi_0)=0 \text{ при } j<k, \; H_a{}^k b\,(x_0, \xi_0)>0.$$

Тогда оператор P неразрешим в точке x_0.

§ 3. Достаточные условия локальной разрешимости

3.1. Операторы вещественного главного типа. Из теоремы 3.2 главы 4 о распространении особенностей сразу вытекают теоремы о локальной и полуглобальной разрешимости уравнений $Pu=f$ вещественного главного типа, если $d_\xi p_0(x, \xi)\neq 0$ в $T^*\Omega\setminus 0$.

В самом деле, оператор P^*, формально сопряженный к P, также является оператором вещественного главного типа. Если $x_0\in\Omega$, то найдется такая окрестность $\omega\ni x_0$, что каждая бихарактеристика оператора P^*, проходящая через точку (x_0, ξ) при

$|\xi|=1$, выходит на границу $\partial\omega$. Поэтому в силу теоремы 3.2 главы 4

$$\varphi\in\mathcal{E}'(\omega),\quad P^*\varphi\in C^\infty(\omega)\Rightarrow\varphi\in C_0^\infty(\omega),$$
$$\varphi\in\mathcal{E}'(\omega),\quad P^*\varphi\in H_s(\omega)\Rightarrow\varphi\in H_{s+m-1}(\omega),$$

где m — порядок оператора P. По теореме о замкнутом графике, отсюда следует, что существует такая постоянная C, что

$$\|\varphi\|_{s+m-1}\leqslant C(\|P^*\varphi\|_s+\|\varphi\|_{s+m-2}),\quad \varphi\in C_0^\infty(\omega),$$

а если ω достаточно мала, то

$$\|\varphi\|_{s+m-1}\leqslant C\|P^*\varphi\|_s,\quad \varphi\in C_0^\infty(\omega).$$

Отсюда следует, что $\int f\bar{\varphi}dx$ при $f\in H_{-s-m+1}$ является линейным ограниченным функционалом от $\overline{P^*\varphi}$ в H_{-s}, т. е. существует такой элемент $u\in H_s$, что

$$\|u\|_{-s}\leqslant C\|f\|_{-s-m+1},\quad \int f\bar{\varphi}dx=\int u\overline{P^*\varphi}dx,\quad \varphi\in C_0^\infty(\omega),$$

т. е. $Pu=f$ в ω.

Если вместо малой окрестности рассмотреть произвольный компакт, то необходимо наложить дополнительное условие на поведение бихарактеристик в ω (см. п. 3.4 главы 4).

3.2. Операторы главного типа. В работах Хёрмандера было доказано, что уравнение главного типа $Pu=f$ разрешимо локально, если в каждой характеристической точке (x_0, ξ_0) выполнено условие $C_1(x_0, \xi_0)>0$.

В дальнейшем этот результат обобщался в работах Ниренберга, Трева, Биллса, Феффермана и автора (см. [18]).

Полное решение задачи о достаточных условиях для дифференциальных операторов получено в 1974 г. в работе Биллса—Феффермана [51]. Достаточное условие в этом случае совпадает со следующим условием, введенным первоначально Ниренбергом и Тревом: $(\mathscr{P})$ функция $\gamma(t)=\operatorname{Re} zp_0(x(t), \xi(t))$, где $(x(t), \xi(t))$ — нулевая бихарактеристика функции $\operatorname{Im} zp_0(x, \xi)$, не меняет знака при изменении t, $z\in\mathbf{C}\setminus 0$.

Теорема 3.1. Если выполнено условие $(\mathscr{P})$ и $d_\xi p_0(x,\xi)\neq$ $\neq 0$, то дифференциальный оператор P локально разрешим.

Первоначально, в 1970 году Ниренберг и Трев [137] доказали эту теорему для операторов P с аналитическими коэффициентами. Для дифференциальных операторов условия $(\mathscr{P})$ и (Ψ) эквивалентны.

До сих пор неизвестно, является ли условие (Ψ) достаточным для локальной разрешимости псевдодифференциального уравнения главного типа с комплекснозначным символом.

Наиболее общая теорема относится к случаю субэллипти-

ческих операторов. Эти операторы могут быть определены следующим образом. Пусть $a_1=\operatorname{Re} p_0$, $a_2=\operatorname{Im} p_0$ и

$$H_i=\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial a_i(x, \xi)}{\partial x_j}\frac{\partial}{\partial \xi_j}-\frac{\partial a_i(x, \xi)}{\partial \xi_j}\frac{\partial}{\partial x_j}\right), \quad i=1, 2.$$

Если $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_r)$, то через $H_1^\alpha H_2^\beta$ обозначим оператор $H_1^{\alpha_1}H_2^{\beta_1} \ldots H_1^{\alpha_r}H_2^{\beta_r}$. Пусть $k(x, \xi)$ — наименьшее целое число, для которого

$$H_1^\alpha H_2^\beta a_1(x, \xi)\neq 0, \quad |\alpha+\beta|=k.$$

Если $a_1(x, \xi)\neq 0$, то полагаем $k(x, \xi)=0$.

Теорема 3.2 ([9]). Если для оператора P выполнено условие (Ψ) и $\sup k(x, \xi)\leqslant k$ при $(x, \xi)\in T^*K\setminus 0$, то уравнение $Pu=f$ разрешимо в K при выполнении конечного числа условий на f. Точнее, в этом случае существуют такие функции $g_1, \ldots, g_N$ из $C_0^\infty(K)$, что если

$$\int f\bar{g}_j dx=0, \quad j=1, \ldots, N; \quad f\in H_s(K),$$

то существует функция $u\in H_{s+m-k(k+1)^{-1}}(\Omega)\cap\mathscr{E}'(\Omega)$, удовлетворяющая в K уравнению $Pu=f$. Если диаметр компакта K достаточно мал, то условие ортогональности становится излишним.

Отметим еще некоторые условия, достаточные для локальной разрешимости.

Теорема 3.3 ([18]). Оператор P локально разрешим в точке x_0, если в каждой характеристической точке (x, ξ) выполнено условие (Ψ) и хотя бы одно из следующих условий:

1° Формы $d\operatorname{Re} p_0(x, \xi)$, $d\operatorname{Im} p_0(x, \xi)$ и ξdx линейно независимы.

2° Существует такая постоянная $N>0$ и такая положительно определенная степени $m-1$ гладкая функция $\alpha(x, \xi)$, что в некоторой окрестности рассматриваемой точки выполнено неравенство

$$C_1^0(x, \xi)+\operatorname{Re}\alpha(x, \xi)p_4(x, \xi)+N|p_0(x, \xi)|^2|\xi|^{-1}\geqslant 0.$$

3° Пусть $a=\operatorname{Re} p_0$, $b=\operatorname{Im} p_0$, a — символ оператора главного типа. Пусть $\nabla' b$ — производная функции b по направлению векторного поля, касательного к поверхности $a(x, \xi)=0$ и ортогонального к полю H_a.

Существует такая постоянная K, что

$$|\nabla' b(x, \xi)|^2\leqslant K|b(x, \xi)|$$

в некоторой окрестности точки (x_0, ξ_0) для всех точек (x, ξ), лежащих на поверхности $a(x, \xi)=0$, $|\xi|=1$.

В этом случае для каждого вещественного числа s, $s\leqslant m-1+n/2$ найдется такая окрестность $\omega\subset\Omega$, что уравнение

$Pu=f$, где $f\in H_{s-m+1}(\Omega)$, имеет в ω решение $u\in H_s(\Omega)\cap\mathscr{E}'(\Omega)$, причем $\|u\|_s\leqslant C\varepsilon\|f\|_{s-m+1}$, $\varepsilon=\operatorname{diam}\omega$, где постоянная C не зависит от f и ε.

3.3. Операторы с кратными характеристиками. Рассмотрим только тот случай, когда $P=Q^2+R$, причем порядки операторов Q и R равны, соответственно, m и $2m-1$.

Теорема 3.4 ([41]). Пусть Q является оператором главного типа $d_\xi q_0(x,\xi)\neq 0$ при $\xi\neq 0$ и выполнено условие (ψ). Если $r_0(x,\xi)\equiv 0 \pmod{q_0}$, то для $f\in\mathscr{E}'(\Omega)\cap H_{s-2m+2}(\Omega)$ существует функция $u\in\mathscr{E}'(\Omega)\cap H_s(\Omega)$, удовлетворяющая уравнению $Pu=f$ в ω, где ω — достаточно малая окрестность точки x_0. При этом

$$\|u\|_s\leqslant C(\omega)\|f\|_{s-2m+2}+C_1\|u\|_{s-1}.$$

Если $s\geqslant\max(-n/2,\ -1-n/2+m)$, то можно положить $C_1=0$. Здесь $C(\omega)\to 0$, когда $\operatorname{diam}\omega\to 0$.

В том случае, когда функция q_0 вещественнозначна, можно получить более точные утверждения.

Теорема 3.5 ([41]). Пусть Q — оператор вещественного главного типа, $d_\xi q_0(x,\xi)\neq 0$. Оператор P разрешим локально, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:

1°. $\operatorname{Re} r_0(x,\xi)\geqslant 0$, если $q_0(x,\xi)=0$, $\xi\neq 0$. При этом справедлива оценка: $\|\varphi\|_{m-1}\leqslant C(\omega)\|P\varphi\|_{1-m}$, $\varphi\in C_0^\infty(\omega)$;

2°. $\operatorname{Re} r_0(x,\xi)>0$, если $q_0(x,\xi)=0$, $\xi\neq 0$. Тогда

$$\|\varphi\|_{m-1/2}\leqslant C\|P\varphi\|_{1/2-m},\quad \varphi\in C_0^\infty(\omega).$$

Глава 6

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. Гипоэллиптические операторы

1.1. Определение и примеры. Как известно, каждое классическое или обобщенное решение уравнения Лапласа является в действительности бесконечно дифференцируемой и даже аналитической функцией. И. Г. Петровский показал, что все решения уравнения $P(D)u=0$, где $P(D)$ — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, являются аналитическими функциями в том, только в том случае, когда $P(D)$ — эллиптический оператор. Полная характеристика дифференциальных операторов $P(D)$, для которых каждое решение уравнения $P(D)u=0$ является бесконечно дифференцируемой функцией, была получена Хёрмандером.

Определение 1.1. Псевдодифференциальный оператор $P(x,D)$ называется *гипоэллиптическим* в области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, если

из условий: $u \in \mathscr{E}'(\Omega)$, $P(x, D)u \in C^\infty(\omega)$ следует, что $u \in C^\infty(\omega)$ для каждой подобласти $\omega \subset \Omega$.

Определение 1.2. Псевдодифференциальный оператор $P(x, D)$ называется *микролокально гипоэллиптическим* в области $\Omega \subset T^*\mathbf{R}^n$, если из условий: $u \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$, $\mathrm{WF}(Pu) \cap \omega \neq \varnothing$, следует, что $\mathrm{WF}(u) \cap \omega = \varnothing$ для каждой подобласти $\omega \subset T^*\Omega$.

1.2. Гипоэллиптические дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Основной характеристикой таких операторов является поведение корней ζ уравнения $P(\zeta) = 0$ при $\zeta \to \infty$. Именно, следующее условие:

$$|\mathrm{Im}\,\zeta| \to \infty \text{ при } |\zeta| \to \infty \text{ на поверхности } P(\zeta) = 0 \qquad (1)$$

является необходимым и достаточным для гипоэллиптичности ([103]).

С помощью теоремы Зайденберга — Тарского можно показать, что это условие эквивалентно следующему

$$\exists \gamma > 0,\ C > 0:\ |\zeta|^\gamma \leqslant C|\mathrm{Im}\,\zeta|, \text{ если } P(\zeta) = 0,\ |\zeta| > C. \qquad (2)$$

Можно указать эквивалентное условие в терминах поведения $P(\xi)$ при вещественных ξ. А именно, условия (1) и (2) эквивалентны каждому из следующих трех условий:

$$P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) \to 0 \text{ при } |\xi| \to \infty,\quad \xi \in \mathbf{R}^n,\quad \forall \alpha \neq 0; \qquad (3)$$

$$\exists \gamma > 0,\ C > 0:\ |P^{(\alpha)}(\xi)| \leqslant C|P(\xi)||\xi|^{-|\alpha|\gamma};\ \forall \alpha; \qquad (4)$$

$$\frac{P(\xi + \eta)}{P(\xi)} \to 1 \text{ при } |\xi| \to \infty,\ \xi \in \mathbf{R}^n,\ \forall \eta \in \mathbf{R}^n. \qquad (5)$$

Отметим, что эллиптические операторы характеризуются тем, что в условиях (2), (4) для них можно взять $\gamma = 1$. Для других гипоэллиптических операторов это число меньше 1.

Близкий к классу эллиптических операторов класс семиэллиптических операторов определяется следующим образом. Пусть $m_1, \ldots, m_n$ — положительные целые числа и $\Sigma \alpha_k/m_k \leqslant 1$ для всех тех $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, для которых $a_\alpha \neq 0$ в определении оператора $P(D) = \Sigma a_\alpha D^\alpha$.

Пусть $P_0(D) = \Sigma' a_\alpha D^\alpha$, где сумма берется по тем α, для которых $\Sigma \alpha_k/m_k = 1$. Если $p_0(\xi) \neq 0$ при $\xi \neq 0$, то $P(D)$ называется семиэллиптическим оператором. В частности, если $m_1 \ldots = m_k = m$, то такой оператор является эллиптическим. Семиэллиптическими являются, например, p — параболические уравнения, введенные И. Г. Петровским.

Отметим еще следующую теорему ([103]).

Теорема 1.1. Пусть $Q(\xi)$ — полином степени m с вещественными коэффициентами и $k \geqslant 2$ — целое число. Пусть $R(\xi)$ — однородный положительно определенный полином степени $2km - 2(k-1)$. Тогда оператор $P(D) = Q(D)^{2k} + R(D)$ является гипоэллиптическим.

1.3. Классы Жевре. При доказательстве достаточности приведенных выше алгебраических условий обычно строится фундаментальное решение оператора P. Эта конструкция сущест-

венно опирается на условие (2). Зная точно значение числа γ из условия (2), можно получить оценки для производных решения уравнения

Определение 1.3. *Классом Жевре* $G_\beta = G_\beta(\Omega)$ ($\beta \geqslant 0$) называется пространство функций $u(x)$, определенных в Ω, имеющих производные всех порядков и удовлетворяющих неравенствам

$$|D^\alpha u(x)| \leqslant CB^{|\alpha|}\alpha^{\beta\alpha}$$

при каких-либо постоянных C и B и всех α.

Здесь, как обычно, $\alpha^{\beta\alpha} = \alpha_1^{\beta\alpha_1} \ldots \alpha_n^{\beta\alpha_n}$. Ясно также, что эти неравенства эквивалентны неравенствам

$$|D^\alpha u(x)| \leqslant CB^{|\alpha|}(\alpha!)^\beta.$$

Класс G_1 состоит из аналитических функций (по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_n$). Рассматриваются также проективные классы Жевре: $G'_\beta = \bigcap\limits_{\gamma > \beta} G_\gamma(\Omega)$.

Теорема 1.2. Если для оператора $P(D)$ выполнено условие (2), то каждое решение $u(x)$ уравнения $P(D)u = f$, где $f \in G_\beta$, $\beta\gamma = 1$, принадлежит классу G_β. В частности, если $P(D)$ — эллиптический оператор, то каждое решение u уравнения $P(D)u = f$ с аналитической функцией f является аналитическим.

Число β может быть найдено по многочлену $P(\xi)$ с помощью формулы

$$\beta = -\varlimsup_{\xi \to \infty} \ln \frac{|\operatorname{grad} P(\xi)|}{|P(\xi)|} \Big/ \ln |\xi|.$$

(см. [108])

1.4. Частично гипоэллиптические операторы. Пусть переменные $x = (x_1, \ldots, x_n)$ разделены на две группы $x' = (x_1, \ldots, x_k)$ и $x'' = (x_{k+1}, \ldots, x_n)$. Аналогично, $\alpha = (\alpha', \alpha'')$ и т. д.

Определение 1.4. Оператор $P(D)$ называется *частично гипоэллиптическим* по переменным x'', если

$$P(D)u \in C^\infty(\Omega), \quad D^\alpha u \in \mathscr{L}_2(\Omega), \quad \forall \alpha = (\alpha', 0) \Rightarrow u \in C^\infty(\Omega)$$

для любой подобласти $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

Пример 1.1. Дифференциальный оператор $P(D)$ частично гипоэллиптичен по переменной x_n тогда и только тогда, когда

$$P(D) = CD_n^p + \sum_{k=0}^{p-1} Q_k(D') D_n^k, \quad C \neq 0, \quad D' = (D_1, \ldots, D_{n-1}).$$

В частности, это условие выполнено, если плоскость $x_n = 0$ не является характеристической.

Теорема 1.3 ([103]). Оператор $P(D)$ является частично гипоэллиптическим по переменным x'', если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

I. $|\operatorname{Im}\zeta| + |\operatorname{Re}\zeta'| \to \infty$, если $\zeta \to \infty$ вдоль поверхности $P(\zeta) = 0$.

II. Существуют такие постоянные C и $\gamma > 0$, что

$$(1+|\xi|)^{\gamma} \leqslant C(1+|\operatorname{Im}\xi''|)(1+|\xi'|), \quad P(\xi)=0, \quad \xi \in \mathbf{R}^n.$$

III. $\lim P^{(\alpha)}(\xi)/P(\xi) = 0$, если $\alpha \neq 0$, $|\xi''| \to \infty$.

IV. $P(\xi) = \sum\limits_{\alpha''=0} p_\alpha(\xi'')\xi'_\alpha$, где $p_0(\xi'')$ — гипоэллиптический по x'' полином, $p_\alpha(\xi'')/p_0(\xi'') \to 0$ при $|\xi''| \to 0$, $\alpha \neq 0$.

Пусть $H_{r,s}(\mathbf{R}_n^+)$ — пространство функций с нормой

$$\|u\|_{r,s}^2 = (2\pi)^{-n} \int (1+|\xi|^2)^r (1+|\xi'|^2)^s |\tilde{u}(\xi)|^2 d\xi,$$

где $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, $\mathbf{R}_n^+ = \{x \in \mathbf{R}^n, x_n \geqslant 0\}$.

Теорема 1.4 ([103]). Пусть $P(D) = D_n^m + \sum\limits_{\alpha_n < m} a_\alpha D^\alpha$ — дифференциальный оператор порядка m с постоянными коэффициентами. Пусть Ω — открытое подмножество в $\mathbf{R}_n^+$. Если

$$P(D)u \in H^{\mathrm{loc}}_{\sigma_1 - m, \tau_1}(\Omega), \quad u \in H^{\mathrm{loc}}_{\sigma_2, \tau_2}(\Omega),$$

то $u \in H^{\mathrm{loc}}_{\sigma,\tau}(\Omega)$, где $\sigma \leqslant \sigma_1$, $\sigma + \tau \leqslant \sigma_j + \tau_j$, $j = 1, 2$.

Замечание. Теорема 1.4 верна и в том случае, когда a_α является функциями от x из C^∞.

Следствие. Если выполнены условия теоремы 1.4 и $Pu \in C^\infty(\Omega)$, причем существуют две такие последовательности $\{\sigma_j\}$ и $\{\tau_j\}$, что $\sigma_j + \tau_j \to \infty$ и $u \in H^{\mathrm{loc}}_{\sigma_j, \tau_j}(\Omega)$ для всех j, то $u \in C^\infty(\Omega)$.

1.5. Гипоэллиптические уравнения в свертках. Назовем обратимым распределение $\mu \in \mathscr{E}'$, если

$$u \in \mathscr{E}', \quad \mu * u \in C^\infty \Rightarrow u \in C^\infty.$$

Теорема 1.5 ([103]). Если каждое распределение u из $\mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, *удовлетворяющее уравнению* $\mu * u = 0$, *лежит в* $C^\infty(\mathbf{R}^n)$, то

$$|\operatorname{Im}\zeta|/\ln|\zeta| \to \infty \text{ при } \zeta \to \infty \text{ вдоль поверхности } \tilde{\mu}(\zeta) = 0. \quad (6)$$

Определение 1.5. Распределение μ называется гипоэллиптическим, если μ обратимо и выполнено (6).

Теорема 1.6 ([103]). Следующие условия на $\mu \in \mathscr{E}'(\mathbf{R}^n)$ эквивалентны:

1°. μ гипоэллиптично.

2°. $u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n)$, $\mu * u \in C^\infty(\mathbf{R}^n) \Rightarrow u \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$.

3°. Существует такое распределение F (параметрикс), что $\mu * F - \delta \in C^\infty$ и

$$\operatorname{ch} \operatorname{sing} \operatorname{supp} F \subset \operatorname{ch} \operatorname{sing} \operatorname{supp} \mu.$$

Здесь $\operatorname{ch} K$ — выпуклая оболочка множества K.

1.6. Гипоэллиптические операторы постоянной силы ([103]). Пусть $P(x, D)$ — дифференциальный оператор порядка m с постоянными коэффициентами. Пусть

$$\tilde{P}(x, \xi)=\left(\sum_{\alpha}|D_{\xi}^{\alpha}P(x, \xi)|^2\right)^{1/2}.$$

Определение 1.6. Оператор $P(x, D)$ имеет постоянную силу в $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, если для любых точек $(x_0, y_0)\in\Omega$ дифференциальные операторы $P(x_0, D)$ и $P(y_0, D)$ таковы, что

$$\tilde{P}(x_0, \xi)\leqslant C_{x_0,y_0}\tilde{P}(y_0, \xi).$$

Теорема 1.7. Пусть $P(x, D)$ — дифференциальный оператор с коэффициентами из $C^{\infty}(\Omega)$, $\Omega\subset\mathbf{R}^n$, имеющий постоянную силу в Ω. Предположим, что оператор $P(x_0, D)$, где x_0 — некоторая точка из Ω, является гипоэллиптическим. Тогда оператор $P(x, D)$ является гипоэллиптическим в Ω. Кроме того, $\mathrm{WF}(u)=\mathrm{WF}(Pu)$ для всех $u\in\mathcal{D}'(\Omega)$, т. е. P является микролокально гипоэллиптическим.

1.7. Гипоэллиптические дифференциальные операторы с переменными коэффициентами. Пусть $P(x, D)$ — дифференциальный оператор порядка m с гладкими коэффициентами в области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$. Пусть $M_j(x, \xi)$ — такие функции в $\Omega\times\mathbf{R}^n$, что

$$1\leqslant M_j(x, \ )\leqslant C_x(1+|\xi|)^{1-d},\ d>0,\ j=1, \ldots, n,$$

причем постоянная C_x ограничена, когда x меняется на компактных подмножествах в Ω. Если $\alpha=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\in Z_+^n$, $\beta=(\beta_1, \ldots, \beta_n)\in\mathbf{Z}_+^n$, то полагаем

$$M^{\beta-\alpha}=M_1^{\beta_1}\ldots M_n^{\beta_n}M_1^{-\alpha_1}\ldots M_n^{-\alpha_n}.$$

Определение 1.7. Оператор $P(x, D)$ удовлетворяет в Ω условию (HE), если $P(x, D)$ не обращается тождественно в нуль ни в одной компоненте области Ω и

$$|D_{\xi}^{\alpha}D_x^{\beta}P(x, \xi)|\leqslant C_{\alpha,\beta,x}(1+|\xi|)^{-d|\alpha|}M^{\beta-\alpha}(x, \xi)P(x, \xi)$$

для всех α и β, $x\in\Omega$, $\xi\in\mathbf{R}^n$, постоянные $C_{\alpha,\beta,x}$ ограничены, когда x изменяется на ограниченных подмножествах в Ω.

Теорема 1.8 ([102]). Если дифференциальный оператор $P(x, D)$ удовлетворяет условию (HE) в области Ω, то он является гипоэллиптическим в Ω.

Условие (HE) естественно обобщает условие (4) на операторы с переменными коэффициентами.

Пример 1.2 ([102]). Оператор

$$P(x, D)=I+|x|^{2\nu}(-\Delta)^{\mu}$$

удовлетворяет условию (HE) и, следовательно, является гипоэллиптическим, если $\nu>\mu$. В этом случае можно положить

$$M_j(x, \xi)=M(x, \xi)=(1+|\xi|^{2\mu})^{1/2\nu}(1+|x|^{2\nu}|\xi|^{2\mu})^{-1/2\nu}.$$

Пример 1.3 ([102]). Оператор

$$P(x, D)=D_1^{2m}+D_2^{2k}+ic(x)D_1^aD_2^b+1$$

удовлетворяет условию (HE) и, следовательно, гипоэллиптичен, если $c \in C^\infty$, $c(x) \in \mathbf{R}$ и либо

$$\frac{a-1}{2m}+\frac{b}{2k}<1, \quad \frac{a}{2m}+\frac{b-1}{2k}<1,$$

либо

$$\frac{a-1}{2m}+\frac{b}{2k}<1, \quad 0<a<2m.$$

1.8. Псевдодифференциальные гипоэллиптические операторы. Предыдущая теорема допускает естественное обобщение на псевдодифференциальные операторы.

