

Math-Net.Ru

All Russian mathematical portal

V. G. Drinfeld, On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with $\text{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, *Algebra i Analiz*, 1990, Volume 2, Issue 4, 149–181

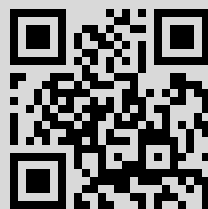
Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use

<http://www.mathnet.ru/eng/agreement>

Download details:

IP: 95.216.226.236

November 9, 2019, 03:29:55



© 1990 г.

В.Г. Дринфельд

О КВАЗИТРЕУГОЛЬНЫХ КВАЗИХОПФОВЫХ АЛГЕБРАХ И ОДНОЙ ГРУППЕ, ТЕСНО СВЯЗАННОЙ С $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$

Доказывается анонсированная ранее теорема о структуре квазитреугольных квазихопфовых алгебр в рамках теории возмущений по постоянной Планка. При этом используется проунипотентный вариант одной группы, введенной Гротендиком и содержащей $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$.

§ 1. Введение

Настоящая работа посвящена главным образом доказательству анонсированной в [1] теоремы о структуре квазитреугольных квазихопфовых алгебр в рамках теории возмущений по постоянной Планка \hbar . В качестве технического средства используется проунипотентный вариант одной группы, введенной Гротендиком [2] и представляющей огромный интерес ввиду ее тесной связи с $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$.

Напомним основные определения из [1]. Квазихопфова алгебра отличается от алгебры Хопфа тем, что аксиома коассоциативности заменена более слабым условием. Точнее, согласно определению из [1], квазихопфова алгебра над коммутативным кольцом k — это набор $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$, где A — ассоциативная k -алгебра с единицей, Δ — гомоморфизм $A \rightarrow A \otimes A$, ε — гомоморфизм $A \rightarrow k$ (предполагается, что $\Delta(1)=1$, $\varepsilon(1)=1$), а Φ — обратимый элемент $A \otimes A \otimes A$, причем

$$(\text{id} \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi \cdot (\Delta \otimes \text{id})(\Delta(a)) \cdot \Phi^{-1}, \quad a \in A, \quad (1.1)$$

$$(\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\Phi) = (1 \otimes \Phi) \cdot (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\Phi) \cdot (\Phi \otimes 1), \quad (1.2)$$

$$(\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta = \text{id} = (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta, \quad (1.3)$$

$$(\text{id} \otimes \varepsilon \otimes \text{id})(\Phi) = 1, \quad (1.4)$$

и выполнена аксиома, которая в хопфовом случае, т.е. при $\Phi=1$, сводится к существованию и биективности антипода. В рассматриваемой в настоящей работе ситуации, когда $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ — деформация алгебры Хопфа, зависящая от „бесконечно малого“ параметра \hbar , эта аксиома выполнена автоматически, согласно теореме 1.6 из [1]. Как и в хопфовом случае, Δ называется коумножением, а ε — коединицей.

В [1] обобщено на квазихопфов случай понятие квазитреугольной алгебры Хопфа, введенное в § 10 из [3] под влиянием квантового метода обратной задачи [4]. Именно квазитреугольная квазихопфова алгебра - это набор $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$, где $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ - квазихопфова алгебра, а R - обратимый элемент $A \otimes A$ такой, что

$$\Delta'(a) = R\Delta(a)R^{-1}, \quad a \in A, \quad (1.5)$$

$$(\Delta \otimes \text{id})(R) = \Phi^{312}R^{13}(\Phi^{132})^{-1}R^{23}\Phi, \quad (1.6a)$$

$$(\text{id} \otimes \Delta)(R) = (\Phi^{231})^{-1}R^{13}\Phi^{213}R^{12}\Phi^{-1}. \quad (1.6b)$$

Здесь $\Delta' = \sigma \circ \Delta$, где $\sigma: A \otimes A \rightarrow A \otimes A$ переставляет тензорные сомножители. Если $R = \sum_i a_i \otimes b_i$,

то по определению $R^{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1$, $R^{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i$, $R^{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i$. Поясним также,

что если $\Phi = \sum_j x_j \otimes y_j \otimes z_j$, то $\Phi^{312} = \sum_j y_j \otimes z_j \otimes x_j$.

Смысл аксиом (1.1)–(1.6) в том, что представления квазитреугольной квазихопфовой алгебры A образуют квазитензорную категорию в смысле [5] (см. также § 3 из [1]). Это значит, что, во-первых, в категории представлений A имеется функтор тензорного произведения: если заданы представления A в k -модулях V_1 и V_2 , то представление A в $V_1 \otimes V_2$ определяется, как композиция $A \xrightarrow{\Delta} A \otimes A \rightarrow \text{End}_k(V_1 \otimes V_2)$. Во-вторых, имеются функториальные изоморфизмы коммутативности $c: V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \otimes V_1$ и ассоциативности $a: (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$, где V_i - представления A . Именно a - это оператор в $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$, соответствующий Φ , а c - композиция оператора в $V_1 \otimes V_2$, соответствующего R , и обычного изоморфизма $\sigma: V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \otimes V_1$. В-третьих, имеем единичное представление k и изоморфизмы $V \otimes k \xrightarrow{\sim} V$, $k \otimes V \xrightarrow{\sim} V$ для любого представления V . Наконец, (1.2), (1.4), (1.6) обеспечивают коммутативность диаграмм

$$((V_1 \otimes V_2) \otimes V_3) \otimes V_4 \xrightarrow{\sim} (V_1 \otimes V_2) \otimes (V_3 \otimes V_4) \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes (V_2 \otimes (V_3 \otimes V_4)) \quad (1.7)$$

$$\downarrow \wr$$

$$\downarrow \wr$$

$$(V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)) \otimes V_4 \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes ((V_2 \otimes V_3) \otimes V_4)$$

$$V_1 \otimes V_2$$

$$\swarrow \quad \searrow$$

$$(V_1 \otimes k) \otimes V_2 \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes (k \otimes V_2)$$

(1.8)

$$\begin{array}{ccc}
 (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 & \xrightarrow{c} V_3 \otimes (V_1 \otimes V_2) & \xleftarrow{a} (V_3 \otimes V_1) \otimes V_2 \\
 a \downarrow & & \uparrow c \otimes \text{id} \\
 V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) & \xrightarrow{\text{id} \otimes c} V_1 \otimes (V_3 \otimes V_2) & \xrightarrow{a^{-1}} (V_1 \otimes V_3) \otimes V_2
 \end{array} \quad (1.9a)$$

$$\begin{array}{ccc}
 V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) & \xrightarrow{c} (V_2 \otimes V_3) \otimes V_1 & \xrightarrow{a} V_2 \otimes (V_3 \otimes V_1) \\
 a^{-1} \downarrow & & \uparrow \text{id} \otimes c \\
 (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 & \xrightarrow{c \otimes \text{id}} (V_2 \otimes V_1) \otimes V_3 & \xrightarrow{a} V_2 \otimes (V_1 \otimes V_3)
 \end{array} \quad (1.9b)$$

Отметим, что, вообще говоря, $R^{21} \neq R^{-1}$ и, следовательно, изоморфизм коммутативности не инволютивен (в этом отличие квазитензорных категорий от тензорных [6]).

Если $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ - квазитреугольная квазихопфова алгебра, а F - обратимый элемент $A \otimes A$ такой, что $(\text{id} \otimes \varepsilon)(F) = 1 = (\varepsilon \otimes \text{id})(F)$ то, положив

$$\tilde{\Delta}(a) = F \cdot \Delta(a) \cdot F^{-1}, \quad (1.10)$$

$$\tilde{\Phi} = F^{23} \cdot (\text{id} \otimes \Delta)(F) \cdot \Phi \cdot (\Delta \otimes \text{id})(F^{-1}) \cdot (F^{12})^{-1}, \quad (1.11)$$

$$\tilde{R} = F^{21} \cdot R \cdot F^{-1}, \quad (1.12)$$

получим новую квазитреугольную квазихопфову алгебру $(A, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \tilde{\Phi}, \tilde{R})$, о которой говорят, что она получается из $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ скручиванием посредством F . Квазитензорные категории, соответствующие $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ и $(A, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \tilde{\Phi}, \tilde{R})$, эквивалентны. Поэтому естественно относиться к скручиванию, как к "калибровочному" преобразованию.

