Д. В. Талалаев, Квантовая система Годена, *Функц. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 1, 86–91

DOI: https://doi.org/10.4213/faa25

IP: 95.216.226.236
8 ноября 2019 г., 23:41:38

УДК 51-72:530.145

Квантовая система Годена*

© 2006. Д. В. Талалаев

1. Классическая система Годена. Система Годена была построена [1, Sec. 13.2.2] как предел XXX-модели Гейзенберга. Она описывает одномерную цепочку взаимодействующих частиц со спином. Особенный интерес к данной системе

*Данная работа выполнялась при частичной поддержке РФФИ, грант 04-01-00702.

в последнее время вызван ролью, которую она играет в геометрическом соответствии Ленглендса [2, 3] и теории изомонодромных деформаций [4], а также ее связью с системой Хитчина [5, 6].

Напомним конструкцию Годена и принятые обозначения. Введем оператор Лакса

$$L(u) = \sum_{i=1,\dots,N} \frac{\Phi_i}{u - z_i}, \tag{1}$$

где $z_i \in \mathbb{C}$, а вычеты Φ_i определяются как $n \times n$-матрицы с элементами из прямой суммы алгебр Ли $\mathfrak{gl}_n \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}_n$ (N экземпляров) таким образом, что (k, l)-й матричный элемент в Φ_i равен (k, l)-му генератору e_{kl} i-го экземпляра алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ в рассматриваемой прямой сумме. Выражения $I_k(u) = \operatorname{Tr} L^k(u)$ являются рациональными функциями по параметру u со значениями в симметрической алгебре $\mathscr{A}_{cl} = S(\mathfrak{gl}_n) \otimes \dots \otimes S(\mathfrak{gl}_n)$, которая совпадает с алгеброй полиномиальных функций на $\mathfrak{gl}_n^* \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}_n^*$, где $\mathfrak{gl}_n^*$ — двойственное пространство к алгебре Ли $\mathfrak{gl}_n$. Алгебра $\mathscr{A}_{cl}$ оснащена пуассоновой структурой, определяемой скобкой Кириллова на $\mathfrak{gl}_n^*$, относительно которой выражения $I_k(u)$ при разных значениях параметров находятся в инволюции:

$$\{I_k(u), I_m(v)\} = 0; \tag{2}$$

$I_k(u)$ рассматривают как производящие функции коммутирующих элементов в $\mathscr{A}_{cl}$, в частности, $I_2(u)$ представляется в виде

$$\operatorname{Tr} L^2(u) = \sum_i \frac{\operatorname{Tr} \Phi_i^2}{(u - z_i)^2} + \sum_k \frac{1}{u - z_k} \left(\sum_{j \neq k} \frac{2 \operatorname{Tr} \Phi_k \Phi_j}{z_k - z_j} \right). \tag{3}$$

Из формулы (2) следует, что выражения

$$H_{2,k} = \sum_{j \neq k} \frac{2 \operatorname{Tr} \Phi_k \Phi_j}{z_k - z_j} \in \mathscr{A}_{cl}, \tag{4}$$

называемые квадратичными гамильтонианами системы Годена, также находятся в инволюции. Остальные классические гамильтонианы Годена получаются как коэффициенты разложения функции $I_k(u)$ в полюсах.

Непосредственно классическая система Годена определяется следующим образом: рассмотрим прямое произведение

$$\mathscr{O}_1 \times \dots \times \mathscr{O}_N \subset \mathfrak{gl}_n^* \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}_n^*$$

коприсоединенных орбит алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$; гамильтонианы Годена ограничиваются на данное симплектическое подмногообразие и, кроме того, являются инвариантными относительно диагонального действия группы GL_n. Фазовым пространством системы Годена называется результат

$$\mathscr{M} = \mathscr{O}_1 \times \dots \times \mathscr{O}_N // GL_n$$

проведения гамильтоновой редукции по диагональному действию группы с нулевым уровнем момента. Гамильтонианы Годена определяют интегрируемую систему на $\mathscr{M}$.

Задача квантования системы Годена заключается в отыскании коммутативного семейства операторов в $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$, которое в классическом пределе переходит в семейство классических гамильтонианов. В данном случае классический предел состоит в переходе к ассоциированной градуированной алгебре

$Gr(U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}) = S(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$ относительно PBW-фильтрации. Теорема существования такого семейства доказана в [7]; кроме того, известно, что выражения для квадратичных гамильтонианов Годена (4), в которых генераторы алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$ заменены на соответствующие генераторы универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{gl}_n)$, удовлетворяют условию квантования, т. е. они коммутируют и в классическом пределе переходят в классические выражения. В данной работе предлагается явная конструкция полного семейства квантовых гамильтонианов для системы Годена.

2. Янгиан и подалгебра Бете.