Теорема 1.9 ([108]). Пусть P — матричный псевдодифференциальный оператор, $P \in \mathscr{L}^m_{\rho,\delta}(\Omega; \mathbf{C}^k, \mathbf{C}^k)$, $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$ и существуют такие $(k' \times k)$ — матрицы $A(x, \xi)$, $B(x, \xi)$, что матрица $p(x, \xi)$ (символ оператора P) удовлетворяет условию

$$|A(x, \xi) D_\xi^\alpha D_x^\beta p(x, \xi) \cdot B(x, \xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta,K}(1+|\xi|)^{-\rho|\alpha|+\delta|\beta|}, \quad x \in K,$$

где K — произвольное компактное подмножество в Ω, а α, β — произвольные мультииндексы. Предположим также, что

$$|B(x, \xi)^{-1} p(x, \xi)^{-1} A(x, \xi)^{-1}| \leqslant C_K,$$

$$|A(x, \xi)|+|B(x, \xi)| \leqslant C_K |\xi|^{m'}, \quad x \in K, \quad |\xi| \geqslant C_K.$$

Тогда оператор P является гипоэллиптическим.

Еще более общая теорема получена Билсом в [50]. Пусть $\langle\xi\rangle=(1+|\xi|^2)^{1/2}$, а φ, Φ — весовые функции, т. е.

(I) $c \leqslant \Phi(x, \xi) \leqslant C\langle\xi\rangle$, $c\langle\xi\rangle^{\varepsilon-1} \leqslant \varphi(x, \xi) \leqslant C$;

(II) $\Phi(x, \xi)\,\varphi(x, \xi) \geqslant c$;

(III) $\Phi(x, \xi)/\varphi(x, \xi) \sim \Phi(y, \eta)/\varphi(y, \eta)$, если $\langle\xi\rangle \sim \langle\eta\rangle$;

(IV) $\Phi(y, \eta) \sim \Phi(x, \xi)$, $\varphi(y, n) \sim \varphi(x, \xi)$, если $|y-x| \leqslant c\varphi(x, \xi)$ и $|\eta-\xi| \leqslant c\Phi(x, \xi)$;

(V) $\Phi(x, \xi) \geqslant c < \langle\xi\rangle^\delta$, $c>0$, $\delta>0$;

(VI) $\Phi(x, \xi)\varphi(x, \xi) \geqslant \varepsilon\langle\xi\rangle^\varepsilon$, $\varepsilon>0$.

Теорема 1.10 ([50]). Пусть H и H_1 — гильбертовы пространства, A — псевдодифференциальный оператор, $A=a(x, D)$, причем

$a(x, \xi): \Omega \times \mathbf{R}^n \to \mathscr{L}(H, H_1)$,

где $\mathscr{L}(H, H_1)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из H в H_1, причем

$$\| D_x^\beta D_\xi^\alpha a(x, \xi) \| \leqslant C_{\alpha,\beta} \Phi^{M-|\alpha|} \varphi^{m-|\beta|},$$

где Φ, φ — весовые функции, удовлетворяющие условиям (I)—(VI) в каждом компактном подмножестве из Ω, M и m — вещественные числа. Пусть $p(x, \xi)\in\mathscr{L}(H, H_1)$, причем a и p имеют левые обратные в каждом компакте $K\Subset\Omega$ при достаточно больших $|\xi|$. Предположим, что

$$\|p(D_x^\beta D_\xi^\alpha a)a^{-1}p^{-1}\|\leqslant C_{\alpha\beta}\Phi^{-|\alpha|}\varphi^{-|\beta|},$$

$$\|p\|+\|a^{-1}p^{-1}\|\leqslant C\langle\xi\rangle^N$$

для некоторого N при достаточно больших $|\xi|$. Предположим, наконец, что либо $p=I$, либо a обратим для больших ξ. Тогда A — гипоэллиптический оператор.

1.9. Вырождающиеся эллиптические операторы. Пусть $N=k+n$ и точки $x\in\mathbf{R}^n$ имеют координаты (x', y), где $x'\in\mathbf{R}^k$, $y\in\mathbf{R}^n$. Пусть $m\in N$ и $\delta m\in N$. Положим

$$m_0=\{(\alpha, \beta, \gamma): |\alpha|+|\beta|\leqslant m, \quad m+|\gamma|=|\alpha|+(1+\delta)|\beta|\}.$$

Рассмотрим в $\mathbf{R}^N$ оператор

$$p(y, D)=\sum_{m_0}a_{\alpha\beta\gamma}y^\gamma D_{x'}^\beta D_y^\alpha$$

с постоянными коэффициентами.

Теорема 1.11 ([12]). Пусть выполнены условия:

1^0. Оператор $p(y, D_y)$ эллиптический при $y\neq0$.

2^0. Уравнение $p(y, \xi', D_y)v(y)=0$ при $\xi'\in\mathbf{R}^k$, $|\xi'|=1$, не имеет отличных от нуля решений из $S(\mathbf{R}_y{}^n)$. Тогда оператор $p(y, D)$ гипоэллиптический. Обратно, если выполнено условие 1^0 и оператор $p(y, D)$ гипоэллиптический, то выполнено условие 2^0.

Пример 1.4. Оператор

$$D_y^2+y^2D_x^2+\lambda D_x, \quad \operatorname{Re}\lambda=0, \quad x\in\mathbf{R}, \quad y\in\mathbf{R},$$

гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда $\lambda\neq2k+1$, $k\in\mathbf{Z}$.

Пример 1.5. Оператор

$$D_y+iay^rD_x, \quad \operatorname{Re}a\neq0$$

гипоэллиптичен тогда и только тогда, когда $r=2k$, $k\in N$.

Положим

$$m=\{(\alpha, \beta, \gamma): |\alpha+\beta|\leqslant m, \; m\delta\geqslant|\gamma|\geqslant|\alpha|+(1+\delta)|\beta|-m\}.$$

Рассмотрим оператор

$$p(x, D)=\sum_m q_{\alpha\beta\gamma}(x, D)\,y^\gamma D_{x'}^\beta D_y^\alpha,$$

где $q_{\alpha\beta\gamma}(x, D)$ — классические псевдодифференциальные операторы нулевого порядка, причем $q_{\alpha00}(x, D)=q_{\alpha00}(x)$, если $|\alpha|=m$. Пусть $q^0_{\alpha\beta\gamma}(x, \xi, \eta)$ — старшая часть символа оператора $q_{\alpha\beta\gamma}$. Положим

$$\mathscr{L}(y; \xi, D_y)=\sum q^0_{\alpha\beta\gamma}(0; \xi, 0)\,y^\gamma\xi^\beta D^\alpha{}_y.$$

Теорема 1.12 ([12]). Если для псевдодифференциального оператора $\mathscr{L}(y;\ D_{x'},\ D_y)$ выполнены условия 1° и 2° предыдущей теоремы, то оператор $p(x, D)$ гипоэллиптичен в некоторой окрестности начала координат.

Пример 1.6. Оператор

$$D_y+iay^r\sqrt{D_x^2+D_y^2},\quad \operatorname{Re} a\neq 0,$$

является гипоэллиптическим, если r четно или r нечетно и $\operatorname{Re} a>0$.

Пример 1.7. Как указано в примере 1.4, оператор $D_y^2+ +y^2D_x^2-D_x$ не гипоэллиптичен. Однако оператор

$$D_y^2+y^2D_x^2-D_x+ay^2D_x$$

при $a\neq 0$ является гипоэллиптическим.

Пример 1.8. Оператор

$$P=D_{k+1}^2+x_{k+1}^2(D_1^2+\ldots+D_k^2)\pm D_k$$

при $k>1$ является частично гипоэллиптическим: если $Pu\in C^\infty(V)$, где V — окрестность начала координат и $u\in C^\infty$ в окрестности пересечения $\partial V\cap\{x;\ x_k=x_{k+1}=0\}$, то $u\in C^\infty(V)$.

1.10. Частичная гипоэллиптичность вырождающихся эллиптических операторов. Рассмотрим оператор

$$\mathscr{L}(t,\ D_t,\ D_x)=\sum_{\substack{j+|\alpha|\leqslant m\\ \sigma+\delta|\alpha|+j\in\mathbf{N}}} a_{j\alpha}t^{\sigma+\delta|\alpha|+j}D_t^jD_x^\alpha,$$

где $t\in\mathbf{R}$, $x\in\mathbf{R}^n$, $a_{j\alpha}\in\mathbf{C}$, $\delta\geqslant 0$, $\sigma\in\mathbf{Z}$, $\sigma+\delta m\in\mathbf{N}$. Предположим, что

$$\mathscr{L}(\lambda^{-1}t,\ \lambda\tau,\ \lambda^\delta\xi)=\lambda^{-\sigma}\mathscr{L}(t,\ \tau,\ \xi)$$

для всех $\lambda\in\mathbf{R}_+$, $t\in\mathbf{R}$, $\tau\in\mathbf{R}$ и $\xi\in\mathbf{R}^n$.

Теорема 1.13 ([12]). Если оператор $\mathscr{L}(t, D_t, D_x)$ является эллиптическим при $t\neq 0$, то он является частично гипоэллиптическим в $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ (соответственно в $\overline{\mathbf{R}}_+\times\mathbf{R}^n$) тогда и только тогда, когда уравнение $\mathscr{L}(t, D_t, \xi)u(t)=0$ не имеет решений, отличных от нуля, в классе $S(\mathbf{R})$ (соответственно, $S(\overline{\mathbf{R}}_+)$) для всех $\xi\in\mathbf{R}^n\setminus 0$.

Напомним, что частичная гипоэллиптичность в этом случае означает, что для любых открытых подмножеств $I'\subset I$, $\Omega'\subset\Omega$, если $\mathscr{L}u\in C^\infty(I'\times\Omega')$, $u\in C^\infty(I;\ \mathscr{D}'(\Omega'))$, то $u\in C^\infty(I'\times\Omega')$.

Пример 1.9. Операторы

$$tD_t+iD_x+\lambda,$$

$$t^2D_t^2+D_x^2+\lambda tD_t+\mu D_x+\nu$$

являются частично гипоэллиптическими в $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ и в $\overline{\mathbf{R}}_+\times\mathbf{R}$ при любых λ, μ, ν из $\mathbf{C}$.

Рассмотрим теперь оператор

$$\mathscr{L}=\sum_{j+|\alpha|\leqslant m} a_{j\alpha}(t,x)\,t^{\sigma+[qj]}D_t^jD_x^\alpha,$$

где $q\in\mathbf{R}$, $q\geqslant 1$, $qm\in\mathbf{N}$; $[qj]$ — целая часть от qj. Пусть $\mathscr{L}_0$ — его главная часть, т. е.

$$\mathscr{L}_0=\sum_{\substack{j+|\alpha|=m\\ qj\in\mathbf{N}}} a_{j\alpha}(0,x)\,t^{\sigma+qj}D_t^jD_x^\alpha.$$

Теорема 1.14 ([12]). Если операторы $\mathscr{L}$, $\mathscr{L}_0$ являются эллиптическими при $t\neq 0$ (соответственно, при $t>0$), то $\mathscr{L}$ частично гипоэллиптический в $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^n$ (соответственно, $\overline{\mathbf{R}}_+\times\mathbf{R}^n$).

Пример 1.10. Оператор

$$t^3D_t^2+t^2D_tD_x+iD_x^2+\lambda t^2D_t+\mu D_x+\nu$$

частично гипоэллиптический в $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ и в $\overline{\mathbf{R}}_+\times\mathbf{R}$ при любых λ, μ, ν из $\mathbf{C}$. То же верно для операторов

$$tD_t^2+tD_x^2+\lambda D_x+\mu D_t,$$

$$tD_t^2+iD_x^2+\lambda D_t.$$

1.11. Двукратные характеристики. Рассмотрим определенную $d\times d$ систему псевдодифференциальных операторов на n-мерном бесконечно дифференцируемом многообразии Ω, имеющую вид

$$P(x,D)=Ip(x,D)+M_0(x,D),$$

где I — единичная матрица, $p(x,\xi)$ — однородный символ степени m, а матричный оператор M_0 имеет порядок $\leqslant m-1$. Хотя такой оператор P имеет довольно специальный вид, он достаточно интересен и встречается, например, при исследовании $\bar\partial$-задачи Неймана.

Предположим, что выполнены следующие условия:

1°. Множество $\operatorname{Char}P=\{(x,\xi)\in T^*\Omega\setminus 0,\ p(x,\xi)=0\}$ является гладким многообразием четной размерности $2k$ и неинволютно, т. е. сужение формы $\omega=dx\wedge d\xi$ на каждое пространство, касательное к $\operatorname{Char}P$, невырожденно;

2°. Отношение $|p(x,\xi)|/d^2(x,\xi)$, где d — расстояние до $\operatorname{Char}P$, локально ограничено;

3°. Если $k=1$, т. е. $\operatorname{Codim}\operatorname{Char}P=2$, то число вращений p вокруг $\operatorname{Char}P$ равно нулю тождественно.

Теорема 1.15 ([67]). Пусть для оператора P выполнены условия 1°—3°. Для того чтобы P был гипоэллиптическим с потерей одной производной, т. е.

$$u\in\mathscr{E}'(\omega),\ Pu\in H^s_{\mathrm{loc}}(\omega)\Rightarrow u\in H^{s+m-1}_{\mathrm{loc}}(\omega),\ \forall\omega\subset\Omega,\ s\in\mathbf{R},$$

необходимо и достаточно, чтобы для любых целых неотрица-

тельных чисел $m_1, \ldots, m_k$ и любого собственного значения $\chi(x, \xi)$ матрицы $iM_{m-1}(x, \xi)$

$$\chi \neq \sum_{j=1}^{k} \mu_j \lambda_j,$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — собственные числа автоморфизма φ нормального к $\operatorname{Char} P$ пространства, определенного соотношением

$$p^*(\varphi u, v) = \bar{\omega}^*(u, v), \quad \forall u, \ v \in N.$$

Здесь $\bar{\omega}^*(df, dg) = H_f(g)$, p^* — билинейная форма, ассоциированная с квадратичной формой $\tilde{p}$, определенной следующим образом. Если $\operatorname{Char} P$ определяется с помощью $2k$ вещественных уравнений $h_j(x, \xi) = 0$, $j = 1, \ldots, 2k$ и $\det(\{h_j, h_l\}) \neq 0$ (такие функции существуют в силу 1°), то

$$p(x, \xi) = \sum c_{jl}(x, \xi) h_j(x, \xi) h_l(x, \xi)$$

и

$$\tilde{p}(x, \xi; \theta) = \sum c_{jl}(x, \xi) \theta_j \theta_l.$$

Типичным примером оператора рассматриваемого вида может служить оператор, изученный В. В. Грушиным:

$$D_t^2 + t^2 D_x^2 + \lambda D_x + \mu.$$

Операторы с двукратными характеристиками изучались также в работах [63], [64], [66], [67], [105], [131], [133] и др.

1.12. Гипоэллиптические операторы на прямой. Полную характеристику гипоэллиптических дифференциальных операторов, у которых старший коэффициент имеет нули конечнсго порядка, получил Каннаи [110]. Пусть $L(x, D) = \sum_{j=0}^{m} a_j(x) D^j$, $a_j \in C^\infty(R)$. Ясно, что L гипоэллиптичен всюду, где $a_m(x) \neq 0$.

Пусть теперь $a_m(x) = 0$ при $x = 0$, причем a_m имеет при $x = 0$ нуль конечного порядка. Хорошо известно, (см. [163]) что в таком случае существуют m линейно независимых решений $u_1(x), \ldots, u_m(x)$ уравнения $\mathscr{L}u = 0$, для которых

$$u_i(x) = e^{Q_i(x)} x^{\rho_i} v_i(x),$$

причем Q_i — полиномы от x^{-1/q_i},

$$v_i(x) = \sum_{j=0}^{m_i} v_{i,j}(x) (\log x)^j, \quad v_{i,j}(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} v_{i,j,n} x^{n/q_i}$$

при $0 \leqslant j \leqslant m_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Здесь m_i, q_i — целые числа, $m_i \geqslant 0$, $q_i > 0$, а ряды, асимптотические для $v_{i,j}$, не сходятся, вообще говоря, даже если a_j — аналитические функции. Пусть r

— число функций Q_i, равных нулю тождественно, так что

$$Q_1(x) \equiv \ldots \equiv Q_r(x) \equiv 0.$$

Теорема 1.16. Оператор $\mathscr{L}$ гипоэллиптичен в окрестности начала координат тогда и только тогда, когда $a_r(0) \neq 0$ и $|\mathrm{Re}\, Q_i(x)| \to \infty$ при $x \to 0$ для $r < i \leqslant m$.

В некоторых случаях удается получить более явное описание условий гипоэллиптичности. Пусть

$$p(x, \xi) = a_m(x) \prod_{j=1}^{m} (\xi - \xi_j(x)).$$

Оператор $\mathscr{L}$ удовлетворяет условию (S), если для каждого корня ζ_j, который неограниченно возрастает при $x \to 0$, верно следующее: если $\zeta_i(x)/\zeta_j(x) \to 1$ при $x \to 0$, то $i = j$

Теорема 1.17. Пусть $\mathscr{L}$ удовлетворяет условию (S). Для того чтобы $\mathscr{L}$ был гипоэллиптическим в окрестности U начала координат, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная $C > 0$, что для $x \in U$ если $p(x, \zeta) = 0$, то либо $|\zeta| < C$, либо $|x|\,|\mathrm{Im}\,\zeta| \to \infty$ при $x \to 0$.

Следующая теорема дает другой класс гипоэллиптических операторов.

Теорема 1.18 ([110]). Если существуют такая окрестность U начала координат и такая постоянная C, что для $x \in U$

$$\text{если } p(x, \zeta) = 0, \text{ то либо } |\zeta| < C, \text{ либо } |x|\,|\mathrm{Im}\,\zeta| \to \infty$$
$$\text{и } C|\mathrm{Im}\,\zeta| > |\mathrm{Re}\,\zeta| \text{ при } x \to 0,$$

то существуют такие постоянные ρ и δ, что $0 \leqslant \delta < \rho \leqslant 1$, и такое целое число m', что для любых неотрицательных целых чисел α и β и любого компактного подмножества $K \subset U$ существуют такие постоянные $C_1(K)$ и $C(\alpha, \beta, K)$, что

(а) $|p(x, \xi)| \geqslant C_1(K)\,|\xi|^{m'}$;

(б) $|p_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)| \leqslant C(\alpha, \beta, K)(1 + |\xi|)^{-\rho\alpha + \delta\beta}\,|p(x, \xi)|$

для $x \in K$, $\xi \in \mathbf{R}$, $|\xi| \geqslant C_1(K)$. Если условия (а) и (б) выполнены, то $\mathscr{L}$ — гипоэллиптический оператор.

Пример 1.11. Пусть $\mathscr{L}u = x^3 u' + (i + x)u$. По теореме 1.16, $\mathscr{L}$ — гипоэллиптический. Однако условие (б) для него не выполнено.

Важные результаты в теории гипоэллиптических операторов получены в работах: [3], [7], [12], [42], [52], [53], [54], [63], [86], [90], [93], [99], [100], [101], [105], [131], [133], [134], [135], [138], [143], [144], [159] и др.

§ 2. Субэллиптические операторы

2.1. Определение и простейшие свойства. Субэллиптические псевдодифференциальные операторы образуют важный класс гипоэллиптических операторов, очень близкий по своим

свойствам к классу эллиптических операторов. (См. [17], [18], [109]).

Определение 2.1. Псевдодифференциальный оператор P порядка m называется *субэллиптическим* в области Ω, если для каждого компакта $K\subset\Omega$ существуют такие постоянные $C>0$ и $\delta\in[0, 1)$, что

$$\|u\|_{m-\delta}\leqslant C\,(\|Pu\|_0+\|u\|_{m-1}),\quad u\in C_0^\infty(K). \tag{7}$$

Оценка такого вида при $\delta=0$ справедлива в том и только в том случае, когда P — эллиптический оператор, т. е. $p_0(x,\xi)\neq0$ при $\xi\neq0$.

Нетрудно видеть, что из (7) следует, что для любого вещественного числа s найдется такая постоянная $C=C(s,K)$, что

$$\|u\|_{s+m-\delta}\leqslant C\,(\|Pu\|_s+\|u\|_{s+m-1}),\quad u\in C_0^\infty(K).$$

С помощью оператора усреднения легко показать, что для субэллиптических операторов справедлива теорема о гладкости: если

$$u\in\mathscr{E}'(\Omega),\quad Pu\in H_s(K),\ \text{то}\ u\in H_{s+m-\delta}(K).$$

Эта теорема имеет обобщение в микролокальных терминах: если $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$, $Pu\in H_s(\omega)$, где ω — подобласть в $T^*\Omega\setminus0$, то $u\in H_{s+m-\delta}(\omega)$. В частности, оператор P является микролокально гипоэллиптическим.

Если оператор P субэллиптический, то оператор P^* является разрешимым в каждом компакте K: существуют такие функции $\psi_1,\ldots,\psi_N\in C_0^\infty(K)$, удовлетворяющие уравнению $P\psi=0$ в K, что если $f\in H_s(K)$, $\int f(x)\overline{\psi_j(x)}\,dx=0$, то найдется функция u из класса $\mathscr{E}'(\Omega)\cap H_{s+m-\delta}(K)$, удовлетворяющая уравнению $P^*u=f$ в K. При этом $\|u\|_{s+m-\delta}^K\leqslant C\|f\|_s^K$.

Если P — субэллиптический оператор на гладком замкнутом компактном многообразии Ω, то множество

$$\{u\in\mathscr{D}'(\Omega),\ Pu=0\}$$

состоит из бесконечно гладких функций и является конечномерным линейным пространством. Множество значений этого оператора с областью определения $\mathscr{D}_P=H_s(\Omega)$ является замкнутым в $H_{s-m}(\Omega)$ подпространством.

Пример 2.1. Оператор $D_1+ix_1^kD_2$ при четных k является субэллиптическим с показателем $\delta=k/(k+1)$.

Пример 2.2. Задача с косой производной. В полупространстве

$$\mathbb{R}_+^{n+1}=\{x=(x_1,\ldots,x_{n+1}),\ x_{n+1}>0\}$$

рассматривается решение уравнения

$$\Delta u=0, \quad u \in H^2(\mathbf{R}_+^{n+1}),$$

удовлетворяющее краевому условию

$$\frac{\partial u}{\partial x_1}+a x_1^k \frac{\partial u}{\partial x_{n+1}}=f(x) \text{ при } x_{n+1}=0, \quad a \neq 0.$$

С помощью преобразования Фурье задача сводится к псевдодифференциальному уравнению

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}+a x_1^k \Lambda v=f(x),$$

где

$$\Lambda v=(2\pi)^{-n} \int \tilde{v}(\xi)\,|\xi|\,e^{ix\xi} d\xi.$$

Соответствующий оператор $iD_1+ax_1^k\Lambda$ является субэллиптическим, если k четно или если k нечетно, но $a<0$. При этом

$$\delta=k(k+1)^{-1}.$$

Пример 2.3. *$\bar{\partial}$—проблема Неймана.* Пусть Ω—область в $\mathbf{C}^n$. Рассмотрим в Ω систему уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j}=f_j(z, \bar{z}), \quad j=1, \ldots, n, \quad z_j=x_j+iy_j.$$

Пусть A — точка на границе $\partial\Omega$. Введем в окрестности этой точки систему координат, в которой граница $\partial\Omega$ определяется уравнением $x_n=0$, а область Ω расположена при $x_n>0$. Система уравнений при $x_n=0$ будет иметь вид:

$$\mathscr{L}_j u=g_j, \; j=1, \ldots, n-1;$$

где

$$\overline{\mathscr{L}}_j=\frac{\partial}{\partial x_j}+a_j(x, y)\frac{\partial}{\partial y_n}+i\left(\frac{\partial}{\partial y_j}+b_j(x, y)\frac{\partial}{\partial y_n}\right).$$

Эта система субэллиптична с $\delta=1/2$, если матрица C, определяемая соотношениями

$$[\overline{\mathscr{L}}_j, \mathscr{L}_k]=c_{jk}\frac{\partial}{\partial y_n},$$

положительно определена. Матрица C называется *матрицей Леви*, и если $C>0$, область Ω называется строго псевдовыпуклой.

2.2. Оценки для дифференциальных операторов первого порядка с полиномиальными коэффициентами. Такие операторы моделируют общие субэллиптические псевдодифференциальные операторы и широко используются при исследовании последних (см. [17], [18], [109]).