Мы будем изучать квазитреугольные квазихопфовы алгебры в рамках теории возмущений по \hbar , ограничившись случаем характеристики 0. Точный смысл этим словам придает следующее определение (поясним, что QUE - сокращение от "quantized universal enveloping").

О п р е д е л е н и е. Пусть k - поле характеристики 0. Квазитреугольная квазихопфова QUE-алгебра над $k[[\hbar]]$ - это топологическая квазитреугольная квазихопфова алгебра $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ над $k[[\hbar]]$ такая, что $A/\hbar A$ - универсальная обертывающая алгебра со стандартным коумножением, а A , как топологический $k[[\hbar]]$ -модуль, изоморфен $V[[\hbar]]$ для некоторого векторного пространства V над k .

З а м е ч а н и е. Так как $A/\hbar A$ - универсальная обертывающая алгебра, то из (1.4) и обратимости Φ следует, что $\Phi = 1 \bmod \hbar$. По аналогичной причине $R = 1 \bmod \hbar$, а при скручивании квазитреугольных квазихопфовых QUE-алгебр $F = 1 \bmod \hbar$.

Под влиянием [7-9] в [1] предложен следующий метод построения квазитреугольных квазихопфовых QUE-алгебр. Пусть \mathfrak{g} - алгебра Ли над $k[[\hbar]]$, которая как $k[[\hbar]]$ -модуль изоморфна $V[[\hbar]]$ для некоторого векторного пространства V над k (условие на \mathfrak{g} означает, что \mathfrak{g} - деформация алгебры Ли \mathfrak{g}_0 над k , где

$g_0 = g/hg$; поэтому такие алгебры g мы будем называть деформационными). Пусть задан симметричный g -инвариантный тензор $t \in g \otimes g$, где \otimes — пополненное тензорное произведение. Положим $A = U_g$, где под U_g понимается h -адическое пополнение универсальной обертывающей алгебры. Определим обычным образом $\varepsilon: A \rightarrow k[[h]]$, $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ (где \otimes — пополненное тензорное произведение) и положим $R = e^{ht/2}$. Тогда (1.3)–(1.5) выполнены и остается найти $\Phi \in A \otimes A$, удовлетворяющее (1.1), (1.2), (1.4), (1.6) (отметим, что (1.1) в рассматриваемой ситуации означает g -инвариантность Φ). Первым основным результатом настоящей статьи является

Т е о р е м а А. *Такое Φ существует и единственно с точностью до скручивания посредством симметричных g -инвариантных $F \in A \otimes A$.*

З а м е ч а н и я. 1) Если Δ — обычное коумножение в $A = U_g$, $R = e^{ht/2}$, а $\tilde{\Delta}$ и \tilde{R} определяются формулами (1.10), (1.12), то равенства $\tilde{\Delta} = \Delta$, $\tilde{R} = R$ эквивалентны g -инвариантности и симметричности F (t коммутирует с g -инвариантными элементами $A \otimes A$, так как $t = (\Delta(C) - C \otimes 1 - 1 \otimes C)/2$, где $C \in U_g$ — элемент Казимира).

2) Одновременно с теоремой А доказывается, что если условие $R = e^{ht/2}$ заменить, на первый взгляд, более слабыми условиями симметричности и g -инвариантности R , то автоматически $R = e^{ht/2}$ для некоторого $t \in g \otimes g$.

В теореме А единственность доказывается просто (см. предложения 3.2 и 3.4). При $k = \mathbb{C}$ в [1] предложена явная, но трансцендентная конструкция Φ с помощью системы уравнений Книжника-Замолодчикова (сокращенно — системы KZ), возникшей в конформной теории поля [10]. Это Φ , обозначаемое далее Φ_{KZ} , выражается через $\tau = ht$ с помощью « \mathbb{C} -универсальной формулы», т.е. если записать Φ_{KZ} в виде $\Phi_{KZ} =$

$$\sum_{m, n, p} a_{(m, n, p)}^{i_1 \dots i_m j_1 \dots j_n \ell_1 \dots \ell_p} e_{i_1 \dots i_m} \otimes e_{j_1 \dots j_n} \otimes e_{\ell_1 \dots \ell_p}, \quad \text{где } e_i - \text{ базис } g$$

как топологического $\mathbb{C}[[h]]$ -модуля, а тензоры $a_{(m, n, p)}$ симметричны по каждой из групп индексов i, j, ℓ , то $a_{(m, n, p)}$ выражаются через структурные константы c_{rs}^t алгебры g и координаты τ^{uv} тензора τ по правилам ациклического тензорного исчисления с коэффициентами из \mathbb{C} , а (1.1), (1.2), (1.4) и (1.6) вытекают по правилам ациклического тензорного исчисления из того, что c_{rs}^t — структурные константы алгебры Ли, а τ симметричен и инвариантен (ациклическость означает, например, запрет выражения $c_{ri}^j c_{sj}^{\ell} c_{\ell i}^1$, где i, j, ℓ образуют «цикл»). Среди коэффициентов упомянутой \mathbb{C} -универсальной формулы имеются (см. (2.15) и (2.18)) числа $\zeta(2m+1)/(2\pi i)^{2m+1}$, $m \in \mathbb{N}$, являющиеся мнимыми и, вероятно, трансцендентными. Поэтому при $k \neq \mathbb{C}$ существование в теореме А не вытекает из конструкции Φ_{KZ} . Оно доказывается в § 3 вместе со следующей теоремой.

Т е о р е м а А'. *Существует \mathbb{Q} -универсальная формула, выражающая Φ , о котором идет речь в теореме А, через $\tau = ht$. Она единственна с точностью до скручивания посредством симметричного \mathbb{Q} -универсального $F = F(\tau)$.*

Квазитреугольные квазихопфовы алгебры, доставляемые теоремой А, назовем стандартными.

Т е о р е м а Б. Любую квазитреугольную квазихопфову QUE-алгебру можно подходящим скручиванием превратить в стандартную.

\mathbb{C} -универсальная формула, выражающая Φ_{KZ} через $\tau=ht$, имеет вид $\Phi_{KZ} = \exp P_{KZ}(\tau^{12}, \tau^{23})$, где P_{KZ} — лиевский (т.е. коммутаторный) формальный ряд с коэффициентами из \mathbb{C} (см. § 2). Теорема А допускает следующее усиление.

Т е о р е м а А". Существует лиевский формальный ряд P с коэффициентами из \mathbb{Q} такой, что в качестве Φ , о котором идет речь в теореме А, можно взять $\exp P(ht^{12}, ht^{23})$.

Если Φ имеет вид $\exp P(ht^{12}, ht^{23})$, где P — лиевский формальный ряд, то Φ , определяемое формулой (1.11), вообще говоря, не имеет такого вида. Однако на множестве лиевских рядов P над полем k таких, что $\Phi = \exp P(ht^{12}, ht^{23})$ и $R = e^{ht/2}$ удовлетворяют (1.2), (1.6), можно определить (см. § 4) естественное транзитивное действие некоторой группы, которую мы называем группой Гротендика-Тейхмюллера и обозначаем $GT(k)$. Это действие лежит в основе доказательства теоремы А". Определение $GT(k)$ по существу заимствовано из [2], где, в частности, объяснено, как построить канонический гомоморфизм $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow GT(\mathbb{Q}_\ell)$, где $\bar{\mathbb{Q}}$ — алгебраическое замыкание \mathbb{Q} в \mathbb{C} , а ℓ — простое число.

Структура работы такова. § 2 посвящен Φ_{KZ} . В § 3 методами [1] доказываются теоремы А, А' и Б. В § 4 определяется группа Гротендика-Тейхмюллера (в нескольких вариантах) и объясняется ее связь с $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$. В § 5 доказывается теорема А", а, изучение $GT(k)$ сводится к изучению бесконечномерной градуированной алгебры Ли $\text{gr}t_1(k)$. В § 6 собраны некоторые сведения об этой алгебре. § 4 не зависит от § 2, 3, а § 5, 6 — от § 3.

Автор благодарит А.А.Бейлинсона, Г.В.Белого, Ю.И.Манина и Г.Б.Шабата, обративших его внимание на работы [2, 11–15].

