J. H. Bernstein, I. M. Gel'fand, S. I. Gel'fand, Algebraic bundles over P^n and problems of linear algebra, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1978, Volume 12, Issue 3, 66–67

Функциональный анализ и его приложения,
т. 12, вып. 3, 1978, 66—67.

УДК 513.015.7

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РАССЛОЕНИЯ НА $\mathbf{P}^n$ И ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

И. Н. Бернштейн, И. М. Гельфанд, С. И. Гельфанд

1. Описание алгебраических векторных расслоений на проективном пространстве $\mathbf{P}^n$ привлекает внимание многих специалистов по алгебраической геометрии (см. [1], [2], [3]). В последнее время интерес к этой задаче еще более возрос в связи с замечательными работами М. Атьи, Р. Уорда [4] и А. А. Белавина, В. И. Захарова [5], в которых описана связь расслоений на $\mathbf{CP}^3$ с калибровочными полями на четырехмерной сфере. В настоящей заметке показано, как классификация расслоений на $\mathbf{P}^n$ сводится к задаче линейной алгебры, а именно к классификации конечномерных градуированных представлений внешней (грассмановой) алгебры от $(n+1)$ переменной. Частные случаи такого сведе́ния имеются в работах В. Барта [2] и В. Г. Дринфельда и Ю. И. Манина [3]. Близкие к нашим результаты независимо получил А. А. Бейлинсон [6]. Мы хотели бы выразить глубокую признательность Ю. И. Манину, чей доклад о работе [3] стимулировал наш интерес к этим вопросам.

2. Пусть Ξ — $(n+1)$-мерное линейное пространство над алгебраически замкнутым полем k, Λ — внешняя алгебра пространства Ξ. Введем на Λ градуировку, полагая $\deg \xi = -1$ для $\xi \in \Xi$. Под Λ-модулем мы будем понимать конечнопорожденный градуированный Λ-модуль; обозначение $V = \bigoplus\limits_j V_j$. Пусть $\mathscr{P}$ — класс свободных Λ-модулей; назовем Λ-модули V, V' *$\mathscr{P}$-эквивалентными*, если $V \oplus P = V' \oplus P'$ для некоторых $P, P' \in \mathscr{P}$.

3. Пусть $\mathbf{P}$ — проективное пространство, соответствующее Ξ. Мы построим по каждому Λ-модулю V комплекс $L(V)$ векторных расслоений над $\mathbf{P}$. А именно, положим $L_j = V_{-j} \otimes \mathscr{O}(j)$, где $\mathscr{O}(j)$ — j-я степень хопфовского расслоения; по определению, сечения расслоения L_j — это однородные функции $f(\xi)$ степени однородности со значениями в V_{-j}. Определим дифференциал $d: L_j \to L_{j+1}$, полагая $df(\xi) = \xi(f(\xi))$.

Если $\xi \in \Xi$, $\xi \neq 0$, то слой $L_\xi(V)$ комплекса $L(V)$, соответствующий точке $\bar\xi \in \mathbf{P}$, совпадает с комплексом векторных пространств $L_{\bar\xi}(V) = (\ldots \to V_1 \xrightarrow{\xi} V_0 \xrightarrow{\xi} V_{-1} \to \ldots)$. Назовем Λ-модуль V *правильным*, если $H^i(L_\xi(V)) = 0$ при $i \neq 0$ для всех $0 \neq \xi \in \Xi$. В этом случае $H^0(L(V))$ является векторным расслоением на $\mathbf{P}$; его слой в точке $\bar\xi$ совпадает с $H^0(L_\xi(V))$. Мы обозначим это расслоение через $\Phi(V)$.

Теорема 1. *Любое алгебраическое векторное расслоение на* $\mathbf{P}$ *имеет вид* $\Phi(V)$ *для некоторого правильного* Λ*-модуля* V. *При этом* $\Phi(V) \approx \Phi(V')$ *тогда и только тогда, когда* V *и* V' $\mathscr{P}$*-эквивалентны.*

Замечания. 1) Отображение $V \mapsto \Phi(V)$ (для правильных Λ-модулей V) перестановочно с тензорными произведениями, взятием симметрической и внешней степени и переходом к двойственному модулю.

2) Пусть $0 \to V \to P \to V' \to 0$ — точная последовательность Λ-модулей, где $P \in \mathscr{P}$, V — правильный модуль. Пусть W — Λ-модуль, полученный из V' сдвигом градуировки: $W_j = V'_{j+1}$. Тогда W — правильный Λ-модуль и $\Phi(W) = \Phi(V) \otimes \mathscr{O}(1)$.