Теорема 2.1. Пусть $P(t)$ — полином степени k от переменной $t \in \mathbf{R}$. Оценка

$$\|u\|_0 \leqslant C\|u'(t)+\lambda P(t)u\|_0, \quad \lambda \geqslant 1, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}),$$

выполняется тогда и только тогда, когда полином $P(t)$ не меняет знака — на + при возрастании t.

Если $P(t)$ удовлетворяет этому условию, то справедлива оценка

$$\|u'(t)\|_0+\lambda\|P(t)u\|_0+\lambda^{1/(k+1)}\|u\|_0 \leqslant C_1\|u'(t)+\lambda P(t)u\|_0,$$
$$\lambda > 0, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}).$$

Теорема 2.2. Пусть $P(t,x)$ — полином степени k от двух переменных $(t,x) \in \mathbf{R}^2$, $A(t)$ — полином степени $s<k/2$ со старшим коэффициентом, равным 1. Оценка

$$\|u\|_0 \leqslant C\left\|\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{i}A(t)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda P(t,x)u\right\|_0, \quad \lambda>0, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2),$$

имеет место тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

1^0 $A(t)$ не меняет знака.

2^0. Функция $B(t,x)=P(t,x)A(t)^{-1}$ является гладкой в $\mathbf{R}^2$ и $\operatorname{sgn} A(t)\cdot\partial_t B(t,x) \leqslant 0$.

3^0. Существует такая постоянная $c_0>0$, что

$$\sum_{i+j<k-1}|D_t^i[A(t)^j D_x^j D_t B(t,x)]| \geqslant c_0.$$

Если выполнены условия $1°$—$3°$, то справедлива оценка

$$\lambda^{1/(k+1)}\|u\|_0+\|\partial u/\partial t\|_0+\|A(t)\partial u/\partial x+i\lambda P(t,x)u\|_0 \leqslant$$
$$\leqslant C\left\|\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{1}{i}A(t)\frac{\partial u}{\partial x}+\lambda P(t,x)u\right\|_0, \quad u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2),$$

2.3. Алгебраические условия. Для исследования неравенства (7) используется микролокализация. Не ограничивая общности, можно считать, что $m=1$.

Теорема 2.3. Если псевдодифференциальный оператор P первого порядка является субэллиптическим в области Ω с $0<\delta<1$, то для всякого целого $k>0$ и каждого компактного подмножества $K \subset \Omega$ найдется такая постоянная $C=C(k,K)$, что для всех $x \in K$, $\xi \in \mathbf{R}^n$, $|\xi|=1$, $\lambda \geqslant 1$ и всех ψ из $C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ выполнено неравенство

$$\|\psi(y)\|_0 \leqslant C\{\lambda^\delta\|T_k^{(x,\xi)}p_0(x+y\lambda^{\delta-1}, \xi+D\lambda^{-\delta})\psi(y)\|_0+$$
$$+\lambda^{\delta-(k+1)(1-\delta)}\sum_{|\alpha+\beta|<k+1}\|y^\beta D^\alpha\psi\|_0\lambda^{|\alpha|(1-2\delta)}\}.$$

Здесь использовано обозначение

$$T_k^{(x,\xi)} f(y, \eta) = \sum_{|\alpha+\beta|\leqslant k} \frac{1}{\alpha!\beta!} f_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi)(y-x)^\beta (\eta-\xi)^\alpha,$$

$$f_{(\beta)}^{(\alpha)}(x, \xi) = (iD_\xi)^\alpha (iD_x)^\beta f(x, \xi).$$

Теорема 2.4. Если для каждого компактного подмножества $K \ll \Omega$ существуют такие постоянные $C=C(K)$, $N=N(K)$ и $\varepsilon_0=\varepsilon_0(K)$, что для всех $x \in K$, $|\xi| \geqslant 1/2$, $\lambda \geqslant 1$ и всех $\psi(y) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ справедливо неравенство

$$\lambda \|\psi\|_0 + \|\overline{P}_\lambda \psi\|_0 \leqslant C \{\|P_\lambda \psi\|_0 +$$

$$+ \lambda^{-\varepsilon_0} \sum_{|\alpha+\beta|\leqslant N} \lambda^{-|\alpha|(k-1)} (\|y^\beta D^\alpha \psi\|_0 + \|y^\beta D^\alpha P_\lambda \psi\|_0 + \|y^\beta D^\alpha \overline{P}_\lambda \psi\|_0)\Big\},$$

где

$P_\lambda(y, D)\psi = \lambda^k T_k^{(x,\xi)} p_0(x + y\lambda^{-1}, \xi + D\lambda^{-k})\psi$ и $p_0(x, t\xi) = t p_0(x, \xi)$ при $t \geqslant 1$, $|\xi| \geqslant 1$, $p_0 \in C^\infty(T^*\Omega)$, то для оператора P с главным символом p_0 выполнена оценка

$$\|u\|_{1/(k+1)} + \|P^* u\|_0 \leqslant C_K (\|Pu\|_0 + \|u\|_0), \quad u \in C_0^\infty(K).$$

Анализ микролокальных условий, аналогичный анализу условий теорем 2.3 и 2.4, позволяет сформулировать алгебраические условия, необходимые и достаточные для того, чтобы оператор P был субэллиптическим ([17]).

Первое из этих условий является необходимым для того, чтобы неравенство (7) выполнялось при каком-либо δ (необязательно из $[0,1)$).

(ψ) Пусть $a_1 = \operatorname{Re} p_0$, $a_2 = \operatorname{Im} p_0$. Рассмотрим интегральную кривую системы

$$\dot{x}(t) = \partial_\xi a_2(x(t), \xi(t)), \quad \dot{\xi}(t) = -\partial_x a_2(x(t), \xi(t)),$$

называемую бихарактеристикой функции a_2. Пусть $h(t) = a_1(x(t), \xi(t))$. Если $a_2(x(t), \xi(t)) = 0$, $h(t_0) < 0$, то $h(t) \leqslant 0$ при $t \geqslant t_0$. Аналогичное условие выполнено и после замены функции p_0 функцией ip_0.

Для формулировки второго условия (B) рассмотрим операторы

$$H_i = \sum_{j=1}^n \left[\partial_j a_i(x, \xi)\frac{\partial}{\partial \xi_j} - \partial_{\xi_j} a_i(x, \xi)\frac{\partial}{\partial x_j}\right], \quad i = 1, 2.$$

Если $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_r)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_r)$, то полагаем

$$H_1^\alpha H_2^\beta = H_1^{\alpha_1} H_2^{\beta_1} \ldots H_1^{\alpha_r} H_2^{\beta_r}.$$

Положим $k(x, \xi)=0$, если $p_0(x, \xi)\neq 0$, а если $p_0(x, \xi)=0$, то $k(x, \xi)$ — наименьшее целое число k, для которого

$$H_1^\alpha H_2^\beta a_1(x, \xi)\neq 0, \quad |\alpha+\beta|=k.$$

$$(B)\ \sup k(x, \xi)\leqslant k<\infty, \quad (x, \xi)\in T^*\Omega, \quad x\in K, \quad |\xi|=1.$$

Теорема 2.5. Неравенство (7) с $\delta=k/(k+1)$ имеет место в том и только в том случае, если выполнены условия (ψ) и (B). Если $p_0(x_0, \xi_0)=0$, $(x_0, \xi_0)\in T^*\Omega\setminus 0$ и $H_1^\alpha H_2^\beta a_1(x_0, \xi_0)=0$ при $|\alpha+\beta|<l$, то оценка (7) не может быть справедливой при $\delta<l(l+1)^{-1}$, $x_0\in K$.

Таким образом, каждому субэллиптическому оператору P соответствует такое натуральное число k, что $\delta=k(k+1)^{-1}$. Субэллиптические операторы возникают при вырождении эллиптических операторов до порядка k.

Теорема 2.6. Если P — субэллиптический оператор, то для каждого компактного подмножества $K\subset\Omega$ и каждого вещественного числа s существует такая постоянная $C=C(s, K)$, что

$$\|P^*u\|_s\leqslant C(\|Pu\|_s+\|u\|_{s+m-1}), \quad u\in C_0^\infty(K).$$

Теорема 2.7. Пусть P — псевдодифференциальный оператор, удовлетворяющий условию (B). Для того чтобы P был гипоэллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (ψ).

В случае дифференциального оператора теорема 2.5 имеет следующий вид.

Теорема 2.8. Для того чтобы дифференциальный оператор P был субэллиптическим, необходимо и достаточно, чтобы функция $k(x, \xi)$ принимала во всех точках из $T^*\Omega$ четные значения, не превосходящие некоторого целого числа k. В этом случае $\delta=k(k+1)^{-1}$. Если в точке (x_0, ξ_0) функция k принимает нечетное значение, то неравенство (7) не может выполняться ни в каком компакте K, содержащем точку x_0 ни при каком $\delta\in\mathbb{R}$. В последнем случае оператор P негипоэллиптичен ни в какой окрестности этой точки.

Отметим также, что теорема 2.7 означает, что среди операторов, удовлетворяющих условию (B), нет гипоэллиптических, но не субэллиптических операторов.

§ 3. Гипоэллиптические дифференциальные операторы второго порядка

3.1. Сумма квадратов. Рассмотрим оператор второго порядка

$$\mathscr{L}=\sum_{j=1}^{r}X_j^2+X_0+c, \tag{8}$$

где $X_0, X_1, \ldots, X_r$ — дифференциальные операторы первого порядка с гладкими в Ω вещественными коэффициентами, $c \in C^\infty(\Omega)$, Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^n$. Как обычно, через $[A, B]$ обозначается коммутатор $AB - BA$.

Теорема 3.1. Пусть для каждой точки области Ω среди операторов X_{j_1}, $[X_{j_1}, X_{j_2}]$, $[X_{j_1}, [X_{j_2}, X_{j_3}]]$, $\ldots$, где $j_i = 0, 1, \ldots, r$, имеется n линейно независимых. Тогда оператор $\mathscr{L}$ является гипоэллиптическим.

Если алгебра Ли, порожденная операторами $X_0, X_1, \ldots, X_r$, имеет постоянный ранг, меньший n, в окрестности какой-либо точки $x_0 \in \Omega$, то, по теореме Фробениуса, существует такое локальное преобразование системы координат, после которого оператор $\mathscr{L}$ будет действовать только по переменным $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Если при этом однородное уравнение $\mathscr{L}u = 0$ имеет хотя бы одно нетривиальное решение u, то оператор $\mathscr{L}$ не может быть гипоэллиптическим, поскольку этому же уравнению удовлетворяет функция u_1, равная u при $x_n < c$ и нулю при $x_n > c$, где c — некоторая постоянная.

Первый пример оператора $\mathscr{L}$, удовлетворяющего условиям теоремы, был рассмотрен А. Н. Колмогоровым в 1935 году. Это был оператор

$$\mathscr{L} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + x\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t}.$$

Доказательство теоремы 3.1, полученное Хёрмандером (см. [108]) основывается на простых геометрических соображениях. Пусть X гладкое вещественное векторное поле из $T(\Omega)$. Рассмотрим однопараметрическую группу преобразований в Ω, порождаемую оператором X. Для этого определим φ как решение уравнения

$$\frac{d\varphi(t, x)}{\partial t} = X\varphi(t, x)$$

с начальным условием $\varphi(0, x) = x$. Ясно, что $\varphi(s, \varphi(t, x)) = \varphi(t + s, x)$. Положим теперь

$$e^{tX}u(x) = u(\varphi(t, x)),$$

так что $d(e^{tX}u)/dt = e^{tX}Xu = Xe^{tX}u$. Пусть

$$|u|_{X,s} = \sup_{0<|t|<\varepsilon} \|e^{tX}u - u\| \cdot |t|^{-s}, \quad u \in C_0^\infty(\Omega),$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $\mathscr{L}_2$. Пусть $I = (i_1, \ldots, i_k)$ при $0 \leqslant i_j \leqslant r$,

$$X_I = [X_{i_1}, [X_{i_2}, \ldots, [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}] \ldots]]$$

и $|I| = k$.

Теорема 3.2. Пусть $X_j \in T(\Omega)$, $0 < s_j \leqslant 1$, $j = 0, 1, \ldots, r$.

Пусть

$$m_j = 1/s_j, \quad m(I) = 1/s(I) \equiv \sum_{j=1}^{k} 1/s_{i_j}, \quad I = (i_1, \ldots, i_k).$$

Пусть $\sigma > 0$. Если $t > 0$ достаточно мало, то

$$\| e^{t^{m(I)}X_I} u - u \| \leqslant C_1 t \sum_{j=0}^{r} | u |_{X_j, s_j} + C_2 t \, | u |_\sigma, \quad u \in C_0^\infty(K),$$

где C_1 и C_2 — постоянные и C_1 зависит только от r и σ, но не от $X_0, \ldots, X_r, s_0, \ldots, s_r$.

При доказательстве этой последней теоремы существенно используется формула Кемпбелла—Хаусдорфа.

3.2. Необходимое условие гипоэллиптичности. Как было показано в § 1, гипоэллиптический дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, который не является эллиптическим, должен иметь кратные характеристики. Этот результат переносится и на оператор с переменными коэффициентами с вещественным главным символом (см. [103]).

Теорема 3.3. Пусть $P(x, D)$ — дифференциальный оператор в области $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ с коэффициентами из C^∞ и пусть главная часть $p(x, \xi)$ его символа вещественнозначна. Если $(x_0, \xi_0) \in T^*\Omega \setminus 0$ и

$$p(x_0, \xi_0) = 0, \quad \partial p(x_0, \xi_0)/\partial \xi_1 \neq 0,$$

то оператор P не может быть гипоэллиптическим.

Таким образом, если $P(x, D)$ — дифференциальный оператор второго порядка с вещественной главной частью, то квадратичная форма, соответствующая этой главной части, полуопределена.

Отметим (см. [52], [7]), что знак этой квадратичной формы может, тем не менее, меняться при переходе от одной точки x к другой. Например, оператор

$$x_1^3 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial}{\partial x_1}$$

гипоэллиптичен в $\mathbf{R}^3$. ([110]).

Теорема 3.4. Пусть

$$\mathscr{L}(x, D) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^{n} b_j \frac{\partial}{\partial x_j} + C(x) \tag{9}$$

— дифференциальный оператор с вещественными гладкими (C^∞) коэффициентами. Если $x_1 \mathscr{L}_0(x, \xi) > 0$, где $\mathscr{L}_0(x, \xi) = \Sigma a_{ij}(x) \xi_i \xi_j$, $x_1 \neq 0$, $\xi \neq 0$, причем

$$a_{11}(x) = 0, \quad D_1 a_{11}(x) = 0, \quad b_1(x) > 0 \text{ при } x_1 = 0,$$

то оператор $\mathscr{L}$ является гипоэллиптическим. Обратно, если

$x_1\mathcal{L}_0(x, \xi)>0$ при $x_1\neq 0, \xi\neq 0$ и $\mathcal{L}$ — гипоэллиптический, то $a_{11}(x)=0$, $D_1a_{11}(x)=0$ при $x_1=0$, $b_1(x)\geqslant 0$ при $x_1=0$.

3.3. Операторы с неотрицательной квадратичной формой. Пусть $\mathcal{L}(x, D)$ имеет вид (9). Теорема 3.1 допускает обобщение на такие операторы, более общие, чем оператор вида (8).

Теорема 3.5 ([38]). Пусть $\mathcal{L}_0(x, \xi)\geqslant 0$ в Ω. Пусть

$$A^{(j)}(x, \xi)=\partial\mathcal{L}_0(x, \xi)/\partial\xi_j, \quad A_{(j)}(x, \xi)=\partial\mathcal{L}_0(x, \xi)/\partial x_j,$$

$$\mathcal{L}_1(x, \xi)=\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\,\xi_j.$$

Рассмотрим алгебру Ли, порожденную функциями $A^{(j)}$, $A_{(j)}$ и $\mathcal{L}_1$, $j=1, \ldots, n$, с операцией вычисления скобок Пуассона для каждой пары функций. Если для скобок $A_{j_1,\ldots,j_k}=\{X_{j_1}, \ldots \{X_{j_{k-1}}, X_{j_k}\}\ldots\}$, где X_{j_l} — какие-либо из функций $A^{(j)}$, $A_{(j)}$ или $\mathcal{L}_1$, выполнено неравенство

$$\sum_{|k|<m} |A_{j_1\ldots j_k}(x, \xi)|\geqslant C_0>0, \quad |\xi|=1, \quad x\in K,$$

где K — компакт в Ω, то оператор $\mathcal{L}$ является гипоэллиптическим в K и

$$\|\varphi u\|_{s+\varepsilon(K)}\leqslant C(K, s)(\|\varphi_1\mathcal{L}u\|_s+\|\varphi_1 u\|_\gamma),$$

где $u\in C_0^\infty(K)$, $\varphi, \varphi_1\in C_0^\infty(K)$, $\varphi\varphi_1\equiv\varphi$, $\varepsilon(m)>0$, $\gamma=\mathrm{const}<s+\varepsilon(K)$.

Более тщательный анализ показывает, что $\varepsilon=m^{-1}$.

Пример 3.1. Оператор

$$P(x, D)=a(x)\Delta+\partial/\partial x_1,$$

где $a\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $a(x)>0$ при $x\neq 0$, $a^{(\alpha)}(0)=0$ для всех α, является гипоэллиптическим в $\mathbf{R}^n$.

Пример 3.2. Оператор

$$D_1^2+x_1^{2k}D_2^2+ix_2^lD_2, \quad k, l\geqslant 0,$$

является гипоэллиптическим.

Пример 3.3. Оператор

$$P=|x|^2\Delta-(\nu n+\nu(\nu-2))$$

не является гипоэллиптическим в области Ω, содержащей начало координат, если ν не целое, поскольку $P(|x|^\nu)=0$.

§ 4. Аналитическая гипоэллиптичность

4.1. Эллиптические операторы. Как указывалось в § 1 главы 4 для дифференциальных операторов $P(D)$ с постоянными коэффициентами, все решения уравнения $P(D)u=0$ являются

аналитическими в том и только в том случае, когда $P(D)$ — эллиптический оператор. Для операторов $P(x, D)$ с переменными коэффициентами дело обстоит сложнее.

Теорема 4.1 ([39]). Пусть $P(x, D)$ — матричный дифференциальный оператор с аналитическими в Ω коэффициентами, эллиптический по Дуглису — Ниренбергу. Тогда каждое решение $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ системы уравнений $P(x, D)u = f(x)$ аналитично в Ω, если вектор-функция $f(x)$ аналитична в Ω.

Пример 4.1. Все решения уравнения $(D_1 + ix_1^2 D_2)u = f(x_1, x_2)$ в $\Omega \subset \mathbf{R}^2$ являются аналитическими функциями, если f — аналитическая. Однако оператор $D_1 + ix_1^2 D_2$ не является эллиптическим.

Определение 4.1. Оператор $P(x, D)$ называется *аналитически гипоэллиптическим* в Ω, если из того, что $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$, Pu — аналитическая функция в ω, следует, что u аналитично в ω для каждой подобласти $\omega \subset \Omega$.

Из сказанного выше следует, что класс аналитически гипоэллиптических дифференциальных операторов шире класса эллиптических дифференциальных операторов.

4.2. Аналитический волновой фронт. Пусть $A(\Omega)$ — пространство функций аналитических в открытом множество $\Omega \subset \mathbf{R}^n$. Напомним, что $f \in A(\Omega)$, если для каждого компакта K в Ω существуют такие постоянные A и B, что

$$|D^\alpha f(x)| \leqslant AB^{|\alpha|}\alpha!, \quad x \in K, \quad \forall \alpha.$$

Предложение 4.1. Для того чтобы распределение u из $\mathcal{D}'(\Omega)$ было аналитической функцией в Ω, необходимо и достаточно, чтобы у каждой точки $x_0 \in \Omega$ существовали такая окрестность $U(x_0)$ и такая последовательность $\{\varphi_N\} \in C_0^\infty(\Omega)$, что

$$\varphi_N = 1 \text{ в } U(x_0), \quad |\widetilde{\varphi_N u}(\xi)| \leqslant C^{N+1} N! (1 + |\xi|)^{-N},$$

где C не зависит от N.

Определение 4.2. Носителем аналитических особенностей распределения u (обозначается $\operatorname{sing\,supp}_a u$) называется пересечение всех замкнутых множеств, на дополнении к которым функция u аналитична.

Предложение 4.1 позволяет перенести понятие аналитичности на кокасательное расслоение.

Определение 4.3. Распределение $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ называется аналитическим в точке $(x_0, \xi) \in T^*\Omega \setminus 0$, если существуют такие открытая окрестность U точки x_0 в Ω, открытый конус Γ в $\mathbf{R}^n$, содержащий точку ξ_0, постоянная $C > 0$ и последовательность $\{\varphi_N\}$ функций из $C_0^\infty(\Omega)$, что $\varphi_N = 1$ в U, $\varphi_N = 0$ вне некоторого компакта $K \subset \Omega$, не зависящего от N, и

$$|\widetilde{\varphi_N u}(\xi)| \leqslant C^{N+1} N! (1 + |\xi|)^{-N}, \quad \xi \in \Gamma.$$

Распределение u называется аналитическим в коническом открытом подмножестве $\Gamma\subset T^*\Omega\setminus 0$, если оно аналитическое в каждой точке $(x, \xi)\in\Gamma$.

Дополнение к множеству точек из $T^*\Omega\setminus 0$, в которых u является аналитическим, называется аналитическим волновым фронтом распределения u и обозначается через $\mathrm{WF}_a(u)$.

Теорема 4.2 ([108]). Проекция на Ω аналитического волнового фронта $\mathrm{WF}_a(u)$ распределения $u\in\mathscr{D}'(\Omega)$ совпадает с носителем аналитических особенностей $\operatorname{sing\,supp}_a u$.

Пример 4.2. Пусть $\xi_0\in\mathbf{R}^n$, $|\xi_0|=1$, $0<\varepsilon<1$. Тогда аналитический волновой фронт функции

$$u(x)=\int e^{ix\xi-|\xi|^{1-\varepsilon}-|x|^2|\xi|-|\xi-|\xi|\xi_0|}d\xi$$

состоит из одного луча $\{(x, \xi): x=0,\ \xi=t\xi_0,\ t>0\}$, причем $\mathrm{WF}(u)=\varnothing$, т. е. $u\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$. Другое определение аналитического волнового фронта приводится ниже в п. 3.2 гл. 8.

4.3. Аналитические псевдодифференциальные операторы. Рассмотрим интегральный оператор

$$Ku(x)=\int K_0(x, y, x-y)u(y)dy.$$

Теорема 4.3. ([160]). Пусть функция $K_0(x, y, z)$ аналитична в $\Omega\times\Omega\times\mathbf{R}^n\setminus 0$. Предположим, что выполнено условие:

для каждого компактного подмножества $\mathscr{M}\subset\Omega$ существуют такое целое число $m>0$ и постоянная $C>0$, что при всех $f\in C_0^\infty(\mathscr{M})$ и всех α, $\beta\in\mathbf{Z}_+^n$ справедливы неравенства

$$\sup_{x\in\mathscr{M}}\left|\int [D_x^\alpha D_y^\beta K_0(x, y, z)]_{z=x-y}f(y)\,dy\right|\leqslant$$

$$\leqslant C^{|\alpha+\beta|+1}\alpha!\beta!\sup_{x\in\mathscr{M}}\sum_{|\gamma|\leqslant m}|D^\gamma f(x)|. \qquad (10)$$

Тогда оператор K аналитически псевдолокален, т. е. для $u\in\mathscr{E}'(\Omega)$ распределение Ku аналитично в каждом открытом подмножестве, на котором аналитично u.

Определение 4.4. Линейный непрерывный оператор $\mathscr{E}'(\Omega)\to\mathscr{D}'(\Omega)$ называется аналитически-сглаживающим, если его образ содержится в $A(\Omega)$.

Предложение 4.2. Пусть амплитуда $a(x, y, \xi)\in C^\infty$ на множестве $\Omega^{\mathbf{C}}\times\Omega^{\mathbf{C}}\times\mathbf{R}^n$ является голоморфной по x, y и для каждого компакта $\mathscr{M}^{\mathbf{C}}$ в $\Omega^{\mathbf{C}}\times\Omega^{\mathbf{C}}$ существует такая постоянная $C>0$, что

$$|a(x, y, \xi)|\leqslant Ce^{-|\xi|/C},\ \forall (x, y)\in\mathscr{M}^{\mathbf{C}},\ \xi\in\mathbf{R}^n,$$

Тогда оператор A, определяемый равенством

$$Au(x)=\iint a(x, y, \xi)\, e^{i(x-y,\xi)}\, u(y)\,dy\,d\xi,$$

аналитически сглаживающий.

Здесь и дальше $\Omega^{\mathbf{C}}$ — открытая окрестность области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$ в $\mathbf{C}^n$.