§ 2. Конструкция Φ_{KZ}

Φ_{KZ} проще всего определить формулой $\Phi_{KZ} = G_2^{-1} G_1$, где G_1 и G_2 — решения дифференциального уравнения

$$G'(x) = \hbar \left(\frac{t^{12}}{x} + \frac{t^{23}}{x-1} \right) G(x), \quad \hbar = \hbar/2\pi i, \quad (2.1)$$

заданные при $0 < x < 1$ и обладающие асимптотиками $G_1(x) \sim x^{\hbar t^{12}}$ при $x \rightarrow 0$, $G_2(x) \sim (1-x)^{\hbar t^{23}}$ при $x \rightarrow 1$. Поясним, что $t^{12} = t \otimes 1 \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, $t^{23} = 1 \otimes t \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, где \mathfrak{g} — деформационная алгебра Ли над $\mathbb{C}[[\hbar]]$, а тензор $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ симметричен и \mathfrak{g} -инвариантен. G в уравнении (2.1) должна быть аналитической функцией $(0, 1) \rightarrow (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, т.е. для

любого n образ $G(x)$ в $(U\mathfrak{g})^{\otimes 3}/\hbar^n (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$ должен иметь вид $\sum_{i=1}^N a_i(x) \cdot u_i$, где $u_i \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}/\hbar^n (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, a_i — аналитические функции $(0, 1) \rightarrow \mathbb{C}$, а N , вообще говоря, зависит от n . В важнейшем случае, когда $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0[[\hbar]]$ (т.е. \mathfrak{g} — тривиальная деформация

g_0), это означает, что $G(x) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(x)h^i$, где каждая g_i является аналитической функцией со значениями в некотором конечномерном подпространстве $V_i \subset (Ug_0)^{\otimes 3}$. Разумеется, $x^{\hbar t^{12}}$ следует понимать, как $\exp(\hbar \ln x \cdot t^{12}) = 1 + \hbar \ln x \cdot t^{12} + \dots$. Запись $G_1(x) \sim x^{\hbar t^{12}}$ означает, что $G_1(x)x^{-\hbar t^{12}}$ аналитически продолжается в окрестность точки $x=0$ и обращается в 1 при $x=0$. Существование и единственность G_1 и G_2 доказываются без труда.

Система KZ имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial z_i} = \hbar \sum_{j \neq i} \frac{t^{ij}}{z_i - z_j} \cdot W, \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (2.2)$$

где $W(z_1, \dots, z_n) \in (Ug)^{\otimes n}$, t^{ij} - образ t при (i, j) -м вложении $Ug \otimes Ug \rightarrow (Ug)^{\otimes 2}$. Для нас существенно, что, как указано в [10], система (2.2) самосогласована, т.е. кривизна соответствующей связности равна 0. Так как $\frac{\partial W}{\partial z_1} + \dots + \frac{\partial W}{\partial z_n} = 0$, то W зависит

только от разностей $z_i - z_j$. Кроме того, $\sum_i z_i \frac{\partial W}{\partial z_i} = \hbar \sum_{i < j} t^{ij} \cdot W$, так что (2.2)

сводится к системе уравнений для функции от $n-2$ переменных. В частности, при $n=3$ решения (2.2) имеют вид $(z_3 - z_1)^{\hbar(t^{12} + t^{13} + t^{23})} \cdot G((z_2 - z_1)/(z_3 - z_1))$, где G удовлетворяет (2.1). Поэтому Φ_{KZ} можно определить из соотношения $W_1 = W_2 \cdot \Phi_{KZ}$, где W_1, W_2 - решения (2.2) при $n=3$ в области $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1 < z_2 < z_3\}$ с асимптотикой $W_1 \sim (z_2 - z_1)^{\hbar t^{12}} (z_3 - z_1)^{\hbar(t^{13} + t^{23})}$ при $z_2 - z_1 \ll z_3 - z_1$, $W_2 \sim (z_3 - z_2)^{\hbar t^{23}} (z_3 - z_1)^{\hbar(t^{12} + t^{13})}$ при $z_3 - z_2 \ll z_3 - z_1$.

Определение Φ_{KZ} через систему (2.2) удобно, в частности, для проверки (1.2) и (1.6) (равенство (1.1), эквивалентное g -инвариантности Φ_{KZ} , очевидно). Для доказательства (1.6) рассмотрим (2.2) при $n=4$ в области $\{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4 \mid z_1 < z_2 < z_3 < z_4\}$ и выделим 5 зон: 1) $z_2 - z_1 \ll z_3 - z_1 \ll z_4 - z_1$, 2) $z_3 - z_2 \ll z_3 - z_1 \ll z_4 - z_1$, 3) $z_3 - z_2 \ll z_4 - z_2 \ll z_4 - z_1$, 4) $z_4 - z_3 \ll z_4 - z_2 \ll z_4 - z_1$, 5) $z_2 - z_1 \ll z_4 - z_1$, $z_4 - z_3 \ll z_4 - z_1$. Эти зоны соответствуют "вершинам" 5-угольника (1.7) по следующему правилу: если V_i, V_j находятся между какими-то соответствующими друг другу скобками, а V_k находится вне этих скобок, то $|z_i - z_j| \ll |z_i - z_k|$ (например, $(V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)) \otimes V_4$ соответствует второй зоне)).

Л е м м а. Существуют единственные решения W_1, \dots, W_5 системы (2.2), обладающие в соответствующих зонах асимптотиками

$$W_1 \sim (z_2 - z_1)^{\hbar t^{12}} (z_3 - z_1)^{\hbar(t^{13} + t^{23})} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{14} + t^{24} + t^{34})},$$

$$W_2 \sim (z_3 - z_2)^{\hbar t^{23}} (z_3 - z_1)^{\hbar(t^{12} + t^{13})} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{14} + t^{24} + t^{34})},$$

$$W_3 \sim (z_3 - z_2)^{\hbar t^{23}} (z_4 - z_2)^{\hbar(t^{24} + t^{34})} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{12} + t^{13} + t^{14})},$$

$$W_4 \sim (z_4 - z_3)^{\hbar t^{34}} (z_4 - z_2)^{\hbar(t^{23} + t^{24})} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{12} + t^{13} + t^{14})},$$

$$W_5 \sim (z_2 - z_1)^{\hbar t^{12}} (z_4 - z_3)^{\hbar t^{34}} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{13} + t^{14} + t^{23} + t^{24})}.$$

Поясним, что асимптотику, скажем, для W_5 следует понимать как равенство $W_5 = f(u, v) (z_2 - z_1)^{\hbar t^{12}} (z_4 - z_3)^{\hbar t^{34}} (z_4 - z_1)^{\hbar(t^{13} + t^{14} + t^{23} + t^{24})}$, где $u = (z_2 - z_1)/(z_4 - z_1)$, $v = (z_4 - z_3)/(z_4 - z_1)$, f аналитична в окрестности $(0, 0)$ и $f(0, 0) = 1$.

Доказательство. Рассмотрим, скажем, пятую зону. Сделаем подстановку $W = g(u, v) (z_4 - z_1)^{\hbar T}$, где $T = t^{12} + t^{13} + t^{14} + t^{23} + t^{24} + t^{34}$, $u = (z_2 - z_1)/(z_4 - z_1)$, $v = (z_4 - z_3)/(z_4 - z_1)$. Тогда для g получим систему уравнений вида

$$\frac{\partial g}{\partial u} = h \left(\frac{A}{u} + R(u, v) \right) \cdot g(u, v), \quad \frac{\partial g}{\partial v} = h \left(\frac{B}{v} + S(u, v) \right) \cdot g(u, v), \quad (2.3)$$

где R и S - аналитические в окрестности $(0, 0)$ функции со значениями в $(Ug)^{\otimes 3}$, а $A, B \in (Ug)^{\otimes 3}$ не зависят от u, v (отметим, что $[A, B] = 0$ в силу интегрируемости связности ∇ , соответствующей (2.3)). Надо доказать существование и единственность решения системы (2.3) вида $\varphi(u, v) u^{hA} v^{hB}$, где $\varphi(u, v)$ аналитична в окрестности $(0, 0)$ и $\varphi(0, 0) = 1$. Иначе говоря, надо доказать существование и единственность аналитической функции $\varphi(u, v)$ такой, что $\varphi(0, 0) = 1$, $\varphi^{-1} \cdot \nabla_u \cdot \varphi = \partial/\partial u - hAu^{-1}$, $\varphi^{-1} \cdot \nabla_v \cdot \varphi = \partial/\partial v - hBv^{-1}$, где $\nabla_u = \partial/\partial u - h(Au^{-1} + R(u, v))$, $\nabla_v = \partial/\partial v - h(Bv^{-1} + S(u, v))$. Это доказывается методом последовательных приближений. •

Легко видеть, что W_1, \dots, W_5 аналитически продолжаются во всю область $z_1 < z_2 < z_3 < z_4$. Формула (1.2) вытекает из равенств $W_1 = W_2 \cdot (\Phi_{KZ} \otimes 1)$, $W_2 = W_3 \cdot (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\Phi_{KZ})$, $W_3 = W_4 \cdot (1 \otimes \Phi_{KZ})$, $W_1 = W_5 \cdot (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\Phi_{KZ})$, $W_5 = W_4 \cdot (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\Phi_{KZ})$. Покажем, как доказываются первые два равенства.