3) Пусть $\xi_0, \ldots, \xi_n$ — базис в Ξ, $\omega = \xi_0 \ldots \xi_n \in \Lambda$. Легко проверить, что каждый Λ-модуль V представим в виде $V = V^0 \oplus P$, где $P \in \mathscr{P}$, $\omega V^0 = 0$, причем $\mathscr{P}$-эквивалентным модулям V отвечают изоморфные модули V^0. Поэтому векторные расслоения на P классифицируются правильными модулями над алгеброй $\Lambda/(\omega)$.

3. Для формулировки более точного результата нам понадобится аппарат производных категорий (см. [7]). Пусть Coh — категория когерентных пучков на $\mathbf{P}$, $C^b(\mathrm{Coh})$ — категория ограниченных комплексов объектов Coh и $D^b(\mathrm{Coh})$ — производная категория.

Пусть $\mathscr{M}(\Lambda)$ — категория Λ-модулей. Рассматривая для каждого $V \in \mathscr{M}(\Lambda)$ $L(V)$ как комплекс пучков на $\mathbf{P}$, мы получаем функтор $L: \mathscr{M}(\Lambda) \to C^b(\mathrm{Coh})$. Через L_D обозначим сквозной функтор $\mathscr{M}(\Lambda) \to C^b(\mathrm{Coh}) \to D^b(\mathrm{Coh})$. Легко проверить, что для $V \in \mathscr{P}$ комплекс $L(V)$ ацикличен, так что $L_D(V) \approx 0$. Поэтому функтор L_D пропускается через некоторый функтор $L'_D: \mathscr{M}(\Lambda)/\mathscr{P} \to D^b(\mathrm{Coh})$, где $\mathscr{M}(\Lambda)/\mathscr{P}$ — фактор-категория $\mathscr{M}(\Lambda)$ по семейству морфизмов, пропускающихся через объекты $P \in \mathscr{P}$ (см. [7] или [8]).

Теорема 2. *Функтор* $L'_D: \mathscr{M}(\Lambda)/\mathscr{P} \to D^b(\mathrm{Coh})$ *является эквивалентностью категорий.*

Замечания. 1) Пусть $\mathcal{N}$ — полная подкатегория в $\mathcal{M}(\Lambda)/\mathcal{P}$, состоящая из таких модулей V, что $H^i(L(V)) = 0$ при $i \neq 0$. Тогда из теоремы 2 вытекает, что функтор $V \mapsto H^0(L(V))$ задает эквивалентность категории $\mathcal{N}$ с категорией Coh. Отсюда легко вывести теорему 1.

2) Эквивалентность $L_D^{\bullet}$ задает на $\mathcal{M}(\Lambda)/\mathcal{P}$ структуру триангулированной категории. Эта структура характеризуется условием, что для любой точной последовательности $0 \to V' \to V \to V'' \to 0$ в $\mathcal{M}(\Lambda)$ морфизмы $V' \to V \to V''$ включаются в треугольник в $\mathcal{M}(\Lambda)/\mathcal{P}$, причем таким способом получаются все пары морфизмов, включаемых в треугольники. В частности, если $V \in \mathcal{P}$, то $V'' = T(V)$, где T — функтор трансляции.

3) Пусть k — тривиальный Λ-модуль степени 0, V — правильный Λ-модуль. Тогда $H^i(\mathbf{P}, \Phi(V)) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}(\Lambda)/\mathcal{P}}(k, T^iV)$. При $i \neq 0$ эта группа равна $\mathrm{Ext}^i_{\mathcal{M}(\Lambda)}(k, V)$.

4. Изложим схему доказательства теоремы 2. Пусть $X = \Xi^*$, $S = S(X)$ — симметрическая алгебра пространства X с обычной градуировкой $S = \bigoplus_{j \geqslant 0} S_j$, $\mathcal{M}(S)$ — категория градуированных конечнопорожденных S-модулей. Обозначим через $C^b(S)$ и $C^b(\Lambda)$ категории ограниченных комплексов объектов из $\mathcal{M}(S)$ и $\mathcal{M}(\Lambda)$, причем в случае $\mathcal{M}(\Lambda)$ будем считать, что дифференциал ∂ в комплексе удовлетворяет условию $\partial\xi = -\xi\partial$ при $\xi \in \Xi$.