Теорема 4.4 ([160]). Пусть $a(x, y, \xi)\in C^\infty(\Omega\times\Omega\times\mathbf{R}^n)$ и допускает продолжение до C^∞ функции от (x, y, ζ), голоморфной по x, y на открытом множестве

$$\{(x, y, \zeta):(x, y)\in\Omega^{\mathbf{C}}\times\Omega^{\mathbf{C}},\ \zeta\in\mathbf{C}^n,\ |\operatorname{Im}\zeta|<\delta_0|\operatorname{Re}\zeta|\}, \tag{11}$$

где $\delta_0>0$, причем выполнено следующее условие: для каждого компакта $\mathscr{M}\subset\Omega\times\Omega$ и каждого $\varepsilon>0$ существуют такие $r>0$, $\delta\in(0, \delta_0)$ и C, $C'>0$, что для (x, y, ζ) из множества (11), для которых

$$\operatorname{dist}((x, y), \mathscr{M})<r,\quad |\operatorname{Im}\zeta|<\delta|\operatorname{Re}\zeta|,$$

справедливы оценки:

$$|a(x, y, \xi)|\leqslant C(1+|\xi|)^m,\quad \xi\in\mathbf{R}^n,$$

$$|a(x, y, \zeta)|\leqslant C'e^{\varepsilon\delta|\operatorname{Re}\zeta|},$$

$$|\partial_{\bar\zeta}a(x, y, \zeta)|\leqslant Ce^{-|\operatorname{Re}\zeta|/C}.$$

Тогда ядро

$$\mathrm{K}_0(x, y, z)=(2\pi)^{-n}\int e^{iz\xi}a(x, y, \xi)\,d\xi$$

удовлетворяет условию (10) и оператор A, определяемый равенством

$$Au(x)=\iint a(x, y, \xi)\,u(y)\,e^{i(x-y)\xi}\,dy\,d\xi,$$

аналитически псевдолокален.

4.4. Необходимые условия аналитической гипоэллиптичности. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbf{R}^{n+1}$, $x=(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

Определение 4.5. Функция u из $C^\infty(\Omega)$ принадлежит классу $A(\Omega)$, если для каждой подобласти $K\Subset\Omega$ существует такая постоянная $\delta(K)>0$, что функция u допускает аналитическое продолжение $V(u)$ как функция от $x+iy$ в область $Q_\delta=\{x\in K,\ -\delta(K)<y_j<\delta(K),\ j=0, 1, \ldots, n\}$, причем u ограничена в Q_δ.

Определение 4.6. Функция u из $C^\infty(\Omega)$ принадлежит классу $A_j(\Omega)$, если для каждой подобласти $K\Subset\Omega$ существует такая постоянная $\delta_j(K)$, что функция u допускает аналитическое продолжение $V_j(u)$ по переменной x_j как функция $u(x_0, \ldots, x_{j-1}, x_j+iy_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)$ в область

$$Q_{j,\delta}=\{x\in K,\ -\delta_j(K)<y_j<\delta_j(K),\ j=0, 1, \ldots, n\},$$

причем u и $\partial u/\partial x_k$ ограничены в $Q_{j,\delta}$ при всех $k\neq j$.

Если каждое слабое решение u из $\mathscr{D}'(\Omega)^N$ системы уравнений

$$\mathscr{L}u=0 \tag{12}$$

с аналитическими коэффициентами принадлежит классу $A_j(\Omega)$, то для каждого компакта $K \subset \Omega$ найдутся такие постоянные $\delta_j(K)$, $C = C(K)$, что

$$\sup_{Q_{j,\delta}} |V_j(u)| \leqslant C \|u\|_{B^N}, \tag{13}$$

где B^N — такое банахово пространство, которое содержит решения системы (12), что из сходимости в норме $\|\cdot\|_{B^N}$ следует сходимость в $\mathscr{D}'(\Omega)^N$. Это следует из теоремы Бэра—Хаусдорфа. Подбирая решения системы (12), для которых неравенство (13) несправедливо, можно выделить класс систем, не являющихся аналитически гипоэллиптическим.

Теорема 4.5. ([40]). Пусть $u_\rho \in \mathscr{D}'(\Omega)$ — такое решение системы (12), имеющее вид $u_\rho(x) = e^{i\rho x_j} v_\rho(x)$, $\rho > 1$, что $u_\rho \in A_j(\Omega)$, причем $\delta_j(K)$ не зависит от ρ и функции $|V_j(v_\rho)|$, $|\partial V_j(v_\rho)/\partial x_l|$, $l \neq j$, ограничены в $Q_{\delta,j}(K)$ постоянной $C(K)$, не зависящей от ρ. Пусть $B^N(\Omega)$ — банахово пространство, содержащееся в $\mathscr{D}'(\Omega)^N$ и обладающее более сильной топологией, причем

$$\|u_\rho\|_{B^N} \leqslant e^{C_1 \rho^\mu},$$

где $\mu < 1$ и постоянные C_1, μ не зависят от ρ. Пусть существует последовательность точек $x(\rho) \in K$, для которых

$$|V_j(v_\rho(z_{\rho,h}))| > e^{-C_2 \rho^\sigma},$$

где $z_{\rho,h} = (x_0(\rho), \ldots, x_j(\rho) + ih, \ldots, x_n(\rho)) \in Q_{\delta,j}(K)$, $-\delta_1 \leqslant h \leqslant 0$, постоянные $C_2 > 0$ и $\sigma < 1$ не зависят от ρ и h. Тогда система (12) не является аналитически гипоэллиптической по переменной x_j.

Пример 4.3. Оператор

$$P = D_t^2 + t^2 D_y^2 + D_z^2$$

не является аналитически гипоэллиптическим по t и по y, так как уравнение $Pu = 0$ имеет решения

$$u_\rho(x) = e^{i\rho y - \rho t^2/2 + \sqrt{\rho}(z-1)}.$$

В этом случае $\|u\|_{B^1} = \sup\limits_{\Omega} |u|$. Однако все решения уравнения $Pu = 0$ являются аналитическими по z ([40]).

Пример 4.4. Система дифференциальных уравнений $\mathscr{L}u = f$ с постоянными коэффициентами имеет не аналитические по x_j решения для аналитической вектор-функции f, если уравнение $\det \mathscr{L}_0(\xi) = 0$ имеет вещественное решение $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\xi_j \neq 0$. При этом старшая часть символа $\mathscr{L}_0(\xi)$ может определяться «по Дуглису—Ниренбергу»: существуют такие целые числа $(s_1, \ldots, s_N)$ и $(t_1, \ldots, t_N)$, что порядок оператора $\mathscr{L}_{ij}$ не

превосходит s_i+t_j, а $\mathscr{L}_0(\xi)=\|\mathscr{L}_{ij}^0(\xi)\|$ и полином $\mathscr{L}_{ij}^0$ является однородным степени s_i+t_j ([39]).

Пример 4.5. Уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial x_0}+\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}+c(x)u=0$$

с аналитическими коэффициентами имеет решения, не аналитические по x_j, если функция $x_0 \operatorname{Im} a_j(x)$ не меняет знака в окрестности начала координат. Например, это верно для операторов Мизохаты $D_t+it^{2k+1}D_x$ ([39]).

Пример 4.6. Пусть $P_1(D_x)$, $P_2(D_y)$, $P_3(D_z)$ — однородные эллиптические дифференциальные операторы порядка $2m$ с постоянными коэффициентами.

Оператор

$$P_1(D_x)+|x|^{2p}P_2(D_y)+|x|^{2q}P_3(D_z),$$

где $x=(x_1,\ldots,x_k)$, $y=(y_1,\ldots,y_l)$, $z=(z_1,\ldots,z_m)$, p и q — целые неотрицательные числа, является аналитически гипоэллиптическим тогда и только тогда, когда $p=q$. Если $q<p$, то он не является аналитически гипоэллиптическим по y, если $q>p$, то — по z (см. [39]).

4.5. Дифференциальное уравнение второго порядка. Рассмотрим оператор $\mathscr{L}$, определяемый равенством

$$\mathscr{L}u=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}+\sum_{j=1}^{n} b_j(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}+c(x)u,$$

с вещественными аналитическими коэффициентами a_{ij}, b_j, c в области $\Omega\subset\mathbf{R}^n$. Теорема 4.5 в этом случае имеет более простое выражение.

Теорема 4.6 ([40]). Пусть всюду в Ω

$$\sum_{j,k=1}^{n}|a_{kj}(x)|+\sum_{j=1}^{n}|b_j(x)|\neq 0, \qquad \sum_{j,k=1}^{n} a_{kj}(x)\xi_i\xi_j\geqslant 0.$$

Оператор $\mathscr{L}$ является гипоэллиптическим в Ω тогда и только тогда, когда алгебра Ли, порожденная системой векторных полей $(\mathscr{L}_0, \mathscr{L}_1, \ldots, \mathscr{L}_n)$, где

$$\mathscr{L}_0(x)=\left(b_1(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_{1k}(x)}{\partial x_k}, \ldots, b_n(x)-\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial a_{nk}(x)}{\partial x_k}\right),$$

$$\mathscr{L}_j(x)=(a_{j1}(x), \ldots, a_{jn}(x)), \quad j=1,\ldots,n,$$

имеет ранг n в каждой точке области Ω.

Необходимые условия аналитической гипоэллиптичности даются в следующей теореме.

Теорема 4.7 ([42]). Пусть $\sum_{j,k=1}^{n} a_{k_j}(x)\xi_i\xi_j \geqslant 0$ в Ω, причем $\sum |a_{k_j}(0)| \neq 0$ и существует такая аналитическая функция $H(x)$, что $H(0)=0$, $\operatorname{grad} H(0)\neq 0$ и

$$\sum_{1}^{n} a_{k_j}(x)\frac{\partial H(x)}{\partial x_k}\frac{\partial H(x)}{\partial x_j}=0$$

в каждой точке $x\in\Omega$, в которой $H(x)=0$. Тогда оператор является аналитически гипоэллиптическим в начале координат.

Следующая теорема дает достаточные условия аналитической гипоэллиптичности в том случае, когда $n=2$.

Теорема 4.8. Пусть

$$\mathcal{L}u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^{2k}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+b(x, y)u.$$

Пусть в области $Q_\delta(\Omega)=\{(x, y+it),\ (x, y)\in\Omega,\ |t|<\delta\}$ при некотором $\delta>0$ выполнено одно из следующих условий:

1⁰. $|\operatorname{Im} b|^2\leqslant M_1|\operatorname{Im} a|$, $t\operatorname{Im} a(x, y+it)\leqslant 0$;

2⁰. $|\operatorname{Im} b|\leqslant M_2|x|^k$, $t\operatorname{Im} a(x, y+it)\leqslant 0$;

3⁰. $|\operatorname{Im} b|\leqslant M_3|x|^k$, $|\operatorname{Im} a|\leqslant M_4|x|^{2k}$,

где $M_1, \ldots, M_4$ — некоторые постоянные. Тогда любое решение уравнения $\mathcal{L}u=f$ из $\mathcal{D}'(\Omega)$ аналитично в Ω, если f — аналитическая в Ω функция ([42]).

Пример 4.7 (В. В. Грушин). Все решения уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2x^l a_{12}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+x^{2l}a_{22}(x, y)\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+$$

$$+b_1(x, y)\frac{\partial u}{\partial x}+x^l b_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+c(x, y)u+0,$$

где $l\geqslant 0$ — целое число, b_1, b_2, c — аналитические комплекснозначные функции, a_{12}, a_{22} — вещественные аналитические функции, $a_{22}-(a_{12})^2>0$ в Ω, являются аналитическими в Ω.

Пример 4.8. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x^{2k}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+i\lambda x^{k-1}\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

при некотором $\lambda\in\mathbf{R}$ имеет неаналитическое по y решение. Это значение λ определяется условием: уравнение $-g''-x^{2k}g+$ $+\lambda x^{k-1}g=0$ имеет нетривиальное решение g из класса $S(\mathbf{R})$.

Пример 4.9. Пусть I — подмножество множества $\{1, \ldots, n\}$. Рассмотрим оператор

$$A=\Delta_t+\Big(\sum_{i\in I}t_i^2\Big)^l Q(x, D_x),\quad \Delta_t=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial t_i^2},\quad l\geqslant 1,\quad l\in\mathbf{Z},$$

где Q — эллиптический оператор второго порядка $x = (x_1, \ldots, x_m)$. Оператор A является аналитическим гипоэллиптическим тогда и только тогда, когда $I = \{1, \ldots, n\}$.

4.6. Классы Жевре. Для операторов второго порядка, имеющих вид

$$\mathscr{L} = \sum_{j=1}^{r} X_j^2 + X_0 + c, \qquad (8)$$

где X_j при $j=0, 1, \ldots, r$ являются дифференциальными операторами первого порядка с вещественными коэффициентами, исследованы их свойства в классах Жевре.

Пусть

$$G_\gamma = \{u;\ u \in C^\infty(\Omega),\ \sup_K |D^\alpha u(x)| \leqslant M_K^{|\alpha|+1} (\alpha!)^\gamma,\ K \Subset \Omega\}.$$

Пусть $I = (i_1, \ldots, i_k)$, $0 \leqslant i_j \leqslant r$, $i_j \in \mathbf{Z}$. Пусть

$$X_I = [X_{i_1}, [\ldots [X_{i_{k-1}}, X_{i_k}] \ldots]]$$

и

$$\frac{1}{\rho(I)} = \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\rho_{i_j}}, \quad \text{где} \quad \rho_{i_j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i_j = 1, 2, \ldots, r, \\ \frac{1}{2}, & \text{если } i_j = 0. \end{cases}$$

Пусть поля $(X_{I_1}, \ldots, X_{I_n})$ образуют базис векторных полей в K. Положим

$$\rho_K = \inf_{1 < l < n} \rho(I_l).$$

Теорема 4.9 ([75]). Если алгебра Ли, порожденная полями $X_0, X_1, \ldots, X_r$, имеет ранг n, то

$$u \in \mathscr{D}'(\Omega),\ Pu \in G_\gamma(K) \Rightarrow u \in G_\gamma(K),$$

если $\gamma > 2/\rho_K$ и коэффициенты оператора P принадлежат $G_\gamma(K)$.

Если алгебра Ли, порожденная полями $X_1, \ldots, X_r$, имеет ранг n, то это утверждение справедливо при $\gamma > 1/\rho_K$.

Если векторное пространство, порожденное полями X_i, $[X_i, X_j]$, где $i, j = 1, \ldots, r$, имеет размерность n в каждой точке из Ω, то это же утверждение верно при всех $\gamma \geqslant 2$.

Пусть оператор $\mathscr{L}$ имеет вид

$$\mathscr{L} = P\left(t, x, \frac{\partial}{\partial t}\right) + \left(\sum_{l=1}^{n} t_l^{2k_l}\right)^l Q\left(x, \frac{\partial}{\partial x}\right), \quad x \in \mathrm{R}^m, \quad t \in \mathrm{R}^n,$$

где P и Q — эллиптические операторы второго порядка, k_i и l — целые положительные числа. Если коэффициенты операторов P и Q принадлежат $G_\gamma(\Omega)$ и $\mathscr{L}u \in G_\gamma(\Omega)$, $u \in \mathscr{D}'(\Omega)$, то $u \in C_\gamma(\Omega)$ при каждом $\gamma \geqslant 1$ ([75]).

4.7. Обобщенная аналитическая гипоэллиптичность. В некоторых случаях бывает удобно рассматривать обобщенные аналитические функции, т. е. функции $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, которые вместо уравнений Коши—Римана удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a_1(x, y)\frac{\partial v}{\partial y}+b_1(x, y)u+c_1(x, y)v,$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-a_2(x, y)\frac{\partial u}{\partial y}+b_2(x, y)u+c_2(x, y)v,$$

где все коэффициенты ограничены, $a_1(x,y)\geqslant a_0$, $a_2(x,y)\geqslant a_0$, $a_0=\mathrm{const}>0$.

Например, такая ситуация возникает при изучении операторов, получающихся из оператора Лапласа с помощью гладкой, но не аналитической замены независимых переменных.

Теорема 4.10 ([30]). Пусть $\mathscr{L}$ — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка в $\mathbf{R}^n$, пусть

$$Pu=\frac{\partial}{\partial t}\left(a(t)\frac{\partial u}{\partial t}+b(t)u\right)+\mathscr{L}_x u,$$

где $a(t)\geqslant a_0>0$, a и b достаточно гладкие функции. Пусть $Pu(t,x)=0$ в шаре $\{(t,x);\ t^2+|x|^2<R\}$. Тогда функцию u можно продолжить по переменной t в некоторую область комплексной плоскости $t+is$, как обобщенную аналитическую функцию: существуют такие функции $U(t,s,x)$, $V(t,s,x)$ что

$$a(t)\frac{\partial U}{\partial t}+b(t)U=\frac{\partial V}{\partial s},\quad \frac{\partial U}{\partial s}=-\frac{\partial V}{\partial t},$$

$$U(t,0,x)=u(t,x),\quad V(t,0,x)=0.$$

Аналогичная теорема справедлива для решений параболического уравнения

$$u_t=(a(x_0)u_{x_0}+b(x_0)u)_{x_0}+\mathscr{L}_x u.$$

В этом случае функция u продолжается в комплексную плоскость как обобщенная аналитическая функция по переменной x_0.

С помощью такого продолжения можно получить теоремы единственности, теоремы о непрерывной зависимости, теоремы Адамара и т. д. (см. [30]).

Глава 7

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

§ 1. Свойство трансмиссии

1.1. Операторы в полупространстве. Пусть $\Omega=\{x\in\mathbf{R}^n,\ x_n>0\}$, $\overline{\Omega}$ — замыкание Ω, Γ — граница Ω. Обозначим через D прямую $x_1=\ldots=x_{n-1}=0$ и через D_+ — пересечение $D\cap\Omega$. Как

обычно, $H_s(\Omega)$ — это пространство сужений на Ω распределений из $H_s(\mathbf{R}^n)$, $\mathring{H}_s(\Omega)$ — подпространство распределений из $H_s(\Omega)$, носители которых лежат в $\overline{\Omega}$.

Можно показать, что при $s \geqslant 0$

$$H_s(\Omega) = \mathscr{L}^2(\Gamma, H_s(D_+)) \cap \mathscr{L}^2(D_+, H_s(\Gamma)),$$

а при $s \leqslant 0$

$$H_s(\Omega) = \mathscr{L}^2(\Gamma, H_s(D_+)) + \mathscr{L}^2(D_+, H_s(\Gamma)).$$

Пусть $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$ — переменная, двойственная к x', и

$$F_{x'} f(\xi', x_n) = \int f(x) e^{-ix'\xi'} dx'.$$

Предложение 1.1. Пусть $a(\xi', x_n) \in C^\infty(\overline{\Omega})$ и

$$|D_n^j a(\xi', x_n)| \leqslant C_{j,N,K}(1 + |x_n|)^{-N} \tag{1}$$

для любых $j \in \mathbf{Z}_+$, $N \in \mathbf{Z}$, $\xi' \in K$, где K — компакт в $\mathbf{R}^{n-1}$. Пусть

$$a(\lambda\xi', x_n) = \lambda^r a(\xi', \lambda x_n) \tag{2}$$

при $\lambda \geqslant 1$, $|\xi'| \geqslant 1$. Тогда

$$\| a(\xi', x_n) \|_{H_s(D_+)} \leqslant C(1 + |\xi'|)^{s+r-1/2},$$

где постоянная C зависит от a, s и r.

Число r называется степенью a. Рассмотрим оператор $A: S'(\Gamma) \to \mathscr{D}'(\Omega)$, для которого

$$Af(x) = (2\pi)^{-n} \int a(\xi', x_n) \tilde{f}(\xi') e^{ix'\xi'} d\xi'.$$

Ясно, что $Af \in C^\infty$ при $x_n > 0$.

Предложение 1.2. Оператор $A: H_{s-1/2}(\Gamma) \to H_{s-r}(\Omega)$ непрерывен.

Пример 1.1. Оператор Пуассона, дающий решение задачи Дирихле в полупространстве

$$\Delta(A\varphi) = 0 \text{ при } x_n > 0, \quad A\varphi = \varphi \text{ при } x_n = 0,$$

имеет символ

$$a(\xi', x_n) = e^{-x_n|\xi'|}$$

степени 0.

1.2. Свойство трансмиссии ([61]). Пусть $A \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$, $A(t\xi) = t^r A(\xi)$ при $t \geqslant 1$. Пусть

$$a(\xi', x_n) = \int A(\xi) e^{-i\xi_n x_n} d\xi_n.$$

Тогда функция a удовлетворяет (1) и имеет степень $r+1$.

Определение 1.1. Оператор $A(D)$ обладает свойством *трансмиссии*, если функция $a(\xi', x_n)$ бесконечно дифференцируема при $x_n = +0$.

Предложение 1.3. Оператор $A(D): H_s(\Omega) \to H_{s-r}(\Omega)$ непрерывен при $s > -1/2$.

Укажем явные условия на функцию $A(\xi)$, при которых оператор $A(D)$ обладает свойством трансмиссии.

Предложение 1.4. Пусть $n=1$. Для того чтобы оператор $A(D)$ обладал свойством трансмиссии, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось свойство $A(-\xi)=e^{-\pi i r}A(\xi)$ при $|\xi|>|\xi_0|$.

Пример 1.2. Пусть $n=1$. Операторы свертки с $\ln x$ или $|x|^\alpha$ при нецелом α или x^{-k}, где k — целое положительное число, не имеют свойства трансмиссии. Этим свойством обладают дифференциальные операторы, операторы с ядрами $|x|^k$ или x^k, где k — целое положительное число и операторы с ядром $\theta(-x)|x|^\alpha$, где α — нецелое, $\theta(x)=1$ при $x>0$, $\theta(x)=0$ при $x<0$.

В общем случае функцию $A(\xi)$ можно представить в виде

$$A(\xi)=a_0^\pm|\xi_n|^r+a_1^\pm(\xi')|\xi_n|^{r-1}+\ldots+a_p^\pm(\xi')|\xi|^{r-p}+R_p^\pm(\xi',\xi_n),$$

где $R_p^\pm(\xi',\xi_n)$ имеет порядок $|\xi_n|^{r-p-1}$ при $\xi_n\to\pm\infty$, а коэффициенты $a_k^\pm(\xi')$ являются однородными полиномами степени k. Эти коэффициенты возникают при рассмотрении разложения функции $A(\xi)$ по формуле Тейлора в окрестности полупрямых $\xi'=0$, $\xi_n>0$ или $\xi_n<0$.

Предложение 1.5. Оператор $A(D)$ имеет свойство трансмиссии тогда и только тогда, когда

$$a_k^-(\xi')=e^{i(r-k)\pi}a_k^+(\xi'),\quad \xi'\in\mathbf{R}^n.$$

Например, это условие выполнено всегда, когда функция $A(\xi)$ рациональна при $|\xi|\geqslant|\xi_0|$.

Пример 1.3. Оператор, обратный к оператору $\frac{\partial}{\partial\bar z}=\frac{\partial}{\partial x_1}+i\frac{\partial}{\partial x_2}$ в комплексной плоскости $z=x_1+ix_2$, имеет символ $A(\xi)=(2\pi i)^{-1}(\xi_1+i\xi_2)^{-1}$. Соответствующая функция $a(\xi_1,x_2)$ имеет вид

$$a(\xi_1,x_2)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi i}e^{-2\pi\xi_1x_2} & \text{при } \xi_1>0,\\ 0 & \text{при } \xi_1<0,\end{cases}$$

так что $A(D)$ обладает свойством трансмиссии.

В случае операторов с переменными символами $a(x,\xi)$ полезным оказывается следующее

Определение 1.2. Оператором Пуассона на $\bar\Omega=\overline{\mathbf{R}_+^n}$ называется непрерывный линейный оператор $K:C_0^\infty(\Gamma)\to C^\infty(\bar\Omega)$, для которого

1° существует непрерывное расширение $K:\mathscr{E}'(\Gamma)\to C^\infty(\Omega)$;

2° существует такая последовательность $\{s_j\}\in\mathbf{R}$, $s_j\to-\infty$, что для каждых $f\in C_0^\infty(\Gamma)$, $g\in C^\infty(\Gamma)$ таких, что g принимает

вещественные значения и $dg \neq 0$ на $\operatorname{supp} f$,

$$K(f, g, \lambda) = e^{-i\lambda g(x')} K(f e^{i\lambda g})(x', x_n/\lambda) \sim \sum k_j(f, g) \lambda^{s_j},$$

причем для каждых $p \in \mathbf{Z}$ и α функция

$$\lambda^{-s_N} x_n^p D_x^\alpha \left[K(f, g, \lambda) - \sum k_j(f, g) \lambda^{s_j}\right]$$

ограничена при $\lambda \geqslant 1$ равномерно для ограниченных $|x'|$ и x_n/λ, когда g пробегает компакт в $C^\infty(\Gamma)$.