Положим $V_1 = W_1 \cdot (z_4 - z_1)^{-\hbar(t^{14} + t^{24} + t^{34})}$, $V_2 = W_2 \cdot (\Phi_{KZ} \otimes 1) \times (z_4 - z_1)^{-\hbar(t^{14} + t^{24} + t^{34})} = W_2 \cdot (z_4 - z_1)^{-\hbar(t^{14} + t^{24} + t^{34})} \cdot (\Phi_{KZ} \otimes 1)$ и докажем, что $V_1 = V_2$. Нетрудно показать, что V_1 и V_2 аналитичны при $z_1 < z_2 < z_3$, $z_4 \in \mathbb{RP}^1 \setminus [z_1, z_3]$ (z_4 может равняться и ∞ !). V_1 и V_2 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial V}{\partial z_i} = \hbar \sum_{j \neq i} \frac{t^{ij}}{z_i - z_j} \cdot V, \quad i = 2, 3, \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_1} = \hbar \sum_{j \neq 1} \frac{t^{1j}}{z_1 - z_j} \cdot V - \hbar V \cdot \frac{t^{14} + t^{24} + t^{34}}{z_1 - z_4}, \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial V}{\partial z_4} = \hbar \sum_{j \neq 4} \frac{[t^{14}, V]}{z_4 - z_j}. \quad (2.6)$$

Из (2.4), (2.5) и асимптотик для V_1, V_2 следует, что V_1 и V_2 совпадают при $z_4 = \infty$.

Отсюда и из (2.6) следует, что $V_1 = V_2$.

Положим теперь $U_1 = W_2 \cdot (z_3 - z_2)^{-\hbar t^{23}}$, $U_2 = W_3 \cdot (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\Phi_{KZ}) \times (z_3 - z_2)^{-\hbar t^{23}} = W_3 \cdot (z_3 - z_2)^{-\hbar t^{23}} \cdot (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\Phi_{KZ})$ и докажем, что $U_1 = U_2$. Нетрудно показать, что U_1 и U_2 аналитичны в области $z_1 < z_2 < z_4$, $z_1 < z_3 < z_4$ (z_2 может равняться z_3 !). U_1 и U_2 удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial U}{\partial z_i} = \hbar \sum_{j \neq i} \frac{t^{1j}}{z_i - z_j} \cdot U, \quad i=1, 4, \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_2} = \hbar \sum_{j \neq 2, 3} \frac{t^{2j}}{z_2 - z_j} \cdot U + \hbar \frac{[t^{23}, U]}{z_2 - z_3}, \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial U}{\partial z_3} = \hbar \sum_{j \neq 2, 3} \frac{t^{3j}}{z_3 - z_j} \cdot U - \hbar \frac{[t^{23}, U]}{z_2 - z_3}. \quad (2.9)$$

Легко видеть, что U_1 и U_2 совпадают при $z_2 = z_3$. Отсюда и из (2.8) следует, что $U_1 = U_2$.

Итак, (1.2) доказано. Замена x на $1-x$ в уравнении (2.1) показывает, что Φ_{KZ} удовлетворяет равенству

$$\Phi^{321} = \Phi^{-1}. \quad (2.10)$$

Поэтому (1.6б) следует из (1.6а): достаточно к обеим частям (1.6а) применить оператор, переставляющий первый тензорный сомножитель с третьим, и воспользоваться тем, что $R^{21} = R$, $\Delta' = \Delta$. Доказательство (1.6а) содержится в § 3 из [1]. Оно использует 6 решений системы (2.2) при $n=3$ в комплексной области, имеющих в соответствующих зонах стандартные асимптотики. Эти решения соответствуют «вершинам» 6-угольника (1.9а).

Рассмотрим теперь вместо (2.1) уравнение

$$G'(x) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} \right) G(x), \quad (2.11)$$

где A и B — некоммутирующие символы, а G — формальный ряд по A , B , коэффициенты которого — аналитические функции от x . Рассмотрим, как и выше, решения G_1 и G_2 со стандартными асимптотиками при $x=0$ и $x=1$. Положим $\varphi_{KZ}(A, B) = G_2^{-1} G_1$. Алгебра некоммутативных формальных рядов $\mathbb{C}\langle A, B \rangle$ является топологической алгеброй Хопфа с коумножением $\Delta(A) = A \otimes 1 + 1 \otimes A$, $\Delta(B) = B \otimes 1 + 1 \otimes B$. Ясно, что $\Delta(\varphi_{KZ}) = \varphi_{KZ} \otimes \varphi_{KZ}$. Поэтому $\ln \varphi_{KZ}(A, B)$ — левый формальный ряд, т.е. элемент пополненной свободной алгебры Ли над \mathbb{C} с образующими A , B (см. [16], гл. II, § 3, следствие 2, теорема 1). Аналогично (2.10) доказывается, что φ_{KZ} удовлетворяет равенству

$$\varphi(B, A) = \varphi(A, B)^{-1}. \quad (2.12)$$

Чтобы написать аналоги (1.2) и (1.6) для φ_{KZ} , заметим, следуя [7], что интегрируемость связности, соответствующей (2.2), вытекает из соотношений $t^{1j} = t^{j1}$,

$[t^{ij}, t^{kl}] = 0$ при $i \neq j \neq k \neq l$, $[t^{ij} + t^{ik}, t^{jk}] = 0$ при $i \neq j \neq k$. Введем теперь, следуя [17], алгебру Ли $\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$, являющуюся фактором пополненной свободной алгебры Ли над \mathbb{C} с образующими \tilde{X}^{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$, по идеалу, топологически порожденному элементами трех типов: 1) $\tilde{X}^{ij} - \tilde{X}^{ji}$; 2) $[\tilde{X}^{ij}, \tilde{X}^{kl}]$, $i \neq j \neq k \neq l$; 3) $[\tilde{X}^{ij} + \tilde{X}^{ik}, \tilde{X}^{jk}]$, $i \neq j \neq k$. Образ \tilde{X}^{ij} в $\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$ обозначим X^{ij} . Заменяя теперь в (2.2) ht^{ij} на X^{ij} , получим, что рассуждения, доказывающие (1.2) и (1.6) для $\Phi = \Phi_{KZ}$, одновременно доказывают, что φ_{KZ} удовлетворяет соотношениям

$$\varphi(X^{12}, X^{23} + X^{24}) \cdot \varphi(X^{13} + X^{23}, X^{34}) = \varphi(X^{23}, X^{34}) \times \varphi(X^{12} + X^{13}, X^{24} + X^{34}) \cdot \varphi(X^{12}, X^{23}), \quad (2.13)$$

$$\begin{aligned} \exp((X^{13} + X^{23})/2) &= \varphi(X^{13}, X^{12}) \cdot \exp(X^{13}/2) \cdot \varphi(X^{13}, X^{23})^{-1} \times \\ &\times \exp(X^{23}/2) \cdot \varphi(X^{12}, X^{23}), \end{aligned} \quad (2.14a)$$

$$\begin{aligned} \exp((X^{12} + X^{13})/2) &= \varphi(X^{23}, X^{13})^{-1} \cdot \exp(X^{13}/2) \cdot \varphi(X^{12}, X^{13}) \times \\ &\times \exp(X^{12}/2) \cdot \varphi(X^{12}, X^{23})^{-1}, \end{aligned} \quad (2.14)$$

где обе части (2.13) принадлежат $\exp \mathfrak{a}_4^{\mathbb{C}}$, а обе части (2.14a) и (2.14b) принадлежат $\exp \mathfrak{a}_3^{\mathbb{C}}$. Здесь $\exp \mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}} = \{e^x | x \in \mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}\}$, где e^x рассматривается как элемент пополненной универсальной обертывающей алгебры $U\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$. Иначе говоря, $\exp \mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$ — группа Ли, соответствующая $\mathfrak{a}_n^{\mathbb{C}}$.