Янгиан $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Эта алгебра Хопфа была построена в работе [8] и играет важную роль в задаче описания рациональных решений уравнения Янга–Бакстера. Она, прежде всего, является ассоциативной алгеброй, порожденной элементами $t_{ij}^{(k)}$ (в данном разделе $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, n$, $k = 1, \dots, \infty$). Ее соотношения описываются в терминах производящей функции $T(u, \mathsf{h}) \in Y(\mathfrak{gl}_n) \otimes \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)[[u^{-1}, \mathsf{h}]]$,

$$T(u,\mathsf{h}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes t_{ij}(u,\mathsf{h}), \qquad t_{ij}(u,\mathsf{h}) = \delta_{ij} + \sum_k t_{ij}^{(k)} \mathsf{h}^k u^{-k},$$

где E_{ij} — матрицы с 1 на (i,j)-м месте. Соотношения записываются с помощью R-матрицы Янга

$$R(u,\mathsf{h}) = 1 - \frac{\mathsf{h}}{u} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji}$$

и принимают следующий вид:

$$R(z-u,\mathsf{h}) T_1(z,\mathsf{h}) T_2(u,\mathsf{h}) = T_2(u,\mathsf{h}) T_1(z,\mathsf{h}) R(z-u,\mathsf{h}). \tag{5}$$

Обе части тождества рассматриваются как элементы из $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes 2} \otimes Y(\mathfrak{gl}_n)[[z^{-1}, z, u^{-1}, u, \mathsf{h}]]$. При этом рациональная функция $1/(z-u)$ в выражении для R-матрицы разлагается в ряд,

$$\frac{1}{z-u} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{u^l}{z^{l+1}}\,.$$

Кроме того, приняты следующие обозначения:

$$T_1(z,\mathsf{h}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes 1 \otimes t_{ij}(z,\mathsf{h}),$$

$$T_2(u,\mathsf{h}) = \sum_{i,j} 1 \otimes E_{ij} \otimes t_{ij}(u,\mathsf{h}).$$

«Представление вычисления». Напомним конструкцию так называемого гомоморфизма «вычисления» $\rho\colon Y(\mathfrak{gl}_n) \to U(\mathfrak{gl}_n)$. Для этого определим рациональную функцию от u, h со значениями в $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \otimes U(\mathfrak{gl}_n)$

$$T_{ev}(u,\mathsf{h}) = 1 + \frac{\mathsf{h}}{u} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes e_{ij} \stackrel{\mathrm{def}}{=}: 1 + \frac{\mathsf{h}\Phi}{u}, \tag{6}$$

где e_{ij} — генераторы алгебры Ли $\mathfrak{gl}_n$. Функция $T_{ev}(u,\mathsf{h})$ удовлетворяет RTT-соотношению (5); следовательно, отображение $t_{ij}^{(1)} \mapsto e_{ij}$, $t_{ij}^{(k)} \mapsto 0$ при $k > 1$ определяет гомоморфизм алгебр.

Рассмотрим тензорное произведение $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\mathsf{h},\mathsf{h}^{-1}]]$ и производящую функцию (6) для отображения вычисления в l-ю компоненту рассматриваемого тензорного произведения $T^l_{ev}(u-z_l,\mathsf{h})$. Оказывается, что для произвольного набора комплексных чисел $(z_1,\dots,z_N)$ выражение

$$T^\alpha(u,\mathsf{h}) = T^1_{ev}(u-z_1,\mathsf{h})T^2_{ev}(u-z_2,\mathsf{h})\cdots T^k_{ev}(u-z_N,\mathsf{h}), \tag{7}$$

являющееся рациональной функцией от u и h со значениями в $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)\otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$, определяет гомоморфизм $\rho_\alpha\colon Y(\mathfrak{gl}_n)\to U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\mathsf{h},\mathsf{h}^{-1}]]$, а именно, имеет место следующая

Лемма 1. *Отображение, ставящее в соответствие генератору $t^{(k)}_{ij}$ янгиана (i,j)-й матричный элемент коэффициента при u^{-k} разложения функции $T^\alpha(u,\mathsf{h})\mathsf{h}^{-k}$ в точке $u=\infty$, определяет гомоморфизм алгебр $\rho_\alpha\colon Y(\mathfrak{gl}_n)\to U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\mathsf{h},\mathsf{h}^{-1}]]$.*

Подалгебра Бете. Данная подалгебра тесно связана с квантовым методом обратной задачи (КМОЗ) [9], а именно ее генераторы являются квантовыми интегралами для XXX-модели Гейзенберга [10, 11]. Здесь используется описание подалгебры Бете работы [12, Sec. 2.14]: рассмотрим комплекснозначную $n\times n$-матрицу C и производящую функцию $T(u,\mathsf{h})$ генераторов янгиана $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Введем также обозначение A_n для матрицы антисимметризатора в пространстве $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ и следующие элементы:

$$T_m(u,\mathsf{h}) = \sum_{ij} 1\otimes\cdots\otimes 1\otimes \overset{m}{E_{ij}}\otimes 1\otimes\cdots\otimes 1\otimes t_{ij}(u,\mathsf{h}) \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}\otimes Y(\mathfrak{gl}_n)[[u,u^{-1},\mathsf{h}]].$$