Построим функтор $F\colon C^b(\Lambda) \to C^b(S)$. Будем рассматривать комплекс $(\mathbf{V}, \partial) \in C^b(\Lambda)$ как биградуированное пространство $\mathbf{V} = \bigoplus V_j^i$, где i — номер модуля в комплексе, j — градуировка в $\mathcal{M}(\Lambda)$; аналогично для комплексов $(\mathbf{W}, d) \in C^b(S)$. Дифференциалы ∂ и d имеют бистепень $(1, 0)$. Положим $F(\mathbf{V}) = \mathbf{W} = S \otimes \mathbf{V}$ (тензорное произведение над k). Дифференциал d в $\mathbf{W}$ зададим формулой $d(s \otimes v) = \sum x_i s \otimes \xi_i v + s \otimes \partial v$, где $\{x_i\}$, $\{\xi_i\}$ — сопряженные базисы в X и Ξ; бистепень в $\mathbf{W}$ определим так: если $s \in S_k$, $v \in V_j^i$, то $s \otimes v \in W_{j+k}^{i-j}$.

Пусть $D^b(\Lambda)$ и $D^b(S)$ — производные категории, отвечающие $C^b(\Lambda)$ и $C^b(S)$.

Теорема 3. *Функтор $F\colon C^b(\Lambda) \to C^b(S)$ продолжается до функтора $F_D\colon D^b(\Lambda) \to D^b(S)$; функтор F_D является эквивалентностью триангулированных категорий.*

Для доказательства теоремы 3 нужно рассмотреть сопряженный функтор $G\colon C(S) \to C(\Lambda)$. Он определяется так: $G(\mathbf{W}) = \mathbf{V} = \mathrm{Hom}_k(\Lambda, \mathbf{W})$; $\partial(v)\lambda = -\sum x_i v(\xi_i\lambda) + d(v(\lambda))$; $V_j^i(\Lambda_k) \subset W_{j+k}^{i-j-k}$. Хотя образ $G(C^b(S))$ не лежит в $C^b(\Lambda)$, G позволяет определить функтор $G_D\colon D^b(S) \to D^b(\Lambda)$. Используя комплекс Кошуля, легко проверить, что функтор G_D обратен функтору F_D.

5. Пусть $\mathcal{F}$, $\mathcal{I}$ — полные подкатегории в $D^b(S)$ и $D^b(\Lambda)$, порожденные комплексами, состоящими из конечномерных (соответственно свободных) модулей. Легко проверить, что $F_D^{-1}(\mathcal{F}) = \mathcal{I}$, так что F_D задает эквивалентность категории $D^b(\Lambda)/\mathcal{I} \to D^b(S)/\mathcal{F}$ (фактор-категории в смысле Вердье [7]).

Используя теорему Серра, описывающую категорию Coh в терминах $\mathcal{M}(S)$ (см. [9]), легко получить, что категория $D^b(\mathrm{Coh})$ эквивалентна $D^b(S)/\mathcal{F}$. Таким образом, из теоремы 3 вытекает

Теорема 4. *Категории $D^b(\mathrm{Coh})$ и $D^b(\Lambda)/\mathcal{I}$ эквивалентны.*

6. Предложение. *Естественное вложение $\mathcal{M}(\Lambda) \to D^b(\Lambda)$ задает эквивалентность категорий $\mathcal{M}(\Lambda)/\mathcal{P} \to D^b(\Lambda)/\mathcal{I}$.*

Предложение вытекает из того, что свободные Λ-модули проективны и инъективны. Из этого предложения и теоремы 4 следует теорема 2.

7. Теоремы 1—4 верны для произвольного поля k; теоремы 3, 4 верны, если k заменить на произвольную базу Z, Ξ — на локально свободный пучок $\mathcal{O}_Z$-модулей, $\mathbf{P}$ — на проективный спектр пучка алгебр $S = S(X)$, где $X = \Xi^*$.

Московский государственный университет

Поступило в редакцию 10 января 1978 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Horrocks G., Proc. London Math. Soc. 14 (1964), 689—713. 2. Barth W., Invent. Math. 42 (1977), 63—92. 3. Дринфельд В. Г., Манин Ю. И., УМН XXXIII, вып. 3 (1978), 165—166. 4. Atiyah M., Ward R., Comm. Math. Phys. 55 (1977), 117—124. 5. Белавин А. А., Захаров В. И., Препринт ИФ, Черноголовка, 1977. 6. Бейлинсон А. А., Функц. анализ 12, вып. 3 (1978), 68—69. 7. Verdier J.-L., Lecture Notes in Math. 569 (1977), 262—311. 8. Auslander M., Reiten I., Lecture Notes in Math. 488 (1975), 1—8. 9. Серр Ж. П., В сб. «Расслоеные пространства», М., ИЛ, 1957, 372—453.