Если временно допустить, что $[A, B] = 0$, то (2.11) обладает решением $x^{A/2\pi i} (1-x)^{B/2\pi i}$, имеющим стандартные асимптотики и при $x=0$, и при $x=1$. Поэтому $\ln \varphi_{KZ} \in \mathfrak{p}$, где \mathfrak{p} — коммутант пополненной свободной алгебры Ли с образующими A, B . Найдем образ $\ln \varphi_{KZ}$ в $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Так как \mathfrak{p} — топологически свободная алгебра Ли с образующими $U_{kl} = (\text{ad } B)^l (\text{ad } A)^k [A, B]$ (см., например, § 2.4.2 из [18]), то образы U_{kl} в $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ (обозначим их \bar{U}_{kl}) образуют топологический базис в $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Отметим, что \bar{U}_{kl} равен также образу $(\text{ad } A)^k (\text{ad } B)^l [A, B]$ в $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Коэффициенты разложения образа $\ln \varphi_{KZ}$ в $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ по базису \bar{U}_{kl} обозначим c_{kl} . Покажем, что

$$1 + \sum_{k, l} c_{kl} u^{k+1} v^{l+1} = \exp \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\zeta(n)}{n \cdot (2\pi i)^n} (u^n + v^n - (u+v)^n). \quad (2.15)$$

Для этого запишем наши стандартные решения G_1 и G_2 уравнения (2.11) в виде $G_j(x) = \bar{x}^A (1-x)^{\bar{B}} V_j(x)$, где $\bar{A} = A/2\pi i$, $\bar{B} = B/2\pi i$. Функции V_j непрерывно продолжаются на $[0, 1]$ и удовлетворяют уравнению

$$V'(x) = Q(x)V(x), \quad (2.16)$$

$$Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} e^{-\ln(1-x) \cdot \text{ad } \bar{B}} \cdot \frac{e^{-\ln x \cdot \text{ad } \bar{A}} - 1}{x-1} \bar{B} \in \mathfrak{p}.$$

При этом $V_1(0)=1$, $V_2(1)=1$. Поэтому $\varphi_{kz}=V_2^{-1}V_1=V(1)V(0)^{-1}$, где V - любое решение (2.16). Значит, образ $\ln \varphi_{kz}$ в $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$ равен $\int_0^1 \bar{Q}(x)dx$, где $\bar{Q}(x)$ - образ $Q(x)$ в $\mathfrak{p}/[\mathfrak{p}, \mathfrak{p}]$. Отсюда

$$c_{k\ell} = \frac{1}{(2\pi i)^{k+\ell+2}(k+1)!\ell!} \int_0^1 \left(\ln \frac{1}{x}\right)^{k+1} \left(\ln \frac{1}{1-x}\right)^\ell \frac{dx}{x-1}. \quad (2.17)$$

Считая временно, что $u, v \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Im} v < 0$, $\operatorname{Im} u < 2\pi$, получим, что левая часть (2.15) равна $1+\bar{v} \int_0^1 (1-x^{-\bar{u}})(1-x)^{-\bar{v}-1} dx = -\bar{v} \int_0^1 (x^{-\bar{u}})(1-x)^{-\bar{v}-1} dx = \Gamma(1-\bar{u}) \Gamma(1-\bar{v})/\Gamma(1-\bar{u}-\bar{v})$, где

$\bar{u} = u/2\pi i$, $\bar{v} = v/2\pi i$. Воспользовавшись формулой $\ln \Gamma(1-z) = \gamma z + \sum_{n=2}^{\infty} (\zeta(n)/n) \cdot z^n$, вытекающей из разложения Γ -функции в бесконечное произведение ([19], гл.12), получим (2.15).

Из (2.15), в частности, следует, что

$$c_{k,0} = c_{0,k} = -\zeta(k+2)/(2\pi i)^{k+2}. \quad (2.18)$$

Можно доказать (2.18) и несколько иначе: $c_{k,0}$ считается с помощью (2.17), формулы $(1-x)^{-1} = 1+x+x^2+\dots$ и замены $x = e^{-y}$, а $c_{0,k}$ - с помощью формулы $c_{\ell k} = c_{k\ell}$, вытекающей из (2.12).

З а м е ч а н и е. Согласно введению к [11], близкие вычисления ранее проделал З.Войтковяк. Они послужили П.Делиню толчком для написания [11].

§ 3. Доказательство теорем А, А' и Б.

В этом параграфе мы исследуем квазитреугольные квазихопфовы QUE-алгебры над $k[[h]]$, где k - поле характеристики 0. Напомним (см. предложение 3.5 из [1]), что 1) любую такую алгебру можно скручиванием привести к симметричному виду (т.е. добиться, чтобы $R^{21}=R$); 2) скручивание посредством F сохраняет симметричный вид тогда и только тогда, когда $F^{21}=F$; 3) если $R^{21}=R$, то $\Delta'=\Delta$ и выполнено (2.10). Напомним также (см. § 2), что если $R^{21}=R$, то (1.6б) следует из (1.6а) и (2.10).

Пусть \mathfrak{g} - алгебра Ли над k , $\operatorname{tegg} \mathfrak{g}$ симметричен и \mathfrak{g} -инвариантен. Положим $A=(U_{\mathfrak{g}})[[h]]$, определим обычным образом $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$, $\varepsilon: A \rightarrow k[[h]]$ и будем искать \mathfrak{g} -инвариантные элементы $R \in A \otimes A$, $\Phi \in A \otimes A \otimes A$ такие, что $R^{21}=R$, $R \equiv 1 + \hbar t/2 \pmod{h^2}$, $\Phi \equiv 1 \pmod{h}$, и выполнены уравнения (1.2), (1.4), (1.6а), (2.10) (мы не требуем, чтобы $R = e^{\hbar t/2}$).

Предложение 3.1. *Такие R и Φ существуют.*

Доказательство. Пусть уже построены \mathfrak{g} -инвариантные $R_n \in (U_{\mathfrak{g}} \otimes U_{\mathfrak{g}})[[h]]$, $\Phi_n \in (U_{\mathfrak{g}} \otimes U_{\mathfrak{g}} \otimes U_{\mathfrak{g}})[[h]]$ такие, что $R_n^{21}=R_n$, $R_n \equiv 1 + \hbar t/2 \pmod{h^2}$, $\Phi_n \equiv 1 \pmod{h}$ и R_n, Φ_n удовлетворяют по модулю h^n уравнениям (1.2), (1.4), (1.6а), (2.10) (при $n=2$ можно положить $R_2 \equiv 1 + \hbar t/2$, $\Phi_2 \equiv 1$). Из доказательства предложения 3.10 работы [1] следует, что существует \mathfrak{g} -инвариантное $\Phi_n \in (U_{\mathfrak{g}} \otimes U_{\mathfrak{g}} \otimes U_{\mathfrak{g}})[[h]]$, удовлетворяющее (1.2), (1.4), (2.10) по модулю h^{n+1} и такое, что $\Phi_n \equiv \Phi_n \pmod{h^n}$. Так как R_n и Φ_n

удовлетворяют (1.6a) по модулю h^n , то

$$(\Delta \otimes \text{id})(R_n) \equiv \bar{\Phi}_n^{312} R_n^{13} (\bar{\Phi}_n^{132})^{-1} R_n^{23} \bar{\Phi}_n + h^n \psi \pmod{h^{n+1}}, \quad (3.1a)$$

где $\psi \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ является \mathfrak{g} -инвариантным. Применив к обеим частям (3.1a) оператор, переставляющий первый и третий тензорные сомножители, получим

$$(\text{id} \otimes \Delta)(R_n) \equiv (\bar{\Phi}_n^{231})^{-1} R_n^{13} \bar{\Phi}_n^{213} R_n^{12} \bar{\Phi}_n^{-1} + h^n \psi^{321} \pmod{h^{n+1}}. \quad (3.1б)$$