Можно показать, что это определение инвариантно относительно диффеоморфизмов полупространства $\Omega = \mathbf{R}_+{}^n$. Это позволяет ввести аналогичное понятие для произвольного гладкого многообразия с границей.

Пусть V — гладкое многообразие, $\overline{\Omega}$ — гладкое многообразие с границей Γ, имеющее ту же размерность, что V и регулярно погруженное в V.

Определение 1.3. Псевдодифференциальный оператор P, определенный на V, действует на $\overline{\Omega}$, если $P(u^0)|_{\overline{\Omega}} \in C^\infty(\overline{\Omega})$, когда $u \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$, u^0 — продолжение u на $V \setminus \Omega$ нулевыми значениями.

Обозначим P^Ω оператор $u \to P(u^0)|_\Omega$.

Определение. 1.4. *Ядром Пуассона* на $\overline{\Omega}$ называется такой линейный оператор $K: C_0^\infty(\Gamma) \to C^\infty(\Omega)$, что

1°. Существует непрерывное расширение $K: \mathscr{E}'(\Gamma) \to C^\infty(\Omega)$.

2°. Для каждого открытого подмногообразия Ω' ($\overline{\Omega'} \subset \overline{\Omega}$) с открытой границей $\Gamma' \subset \Gamma$, изоморфного $\overline{\mathbf{R}^n_\infty}$, оператор $K_{\Omega'}: C_0^\infty(\Gamma') \to C^\infty(\overline{\Omega'})$, определенный равенством $K_{\Omega'}(u) = K(u)|_{\Omega'}$, является изоморфным образом ядра Пуассона на $\mathbf{R}^n_+$.

Пусть теперь снова $\overline{\Omega} = \mathbf{R}^n_+$, $\Gamma = \mathbf{R}^{n-1}$, $V = \mathbf{R}^n$. Пусть P — псевдодифференциальный оператор на V с символом $p(x, \xi) \sim \sum p_j(x, \xi)$. Пусть $\tilde{p}_j(x, \xi', t)$ — преобразование Фурье функции $p_j(x, \xi)$ по ξ_n. Поскольку функция p_j однородна по ξ степени s_j, имеем

$$\tilde{p}_j\left(x, \lambda\xi', \frac{t}{\lambda}\right) = \lambda^{s_j+1} \tilde{p}_j(x, \xi', t) \text{ при } \xi' \neq 0, \quad \lambda > 0.$$

Теорема 1.1. Следующие утверждения эквивалентны:

I. Оператор P действует на $\overline{\Omega}$.

II. Для каждого целого p оператор $K_p: C_0^\infty(\Gamma) \to \mathscr{D}'(\Omega)$, определяемый равенством $K_p(u) = P(u \otimes \delta^{(p)}(x_n))|_\Omega$, является ядром Пуассона.

III. Для каждого j функция $\tilde{p}_j(x, \xi', t) \in C^\infty$ при $\xi' \neq 0$, $t \geqslant a|x_n|$ ($a = \text{const} > 0$).

IV. Для каждого j функция $p_j(x, \xi', \xi_n) - e^{-i\pi s} j p_j(x, \xi', -\xi_n)$ является плоской вдоль многообразия $x_n = 0$, $\xi' = 0$, $\xi_n > 0$ (т. е. обращается в нуль вместе со всеми своими производными).

Если эти условия выполнены, то говорят, что P обладает свойством трансмиссии вдоль Г. В этом случае оператор $P^{\Omega}: C_0^{\infty}(\bar{\Omega}) \to C^{\infty}(\Omega)$ продолжается до непрерывного оператора $H^s_{\mathrm{comp}}(\bar{\Omega}) \to H^{s-s_0}_{\mathrm{loc}}(\bar{\Omega})$. Например, если P — эллиптический оператор со свойством трансмиссии, то существует параметрикс для P, также обладающий этим свойством. Это позволяет построить теорию краевых задач для эллиптических псевдодифференциальных операторов, обладающих свойством трансмиссии (см. [61], [141]).

1.3. Приложение к изучению лакун. Пусть Ω — область в $\mathbf{R}^n$. *Лакуной распределения* $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ называется открытое подмножество в Ω, на котором $f = 0$.

Определение 1.5. Пусть U — открытое подмножество в Ω и $x_0 \in \partial U$. Распределение f из $\mathcal{D}'(\Omega)$ называется резким в точке x_0 со стороны U, если существует такая функция $g \in C^{\infty}(\Omega)$, что $f - g = 0$ в $U \cap V$ для некоторой окрестности V точки x_0.

Предложение 1.6. Пусть $n = 1$, $a(\xi) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_{s-k}(\xi)$ — классический символ степени $s \in \mathbf{C}$. Распределение $\tilde{a}(-x)$ является резким в точке $x = 0$ справа (слева), если

$$a_{s-k}(\xi) = e^{i\pi s}(-1)^k a_{s-k}(-\xi) \text{ при } \xi > 0 \text{ (при } \xi < 0), \quad k = 0, 1, \ldots$$

При этом условии функция $a_{s-k}(\xi)$ имеет голоморфное продолжение в верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} \xi > 0$, так что $\tilde{a}(-x)$ имеет носитель на отрицательной полуоси. Предложение 1.6 позволяет изучить и случай произвольной размерности n. Пусть

$$P \mapsto \tilde{P} \sim \Sigma(-1)^{m-k} P_{m-k}(x, -D)$$

— инволюция алгебры псевдодифференциальных операторов (для целых m). Лагранжево коническое многообразие $\Lambda \subset T^*\Omega \setminus 0$ называется симметричным, если $\Lambda = -\Lambda$, т. е. $(x, \xi) \in \Lambda \Leftrightarrow (x, -\xi) \in \Lambda$. Пусть Λ симметрично. *Трансмиссией* называется инволюция τ пространства I^t_{Λ} интегралов Фурье степени t, ассоциированных с Λ, при которой $\tau(Pf) = \tilde{P}(\tau f) \pmod{C^{\infty}}$ для каждой $f \in I^t_{\Lambda}$. Локально интегралы из I^t_{Λ} имеют вид

$$f(x) = \int e^{iS(x,\theta)} a(x, \theta)\, d\theta,$$

где S — порождающая функции для Λ и a — символ степени $s = t + n_x/4 - n_{\theta}/2$. Поскольку локально Λ состоит из двух

связных кусков Λ_+ и $\Lambda_-=-\Lambda_+$, каждое распределение f из I_Λ^t записывается в виде

$$f(x)=\int [e^{iS(x,\theta)}a^+(x,\theta)+e^{-iS(x,\theta)}a^-(x,\theta)]\,d\theta.$$

Предложение 1.7. Локально трансмиссия τ имеет вид

$$f\mapsto\tau f=\int\left[e^{iS(x,\theta)}\frac{\tilde a_-(x,\theta)}{\lambda}+e^{-iS(x,\theta)}\lambda\tilde a_+(x,\theta)\right]d\theta,$$

где $\lambda\in\mathbf{C}\setminus 0$.

Число λ определяется единственным способом, но зависит от выбора функции S. При переходе к другому представлению λ заменяется на $i^{-\mu}\lambda$, где μ — сигнатура матрицы вторых производных, определяющая коцикл Маслова. Для существования глобальной трансмиссии необходимо, чтобы $\mu\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,2)$.

Рассмотрим дифференциальный оператор $P(t, x, D_t, D_x)$ степени m, строго гиперболический по t. Пусть E — фундаментальное решение задачи Коши:

$$PE=0,\quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^k E(0,x)=\begin{cases}0 & \text{при } k<m-1,\\ \delta(x-x_0) & \text{при } k=m-1.\end{cases}$$

Распределение E представляется в виде

$$E(x)=\int a(x,\theta)\,e^{iS(x,\theta)}d\theta,$$

где $S(x,-\theta)=-S(x,\theta)$, и если $a\sim\Sigma a_{m-k}(x,\theta)$, то $a_{m-k}(x,-\theta)=(-1)^{m-k}a_{m-k}(x,\theta)$. При этом

$$m=1-\deg P,\quad n_\theta=n_x.$$

Например, если $P=P(D_t, D_x)$, то

$$E(x)=\sum_1^m\int e^{ix\xi+it\psi_j(\xi)}\,a_j(\xi)\,d\xi,$$

где ψ_j — корни характеристического уравнения: $P_m(\psi_j(\xi),\xi)=0$, и a_j — символ степени $1-m$.

Назовем регулярной точку на конусе Λ, в которой проекция $(x,\xi)\to x$ имеет максимальный ранг n_x-1. В окрестности такой точки Λ является гиперповерхностью и E всегда имеет разрыв первого рода при приближении к Λ по нормали. В частности, если n_x нечетно, то предел E будет конечным или бесконечным одновременно с обеих сторон от Λ. Если же n_x четно, то один из пределов будет конечным, а другой бесконечным, так что имеет место диффузия ([88]).

§ 2. Распределения на многообразии с границей

2.1. Пространства распределений ([129]). Пусть M — гладкое замкнутое многообразие с границей ∂M. Рассмотрим про-

странство функций

$$\dot{C}^\infty(M)=\{f\in C^\infty(M);\ D^\alpha f=0 \text{ на } \partial M,\ \forall\alpha\}.$$

Это такое пространство, что функция Pf является непрерывной на $\overline{M}$ для каждого дифференциального оператора P. Пусть Ω — линейный пучок плотностей на M. Пусть

$$\dot{\mathcal{D}}'(M)=(C^\infty(M,\Omega))'.$$

Рассмотрим пространство векторных полей

$$V(M)=\{v\in C^\infty(M,TM),\ v \text{ касательны к } \partial M\}.$$

Определение 2.1. Пространство $\dot{A}(M)\subset\dot{\mathcal{D}}'(M)$ состоит из тех распределений u, для которых

$$v_1^{k_1}\ldots v_N^{k_N}u\in H^s(M)$$

при всех k_j, для каждого конечного набора полей $v_j\in V$, при некотором фиксированном $s\in\mathbb{R}$.

Теорема 2.1. $\dot{A}(M)=\dot{I}(M,N^*(\partial M))$. Здесь $\dot{I}(M,N^*(\partial M))$ — подпространство распределений u на M, являющихся гладкими функциями в $\mathring{M}$ и таких, что если $\dim M=n+1$, (x,y) — локальные координаты на M, $y\in\mathbb{R}^n$, $x\geqslant 0$, то u представляется в виде

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int e^{ix\xi}a(y,\xi)\,d\xi,\quad (x<\varepsilon),$$

где $a\in S^m_{1,0}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$. Это пространство распределений, ассоциированное с лагранжевым многообразием $N^*\partial M$ (см. § 3 главы 3).

Как следствие предложения 5.1 главы 3 мы получаем, что если $u\in\dot{A}(M)$, то $\mathrm{WF}(u^0)\subset N^*(\partial M)$, где u^0 — продолжение u нулевыми значениями вне M, так что

$$u\in\dot{A}(M),\quad \mathrm{WF}(u)=\varnothing\Leftrightarrow u\in\dot{C}^\infty(M).$$

2.2. Сжатый кокасательный пучок ([129]).

Предложение 2.1. Существует такой естественный векторный пучок $\tilde{T}M$ на M и такое отображение пучков $\tilde{\iota}:\tilde{T}M\to TM$, при котором индуцированное отображение $\tilde{\iota}_*:C^\infty(M,\tilde{T}M)\to C^\infty(M,TM)$ является вложением, а его образ совпадает с V.

Этот пучок получается из V с помощью следующего отношения эквивалентности: если $m\in\mathring{M}$, то $v\sim w\Leftrightarrow vf(m)=wf(m)$ для каждой функции f из $C_0^\infty(M)$; если же $m\in\partial M$, то к этому добавляется дополнительное условие: $d(vg)(m)=d(wg)(m)$ для каждой функции g из $C^\infty(M)$, равной 0 на ∂M. Поэтому образ

отображения $\tilde{i}$ совпадает с $T\overset{\circ}{M}\cup T\partial M$. Двойственное отображение

$$\tilde{i}^*: T^*M \to \tilde{T}^*M$$

является гладким отображением векторных пучков и, как и $\tilde{i}$, имеет ранг n на $\overset{\circ}{M}$ и $n-1$ на ∂M.

Предложение 2.2. Образ отображения $\tilde{i}^*$ можно канонически отождествить с $T^*\partial M \cup T^*\overset{\circ}{M}$.

Пусть, как и выше, (x, y) — локальные координаты на M, так что $x>0$ на $\overset{\circ}{M}$ и x имеет нуль в точности первого порядка на ∂M, $y \in \mathbf{R}^n$. Тогда поля из V имеют вид

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x, y) D_{y_j} + \alpha_0(x, y)\, x D_x, \quad \alpha_j \in C^\infty.$$

Каждая точка p из $\tilde{T}^*M$ имеет вид

$$p = \sum_{j=1}^{n} \eta_j(x, y)\, dy_j + \lambda(x, y)\, dx/x; \quad \eta_j, \quad \lambda \in C^\infty.$$

Если (x, y, ξ, η) — обычные координаты в T^*M, то

$$\tilde{i}^*(x, y, \xi, \eta) = (x, y, x\xi, \eta), \text{ т. е. } \lambda = x\xi.$$

Отображение $\tilde{i}^*$ индуцирует вложение

$$C^\infty(\tilde{T}^*M) \to C^\infty(T^*M).$$

При этом функция φ из $C^\infty(T^*M)$ принадлежит $C^\infty(\tilde{T}^*M)$ тогда и только тогда, когда $\partial_x^k \varphi|_{x=0}$ является полиномом от ξ степени $\leqslant k$.

Предложение 2.3. Вложение $\dot{C}^\infty(M) \subset \dot{A}(M)$ является непрерывным и его образ плотным в $\dot{A}(M)$. То же верно и для вложения $C^\infty(M) \subset \dot{A}(M)$.

Обозначим $\dot{B}(M)$ пространство тех распределений $u \in \dot{\mathscr{D}}'(M)$, для которых $u|_{\overset{\circ}{M}} \in \dot{A}'(M)$.

Поскольку $\dot{A}(M)$ состоит из распределений, гладких во всех направлениях, кроме нормального к ∂M, естественно ожидать, что распределения из $\dot{A}'(M)$ должны быть гладкими в нормальном направлении.

Предложение 2.4. Если $u \in \dot{B}(M)$ или $\dot{A}'(M)$, то для каждого дифференциального оператора P корректно определено сужение $Pu|_{\partial M} \in \mathscr{D}'(\partial M)$. При этом

$$\dot{B}(M) = \dot{A}(M) \oplus \mathscr{D}'(M, \partial M),$$

где

$$\mathscr{D}'(M, \partial M) = \{u \in \dot{\mathscr{D}}'(M);\ \operatorname{supp} u \subset \partial M\}.$$

Наиболее существенным для приложений является следующее следствие.

Предложение 2.5. Пусть P — дифференциальный оператор на M и отображение

$$P: \dot{A}(M) \to \dot{A}(M)$$

сюрьективно по $\operatorname{mod} \dot{C}^\infty(M)$. Тогда

$$u \in \dot{\mathscr{D}}'(M),\ Pu \in \dot{B}(M) \Rightarrow u \in \dot{B}(M),$$

так что для u корректно определены граничные значения любого порядка.

Например, этим условиям удовлетворяют нехарактеристические операторы.

§ 3. Полностью характеристические операторы

3.1. Псевдодифференциальные операторы и их ядра. Пространство векторных полей $V(M)$ можно рассматривать как пространство дифференциальных операторов первого порядка. Определим $\mathrm{Diff}_b(M)$ как пространство дифференциальных операторов, порожденное элементами из $C^\infty(M)$ и $V(M)$. В локальных координатах вблизи границы эти операторы имеют вид

$$P = \sum_{|\alpha|+k \leqslant m} a_{\alpha,k}(x, y) D_y^\alpha (xD_x)^k,\quad a_{\alpha,k} \in C^\infty.$$

При микролокализации естественно рассматривать псевдодифференциальные операторы с символами вида $\tilde{a}(x, y, \xi, \eta) = a(x, y, x\xi, \eta)$, где $a(x, y, \lambda, \eta) \in S^m_{1,0}(Z \times \mathbf{R}^{n+1}_{(\lambda,\eta)})$, $Z = \overline{\mathbf{R}^+} \times \mathbf{R}^n$. Эти символы удовлетворяют оценкам

$$|D_y^\alpha D_\eta^\beta D_x^k D_\xi^l \tilde{a}(x, y, \xi, \eta)| \leqslant C|x|^l (1 + |\xi|)^k (1 + |\eta| + |x\xi|)^{m-k-l-|\beta|}.$$

Такие оценки совпадают со стандартными при $x > 0$. Ядром псевдодифференциального оператора такого вида является функция

$$k(z, z') = (2\pi)^{-n-1} \int e^{i(x-x')\xi + i(y-y')\cdot\eta} a(x, y, x\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

Здесь $z = (x, y)$, $z' = (x', y')$. Заменяя x и ξ на $s = x'/x$ и $\lambda = x\xi$, получаем, что

$$k\left(\frac{x'}{s}, y, x', y'\right) = \frac{1}{x} k_0(s, x, y, y'),$$

где

$$k_0(s, x, y, y') = \frac{1}{2\pi} \int e^{i(1-s)\lambda + i(y-y')\eta} a(x, y, \lambda, \eta)\, d\lambda\, d\eta.$$

Предложение 3.1. $k\in\mathcal{D}'(\mathbf{R}^+_x\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{n+1}_{z'})$, причем k_0 имеет особенность только при $s=1$, $y=y'$ и быстро убывает при $s\to\infty$.

3.2. Свойство трансмиссии. Заметим, что x входит в определение k_0 только как параметр. Из определения ядра k видно, что это ядро бесконечно гладкое при

$$(x', y', y)\in K\Subset\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n,\ 0<x<x'/2,$$

и обращается в нуль со всеми производными при $x=0$.

Для того, чтобы знать поведение ядра k при $x'\to 0$ для $x>0$, надо изучить поведение k_0 при $s\to+0$.

Если предположить, что выполнены следующие условия трансмиссии:

$$\int e^{i\lambda}\lambda^k a(x, y, \lambda, \eta)\,d\lambda\equiv 0,\quad \forall k\in\mathbf{N}, \tag{3}$$

то можно утверждать, что $k\in C^\infty$ при

$$(x, y, y')\in K\Subset\mathbf{R}^+\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^n,\ 0\leqslant x'\leqslant x/2$$

и обращается в нуль со всеми производными при $x'=0$.

На первый взгляд условия (3) кажутся очень ограничительными. Однако верно

Предложение 3.2. Для каждого $a'\in S^\infty_{1,0}(Z\times\mathbf{R}^{n+1})$ существует такое $b\in S^{-\infty}_{1,0}(Z\times\mathbf{R}^{n+1})$, что символ $a=a'-b$ удовлетворяет (3).

Предложение 3.3. Если выполнены условия (3), то оператор $A:\mathcal{E}'(Z)\to\dot{\mathcal{D}}'(Z)$ непрерывен и

$$A(C_0^\infty(Z))\subset C^\infty(Z),\quad A^*(\dot{\mathcal{E}}'(Z))\subset\dot{\mathcal{D}}'(Z).$$

Если оператор A обладает такими свойствами, то его символ определяется единственным образом и удовлетворяет (3).

3.3. Полностью характеристические операторы.

Определение 3.1. Оператор A называется *полностью характеристическим*, если его ядро $k_A\in\dot{C}^\infty(Z\times Z)$.

Множество таких операторов порядка m обозначается $\mathcal{L}^m_b(Z)$. Эти операторы являются сглаживающими, $A:\dot{\mathcal{E}}'(Z)\to\dot{C}^\infty(Z)$. Особенности ядер у таких операторов могут лежать и вне диагонали, так что эти операторы не являются, строго говоря, псевдодифференциальными. Однако, если $A\in\mathcal{L}^m_b(Z)$, то

$$\mathrm{WF}(k_A)\subset N^*\Delta\cup N^*(\partial Z\times\partial Z),$$

где Δ — диагональ в $Z\times Z$ и $\partial Z\times\partial Z=\{z,\ x=0,\ x'=0\}$. Таким образом, особенности ядра k_A довольно безобидны.

Приведенные определения инвариантны относительно гладкой замены переменной, сохраняющей границу ∂Z. Поэтому можно определить пространство $\mathcal{L}^m_b(M)$ для каждого гладкого много-

образия M с границей. Можно показать, что каждый оператор $A \in \mathscr{L}_b^\infty(M)$ отображает каждое из пространств $\mathscr{D}'(M)$, $C^\infty(M)$, $\dot{C}^\infty(M)$, $\dot{\mathscr{D}}'(M, \partial M)$, $\dot{D}'(M)$, $\mathscr{L}_2(M)$ в себя.

Эти операторы образуют кольцо, замкнутое относительно перехода к сопряженному оператору. При этом

$$\sigma_m(A^*) = \overline{\sigma_m(A)}, \quad \sigma_{m+m'}(A \cdot B) = \sigma_m(A) \cdot \sigma_{m'}(B).$$

Для каждого оператора A из $L_b^m(M)$ можно определить такой оператор $A_\partial \in L^m(\partial M)$, что для всех u из $\mathring{A}'(M)$ или из $B'(M)$ верно, что

$$Au|_{\partial M} = A_\partial(u|_{\partial M}) \text{ и } \sigma_m(A_\partial) = \sigma_m(A)|_{T^*\partial M}.$$

Пространство $\mathscr{L}_b^{-\infty}(M) = \cap \mathscr{L}_b^m(M)$ состоит из тех $A \in \mathscr{L}_b^\infty(M)$, которых переводят $\dot{\mathscr{D}}'(M)$ в $\mathring{A}(M)$.

3. 4. Граничный волновой фронт. Пусть $u \in \dot{\mathscr{D}}'(M)$. Пусть $\operatorname{sing\,supp}_b(u) = M \setminus \{m \in M;\ m \in B$, где B — открытое подмножество в M и $\exists v \in \mathring{A}(M)$, $v = u$ в $B\}$.

Определим характеристическое множество $\Sigma_b(A) = \{p \in \widetilde{T}^* M \setminus 0;\ \sigma_m(A)$ не является эллиптическим ни в каком конусе, содержащем $p\}$.

Определение 3.2. Для $u \in \dot{\mathscr{D}}'(M)$ *граничным волновым фронтом* называется множество

$$\mathrm{WF}_b(u) = \bigcap_A \{\Sigma_b(A);\ Au \in \mathring{A}^*(M)\}.$$

Закон композиции символов в локальных координатах является обычным: Если A и B — псевдодифференциальные операторы с символами a и b и, по крайней мере, один из них является собственным, то оператора $C = A \circ B$ по $\operatorname{mod} \mathscr{L}_b^{-\infty}(Z)$ имеет символ

$$c \sim \sum_\alpha \sum_{p \leqslant k} \frac{1}{\alpha!\, p!\, (k-p)!} \partial_\eta^\alpha \partial_\lambda^k a(x, y, \lambda, \eta)\, \lambda^p x^{k-p} D_y^\alpha D^{k-p} D_\lambda^p b(x, y, \lambda, \eta).$$

Эта формула позволяет построить параметрикс в эллиптических точках. В частности, отсюда следует, что

$$u \in \dot{D}'(M), \quad \mathrm{WF}_b(u) = \varnothing \Leftrightarrow u \in \mathring{A}(M);$$

$$u \in A'(M) \Rightarrow \mathrm{WF}(Au|_{\partial M}) \subset \mathrm{WF}_b(u) \cap T^*\partial M.$$

Пример 3.1. Пусть $n = 1$, $z = \mathrm{R}_x^+ \times \mathrm{R}_y$, $P = xD_x + iD_y$. Оператор P имеет эллиптический символ $\sigma_1(P) = \lambda + i\eta$ и потому

$$u \in \dot{D}'(Z), \quad Pu \in \mathring{A}(Z) \Rightarrow u \in \mathring{A}(Z).$$

Замена $x = e^{-s}$ переводит P в оператор $-D_s + iD_y$. Пусть функция $f(s + iy)$ голоморфна в полуполосе $s \geqslant 1/\varepsilon$, $|y| < \varepsilon$ и $|f(s + iy)| \leqslant Ce^{c_1 s}$. Тогда функция $u(x, y) = f(s + iy)$ удовлет-

воряет уравнению $Pu=0$ при $0<x<\delta$, $|y|<\varepsilon$ и имеет при $x=0$ конечный порядок, т. е. продолжается до элемента u' из $\mathscr{D}'((0, \delta)\times(-\varepsilon, \varepsilon))$, причем можно считать, что $Pu'=0$. Поэтому

$$f(s+iy)=\frac{1}{2\pi}\int e^{i\xi e^{-s}}a(y, \xi)\,d\xi,$$

где $a\in S^m_{1,0}(\mathbf{R}\times\mathbf{R})$ при некотором m.