Рассмотрим выражения вида

$$\tau_k(u,\mathsf{h}) = \mathrm{Tr}\, A_n T_1(u,\mathsf{h})T_2(u-\mathsf{h},\mathsf{h})\cdots T_k(u-\mathsf{h}(k-1),\mathsf{h})C_{k+1}\cdots C_n, \qquad k=1,\dots n,$$

называемые генераторами подалгебры Бете, где след вычисляется по $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$, а разложение в ряд для $T_m(u-\mathsf{h}(m-1),\mathsf{h})$ вычисляется в окрестности точки $u=\infty$, т. е., например,

$$\frac{1}{u-\mathsf{h}} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\mathsf{h}^m}{u^{m+1}}.$$

Утверждается, что эти выражения лежат в $Y(\mathfrak{gl}_n)[[u,u^{-1},\mathsf{h}]]$ и порождают коммутативное семейство в следующем смысле:

$$[\tau_i(u,\mathsf{h}),\tau_j(v,\mathsf{h})] = 0.$$

Кроме того, данное семейство максимально, если матрица C имеет простой спектр. Далее мы будем рассматривать единичную матрицу C и образы генераторов подалгебры Бете при отображении «вычисления», которые являются мероморфными функциями от u со значениями в $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\mathsf{h}]]$. Для простоты мы будем их обозначать теми же буквами:

$$\tau_k(u,\mathsf{h}) = \mathrm{Tr}\, A_n T^\alpha_1(u,\mathsf{h})T^\alpha_2(u-\mathsf{h},\mathsf{h})\cdots T^\alpha_k(u-\mathsf{h}(k-1),\mathsf{h}), \qquad k=1,\dots,n. \tag{8}$$

3. Квантовая система Годена. В этом разделе для удобства используется другой базис в семействе гамильтонианов Годена, а именно вместо симметрических полиномов Ньютона от собственных чисел оператора Лакса $L(u)\in$

$\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)\otimes(\mathfrak{gl}_n\oplus\cdots\oplus\mathfrak{gl}_n)[[u^{-1}]]$, определяемого формулой (1), используются коэффициенты его характеристического многочлена

$$\det(L(u)-l)\,n!=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^{n-k}I_k^{\mathrm{ch}}(u)l^{n-k}.$$

Напомним, что коэффициенты характеристического многочлена могут быть получены по формуле

$$I_k^{\mathrm{ch}}(u)=\mathrm{Tr}\,A_nL_1(u)L_2(u)\cdots L_k(u), \tag{9}$$

где $L_m(u)\in\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}\otimes(\mathfrak{gl}_n\oplus\cdots\oplus\mathfrak{gl}_n)[[u^{-1}]]$ является образом оператора Лакса при вложении $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)\hookrightarrow\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ в качестве m-го сомножителя, A_n — матрица антисимметризатора в $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ и рассматривается след по $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$. Связь данных производящих функций и введенных ранее для малых показателей k определяется формулами

$$\begin{aligned}
I_1^{\mathrm{ch}}(u)&=I_1(u)(n-1)!,\\
I_2^{\mathrm{ch}}(u)&=(I_1^2(u)-I_2(u))(n-2)!,\\
I_3^{\mathrm{ch}}(u)&=(I_1^3(u)-3I_1(u)I_2(u)+2I_3(u))(n-3)!\,.
\end{aligned}\tag{10}$$

Рассмотрим квантовый оператор Лакса $L^q(u)\in\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)\otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[u]]$, получаемый из классического оператора Лакса с помощью вложения $\mathfrak{gl}_n\hookrightarrow U(\mathfrak{gl}_n)$. Рассмотрим «квантовый характеристический многочлен»

$$\mathrm{qchar}(u)=\mathrm{Tr}\,A_n(L_1^q(u)-\partial_u)\cdots(L_n^q(u)-\partial_u),$$

который является дифференциальным оператором по переменной u с рациональными коэффициентами со значениями в $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$. Обозначения в формуле выше полностью соответствуют обозначениям предыдущего раздела, т.е. A_n — матрица антисимметризатора в $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$, $L_i^q(u)\in\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}\otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[u]]$ получается из $L^q(u)$ при вложении $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)\hookrightarrow\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ в качестве i-го сомножителя и рассматривается след по $\mathrm{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$. Представим $\mathrm{qchar}(u)$ в виде

$$\mathrm{qchar}(u)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k(-1)^{n-k}QI_k(u)\partial_u^{n-k}. \tag{11}$$

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Коэффициенты $QI_k(u)$ квантового характеристического многочлена* (11) *определяют квантование классических гамильтонианов Годена $I_k^{\mathrm{ch}}(u)$, т.е. они коммутируют,*

$$[QI_k(u),QI_m(v)]=0,$$

и их классический предел в смысле перехода к ассоциированной градуированной алгебре совпадает с классическими гамильтонианами $I_k^{\mathrm{ch}}(u)$.