Будем искать R_{n+1} , $\bar{\Phi}_{n+1}$ в виде $R_{n+1} = R_n + h^n r$, $\bar{\Phi}_{n+1} = \bar{\Phi}_n + h^n \varphi$, где $r \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$, $\varphi \in \Lambda^3 \mathfrak{g} \subset U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$. Элементы r и φ должны быть \mathfrak{g} -инвариантными и удовлетворять уравнениям

$$r^{21} = r, \quad (3.2)$$

$$r^{13} + r^{23} - (\Delta \otimes \text{id})(r) + 3\varphi = \psi. \quad (3.3)$$

Для существования таких r и φ необходимо, чтобы

$$\psi^{234} - (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\psi) + (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\psi) - \psi^{124} = 0, \quad (3.4)$$

$$(\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\psi) - \psi^{123} - \psi^{124} = (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\psi^{321}) - \psi^{431} - \psi^{432}, \quad (3.5)$$

$$\alpha^{321} = -\alpha, \quad (3.6)$$

где $\alpha = \psi - \psi^{213}$. Покажем, что условия (3.4)-(3.6) и достаточны для существования r и φ . Действительно, (3.4) означает, что ψ - двумерный коцикл комплекса $C^*(\mathfrak{g}) \otimes U\mathfrak{g}$, где

$$\begin{aligned} C^n(\mathfrak{g}) &= (U\mathfrak{g})^{\otimes n}, \quad d(a_1 \otimes \dots \otimes a_n) = 1 \otimes a_1 \otimes \dots \otimes a_n + \\ &+ \sum_{i=1}^n (-1)^i a_1 \otimes \dots \otimes a_{i-1} \otimes \Delta(a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_n + (-1)^{n+1} a_1 \otimes \dots \\ &\dots \otimes a_n \otimes 1. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Поэтому из предложения 2.2 работы [1] следует, что $\alpha \in \Lambda^2 \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$, а $\psi - \alpha/2$ является кограницей, т.е.

$$\psi - \alpha/2 = \bar{r}^{13} + \bar{r}^{23} - (\Delta \otimes \text{id})(\bar{r}). \quad (3.8)$$

При этом \bar{r} можно выбрать \mathfrak{g} -инвариантным, для этого достаточно, чтобы при обычном отождествлении $U\mathfrak{g}$ с $\text{Sym}^* \mathfrak{g}$ (см. [16], гл. II, § 1, предложение 9) \bar{r} переходил в элемент $\text{Sym}^* \mathfrak{g} \otimes \text{Sym}^* \mathfrak{g}$, образ которого в $\mathfrak{g} \otimes \text{Sym}^* \mathfrak{g}$ равен 0. Так как $\alpha \in \Lambda^2 \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$, то из (3.6) следует, что $\alpha \in \Lambda^3 \mathfrak{g}$. Положим $\varphi = \alpha/6$. Тогда (3.2) и (3.3) превращаются в следующие условия на $s = r - \bar{r}$:

$$s - s^{21} = \bar{r}^{21} - \bar{r}, \quad s \in \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}. \quad (3.9)$$

Для существования s , удовлетворяющего (3.9), необходимо и достаточно, чтобы $\bar{r}^{21} - \bar{r} \in (\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}) \otimes (U\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$, т.е. чтобы

$$(f \otimes f)(\bar{r}^{21} - \bar{r}) = 0, \quad (3.10)$$

где $f: U\mathfrak{g} \rightarrow U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$, $f(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a - \Delta(a)$. Если (3.10) выполнено, то s можно выбрать \mathfrak{g} -инвариантным (достаточно, чтобы образ $s + \bar{r}$ в $\text{Sym}^* \mathfrak{g} \otimes \text{Sym}^* \mathfrak{g}$ не содержал компоненты

из $g \otimes g$). Остается заметить, что (3.10) следует из (3.5), (3.8) и того, что $\alpha \in \Lambda^3 g$.

Докажем теперь (3.4)–(3.6). Преобразовав с помощью (3.1а) обе части равенства $\Phi_n^{123} \cdot (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\Delta \otimes \text{id})(R_n) = (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\Delta \otimes \text{id})(R_n) \cdot \Phi_n^{123}$ и воспользовавшись (1.2), (1.5), получим (3.4). Выразим теперь $(\Delta \otimes \Delta)(R_n)$ через R_n^{13} , R_n^{14} , R_n^{23} , R_n^{24} двумя способами (можно применить сначала (3.1а), а потом (3.1б) или сначала (3.1б), а потом (3.1а)). Сравнив два выражения для $(\Delta \otimes \Delta)(R_n)$ и воспользовавшись (1.2), (1.5), получим (3.5). Аналогично доказательству формулы (3.12) работы [1], являющейся обобщением соотношения Янга-Бакстера, из (3.1а) выводится сравнение

$$R_n^{12} \Phi_n^{312} R_n^{13} (\Phi_n^{132})^{-1} R_n^{23} \Phi_n + h^n \alpha \equiv \Phi_n^{321} R_n^{23} (\Phi_n^{231})^{-1} R_n^{13} \Phi_n^{213} R_n^{12} \pmod{h^{n+1}}. \quad (3.11)$$

Применив к обеим частям (3.11) оператор, переставляющий первый тензорный сомножитель с третьим, и воспользовавшись тем, что $R_n^{21} = R_n$, $\Phi_n^{321} \equiv \Phi_n^{-1} \pmod{h^{n+1}}$, получим (3.6). •

Доказательство предложения 3.1 доставляет вполне конкретные Φ и R , выражающиеся через $\tau = ht$ с помощью \mathbb{Q} -универсальных формул $\Phi = M(\tau)$, $R = N(\tau)$. Об этих формулах нам достаточно знать, что $M(\tau) = 1 + O(\tau)$, $N(\tau) = 1 + \tau/2 + o(\tau)$, где $o(\tau)$ (соответственно $O(\tau)$) обозначает члены, содержащие τ в степени, большей 1 (соответственно большей или равной 1).

Предложение 3.2. Пусть g – алгебра Ли над k , а $R \in (Ug \otimes Ug)[[h]]$ и $\Phi \in (Ug \otimes Ug \otimes Ug)[[h]]$ обратимы, g -инвариантны и удовлетворяют (1.2), (1.4), (1.6). Тогда скручиванием посредством некоторого g -инвариантного $F \in (Ug \otimes Ug)[[h]]$ можно превратить Φ и R в $M(h\theta)$ и $N(h\theta)$, где θ – некоторый g -инвариантный элемент $(\text{Sym}^2 g)[[h]]$. При этом θ определен однозначно, а F – с точностью до умножения на элементы вида $(u^{-1} \otimes u^{-1})\Delta(u)$, где u принадлежит центру $(Ug)[[h]]$, $u \equiv 1 \pmod{h}$, $\varepsilon(u) = 1$.

Доказательство. $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ можно привести к симметричному виду скручиванием посредством g -инвариантного элемента $(Ug \otimes Ug)[[h]]$ (см. доказательство предложения 3.5 из [1]). Поэтому можно считать, что $R^{21} = R$ (тогда $\Phi^{321} = \Phi^{-1}$, а F должен быть симметричным). Затем все сводится к следующей лемме.

Лемма. Пусть (Φ_1, R_1) и (Φ_2, R_2) удовлетворяют условиям предложения, причем $R_1^{21} = R_1$, $R_2^{21} = R_2$, $\Phi_1 \equiv \Phi_2 \pmod{h^n}$, $R_1 \equiv R_2 \pmod{h^n}$. Пусть φ и r – редукции \pmod{h} элементов $h^{-n}(\Phi_1 - \Phi_2)$ и соответственно $h^{-n}(R_1 - R_2)$. Тогда r является g -инвариантным элементом $\text{Sym}^2 g$, а φ можно представить в виде

$$\varphi = f^{23} - (\Delta \otimes \text{id})(f) + (\text{id} \otimes \Delta)(f) - f^{12}, \quad (3.12)$$

где f – симметричный g -инвариантный элемент $Ug \otimes Ug$, $(\varepsilon \otimes \text{id})(f) = 0 = (\text{id} \otimes \varepsilon)(f)$. При этом f определен однозначно с точностью до замены

$$\tilde{f} = f + \Delta(v) - v \otimes 1 - 1 \otimes v, \quad (3.13)$$

где v принадлежит центру Ug , $\varepsilon(v) = 0$.

Доказательство. Так как R_1 и R_2 удовлетворяют (1.6а), а Φ_1 и Φ_2 удовлетворяют (2.10), то $(\Delta \otimes \text{id})(r) - r^{13} - r^{23} = \text{Alt } \varphi/2$. Левая часть этого равенства симметрична по первым двум тензорным сомножителям, а правая кососимметрична.