§ 4. Граничные канонические преобразования

4.1. Производящая функция. Рассмотрим канонические преобразования сжатого кокасательного пучка $\tilde{T}^*M$. Ясно, что во внутренних точках это обычное каноническое преобразование. В локальных канонических координатах симплектическая форма имеет вид

$$\alpha=\xi dx+\sum_{j=1}^{n}\eta_j dy_j.$$

Поскольку $\tilde{i}^*(x, y, \xi, \eta)=(x, y, \lambda, \eta)$, где $\lambda=x\xi$, то каноническая форма на $\tilde{T}^*M$ имеет вид

$$\tilde{\alpha}=\lambda d\log x+\sum_{j=1}^{n}\eta_j dy_j.$$

Определение 4.1. *Граничным каноническим преобразованием* из M в M' называется бесконечно гладкое отображение $\chi:\Gamma\to\tilde{T}^*M'\setminus 0$, где Γ — открытый конус в $\tilde{T}^*M\setminus 0$ и $\tilde{\chi}^*\tilde{\alpha}'=\tilde{\alpha}$.

Предложение 4.1. Если $\tilde{\chi}$ — граничное каноническое преобразование M в M' и (x, y, λ, η), $(x', y', \lambda', \eta')$ — канонические координаты в $\tilde{T}^*M$ и $\tilde{T}^*M'$, то

$$\tilde{\chi}^*(x')=\mu_0(x, y, \lambda, \eta)\,x,$$
$$\tilde{\chi}^*(\lambda')=\lambda+\mu_1(x, y, \lambda, \eta)\,x,$$

где $\mu_0>0$. В частности, проекция $\tilde{\chi}$ на T^*M определяет гладкое каноническое преобразование $\tilde{i}^{*-1}(\Gamma)\to T^*M'\setminus 0$.

Отсюда видно, что поверхность $x=\lambda=0$ инвариантна относительно преобразования $\tilde{\chi}$, так что определено отображение

$$\partial\tilde{\chi}:T^*\partial M\cap\Gamma\to T^*\partial M'.$$

4.2. Оператор главного типа. В качестве примера применения граничных канонических преобразований рассмотрим задачу, связанную с оператором вещественного главного типа.

Пусть $p\in C^\infty(\tilde{T}^*M\setminus 0)$ принимает вещественные значения и является однородной функцией по λ, η первой степени. Пусть

$p(\bar\rho)=0$, $\bar\rho\in\partial\tilde T^*M\setminus 0$. Предположим, что dp и $d\lambda$ линейно независимы на $\partial\tilde T^*M$ в точке $\bar\rho$. Если же $\bar\rho\in T^*\partial M$, то добавим еще условие: dp, $\alpha_{\partial M}$ линейно независимы в точке $\bar\rho$.

Предложение 4.2. При сделанных предположениях существует такое граничное каноническое преобразование $\tilde\chi:\tilde T^*M\supset \supset\Gamma\to\tilde T^*Z$, определенное в некоторой канонической окрестности точки $\bar\rho$, что

$$\bar\chi(\bar\rho)=(0,0,\bar\lambda,\bar\eta),\quad \bar\eta=(\bar\eta_1,0,\ldots,0)\quad\text{и}\quad p=\tilde\chi^*(\eta_1).$$

4.3. Дифференциальный оператор второго порядка. Пусть P — линейный дифференциальный оператор второго порядка вещественного главного типа, причем граница ∂M нигде не имеет характеристических направлений для P. Это означает, что во внутренних точках формы dp и ξdx линейно независимы, а для граничных точек независимы их сужения на $\partial T^*M\setminus 0$ в тех точках, где $p=0$. Если в локальных координатах ∂M определяется уравнением $x=0$, то

$$p=g(x,y)\ \ [\xi^2+\xi a(x,y,\eta)+b(x,y,\eta)],$$

где $g\neq 0$ при $x=0$.

Предложение 4.3 ([129]). Если граница ∂M не имеет характеристических точек для оператора P вещественного главного типа, то существуют такие локальные координаты (x,y), что

$$p=\pm(\xi^2+r(x,y,\eta)).$$

В окрестности каждой такой точки $(0,y,\xi,\eta)$, в которой $r>0$ ($r<0$), с помощью граничного канонического преобразования p можно привести к виду $\xi^2+\eta_n^2$ (соответственно, $\xi^2-\eta_n^2$).

Если же в некоторой точке $(0,y,\xi,\eta)$ значение $r=0$, то предположим, что

$$q=\{p,\{p,x\}\}\neq 0.$$

Если $q>0$, то соответствующая точка называется точкой *дифракции* и однородным каноническим преобразованием p приводится к виду

$$\xi^2-x\eta_n^2+\eta_1\eta_n.$$

В том случае, когда $q<0$, точка называется точкой *скольжения* и канонической формой для p является функция

$$\xi^2+x\eta_n^2+\eta_1\eta_n.$$

Если же $q=0$, то даже при условии, что $\{p,\{p,\{p,x\}\}\}\neq 0$, существует несчетное множество неэквивалентных символов.

§ 5. Интегральные операторы Фурье

5.1. Производящая функция граничного канонического преобразования. Пусть M и N — гладкие многообразия с границей и $\tilde{\chi}:\tilde{T}^*M\supset\Gamma\to\tilde{T}^*N$ — граничное каноническое преобразование. Вводя локальные координаты (x, y), можно считать, что

$$M=N=Z=\mathbf{R}_+\times\mathbf{R}^n$$

$$\Gamma_1\subset\overline{\mathbf{R}}_x^+\times\mathbf{R}_y^n\times\mathbf{R}_{y'}^n\times\left(\mathbf{R}_{(\mu,\theta)}^{N+1}\setminus 0\right)$$

— открытый конус, $(\mu, \theta)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}^N$. Функция $\varphi\in C^\infty(Z\times\mathbf{R}^n\times\times\mathbf{R}^{N+1}\setminus 0)$ называется фазовой функцией в Γ_1, если она вещественнозначна, однородна первой степени по (μ, θ) и

$$(\varphi_y,\ \mu\varphi_\mu,\ \varphi_\theta)\neq 0.$$

Из-за специального вида граничных канонических преобразований приходится накладывать довольно жесткие условия невырожденности:

Если $\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0$, то $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\neq 0$ и

$$\det\begin{bmatrix}\varphi_{yy'} & \varphi_{y\theta} & \varphi_{y\mu}\\ \varphi_{\theta y'} & \varphi_{\theta\theta} & \varphi_{\theta\mu}\\ \mu\varphi_{\mu y'} & \mu\varphi_{\mu\theta} & (\mu\varphi_\mu)_\mu\end{bmatrix}\neq 0.$$

Если φ — такая фазовая функция, то множество

$$C_\varphi=\left\{(x,\ y,\ y',\ \mu,\ \theta)\in\Gamma_1,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=0\right\}$$

является при этом условии коническим подмногообразием в Γ_1 коразмерности N.

Отображение

$$P_\varphi: C_\varphi\ni(x,\ y,\ y',\ \mu,\ \theta)\mapsto$$

$$\mapsto\left(x,\ y,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x}+\mu\frac{\partial\varphi}{\partial\mu},\ \frac{\partial\varphi}{\partial y};\ x\frac{\partial\varphi}{\partial\mu},\ y',\ \mu\frac{\partial\varphi}{\partial\mu},\ -\frac{\partial\varphi}{\partial y'}\right)\in\tilde{C}_\varphi$$

является локальным диффеоморфизмом на коническое подмногообразие в $\tilde{T}^*Z\times\tilde{T}^*Z$.

Предложение 5.1. Если φ — невырожденная фазовая функция, то вблизи границы $x=0$ многообразие $C_{\tilde{\varphi}}$ является графиком граничного канонического преобразования. Обратно, график граничного канонического преобразования локально допускает такую параметризацию.

5.2. Интегральный оператор Фурье. Пусть φ — невырожденная фазовая функция, $a\in S_{1,0}^m$. Рассмотрим интеграл

$$k(z,\ z')=\int e^{i\varphi(z,y',x\xi,\theta)-ix'\xi}a(z,\ y',\ x\xi,\ \theta)\,d\theta d\xi,$$

определяющий ядро Шварца интегрального оператора Фурье, ассоциированного с $\tilde{\chi}$. Предположим, что носитель a лежит внутри конуса Γ_1, в котором φ невырожденна. Множество таких a обозначим $\dot{S}^m(\Gamma_1)$. Интеграл k имеет смысл при $x>0$. Для того, чтобы придать ему смысл при $x=0$, потребуем, чтобы формальные ряды обращались в нуль. Если положить

$$\mathscr{L}_k(\varphi)\,a=\int_0^\infty e^{i\varphi(0,y',\mu,\theta)}a(0,y,y',\mu,\theta)\,\mu^k d\mu,$$

то можно сформулировать

Предложение 5.2. Отображение $\mathscr{L}: S^{-\infty}(Z\times\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}^{N+1})\to$ $\to\prod\limits_{k=0}^{\infty}S^{-\infty}$ сюръективно.

Пусть $\dot{S}^m(\Gamma_1,\varphi)$ — подпространство символов a из $\dot{S}^m(\Gamma)$, удовлетворяющих условиям трансмиссии. Тогда

$$\dot{S}^m(\Gamma_1,\varphi)/\dot{S}^{-\infty}(\Gamma_1,\varphi)\cong\dot{S}^m(\Gamma_1)/\dot{S}^{-\infty}(\Gamma_1).$$

Предложение 5.3. Если $a\in\dot{S}^m(\Gamma_1,\varphi)$, то $k(z,z')$ является ядром Шварца оператора $F:\dot{\mathscr{E}}'(z)\to\dot{\mathscr{D}}'(z)$, причем

$$F\left(\dot{C}_0^\infty(z)\right)\subset\dot{C}^\infty(z),\quad F\left(C_0^\infty(z)\right)\subset C^\infty(z)$$

и

$$Fu|_{x=0}=F_0(u|_{x=0})\ \text{для}\ u\in C_0^\infty(z),$$

где F_0 — интегральный оператор Фурье в $\mathbf{R}^n$, ассоциированный с $\partial\tilde{\chi}$.

Пусть $A\in\mathscr{L}_b^m(M)$ — оператор вещественного главного типа. Ему соответствует гамильтоново векторное поле в $\tilde{T}^*M\setminus 0$

$$H_a=x\frac{\partial a}{\partial\lambda}\partial_x-x\frac{\partial a}{\partial x}\partial_\lambda+\sum_{j=1}^n\left(\frac{\partial a}{\partial\eta_j}\partial_{y_j}-\frac{\partial a}{\partial y_j}\partial\eta_j\right).$$

Это поле является касательным к многообразию

$$\Sigma_b(A)=\{\rho\in\tilde{T}^*M\setminus 0,\ a(\rho)=0\}$$

и даже касательным к его инвариантно определенным составляющим $\Sigma_b(A)\cap\partial\tilde{T}^*M$ и $\Sigma_b(A)\cap T^*\partial M$, поскольку на первом из них $x=0$, а на втором $x=\lambda=0$.

Теорема 5.1. Если $A\in\mathscr{L}_b^m(M)$ — оператор вещественного главного типа, то для $u\in\dot{\mathscr{D}}'(M)$ множество

$$\mathrm{WF}_b(u)\cap\mathrm{WF}_b(Au)\subset\Sigma_b(A)$$

является объединением бихарактеристик поля H_a в $\Sigma_b(A)$.

Глава 8

ГИПЕРФУНКЦИИ

§ 1. Аналитические функционалы

1.1. Определение и основные свойства. По аналогии с пространствами распределений можно ввести аналитические функционалы ([124], [145], [148]).

Определение 1.1. Пусть $K\Subset\mathbf{C}^n$, A — пространство целых аналитических функций в $\mathbf{C}^n$. Пространством *аналитических функционалов* $A'(K)$ называется пространство таких линейных форм на A, для которых выполнено неравенство

$$|u(\varphi)|\leqslant C_\omega \sup_\omega |\varphi|, \quad \varphi\in A,$$

какова бы ни была окрестность ω компакта K. Пусть $A'(\mathbf{R}^n)=\bigcup_{K\Subset\mathbf{R}^n} A'(K)$.

Пример 1.1. Функционал $u(\varphi)=\Sigma a_\alpha D^\alpha\varphi(0)/\alpha!$ принадлежит $A'(0)$ тогда и только тогда, когда $|a_\alpha|\leqslant C_\varepsilon\varepsilon^{|\alpha|}$ для каждого $\varepsilon>0$. Этот функционал является распределением только в том случае, когда сумма конечна.

Носителем функционала $u(\varphi)=\int\limits_0^1 \varphi(z)\,dz$, $\varphi\in A(\mathbf{C})$ является каждая гладкая кривая, соединяющая точки 0 и 1 в $\mathbf{C}$. Поэтому в отличие от распределений, если $u\in A'(K_1)\cap A'(K_2)$, то не обязательно $u\in A'(K_1\cap K_2)$. Однако это верно, если K_1 и $K_2\subset\mathbf{R}^n$.

Теорема 1.1. Если $u\in A'(\mathbf{R}^n)$, то существует такое наименьшее компактное множество $K\subset\mathbf{R}^n$, что $u\in A'(K)$; оно называется носителем u.

Полнота пространства $A'(K)$ видна из следующей теоремы.

Теорема 1.2. Пусть K_0 и K — компактные множества в $\mathbf{R}^n$, $K_0\subset K$, пусть $u_j\in A'(\mathbf{C}^n)$ и выполнены следующие условия:

1°. Для каждой компактной окрестности V множества K в $\mathbf{C}^n$ элементы $u_j\in A'(V)$ при больших j.

2°. Для каждой компактной окрестности V_0 множества K_0 в $\mathbf{C}^n$ разность $u_j-u_k\in A'(V_0)$ при больших j и k. Тогда существует такой элемент $u\in A'(K)$, что в каждой компактной окрестности V_0 множества K_0

$$u-u_j\in A'(V_0) \text{ при больших } j.$$

Последнее условие определяет u однозначно по $\operatorname{mod} A'(K_0)$.

Следующее утверждение заменяет существование разбиения единицы.

Теорема 1.3. Если $K_1,\ldots,K_r$ — компактные подмножества

в $\mathbf{R}^n$ и $u \in A'(K_1 \cup \ldots \cup K_r)$, то можно найти такие $u_j \in A'(K_j)$, что $u = u^1 + \ldots + u_r$.

1.2. Операции над аналитическими функционалами. Операции, допустимые в $\mathcal{D}'$, переносятся на пространство $A'(\mathbf{R}^n)$.

1^0. Если $u \in A'(\mathbf{R}^n)$, то $\partial_j u \in A'(\mathbf{R}^n)$ и этот функционал определяется равенством $\partial_j u(\varphi) = -u(\partial_j \varphi)$.

2^0. Если $u \in A'(K)$, $K \subset \mathbf{R}^n$ и функция f аналитическая в окрестности ω множества K, то определено произведение fu, так что $fu(\varphi) = u(f\varphi)$, если φ — аналитическая в ω функция.

3^0. Если $u \in A'(\mathbf{R}^n)$, $v \in A'(\mathbf{R}^m)$, то $u \otimes v \in A'(\mathbf{R}^{n+m})$, причем $(u \otimes v)(\varphi) = u_x(v_y(\varphi(x, y))) = v_y(u_x(\varphi(x, y)))$, если $\varphi(x, y) \in A(\mathbf{C}^{n+m})$.

4^0. Каждый функционал $K \subset A'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^m)$ определяет оператор $\mathcal{K}$, определенный на функциях v, аналитических в окрестности проекции носителя K на $\mathbf{R}^m$, причем $\mathcal{K}v \in A'(\mathbf{R}^n)$ и $(\mathcal{K}v)(\varphi) = K(\varphi \otimes v)$ для $\varphi \in A(\mathbf{C}^n)$.

5^0. Если $u \in A'(K)$, где K — компактное подмножество в $\mathbf{R}^n$ и f — вещественно аналитическое биективное отображение открытого множества $\omega \subset \mathbf{R}^n$ на окрестность множества K, причем $f^{-1} = h$, то определен обратный образ $f^* u \in A'(f^{-1}K)$ так, что

$$(f^* u)(\varphi) = u((\varphi \circ h)\,|\det h'|),$$

если функция φ аналитична в ω.

6^0. Для u, $v \in A'(\mathbf{R}^n)$ определена свертка $u * v$, как значение обратного образа $u \otimes v$ при отображении $(x, y) \to (y, x - y)$ на функции $\varphi \equiv 1$.

7^0. Если K — компакт в $\mathbf{R}^n$, $u \in A'(K)$, то преобразование Фурье

$$\tilde{u}(\zeta) = u(e^{-i(\cdot, \zeta)})$$

является такой целой аналитической функцией, что для каждого $\varepsilon > 0$

$$|\tilde{u}(\zeta)| \leqslant C_\varepsilon e^{H_k(\operatorname{Im}\zeta) + \varepsilon|\zeta|}, \quad \zeta \in \mathbf{C}^n.$$

Обратно, каждая целая функция, удовлетворяющая этому неравенству, определяет единственный элемент из $A'(K)$.

§ 2. Пространство гиперфункций

2.1. Определение и основные свойства. Гиперфункции в $\mathbf{R}^n$ определяются как локальный эквивалент аналитическим функционалам, имеющим компактные носители в $\mathbf{R}^n$.

Определение 2.1. Если X — открытое ограниченное множество в $\mathbf{R}^n$, то пространство $B(X) = A'(\overline{X})/A'(\partial X)$ называется пространством *гиперфункций* в X.

Как и для распределений, носителем гиперфункции u является наименьшее замкнутое множество, вне которого $u = 0$.

Теорема 2.1. Пусть X_j — открытые ограниченные множества в $\mathbf{R}^n$ и $X = \bigcup X_j$. Если $u_j \in B(U_j)$ и $u_i = u_j$ в $X_i \cap X_j$ для всех i

и j, то существует единственный элемент $u \in B(X)$, для которого $u=u_j$ в X_j для каждого j.

Ясно, что вложение $\mathscr{D}'(X) \to B(X)$ инъективно. Элементы из $B(X)$ с компактными носителями можно отождествить с элементами из $A'(\mathbf{R}^n)$, имеющими носители в X. Операции над аналитическими функционалами, описанные в п. 1.2, переносятся на $B(X)$. Кроме того, можно определить пространство $B(X)$ для каждого вещественно аналитического многообразия X.

Теорема 2.2. Если X — вещественное аналитическое многообразие и Y — открытое подмножество в X, то каждая гиперфункция $u \in B(Y)$ является сужением на Y гиперфункции v из $B(X)$, имеющей носитель в $\overline{Y}$.

2.2. Аналитический волновой фронт гиперфункции. Пусть $I(\xi)=\int\limits_{|\omega|=1} e^{-(\omega,\xi)}d\omega$. Если $n=1$, то $I(\xi)=2\operatorname{ch}\xi$, при $n>1$ эта функция выражается в явном виде через функцию Бесселя, причем

$$I(\xi)=I_0(|\xi|), \quad I_0(\rho)=(2\pi)^{(n-1)/2}e^{\rho}\rho^{(1-n)/2}[1+O(1/\rho)].$$

Положим

$$K(z)=(2\pi)^{-n}\int e^{i(z,\xi)}d\xi/I(\xi).$$

Функция $K(z)$ определена и является аналитической функцией для $z \in \mathbf{C}^n$, $|\operatorname{Im} z|<1$.

Определение 2.2. Если $u \in A'(\mathbf{R}^n)$, то $\mathrm{WF}_A(u)$ — это множество тех точек $(x,\xi) \in \mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n \setminus 0)$, для которых функция $K*u=u_t(K(z-t))$ не аналитична в точке $x-i\xi/|\xi|$.

Проекция $\mathrm{WF}_A(u)$ на $\mathbf{R}^n$ совпадает с $\operatorname{sing\,supp}_A u$. Поскольку $\mathrm{WF}_A(u)$ *определяется в точке x локальными свойствами* u, определение 2.2 переносится на $B(X)$ для любой подобласти $X \subset \mathbf{R}^n$. Можно показать (см. [155]), что $\mathrm{WF}_A(u)= =\mathrm{WF}_a(u)$ (см. определение 4.3 главы 6) для $u \in \mathscr{D}'(X)$.

2.3. Граничные значения гиперфункции. Пусть X — открытое множество в $\mathbf{R}^n$, Γ — связный открытый конус в $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, и Z — такое открытое множество в $\mathbf{C}^n$, что для каждого открытого подмножества $X_1 \Subset X$ и каждого замкнутого выпуклого конуса $\Gamma_1 \subset \Gamma \cup \{0\}$ при некотором $\gamma>0$

$$Z \supset \{z \in \mathbf{C}^n,\ \operatorname{Re} z \in X_1,\ \operatorname{Im} z \in \Gamma_1,\ 0<|\operatorname{Im} z|<\gamma\}.$$

Теорема 2.3. Пусть f — аналитическая в Z функция. Тогда для каждого открытого подмножества $X_1 \Subset X$:

(1) Существует такой элемент $f_{X_1} \in A'(\overline{X}_1)$, не зависящий от Γ_1, что аналитический функционал

$$f_{X_1}(\varphi)-\int\limits_{X_1} f(x+iy)\,\varphi(x+iy)\,dx, \quad \varphi \in A,$$

имеет носитель в любой малой окрестности множества ∂X, если $y \in \Gamma_1$ и $|y|$ достаточно малы. Этот элемент определен с точностью до элементов из $A'(\partial X_1)$ и потому однозначно определяет гиперфункцию из $B(X_1)$.

(2) Если $X_2 \subset X_1$, X_2 — открытое множество в $\mathbf{R}^n$, то $f_{X_1} - f_{X_2} \in A'(\overline{X}_1 \setminus X_2)$, так что существует единственный такой элемент $f_X \in B(X)$, что сужения f_X и f_{X_1} на X_1 совпадают при любом X_1.

(3) Если $|f(x+iy)| \leqslant C|y|^{-N}$, $x \in X_1$, $y \in \Gamma_1$, $|y| < \gamma$, то сужение f_X на X_1 равно пределу в смысле теории распределений.

(4) Если f допускает аналитическое продолжение на окрестность множества ∂X_1, то при $y \to 0$, $y \in \Gamma_1$ функционалы $\int\limits_{X_1} f(x+iy)\varphi(x)\,dx$, $\varphi \in A$, сходятся в $A'(\overline{X_1})$ к элементу f_{X_1}, определенному в (1).

(5) Если $f_X = 0$ для некоторого непустого открытого множества $X_1 \subset X$ и Z — связно, то $f = f_X = 0$.

(6) $\mathrm{WF}_A(f_X) \subset X \times (\Gamma^0 \setminus 0)$, где Γ^0 — конус, двойственный к Γ.

Определение 2.3. Гиперфункция $f_X \in B(X)$ называется граничным значением f из Γ и обозначается $b_\Gamma f$.

Теорема 2.4. Если X — открытое множество в $\mathbf{R}^n$, $u \in B(X)$ и

$$\mathrm{WF}_A(u) \subset X \times (\Gamma^0 \setminus 0),$$

где Γ — открытый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n \setminus 0$, то существует такая функция f, аналитическая в Γ, что $u = b_\Gamma f$.

Как следствие теоремы 2.4 можно получить классическую теорему «об острие клина».

Теорема 2.5. Пусть функции $f^\pm$ аналитичны в

$$Z^\pm = \{x+iy;\ x \in X,\ \pm y \in \Gamma,\ |y| < \gamma\},$$

где $\gamma > 0$, Γ — открытый выпуклый конус. Если $f_0 = b_\Gamma f^+ = b_{-\Gamma} f^-$, то f^0 — аналитическая функция, которая является аналитическим продолжением для f_+ и f_-.

Следующее обобщение последней теоремы принадлежит Мартино.

Теорема 2.6. Пусть $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_J$ — замкнутые конусы в $\mathbf{R}^n \setminus 0$ и $U\Gamma_j = \mathbf{R}^n \setminus 0$. Пусть X — ограниченное открытое множество в $\mathbf{R}^n$, $u \in B(X)$. Тогда существуют такие $u_j \in B(X)$, что $u = \Sigma u_j$, $\mathrm{WF}_A(u_j) \subset \mathrm{WF}_A(u) \cap (X \times \Gamma_j)$. Если $u = \Sigma u'_j$ — другое такое разложение, то $u'_j = u_j + \Sigma u_{jk}$, где $u_{jk} \in B(X)$, $u_{kj} = -u_{kj}$ и $\mathrm{WF}_A(u_{jk}) \subset X \times (\Gamma_j \cap \Gamma_k)$.