Набросок доказательства. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned}
\mathrm{Qchar}(u,\mathsf{h})&=\mathrm{Tr}\,A_n(e^{-\mathsf{h}\partial_u}T_1(u,\mathsf{h})-1)(e^{-\mathsf{h}\partial_u}T_2(u,\mathsf{h})-1)\cdots(e^{-\mathsf{h}\partial_u}T_n(u,\mathsf{h})-1)\\
&=\sum_{j=0}^{n}\tau_j(u-\mathsf{h},\mathsf{h})(-1)^{n-j}C_n^je^{-j\mathsf{h}\partial_u},
\end{aligned}\tag{12}$$

где $T(u,\mathsf{h})$ — производящая функция для $Y(\mathfrak{gl}_n)$.

Его образ при отображении вычисления в разложении в ряд по h представляется в виде

$$\rho^\alpha\,\mathrm{Qchar}(u,\mathsf{h}) = \mathsf{h}^n\,\mathrm{qchar}(u) + O(\mathsf{h}^{n+1}),$$

поскольку

$$e^{-\mathsf{h}\partial_u}T^\alpha(u) - 1 = \mathsf{h}(L(u) - \partial_u) + O(\mathsf{h}^2).$$

Выражение (12) может быть представлено в виде ряда по ∂_u. Поскольку генераторы подалгебры Бете коммутируют между собой, коэффициенты данного ряда, являющиеся рациональными функциями по u со значениями в $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\mathsf{h}]]$, тоже коммутируют при разных значениях параметра u. Следовательно, коммутируют также их младшие коэффициенты по h, которые и являются искомыми коэффициентами квантового характеристического многочлена $\mathrm{qchar}(u)$.

Утверждение о классическом пределе коэффициентов $QI_k(u)$ следует из формулы (9).

Замечание 1. Следует отметить, что независимость квантовых гамильтонианов Годена непосредственно вытекает из независимости их классических пределов, поскольку наличие алгебраического соотношения на построенные операторы из $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$ влечет за собой некоторое нетривиальное соотношение на их старшие символы. Вопрос о максимальности данного семейства также решается положительно исходя из максимальности семейства классических гамильтонианов.

Замечание 2. Основной результат данной работы может быть интерпретирован как построение квазиклассического предела XXX-модели Гейзенберга.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность коллективу Группы математической физики ИТЭФ, в особенности А. В. Червову и Л. Г. Рыбникову, а также С. М. Харчеву и С. М. Хорошкину. Автор признателен рецензентам за указание на ссылку [10], без которой изложение результата нельзя было считать полноценным.

Литература

1. *Gaudin M.* La Fonction d'Onde de Bethe. Masson, Paris, 1983. **2.** *Frenkel E.* Affine algebras, Langlands duality and Bethe ansatz. q-alg/9506003. **3.** *Frenkel E.* Gaudin model and opers, math.QA/0407524. **4.** *Levin A. M., Olshanetsky M. A.* Classical limit of the Knizhnik–Zamolodchikov–Bernard equations as hierarchy of isomonodromic deformations. Free fields approach, hep-th/9709207. **5.** *Enriquez B., Rubtsov V.* Math. Res. Lett., **3**, 343–357 (1996); alg-geom/9503010. **6.** *Nekrasov N.* Comm. Math. Phys., **180**, 587–604 (1996); hep-th/9503157. **7.** *Feigin B., Frenkel E.* Int. J. Mod. Phys. A 7, Suppl. 1A, 197–215 (1992). **8.** *Drinfeld V. G.* Докл. АН СССР, **283**, вып. 5, 1060–1064 (1985). **9.** *Тахтаджян Л. А., Фаддеев Л. Д.* УМН, **34**, вып. 5, 13–63 (1979). **10.** *Kulish P. P., Sklyanin E. K.* In: Lect. Notes in Phys., Vol. 151, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1982, pp. 61–119. **11.** *Sklyanin E. K.* Progr. Theor. Phys. Suppl., **118**, 35–60 (1995); solv-int/9504001. **12.** *Molev A. I.* Yangians and their applications. math.QA/0211288.

Институт теоретической и экспериментальной физики
email: talalaev@aport.ru

Поступило в редакцию
26 мая 2004 г.