Поэтому обе части равны 0, т.е. $\text{Alt } \varphi = 0$, $r \in \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$. Так как $r \in \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$, $r^{21} = r$, то $r \in \text{Sym}^2 \mathfrak{g}$. Так как Φ_1 и Φ_2 удовлетворяют (1.2), (1.4), (2.10), то

$$\varphi^{234} - (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\varphi) + (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\varphi) - (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\varphi) + \varphi^{123} = 0 \quad (3.14)$$

$$(\text{id} \otimes \varepsilon \otimes \text{id})(\varphi) = 0, \quad (3.15)$$

$$\varphi^{321} = -\varphi. \quad (3.16)$$

Применив к (3.14) отображения $\varepsilon \otimes \varepsilon \otimes \text{id}$, $\text{id} \otimes \text{id} \otimes \varepsilon$ и воспользовавшись (3.15), получим

$$(\varepsilon \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\varphi) = 0 = (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \varepsilon)(\varphi). \quad (3.17)$$

(3.14) означает, что φ - трехмерный коцикл комплекса (3.7). Согласно предложению 3.11 из [1], если такой коцикл является \mathfrak{g} -инвариантным, удовлетворяет (3.15)-(3.17) и условию $\text{Alt } \varphi = 0$, то его можно представить в виде (3.12), причем это представление единственно с точностью до (3.13). •

Пусть \mathcal{M} и \mathcal{N} имеют прежний смысл. Аналогично предложению 3.2 доказывается следующее предложение.

Предложение 3.3. Пусть $(\mathcal{M}(\tau), \mathcal{N}(\tau))$ - произвольное k -универсальное решение уравнений (1.2), (1.4), (1.6) такое, что $\mathcal{N}(\tau)$ симметрично, $\mathcal{N}(\tau) = 1 + \tau/2 + o(\tau)$, $\mathcal{M}(\tau) = 1 + o(\tau)$. Тогда скручиванием посредством симметричного k -универсального $F(\tau)$ можно превратить $(\mathcal{M}(\tau), \mathcal{N}(\tau))$ в $(\mathcal{M}(\tilde{\tau}), \mathcal{N}(\tilde{\tau}))$, где $\tilde{\tau}$ выражается через τ с помощью k -универсальной формулы вида $\tilde{\tau} = \tau + o(\tau)$. При этом $\tilde{\tau}$ определяется по $(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ однозначно, а $F(\tau)$ - с точностью до умножения на $(u^{-1} \otimes u^{-1}) \cdot \Delta(u)$, где u выражается через τ с помощью k -универсальной формулы вида $u = 1 + o(\tau)$. •

Предложение 3.4. Пусть $(\mathcal{M}(\tau), \mathcal{N}(\tau))$ означает то же, что в предложении 3.3. Тогда $\mathcal{N}(\tau) = e^{\tilde{\tau}/2}$, где $\tilde{\tau}$ выражается через τ посредством k -универсальной формулы вида $\tilde{\tau} = \tau + o(\tau)$.

Доказательство. Если $R = e^{ht}$, где $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ симметричен и \mathfrak{g} -инвариантен, а $F \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[\hbar]]$ тоже симметричен и \mathfrak{g} -инвариантен, то в формуле (1.12) $\tilde{R} = R$, так как $[t, F] = 0$ (достаточно воспользоваться формулой $t = (\Delta(C) - C \otimes 1 - 1 \otimes C)/2$, где $C \in U\mathfrak{g}$ - элемент Казимира, соответствующий t). Справедлив и k -универсальный вариант этого утверждения: $F(\tau) e^{\tau/2} F(\tau)^{-1} = e^{\tau/2}$ для любого k -универсального $F(\tau)$. Поэтому, применив предложение 3.3 в случае, когда $\mathcal{N}(\tau) = e^{\tau/2}$, а $\mathcal{M}(\tau)$ определяется с помощью системы KZ (см. § 2), получим, что $\mathcal{N}(\tilde{\tau}) = e^{\tau/2}$ для некоторого $\tilde{\tau}$ вида $\tau + o(\tau)$. Остается теперь применить предложение 3.3 к произвольной паре $(\mathcal{M}(\tau), \mathcal{N}(\tau))$. •

Доказательство теоремы А'. В процессе доказательства предложения 3.1 построены \mathbb{Q} -универсальные $\Phi = \mathcal{M}(\tau)$ и $R = \mathcal{N}(\tau)$, удовлетворяющие (1.1)-(1.6), условию $R^{21} = R$, и такие, что $\mathcal{N}(\tau) = 1 + \tau/2 + o(\tau)$, $\mathcal{M}(\tau) = 1 + o(\tau)$. Согласно предложению 3.4, найдется \mathbb{Q} -универсальное $\tilde{\tau}$ вида $\tau + o(\tau)$ такое, что $\mathcal{N}(\tilde{\tau}) = e^{\tau/2}$. Тогда $\Phi = \mathcal{M}(\tilde{\tau})$, $R = e^{\tau/2}$ удовлетворяют (1.1)-(1.6). Единственность в теореме А' следует из предложения 3.3. •

Из теоремы А' следует утверждение о существовании в теореме А. Единственность вытекает из следующего предложения.

Предложение 3.5. Пусть g - деформационная алгебра Ли над $k[[h]]$ (см. § 1), а $R \in U_g \otimes U_g$ и $\Phi \in U_g \otimes U_g \otimes U_g$ обратимы, g -инвариантны и удовлетворяют (1.2), (1.4), (1.6). Тогда скручиванием посредством некоторого g -инвариантного $F \in U_g \otimes U_g$ можно превратить Φ и R в $M(h\theta)$ и $e^{h\theta/2}$, где θ является g -инвариантным элементом $\text{Sym}^2 g$. При этом F определен однозначно с точностью до умножения на элементы вида $(u^{-1} \otimes u^{-1}) \times \Delta(u)$, где u принадлежит центру U_g , $u \equiv 1 \pmod{h}$, $\varepsilon(u) = 1$.

Доказательство в целом такое же, как в рассмотренном выше (см. предложение 3.2) в случае $g = g_0[[h]]$, где g_0 - алгебра Ли над k . Отличие в следующем. Пусть $R^{21} = R$ и $\Phi \equiv M(h\theta_n) \pmod{h^n}$, $R \equiv \exp(h\theta_n/2) \pmod{h^n}$ для некоторого g -инвариантного $\theta_n \in \text{Sym}^2 g$. Пусть \underline{r} и $\underline{\varphi}$ - классы вычетов \pmod{h} элементов $h^{-n}(R - \exp(h\theta_n/2))$ и $h^{-n}(\Phi - M(h\theta))$ соответственно. Тогда, как и при доказательстве предложения 3.2, показывается, что \underline{r} - инвариантный элемент $\text{Sym}^2 g_0$, где $g_0 = g/hg$, а $\underline{\varphi}$ можно представить в виде (3.12), где f - симметричный инвариантный элемент $U_{g_0} \otimes U_{g_0}$, $(\varepsilon \otimes \text{id})(f) = (\text{id} \otimes \varepsilon)(f) = 0$. Но чтобы построить g -инвариантные симметричные элементы $F_n \in U_g \otimes U_g$, $\theta_{n+1} \in g \otimes g$ такие, что $\tilde{\Phi} \equiv M(h\theta_{n+1}) \pmod{h^{n+1}}$, $\tilde{R} \equiv \exp(h\theta_{n+1}/2) \pmod{h^{n+1}}$, где $\tilde{\Phi}$ и \tilde{R} получаются скручиванием Φ и R посредством F_n , надо еще доказать, что $\underline{r} \in \text{Sym}^2 g_0$ поднимается до инвариантного элемента $\underline{r} \in \text{Sym}^2 g$, а $\underline{f} \in \text{Sym}^2(U_{g_0})$ можно выбрать так, чтобы его можно было поднять до инвариантного элемента $\underline{f} \in \text{Sym}^2(U_g)$. В качестве \underline{r} можно взять $\pi(h^{-n}(\ln R - \theta/2))$, где $\pi: U_g \otimes U_g \rightarrow g \otimes g$ - проектор, определяемый с помощью отождествления U_g с $\text{Sym}^* g$ (мы вынуждены использовать π , так как еще не доказано, что $\ln R \in g \otimes g$). Покажем, что \underline{f} существует, если f строить, как при доказательстве предложения 3.11 из [1]. Действительно, если обычным образом отождествить U_{g_0} с $\text{Sym}^* g_0$, то $U_{g_0} \otimes U_{g_0}$ отождествится с $\text{Sym}^*(g_0 \otimes g_0) = \bigoplus_m g_0^{\otimes m} \otimes_{S_m} (Q^2)^{\otimes m}$, $(U_{g_0})^{\otimes 3} = \bigoplus_m g_0^{\otimes m} \otimes_{S_m} (Q^3)^{\otimes m}$, а f , построенное в [1], равно $L_0(\varphi)$, где $L_0: (U_{g_0})^{\otimes 3} \rightarrow (U_{g_0})^{\otimes 2}$ определяется с помощью некоторых S_m -эквивариантных операторов $\delta_m: (Q^3)^{\otimes m} \rightarrow (Q^2)^{\otimes m}$. Поэтому можно положить $\underline{f} = L(\underline{\varphi})$, где $\underline{\varphi} = h^{-n}(\Phi - M(h\theta))$, а $L_0: (U_{g_0})^{\otimes 3} \rightarrow (U_g)^{\otimes 2}$ определяется с помощью тех же δ_m .