§ 3. Решения дифференциальных уравнений

3.1. Задача Коши. Пусть $P(x, D)$ — дифференциальный оператор с вещественно аналитическими коэффициентами в открытом множестве $X \subset \mathbf{R}^n$. Ясно, что для $u \in B(X)$

$$\mathrm{WF}_A(P(x, D)u) \subset \mathrm{WF}_A(u).$$

Справедливо и обратное включение:

Теорема 3.1. Если $P(x, D)$ — дифференциальный оператор порядка m с вещественно аналитическими коэффициентами в X и $u \in B'(X)$, то $\mathrm{WF}_A(u) \subset \mathrm{Char}\, P \cup \mathrm{WF}_A(Pu)$. Более того, если (x_0, ξ_0) — нехарактеристическая точка для P, то для каждой гиперфункции $f \in B(X)$ найдется такая гиперфункция $u \in B(X)$, что $(x_0, \xi_0) \notin \mathrm{WF}_A(P(x, D)u - f(x))$.

Для каждого решения $u \in B(X)$ уравнения $P(x, D)u = 0$ можно определить данные Коши на гиперповерхности X_0, если она нехарактеристическая. Пусть, для простоты, $u \in B(X_+)$, где $X_\pm = \{x \in X,\ x_n \gtrless 0\}$, $X_0 = \{x \in X,\ x_n = 0\}$. Пусть $u_0 = u$ в X_+, $u_0 = 0$ в X_-. Тогда гиперфункция $P(x, D)u_0$ имеет носитель в X_0.

Теорема 3.2. Пусть $P(x, D)$ имеет вещественно аналитические коэффициенты и X_0 не является характеристической. Тогда для каждой гиперфункции $f \in B(X)$ с носителем в X_0 существует единственное разложение вида

$$f = P(x, D)v + \sum_{j<m} v_j \otimes D_n^j \delta(x_n),$$

где $v \in B(X)$, $\operatorname{supp} v \subset X_0$, $v_j \in B(X_0')$ при $0 \leqslant j < m$, $X_0' = X_0 \times \{0\}$.

Как следствие из этой теоремы получаем следующее утверждение:

Теорема 3.3. Если $P(x, D)$ имеет вещественно аналитические коэффициенты в X и X_0 нехарактеристическая для P, то каждая гиперфункция $u \in B(X_+)$, удовлетворяющая уравнению $P(x, D)u = 0$, имеет единственное продолжение u_0 на X, равное нулю в X_- и такое, что

$$P(x, D)u_0 = \sum_{j<m} v_j \otimes D_n^j \delta(x_n),$$

для некоторых $v_j \in B(X_0')$ при $0 \leqslant j < m$.

3.2. Аналитический волновой фронт. Приведем другое, эквивалентное определение аналитического волнового фронта, принадлежащее Брозу и Яголнитцеру. Если $u \in A'(\mathbf{R}^n)$, определим целую функцию $T_\lambda u$, зависящую от положительного параметра λ:

$$T_\lambda u(z) = u_y\left(e^{-\lambda(z-y)^2/2}\right), \quad z \in \mathbf{C}^n.$$

T_λ близко связано с преобразованием Фурье от u, поскольку

$$e^{i\lambda(x,\xi) - \lambda\xi^2/2} T_\lambda u(z) = u_y\left(e^{i\lambda(y,\xi) - \lambda(x-y)^2/2}\right)$$

преобразование Фурье в точке $-\lambda\xi$ от $ue^{-\lambda(x-y)^2/2}$. Множитель $e^{-\lambda(x-y)^2/2}$ заменяет срезающую функцию, которая используется при определении волнового фронта распределения. Естественно ожидать, что $(x_0, \xi_0) \in WF_A(u)$ тогда и только тогда, когда $u_y(e^{i\lambda(x,\xi)-\lambda(x-y)^2/2})$ есть $O(e^{-c\lambda})$ при $\lambda \to \infty$ и при некотором $c>0$ в окрестности точки $(x_0, -\xi_0)$. Действительно справедлива

Теорема 3.4 ([55]). Пусть $u \in A'(\mathbb{R}^n)$ и $(x_0, \xi_0) \in T^*(\mathbb{R}^n) \setminus 0$. Точка $(x_0, \xi_0) \notin WF_A(u)$ тогда и только тогда, когда существуют окрестность V точки $x_0 - i\xi_0$ и такие положительные постоянные C, c, что

$$|T_\lambda u(z)| \leqslant Ce^{\lambda(|\xi_0|^2/2-c)}, \quad z \in V, \ \lambda > 0.$$

Пусть M — подмножество $\mathbb{R}^n$. Если $x_0 \in M$, то $T_{x_0}(M)$ определяется как множество всех пределов последовательностей $t_j(x_j - x_0)$ при $t_j \to +\infty$, $x_j \in M$. Это множество называется касательным к M конусом. Оно является замкнутым конусом и не зависит от выбора локальных координат, так что может быть определено для $M \subset X$, где X — гладкое (C^1) многообразие. Если F — замкнутое подмножество гладкого (C^2) многообразуя, то $N_e(F) \subset T^*X \setminus 0$ определяется как множество всех таких (x_0, ξ_0), что $x_0 \in F$ и существует вещественнозначная функция $f \in C^2(X)$, для которой $df(x_0) = \xi_0 \neq 0$ и $f(x) \leqslant f(x_0)$ для $x \in F$. Положим $N_i(F) = \{(x, \xi);\ (x, -\xi) \in N_e(F)\}$ и $N(F) = N_e(F) \cup \cup N_i(F)$.

Теорема 3.5. Если $u \in B(X)$ и $x_0 \in X$, то

$$\overline{N}(W_0) \subset \partial W_0 \times T_{x_0}(\operatorname{supp} u),$$

где $W_0 = \{\xi \in T^*_{x_0}(X);\ (x_0\xi) \in WF_A(u)\}$ рассматривается как подмножество в $T^*_{x_0}(X) \setminus 0$.

Доказательство основывается на теореме Хольмгрена и принадлежит Кашиваре.

Отметим некоторые следствия этой теоремы.

Следствие 3.1. Пусть $W_1 \subset W_2$ — открытые выпуклые множества в $T^*_{x_0}(X) \setminus 0$ и

(1) $W_1 \cap WF_A(u)_{x_0} = \varnothing$,

(2) каждая гиперплоскость с нормалью лежащей в $T_{x_0}(\operatorname{supp} u) \cap (-T_{x_0}(\operatorname{supp} u))$, пересекающая W_2, пересекает W_1. Тогда $W_2 \cap WF_A(u)_{x_0} = \varnothing$.

Следствие 3.2. Если $(x_0, \xi_0) \in N_i(\operatorname{supp} u)$, то $(x_0, \xi) \in WF_A(u) \Rightarrow (x_0, \xi + t\xi_0) \in WF_A(u)$ для всех $t \in \mathbb{R}$.

Пусть снова $X_\pm = \{x \in X,\ x_n \geqslant 0\}$, $X_0 = \{x \in X,\ x_n = 0\}$. Пусть $P(x, D)$-дифференциальный оператор порядка m в X с аналитическими коэффициентами и X_0 — нехарактеристическая плоскость.

Теорема 3.6. Если $u \in B(X_+)$ — решение уравнения

$P(x, D)u=0$ и $(x'_0, \xi'_0)\notin \mathrm{WF}_A(D_n^j u|_{x_n=0})$, $j=0, 1, \ldots, m-1$, то существует такое $\varepsilon>0$, что $(x, \xi)\notin \mathrm{WF}_A(u)$, если

$$0<x_n<\varepsilon, \quad |x'-x'_0|+|\xi'-\xi'_0|<\varepsilon.$$

Замечание 3.1. Аналогичное утверждение для $\mathrm{WF}(u)$ неверно, даже если $P(D)$ имеет постоянные коэффициенты. Например, если $P(D)=D_1D_2+D_3^2+D_4^2$, то можно построить решение $u_0 \in C^2$ уравнения $P(D)u_0=0$, для которого $\operatorname{sing\,supp} u_0 = \{(t, 0, \ldots, 0), t\geqslant 0\}$. Тогда функция $u=\sum\limits_1^\infty a_j u_0(x_1, x_2, x_3, x_4 - 1/j) \in C^2(\mathbf{R}^4)$ и $D_4 u \in C^\infty(\mathbf{R}^3)$ при $x_4=0$, но $\operatorname{sing\,supp} u = \{(x_1, 0, 0, x_4)$, где $x_4=0$ или $x_4=1/k$, $k=1, 2, \ldots\}$, если $a_j\to 0$ достаточно быстро.

Теоремы об отсутствии решений уравнений, у которых в характеристической точке (x_0, ξ_0) значение функции $C_1(x, \xi)$ положительно, переносятся и на пространство гиперфункций. Например, уравнение $D_1u+ix_1D_2u=f$ может не иметь решений в классе гиперфункций, даже если $f\in C^\infty$. Более того, справедлива

Теорема 3.7 ([148]). Пусть P — дифференциальный оператор первого порядка с аналитическими коэффициентами в окрестности начала координат в $\mathbf{R}^n$ и главная часть P_1 оператора P не обращается в нуль в начале координат. Пусть существует функция w, аналитическая в окрестности 0 и такая, что $P_1 w=0$,

$$\operatorname{Im} w(x)=0 \Leftrightarrow x=0.$$

Тогда для любой окрестности Ω начала координат (сколь угодно малой) существует такое $\varepsilon>0$, что если $H\varepsilon$ — пространство функций, голоморфных при $|\operatorname{Im} z|<\varepsilon$, то $PB(\Omega)\not\supset H_\varepsilon(\Omega)$.

§ 4. Пучок микрофункций

4.1. Следы голоморфных функций. Рассмотрим на $\mathbf{R}^n$ пучки аналитических функций, бесконечно гладких функций, распределений и гиперфункций

$$\mathfrak{a}\subset C_\infty\subset\mathcal{D}'\subset B.$$

Вложение этих пучков можно описать следующим образом.

Пусть Γ — открытый выпуклый конус в $\mathbf{R}^n$, ω — открытое множество в $\mathbf{R}^n$ и функция f голоморфна на пересечении множества $\omega\times i\Gamma$ с комплексной окрестностью множества ω в $\mathbf{C}^n$. Тогда можно определить граничное значение $b(f)\in B(\omega)$.

Если $|f(x+iy)|\leqslant C|y|^{-N}$ для некоторого целого N, то $b(f)=\lim\limits_{y\to 0, y\in\Gamma} f(x+iy)\in\mathcal{D}'$ и предел существует в пространстве $\mathcal{D}'(\omega)$.

Если f и все производные $D^\alpha f$ ограничены (или $|D^\alpha f(z)| \leqslant \leqslant C_\alpha |y|^{-N}$ для всех α и некоторого N, не зависящего от α), то предел существует в C^∞.

Обратно, пусть $u \in \mathscr{D}'(\omega)$ и $\{\Gamma_\alpha\}$ — такое конечное семейство открытых выпуклых конусов в $\mathbf{R}^n$, что внутренности двойственных конусов Γ_α^0 покрывают S^{n-1}. Тогда существуют такие $f_\alpha \in A(\omega + i\Gamma_\alpha)$, что $|f_\alpha(x+iy)| \leqslant C|y|^{-N}$, $u = \Sigma b(f_\alpha)$. В действительности, достаточно даже, чтобы $\omega \times \cup (\operatorname{int} \Gamma_\alpha^0)$ покрывало $\mathrm{WF}_A(u)$.

Аналогично, если $u \in C^\infty(\omega)$ и $\cup \operatorname{int} \Gamma_\alpha^0$ покрывает $\mathrm{WF}_A(u)$, то существуют такие $f_\alpha \in A(\omega + i\Gamma_\alpha)$, что f_α ограничены, ограничены их производные любого порядка и $u = \Sigma b(f_\alpha)$. Если $u \in \mathscr{D}'(\omega)$ и $\cup \operatorname{int} \Gamma_\alpha^0 \supset \mathrm{WF}(u)$, то существует такая функция $\varphi \in C^\infty(\omega)$ и такие $f_\alpha \in A(\omega + i\Gamma_\alpha)$, $|f_\alpha(x+iy)| \leqslant C|y|^{-N}$, что $u = \varphi + \Sigma b(f_\alpha)$.

4.2. Определение пучка микрофункций.

Определение 4.1. Пучком *микрофункций* $C(\mathbf{R}^n \times S^{n-1})$ называется пучок, построенный по предпучку

$$U \to C(U) = B(\omega) / \{u \in B(\omega),\ \mathrm{WF}_A(u) \cap U = \varnothing\}$$

для $U \subset \omega \times S^{n-1}$.

Каждой гиперфункции $u \in B(\omega)$ канонически соответствует элемент из $C(\omega \times S^{n-1})$. Этот элемент равен 0 тогда и только тогда, когда $u \in A(\omega)$.

Соответствующие определения можно дать и для пучков $\mathscr{D}'$ и C^∞ на $\mathbf{R}^n \times S^{n-1}$. Именно, им соответствуют предпучки

$$U \to \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n) / \{u \in \mathscr{D}'(\mathbf{R}^n),\ \mathrm{WF}_A(u) \cap U = \varnothing\},$$

$$U \to C^\infty(\mathbf{R}^n) / \{u \in C^\infty(\mathbf{R}^n),\ \mathrm{WF}_A(u) \cap U = \varnothing\}.$$

Микрофункция $u \in C(U)$ принадлежит $\mathscr{D}'(U)$ (соответственно, $u \in C^\infty(U)$), если для каждого компактного подмножества $K \subset U$ можно найти такое распределение (соответственно, такую функцию из C^∞) v, что $u = w$ в окрестности компакта K, если обозначить w элемент из $C^\infty(\omega \times S^{n-1})$, канонически соответствующий v.

Для $u \in C(U)$ обозначаем $\mathrm{WF}_A(u)$ носитель u, а $\mathrm{WF}(u)$ — дополнение к наибольшему открытому множеству V, для которого $u|_V \in C^\infty(V)$.

4.3. Псевдодифференциальные операторы. Пусть Ω — открытое коническое подмножество в $T^*\mathbf{R}^n$.

Определение 4.2. Последовательность $\{p_j(x, \xi)\}_{j \in \mathbf{Z}}$ голоморфных в Ω функций называется последовательностью символов (псевдодифференциального оператора), если она удовлетворяет следующим трем условиям:

1°. $p_j(x, \xi)$ однородна по ξ степени j.

2^0. Для каждого $\varepsilon>0$ и каждого компактного подмножества $K\subset\Omega$ существует такая постоянная $C=C_{\varepsilon, K}$, что

$$\sup_K |p_j(x, \xi)| \leqslant C\varepsilon^j/j!, \quad j\geqslant 0.$$

3^0. Для каждого компактного подмножества $K\subset\Omega$ существует такая постоянная $R=R_K$, что

$$\sup_K |p_j(x, \xi)| \leqslant R^{-j}/(-j)!, \quad j<0.$$

Оператор $P(x, D_x)=\sum_{j\in Z} p_j(x, D_x)$ характеризуется условием

$$P(x, D_x)\,\delta((x, \eta)-\lambda)=\sum_{j\in Z} p_j(x, \eta)\,\delta^{(j)}((x, \eta)-\lambda)$$

и называется псевдодифференциальным оператором. Если $P(x, D)=\sum_{j\leqslant m} p_j(x, D_x)$, то оператор P называется псевдодифференциальным оператором конечного порядка.

Оператор P определяется своим ядром $K(x, x-y)$ и формулой:

$$P(x, D_x)\,u=\int K(x, x-y)\,u(y)\,dy.$$

Ядро $K(x, y)=P(x, D_x)\,\delta(x-y)$ можно определить формулой: $K(x, y)=\Sigma\hat{p}_j(x, y)+h(x, y)$, где $\hat{p}_j(x, y)$ — обратное преобразование Фурье от функции $p_j(x, \xi)$ по ξ. Можно показать, что для оператора P конечного порядка ядро $K(x, x-y)$ является распределением и его аналитический волновой фронт содержится в нормальном расслоении диагонали. Поэтому псевдодифференциальные операторы конечного порядка действуют на распределения, не расширяя их волновые фронты.

Можно определять действие псевдодифференциального оператора $P(x, D_x)$ и другим способом. Пусть ω — область в $\mathbf{R}^n$ и U содержит множество $\omega\times\{\xi, |\xi'|\leqslant k\xi_1\}$, пусть $f\in A(\omega+iG)$, где G — круговой конус $\{x;\ x_1>k|x'|\}$. Значения $b(f)$ канонически отождествляются с микрофункцией на $\omega\times S^{n-1}$, имеющей носитель в $\omega\times G^0$. Микрофункция $Pb(f)$ определена в U, имеет носитель в $\omega\times G^0$ и может быть продолжена нулевыми значениями вне U до микрофункции, определенной в $\omega\times S^{n-1}$. Тогда существует такая функция $g\in A(\omega+iG)$, что $Pb(f)=b(g)$. Функция g определяется следующим образом. Пусть Σ — гиперплоскость в $\mathbf{C}^n$, на которой $\operatorname{Im} z_1=\varepsilon$. Определим оператор P_Σ так, что

$$P_\Sigma f(z)=\int_\Sigma K(z, z-\tilde{z})\,f(\tilde{z})\,d\tilde{z}.$$

Если $\varepsilon>0$ достаточно мало, то $P_\Sigma f\in A(\omega+iG)$ и мы полагаем $g=P_\Sigma f$. При этом микрофункция $b(g)$ не зависит от выбора ε.

Псевдодифференциальные операторы конечного порядка составляют пучок колец $\mathscr{P}$ на $\mathbf{R}^n \times S^{n-1}$. Можно показать, что такие операторы отображают $\mathscr{D}'(U)$ или $C^\infty(U)$ в себя.

Если $P(x, D) = \Sigma p_j(x, D)$ и $Q(x, D) = \Sigma q_j(x, D)$ — псевдодифференциальные операторы в окрестности точки (x_0, ξ_0), тогда их композиция $R = P \cdot Q$ является псевдодифференциальным оператором, $R(x, D) = \Sigma R_j(x, D_x)$, причем

$$r_j(x, \eta) = \sum_{k+l=|\alpha+j|} \frac{1}{\alpha!} D_\eta^\alpha p_k(x, \eta) D_x^\alpha q_l(x, \eta).$$

Оператор $Q(x, D_x)$, формально сопряженный к $P(x, D_x)$, является псевдодифференциальным с символом $Q(x, \eta) = \Sigma q_j(x, \eta)$, где

$$q_j(x, \eta) = \sum_{j+|\alpha|=k} \frac{(-1)^k}{\alpha!} D_\eta^\alpha D_x^\alpha p_j(x, \eta).$$

Если $P(x, D_x)$ — псевдодифференциальный оператор порядка m и $p_m(x, \eta) \neq 0$ на множестве $\Omega \subset T^*\mathbf{R}^n$, то существует единственный псевдодифференциальный оператор конечного порядка $E(x, D)$, для которого $PE = EP = I$.

Теорема 4.1. Пусть $P(x, D)$ и $Q(x, D)$ — псевдодифференциальные операторы порядка m и их главные символы совпадают, причем формы $dp_m(x, \eta)$ и ηdx линейно независимы в тех точках, где $p_m(x, \eta) = 0$. Тогда можно найти локально два таких обратимых псевдодифференциальных оператора $R(x, D_x)$ и $S(x, D_x)$ конечных порядков, что

$$P(x, D) R(x, D) = S(x, D) Q(x, D).$$

Эта теорема, в отличие от следующей, справедлива и в обычной теории псевдодифференциальных операторов.

Теорема 4.2. Пусть $P(x, D)$ — псевдодифференциальный оператор порядка m в окрестности точки (x_0, η_0), где $x_0 = 0$, $\eta_0 = (0, \ldots, 0, 1)$. Пусть главный символ $p_m(x, \eta)$ этого оператора равен $\eta_1{}^m$. Тогда псевдодифференциальное уравнение $P(x, D) u = 0$ микролокально эквивалентно уравнению $D_1{}^m u = 0$. Таким образом одно уравнение преобразуется в другое с помощью псевдодифференциальных операторов бесконечного порядка.

Например, в теории микрофункций уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2} - i \frac{\partial v}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} = 0$$

эквивалентны.

Следствие 4.1. Если $P(x, D)$ — эллиптический оператор, то каждое решение — гиперфункция u уравнения $Pu = 0$ является аналитической функцией.

Теорема 4.3. Пусть $P(x, D)$ — такой псевдодифференциальный оператор, что функция $p_m(x, \xi)$ вещественнозначна и

главного типа. Пусть $u \in B(\Omega)$ и $Pu \in A(\Omega)$. Замкнутое множество $F \subset \omega \times S^{n-1}$ может быть носителем u тогда и только тогда, когда F является объединением бихарактеристик.

4.4. Интегральные операторы Фурье. Пусть U и V — два открытых множества в $\mathbf{R}^n \times S^{n-1}$ и T — аналитический диффеоморфизм из U в V, сохраняющий контактную структуру (или иными словами, каноническое однородное первой степени преобразование одной открытой конической области в $\mathbf{R}^n \times (\mathbf{R}^n \setminus 0)$ на другую). Такое преобразование T называется *контактным*.

Тогда существует (и не один) изоморфизм $\tilde{T}$ из $\mathscr{P}|_U$ на $\mathscr{P}|_V$ (или T_1 из $C|_U$ на $C|_V$), согласованный со структурой пучка колец на $\mathscr{P}$ (или со структурой $\mathscr{P}$ — модуля на C), который сохраняет подпучки $\mathscr{D}'$ (или C^∞), а также согласованный с действием T на главный символ.

На языке формул каждому контактному преобразованию окрестности точки (x_0, ξ_0) в $\mathbf{R}^n \times S^{n-1}$ на окрестность точки (y_0, η_0) соответствует функция $F(x, y)$, определенная в окрестности точки (x_0, y_0), для которой $dF(x_0, y_0) = (-\xi_0, \eta_0)$. Пусть Σ — поверхность $\{(x, y);\ F(x, y) = 0\}$. Тогда $T = q \circ p^{-1}$, где

$$p: S_\Sigma^* \mathbf{R}^{2n} \to S^* \mathbf{R}^n; \quad p(x, y, \xi, \eta) = (x, -\xi);$$

$$q: S_\Sigma^* \mathbf{R}^{2n} \to S^* \mathbf{R}^n; \quad q(x, y, \xi, \eta) = (y, \eta).$$

Если u — микрофункция в окрестности точки (x_0, ξ_0), то можно определить оператор

$$\tilde{T}u(y) = \int K(x, y)\, u(x)\, dx,$$

где $K(x, y) = \delta(F(x, y))$. Ядро K в действительности оказывается распределением и называется распределением Фурье, ассоциированным с фазой $F(x, y) \cdot \theta$, а $\tilde{T}$ — микролокальным интегральным оператором Фурье. Можно показать, что $\mathrm{WF}(u) \subset \subset \mathrm{WF}_A(u) = S_\Sigma \mathbf{R}^n$. Оператор $\tilde{T}$ можно рассматривать в пространствах распределений или микрофункций. При этом $\tilde{T}$ сохраняет микрораспределения и $\mathrm{WF}(\tilde{T}u) = T \circ \mathrm{WF}(u)$. Оператор $\tilde{T}$ порождает изоморфизм пучка $\mathscr{P}$, при котором $P \mapsto Q$, где $P\tilde{T} = \tilde{T}Q$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Арнольд В. И.*, О характеристическом классе, входящем в условия квантования. Функц. анализ и его прил., 1967, *1*, № 1, 1—14
2. —, Математические методы классической механики. М.: Наука, 1974, 431 с.
3. *Бронштейн М. Д.*, Об аналитичности решений уравнений, вырождающихся на характеристическом многообразии. Успехи мат. наук, 1976, *31*, № 3, 205—206
4. *Васильев Д. Г.*, Двучленная асимптотика спектра краевой задачи при

внутреннем отражении общего вида. Функц. анализ и его прил., 1984, *18*, № 1, 1—13
5. —, Асимптотика спектра краевой задачи. Тр. Моск. мат. о-ва, 1986, *49* 167—237
6. *Вишик М. И., Грушин В. В.,* Об одном классе вырождающихся эллиптических уравнений высших порядков. Мат. сб., 1969, *79,* № 1, 3—36
7. *Ганжа Е. И.,* О гипоэллиптичности дифференциального оператора второго порядка со знакопеременной квадратичной формой. Успехи мат. наук, 1986, *41,* № 4, 217—218
8. *Грушин В. В.,* Распространение гладкости решений дифференциальных уравнений главного типа. Докл. АН СССР, 1963, *148,* № 6, 1241—1244
9. —, Псевдодифференциальные операторы в $\mathbb{R}^n$ с ограниченными символами. Функц. анализ и его прил., 1970, *4,* № 3, 37—50
10. —, Об одном классе эллиптических псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на подмногообразии. Мат. сб., 1971, *84,* 163—195
11. —, Об одном примере дифференциального уравнения без решений. Мат. заметки, 1971, *10,* № 2, 125—128
12. —, Гипоэллиптические дифференциальные уравнения. Мат. сб., 1972, *88,* № 4, 504—521
13. —, *Шананин Н. А.,* Некоторые теоремы об особенностях дифференциальных уравнений со взвешенными символами. Мат. сб., 1977, *103,* № 1, 37—51
14. *Егоров Ю. В.,* О канонических преобразованиях псевдодифференциальных операторов. Успехи мат. наук, 1969, *24,* № 5, 149—150
15. —, О разрешимости дифференциальных уравнений с простыми характеристиками. Успехи мат. наук, 1971, *26,* № 2, 183—196
16. —, О достаточных условиях локальной разрешимости псевдодифференциальных уравнений главного типа. Тр. Моск. мат. о-ва, 1974, *31,* 59—84
17. —, О субэллиптических операторах. Успехи мат. наук, 1975, *30,* № 3, 57—104
18. —, Линейные дифференциальные уравнения главного типа. М.: Наука, 1984, 360 с.
19. —, Лекции по уравнениям с частными производными. Дополнительные главы. М.: Изд-во МГУ, 1985, 164 с.
20. —, Об устранимых особенностях в граничных условиях для дифференциальных уравнений. Вестн. Моск. ун-та. Сер. мат., 1985, № 6, 30—36
21. —, *Попиванов П. Р.,* Об уравнениях главного типа, не имеющих решений. Успехи мат. наук, 1974, *29,* № 2, 172—189
22. —, *Рангелов Ц.,* Об одном классе псевдодифференциальных операторов с кратными характеристиками. Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1977, *3,* 43—48
23. *Иврий В. Я.,* Дифференциальные уравнения с кратными характеристиками, не имеющие решений. Докл. АН СССР, 1971, *198,* 279—282
24. —, Волновые фронты решений некоторых псевдодифференциальных уравнений. Тр. Моск. мат. о-ва, 1979, *39,* 49—82
25. —, Волновые фронты решений краевых задач для одного класса симметрических гиперболических систем. Сиб. мат. ж., 1980, *21,* № 4, 62—71
26. —, Распространение особенностей решений неклассических краевых задач для гиперболических уравнений второго порядка. Тр. Моск. мат. о-ва, 1981, *43,* 81—91
27. —, О втором члене спектральной асимптотики для оператора Лапласа—Бельтрами на многообразии с краем. Функц. анализ и его прил., 1980, *14,* № 2, 25—34
28. —, О точных спектральных асимптотиках для эллиптических операторов, действующих в расслоениях. Функц. анализ и его прил., 1982, *16,* № 2, 30—38
29. *Кучеренко В. В.,* Асимптотика решений задачи Коши для уравнений с комплексными характеристиками. В сб. «Современные проблемы математики. (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1977, *8,* 41—136

30. *Ландис Е. М., Олейник О. А.,* Обобщенная аналитичность и некоторые связанные с ней свойства решений эллиптических и параболических уравнений. Успехи мат. наук, 1974, *29,* № 2, 190—206
31. *Лычагин В. В.,* Локальная классификация нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Успехи мат. наук, 1975, *30,* № 1, 101—171
32. *Маслов В. П.,* Теория возмущений и асимптотические методы. М.: Изд-во МГУ, 1965, 549 с.
33. —, Метод ВКБ в многомерном случае. Приложение к кн. Хединг Дж., Введение в метод фазовых интегралов. М.: Мир, 1965, 177—237
34. —, Операторные методы. М.: Наука, 1973, 543 с.
35. —, *Федорюк М. В.,* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. М.: Наука, 1976, 296 с.
36. *Мищенко А. С., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.,* Лагранжевы многообразия и метод канонического оператора, М.: Наука, 352 с.
37. *Назайкинский В. Е., Ошмян В. Г., Стернин Б. Ю., Шаталов Н. Е.,* Интегральные операторы Фурье и канонический оператор. Успехи мат. наук, 1981, *36*, № 2, 81—140
38. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.,* Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. В сб. «Математический анализ. 1969 г. (Итоги науки. ВИНИТИ АН СССР)». М., 1971, 252 с.
39. —, —, Об аналитичности решений линейных дифференциальных уравнений и систем. Докл. АН СССР, 1972, *207,* № 4, 785—788
40. —, —, Об аналитичности решений линейных уравнений второго порядка. Тр. семинара им. И. Г. Петровского, 1975, *1,* 163—174
41. *Попиванов П. Р.,* О локальной разрешимости одного класса псевдодифференциальных уравнений с двукратными характеристиками. Тр. Моск. мат. о-ва, 1974, 30, 159—242
42. —, Локальная разрешимость псевдодифференциальных уравнений с характеристиками второй кратности. Мат. сб., 1976, *100,* 217—241
43. *Стернин Б. Ю.,* Дифференциальные уравнения субглавного типа. Мат. сб., 1984, *127,* № 1, 38—69
44. *Туловский В. Н.,* Распространение особенностей для операторов с характеристиками постоянной кратности. Тр. Моск. мат. о-ва, 1979, *39,* 113—134
45. *Федосов Б. В.,* Аналитические формулы индекса эллиптических операторов. Тр. Моск. мат. об-ва, 1974, *30,* 159—242
46. *Шананин Н. А.,* О локальной неразрешимости и негипоэллиптичности (псевдо-)дифференциальных уравнений со взвешенными символами. Мат. сб., 1982, *119,* № 4, 548—563
47. *Шубин М. А.,* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. М.: Наука, 1978, 279 с.
48. *Beals R.,* Spatially inhomogeneous pseudo-differential operators, II. Communs. Pure and Appl. Math., 1977, *42,* № 1, 1—42
49. —, A general calculus of pseudo-differential operators. Duke Math. J., 1975, *42,* № 1, 1—42
50. —, Characterisation of pseudo-differential operators and applications. Duke Math. J., 1977, *44,* № 1, 45—57
51. —, *Fefferman C.,* On local solvability of linear partial differential equations. Ann. Math., 1973, *97,* № 3, 482—498
52. —, —, On hypoellipticity of second order operators. Communs. Part. Differ. Equat., 1976, *1,* № 1, 73—85
53. *Bolley P., Camus J., Helffer B.,* Sur une classe d'opérateurs partiellement hypoelliptiques. J. math. pures et appl., 1976, *55,* № 2, 131—171
54. —, —, —, Hypoellipticité partielle pour des opérateurs dégénérés non-fuchsiens. Communs. Part. Differ. Equat., 1977, *2,* № 1, 1—30
55. *Bony J. M.,* Equivalence des diverses notions de spectre singulier analytique. Sémin. Goulaouic-Schwartz, 1976—1977, exp. № 3
56. —, Propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. Sémin. Goulaouic-Schwartz, 1979—1980, exp. № 22

57. —, Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires. Sémin. Goulaouic-Schwartz, 1981—1982, exp. № 2
58. —, Propagation et interaction des singularités pour les solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires. Proc. Intern. Congress Math., Warschawa, 1983, *2*, 1133—1147
59. —, *Schapira P.*, Propagation des singularités analytiques pour les solutions des equations aux dérivées partielles, Univ. Paris XI, 1973, *94*, 1—62
60. *Boulkhemair A.*, Opérateurs paradifferentiels et conjugaison par les opérateurs integraux de Fourier. Univ. Paris-Sud, 1984, 94 p.
61. *Boutet de Monvel L.*, Comportement d'un opérateur pseudodifferentiel sur une variété à bord. J. anal. math., 1966, *17*, 241—304
62. —, Boundary problems for pseudo-differential operators. Acta math., 1971, *126*, 11—51
63. —, Hypoelliptic operators with double characteristics and related pseudodifferential operators. Communs. Pure and Appl. Math., 1974, *27*, 585—639
64. —, Propagation des singularités des solutions d'équations analogues à l'équation de Schrödinger. Lect. Notes Math., 1975, *459*, 1—14
65. —, Lacunas and transmissions. Princeton, New Jersey: University Press, 1979, 209—218
66. —, *Grigis A.*, *Helffer B.*, Parametrixes d'opérateurs pseudodifférentiels à caracteristiques multiples. Astérisque, 1976, *43—45*, 93—121
67. —, *Trèves F.*, On a class of pseudo-differential operators with double characteristics. Invent. math., 1974, *24*, 1—34
68. *Bove A.*, *Lewis J. E.*, *Parenti C.*, Propagation of singularities for Fuchsian operators, Lect. Notes Math, 1983, *984*, 161 p.
69. —, —, —, Parametrix for a characteristic Cauchy problem. Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., ser. 4, 1985, *12*, № 1, 1—42
70. *Calderon A. P.*, *Vaillancourt R.*, On the boundedness of pseudodifferential operators. J. Math. Soc. Jap., 1971, *23*, 374—378
71. *Chazarain J.*, Opérateurs hyperboliques à caracteristiques de multiplicité constante, Ann. Inst. Fourier, 1974, *24*, № 1, 173—202
72. —, Propagation des singularités pour une classe d'opérateurs à caractéristiques multiples et resolubilité locale. Ann. Inst. Fourier, 1974, *24*, № 1, 203—223
73. *Dencker N.*, On the propagation of polarization sets for systems of real principal type. J. Funct. Anal., 1982, *46*, № 3, 351—372
74. —, On the propagation of singularities for pseudo-differential operators of principal type. Ark. mat., 1982, *20*, 23—60
75. *Derridj M.*, *Zuilly C.*, Régularité analytique et Gevrey pour des classes d'opérateurs elliptiques et paraboliques dégénérés du second ordre. Astérisque, 1973, *2—3*, 371—381
76. *Duistermaat J. J.*, Fourier integral operators. Lect. Notes, N.-Y.: Courant Inst. Math. Sci., 1973, 89 p.
77. —, *Guillemin V.*, The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics. Invent. math., 1975, *29*, 39—79
78. —, *Hörmander L.*, Fourier integral operators. II. Acta Math., 1972, *128*, 183—269
79. *Eskin G.*, A parametrix for interior mixed problems for hyperbolic equations. J. anal. math., 1977, *32*, 17—62
80. *Farris M.*, Egorov's theorem on a manifold with diffractive boundary. Communs. Part. Differ. Equations, 1981, 6, 661—687
81. *Fefferman C.*, The uncertainty principle. Bull. Amer. Math. Soc., 1983, *9*, № 2, 129—206
82. —, *Phong D. H.*, On positivity of pseudo-differential operators. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1978, *75*, 4673—4674
83. —, —, The uncertainty principle and sharp Gårding inequalities. Communs. Pure and Appl. Math., 1981, *34*, 285—331
84. —, —, Symplectic geometry and positivity of pseudo-differential operators. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1982, *79*, 710—713
85. *Flaschka H.*, *Strang G.*, The correctness of the Cauchy problem. Adv.

Math., 1971, *6,* № 3, 347—379 (Пер. на рус. яз.: *Фляшке Г., Стрэнг Г.,* Корректность задачи Коши. Математика (сб. переводов), 1972, *2,* 74—98)
86. *Folland G. B.,* Applications of analysis on nilpotent groups to partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc. 1977, *83,* № 5, 912—930
87. *Friedlander F. G.,* The wavefront set of a simple initial-boundary value problem with glancing rays. Math. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1976, *79,* 145—149
88. *Garding L.,* Sharp waves and lacunas, Actes Congres Intern. Math., Nice, 1970, *2,* 723—729. (Пер. на рус. яз.: *Гординг Л.,* Резкие фронты и лакуны, Успехи мат. наук, 1971, *26,* № 2, 175—181)
89. *Gérard C.,* Réflexion du front d'onde polarisé des solutions de systèmes d'équations aux dérivées partielles. C. r. Acad. sci., 1983, *297,* 409—412
90. *Grigis A.,* Hypoellipticité et paramétrix pour les opérateurs pseudodifférentiels à caractéristiques doubles. Astérisque, 1976, *34—35,* 183—205
91. —, Propagation des singularités pour des opérateurs pseudodifférentiels à caracteristiques doubles. Communs. Part. Differ. Equations, 1979, *4,* № 11, 1233—1262
92. —, *Sjöstrand J.,* Front d'onde analytique et sommes de carres de champ de vecteurs. Duke Math. J., 1985, *52,* № 1, 35—51
93. —, *Rothschild L. P.,* A criterion for analytic hypoellipticity of a class of differential operators with polynomial coefficients. Ann. Math., Ser. 2, 1984, *118,* № 3, 443—460
94. *Grubb G.,* Functional calculus of pseudodifferential boundary problems. PM 65, Birkhäuser, 1986, 234 S.
95. *Guillemin V., Sternberg S.,* Geometric asymptotics. Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1977, 474 p. (Пер. на рус. яз.: *Гийемин В., Стернберг С.,* Геометрические асимптотики. М.: Мир, 1981, 500 с.)
96. —, *Uhlmann G.,* Oscillatory integrals with singular symbols. Duke Math. J. 1981, *48,* № 1, 251—287
97. *Hanges N.,* Propagation of singularities for a class of operators with double characteristics. Princeton, New Jersey: Univ. Press, 1979, 113—126
98. *Harvey R., Polking J.,* Removable singularities of linear partial differential equations. Acta math., 1970, *125,* 39—56
99. *Helffer B.,* Sur l'hypoellipticité des opérateurs pseudodifferentiels à caracteristiques multiples (perte de 3/2 dérivées). Math. Ann., 1975, *217,* 165—188
100. —, Sur une classe d'opérateurs hypoelliptiques à caracteristiques multiples. J. Math. Pure Appl., 1976, *55,* 207—215
101. —, *Nourrigat J.,* Caractérisation des opérateurs hypoelliptiques homogénes invariants à gauche sur un groupe de Lie nilpotent gradué. Communs. Part. Differ. Equations, 1979, *4,* № 8, 899—958
102. *Hörmander L.,* Hypoelliptic differential operators. Ann. Inst. Fourier, 1961, *11,* 477—492. (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.,* Гипоэллиптические дифференциальные операторы. Математика (сб. переводов), 1963, *7,* № 1, 66—78)
103. —, Linear partial differential operators. Berlin: Springer, 1963, 287 p. (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.,* Линейные дифференциальные операторы с частными производными. М.: Мир, 1965, 379 с.)
104. —, Fourier integral operators I. Acta math., 1971, *127,* 79—123; (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.,* Интегральные операторы Фурье I. Математика (сб. переводов), 1972, *16,* № 1, 17—61, № 2, 67—136)
105. —, A class of hypoelliptic operators with double characteristics. Math. Ann., 1975, *217,* 165—188
106. —, Spectral analysis of singularities. Princeton, New Jersey: Univ. Press, 1979, 3—50
107. —, The Weyl calculus of pseudo-differential operators. Comm. Pure Appl. Math., 1979, *32,* 359—443
108. —, The analysis of linear partial differential operators. Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo: Springer, 1983, I, 391 p., 1983, II, 391 p., 1985, III, 525 p., 1985, IV, 352 p. (Пер. на рус. яз.: *Хёрмандер Л.,* Анализ

линейных дифференциальных операторов с частными производными. М.: Мир, 1985, I, 430 с.; 1986, II, 455 с.)
109. —, Subelliptic operators. Princeton, New Jersey: Univ Press, 1979, 127—208
110. *Kannai Ya.*, An unsolvable hypoelliptic differential equation. Isr. J. of Math., 1971, *9*, 306—315
111. —, Hypoelliptic ordinary differential operators. Isr. J. Math., 1972, *13*, № 1—2, 106—134
112. *Kashiwara M., Kawai T.*, Second microlocalization and asymptotic expansions, Proc. of Les Houches colloquium, Springer, 1980, 234 p.
113. *Kashiwara M., Schapira P.*, Microlocal study of sheaves. Univ. Paris-Nord, 1984, *51*, 1—191
114. *Kohn I. I., Nirenberg L.*, An algebra of pseudo-differential operators. Communs. Pure and Appl. Math., 1965, *18*, 269—305 (Пер. на рус. яз.: *Кон Дж. Дж., Ниренберг Л.*, Алгебра псевдодифференциальных операторов. В кн.: Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1967, 9—62)
115. *Kumano-go H.*, A calculus of Fourier integral operators on R^n and the fundamental solution for an operator of hyperbolic type. Commun. Part. Differ. equat., 1976, *1*, № 1, 1—44
116. *Lascar B.*, Propagation des singularitiés des solutions des équations aux derivées partielles non linéaires. Math. Anal. Appl, Part B, 1981, *7*, 455—482
117. —, *Lascar R.*, Propagation des singularités pour des équations hyperboliques à caracteristiques de multiplicité au plus double et singularités Masloviennes II. J. anal. math., 1982, *41*, 1—38
118. —, *Sjostrand J.*, Equation de Schrodinger et propagation des singularités pour les opérateurs pseudo-differentiels à caracteristiques réeles de multiplicité variable. Astérisque, 1982, *95*, 167—207
119. —, —, Equation de Schrödinger et propagation des singularités pour des opérateurs pseudo-differentiels à caractéristiques réeles de multiplicité variable, Astérisque, *95*, 1982, 167—207
120. —, —, Equation de Schrödinger et propagation des singularités pour des opérateurs pseudo-differentiele à caractéristiques réeles de multiplicité variable II, Commun. Part. Differ. Equat., 1985, *10*, 5, 467—523
121. *Lascar R.*, Propagation des singularités des solutions d'équations pseudo-differentieles à caracteristiques de multiplicités variables. Lect. Notes Math., 1981, *856*, 19—38
122. *Laurent Y.*, Théorie de la deuxième microlocalisation dans le domaine complex. Boston: Birkhäuser, 1985, 311 c.
123. *Lions J. L., Magenes E.*, Problèmes aux limites non homogénes et applications. Paris: Dunod, 1963. (Пер. на рус. яз.: *Лионс Ж. Л., Мадженес Э.*, Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971, 371 с.).
124. *Martineau A.*, Les hyperfunctions de M. Sato. Sém. Bourbaki, 1960—1961, exp. № 214
125. *Melin A.*, Lower bounds for pseudo-differential operators. Ark. math., 1971, *9*, 117—140
126. —, *Sjostrand J.*, Fourier integral operators with complex phase functions and parametrix for an interior boundary value problem. Commun. Part. Differ. Equat., 1976 ,*1*, № 3, 313—400
127. *Melrose R.*, Equivalence of glancing hypersurfaces. Invent. math., 1976, *37*, 165—191
128. —, Differential boundary value problems of principal type. Princeton, NJ: Univ. Press, 1979, 81—112
129. —, Transformation of boundary problems. Acta math., 1981, *147*, 149—236
130. —, *Sjostrand J.*, Singularities of boundary value problems. Communs. Pure and Apl. Math., I, 1978, *31*, 593—617; II, 1982, *35*, 129—168
131. *Menikoff A.*, On hypoelliptic operators with double characteristics. Ann. Scuola norm. Super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1977 *4*, 689—724

132. —, Parametrices for subelliptic operators. Communs. Part. Diff. Equat., 1977, *2*, 69—108
133. —, Hypoelliptic operators with double characteristics. Princeton, NJ: Univ. Press, 1979, 65—79
134. *Metivier G.*, Hypoellipticité analytique sur des groupes nilpotents de rang 2. Duke Math. J., 1980, *47*, 195—221
135. —, Fonction spectrale et valeurs propres d'une class d'opérateurs non-eliptiques. Communs. Part. Differ. Equat., 1976, *1*, № 4, 465—514
136. *Nirenberg L.*, Lectures on linear partial differential equations. Amer. Math. Soc., Reg. Conf. Ser., 1973, *17*, 1—58 (Пер. на рус. яз.: *Ниренберг Л.*, Лекции о линейных дифференциальных уравнениях с частными производными. Успехи мат. наук, 1975, *30*, № 4, 147—204)
137. —, *Trèves F.*, On local solvability of linear partial differential equations. I. Necessary conditions, II Sufficient conditions. Communs Pure Appl. Math., 1970, 23, I. 1—38, II, 499—510 (Пер. на рус. яз: *Ниренберг Л.*, *Трев Ф.*, О локальной разрешимости линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Математика (сб. пер.) 1971, *15*, 1. Необходимые условия, № 3, 142—172, II. Достаточные условия, № 4, 68—110)
138. *Parenti C., Rodino L.*, Examples of hypoelliptic operators which are not microhypoelliptic. Boll. Unione mat. ital., 1980, *17-B*, S. 90—409
139. —, *Segala F.*, Propagation and reflection of singularities for a class of evolution equations. Communs. Part. Differ. Equat. 1981, *6*, 741—782
140. *Popivanov P. R., Iordanov I. V.*, Paradifferential operators and propagation of singularities for non-linear partial differential equations. Berlin: Akad. Wiss. der DDR, 1983, 127 p.
141. *Rempel S., Schulze B.-W.*, Index theory of elliptic boundary problems. Berlin: Akad. Verlag, 1982, 482 p. (Пер. на рус. яз.: *Ремпель Ш., Шульце Б.-В.*, Теория индекса эллиптических краевых задач, М.: Мир, 1986, 575 с.)
142. —, —, Parametrices and boundary symbolic calculus for elliptic boundary problems without the transmission property. Math. Nachr., 1982, *105*, 45—149
143. *Rothschild L. P., Stein E. M.*, Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta math., 1976, 137, 247—320
144. —, A criterion for hypoellipticity of operators constructed from vector fields. Commun. Part. Differ. Equat., 1979, *4*, 645—699
145. *Sato M.*, Hyperfunctions and partial differential equations. Conf. on Funct. Analysis and Related Topics. Tokyo, 1969, 91—94
146. —, Regularity of hyperfunction solutions of partial differential equations. Actes cong. intern. Math., Nice 1970, *2*, 785—794
147. —, *Kawai T., Kashiwara M.*, Hyperfunctions and pseudo-differential equations. Lect. Notes Math., 1973, *287*, 265—529
148. *Schapira P.*, Hyperfonctions et problèmes aux limites elliptiques. Bull. soc. math. Fr., 1971, *99*, 113—141
149. *Schwartz L.*, Théorie des distributions. Paris: Hermann, 1950
150. *Seeley R. T.*, Complex powers of an elliptic operator. Proc. Symp. Pure Math., 1967, *10*, 288—307
151. —, The resolvent of an elliptic boundary priblem. Amer. J. Math., 1969, *91*, 889—920
152. *Sjostrand J.*, Operators of principal type with interior boundary conditions. Univ. of Lund, 1972, 57 p.
153. —, Propagation of singularities for operator with multiple involutive characteristics. Ann. Inst. Fourier, 1976, *26*, № 1, 141—155
154. —, Fourier integral operators with complex phase functions. Princeton, NJ: Univ. Press, 1979, 51—64
155. —, Singularités analytiques microlocales, Astérisque, 1982, *95*, 1—166
156. *Taylor M.*, Fourier integral operators and harmonic analysis on compact manifolds. Proc. Symp. Pure Math., 1979, *35*, 115—136
157. —, Pseudo-differential operators. Princeton, NJ: Univ. Press, 1981, 420 p.

(Пер. на рус. яз.: *Тейлор М.*, Псевдодифференциальные операторы. М.: Мир, 1985, 469 с.)
158. —, Noncommutative microlocal analysis. I. Mem. AMS, 1984, *52*, 344 p.
159. *Trèves F.*, An invariant criterion of hypoellipticity. Amer. J. Math., 1961, *83*, 645—668
160. —, Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators. N. Y.—London: Plenum Press, 1982, 312 p.; 354 p. (Пер. на рус. яз.: *Трев Ф.*, Введение в теорию псевдодифференциальных операторов и интегральных операторов Фурье. Псевдодифференциальные операторы, 1982, *1*, 357 с., Интегральные операторы Фурье, 1982, *2*, 398 с.)
161. *Uhlmann G.*, Pseudo-differential operators with involutive double characteristics. Communs Part. Differ. Equat., 1977, *2*, 713—779
162. *Unterberger A.*, *Bokobza J.*, Les opérateurs de Calderon—Zygmund précisés. Comp. Rend. Acad. Sci., 1964, *259*, 1612—1614
163. *Wasow W.*, Asymptotic expansions for ordinary differential equations. Interscience Publishers, 1965, 434 p. (Пер. на рус. яз.: *Вазов В.*, Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1968, 464 с.)
164. *Wenston P.*, A necessary condition for the local solvability of $P_m{}^2(x, D)+$ $+P_{2m-1}(x, D)$. J. Different. Equat., 1977, *25*, № 1, 90—95
165. —, On local solvability of linear partial differential equations not of principal type. Bull. Amer. Math. Soc., 1975, *81*, № 1, 215—218

УДК 517.95+517.98

Ю. В. Егоров, **Микролокальный анализ.** «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 33 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР)». М., 1988, 5—156

Обзор современных методов, применяющихся в общей теории линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Описаны важнейшие понятия теории и результаты, полученные в основном в последние два десятилетия. Приводится большое количество примеров. Библ. 165.

УДК 517.956.3

В. Я. Иврий, **Линейные гиперболические уравнения.** «Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 33 (Итоги науки и техники ВИНИТИ АН СССР)». М., 1988, 157—247

Статья посвящена изложению теории задачи Коши и краевых задач для линейных гиперболических уравнений. Основное место в статье отводится современным методам исследования гиперболических операторов, в частности, методу интегральных операторов Фурье. Библ. 139.

Заказ 10019