Аналогичная проблема возникает при доказательстве единственности F с точностью до умножения на $(u^{-1} \otimes u^{-1})\Delta(u)$, и точно так же она решается. •

С л е д с т в и е. В ситуации предложения 3.5 $R^{21}R = e^{h\theta}$, где θ является g -инвариантным элементом $\text{Sym}^2 g$. В частности, если $R^{21} = R$, то $R = e^{h\theta/2}$.

З а м е ч а н и я. 1) Следствие означает, что если A - универсальная обертывающая алгебра с обычными Δ и ε , то из (1.1)-(1.6) следует равенство $(\Delta \otimes \text{id})(\ln(R^{21}R)) = \ln(R^{31}R^{13}) + \ln(R^{32}R^{23})$. Автору не удалось вывести это равенство непосредственно из (1.1)-(1.6).

2) Аналогично предложению 3.5 доказывается его аналог для кограничных квазихопфовых QUE-алгебр в смысле § 3 из [1].

Доказательство теоремы Б. Пусть $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ - квазитреугольная квазихопфова QUE-алгебра над $k[[h]]$. Положим $R = R \cdot (R^{21}R)^{-1/2}$. Согласно предложению 3.3 из [1], $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ - кограничная квазихопфова QUE-алгебра. Поэтому в силу предложения 3.13 из [1] подходящим скручиванием можно превратить (A, Δ, ε) в $U\mathfrak{g}$ с обычными коумножением и коединицей, где \mathfrak{g} - деформационная алгебра Ли. Остается воспользоваться предложением 3.5. •

З а м е ч а н и я. 1) Можно доказать теорему Б, не используя предложение 3.5, а рассуждая, как при доказательстве предложения 3.13 из [1].

2) Нетрудно описать категорию квазитреугольных квазихопфовых QUE-алгебр (предложение 3.14 из [1] и его доказательство остаются в силе в квазитреугольном случае).

§ 4. Группа Гротендика - Тейхмюллера

Пусть задана квазитензорная категория (см. § 1), т.е. категория \mathcal{C} , функтор \otimes , изоморфизмы коммутативности и ассоциативности, а также единичный объект k и изоморфизмы $V \otimes k \xrightarrow{\sim} V$, $k \otimes V \xrightarrow{\sim} V$ для всех объектов V из \mathcal{C} (при этом диаграммы (1.7)-(1.9) должны быть коммутативными). Попытаемся изменить изоморфизмы коммутативности и ассоциативности, не меняя остальные структуры, входящие в определение квазитензорной категории. Изменение изоморфизма ассоциативности $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3)$ сводится к его умножению на автоморфизм $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$. Заметим, что на $(V \otimes V) \otimes V$, где V - объект \mathcal{C} , действует группа кос B_3 : образующей $\sigma_1 \in B_3$ соответствует $c \circ \text{id}$, где c - изоморфизм коммутативности $V \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes V$, а образующей $\sigma_2 \in B_3$ соответствует $a^{-1}(\text{id} \circ c)a$, где a - изоморфизм ассоциативности $(V \otimes V) \otimes V \xrightarrow{\sim} V \otimes (V \otimes V)$. Точно так же каждому $\alpha \in B_3$ сопоставляется изоморфизм $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \xrightarrow{\sim} (V_{i_1} \otimes V_{i_2}) \otimes V_{i_3}$, где (i_1, i_2, i_3) - перестановка, соответствующая α^{-1} . Поэтому на $(V_1 \otimes V_2) \otimes V_3$ действует группа крашенных кос $K_3 = \text{Ker}(B_3 \rightarrow S_3)$. Итак, выбор $\varphi \in K_3$ определяет новый изоморфизм ассоциативности. Аналогично выбор $\psi \in K_2$ определяет новый изоморфизм коммутативности. Любое $\psi \in K_2$ имеет вид $\psi = \sigma^{2m}$, где σ - образующая B_2 , $m \in \mathbb{Z}$. Поэтому изменение изоморфизма коммутативности сводится к возведению его в степень $\lambda = 2m+1$. Любое $\varphi \in K_3$ имеет вид $\varphi = f(\sigma_1^2, \sigma_2^2) \cdot (\sigma_1 \sigma_2)^{3n}$, где $n \in \mathbb{Z}$, а $f(X, Y)$ - элемент свободной группы с образующими X, Y (отметим, что $(\sigma_1 \sigma_2)^3 = (\sigma_2 \sigma_1)^3$ порождает центр B_3). Для новых изоморфизмов коммутативности и ассоциативности диаграммы вида (1.8) по-прежнему коммутативны, а требование коммутативности (1.7) и (1.9) приводит к условиям на f, λ, n . Коммутативность (1.9a) приводит к условию $n=0$ и соотношению

$$f(X_1, X_2) X_1^m f(X_3, X_1) X_3^m f(X_3, X_2)^{-1} X_2^m = 1 \text{ при } X_1 X_2 X_3 = 1, m = \frac{\lambda-1}{2}. \quad (4.1)$$

Коммутативность (1.9б) приводит к тому же условию $n=0$ и соотношению

$$f(X_2, X_1)^{-1} X_1^m f(X_3, X_1) X_3^m f(X_3, X_2)^{-1} X_2^m = 1 \text{ при } X_1 X_2 X_3 = 1, m = \frac{\lambda-1}{2}. \quad (4.2)$$

(4.1) и (4.2) эквивалентны соотношениям

$$f(Y, X) = f(X, Y)^{-1}, \quad (4.3)$$

$$f(X_3, X_1) X_3^m f(X_2, X_3) X_2^m f(X_1, X_2) X_1^m = 1 \text{ при } X_1 X_2 X_3 = 1, \quad m = \frac{\lambda-1}{2}. \quad (4.4)$$

Наконец, коммутативность (1.7) приводит к следующему условию на $\varphi \in K_3$:

$$\partial_3(\varphi) \cdot \partial_1(\varphi) = \partial_0(\varphi) \cdot \partial_2(\varphi) \cdot \partial_4(\varphi). \quad (4.5)$$

Здесь $\partial_0(\varphi)$ (соответственно $\partial_4(\varphi)$) получается из косы φ добавлением еще одной нити слева (соответственно справа) от имеющихся трех, а $\partial_i(\varphi)$ при $1 \leq i \leq 3$ получаются из φ заменой i -й нити косы φ двумя нитями, одна из которых чуть левее другой (отметим, что K_n образуют косимплициальную группу, где гомоморфизмами граней являются $\partial_i: K_n \rightarrow K_{n+1}$, а гомоморфизмы вырождения $K_{n+1} \rightarrow K_n$ получаются удалением одной из $n+1$ нитей). Известно [20], что K_n порождается элементами x_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, где

$$x_{ij} = (\sigma_{j-2} \dots \sigma_1)^{-1} \sigma_{j-2}^2 (\sigma_{j-1} \dots \sigma_1) = (\sigma_{j-1} \dots \sigma_{i+1}) \sigma_i^2 (\sigma_{j-1} \dots \sigma_{i+1})^{-1}, \quad (4.6)$$

а определяющие соотношения между x_{ij} имеют вид

$$(a_{ijk}, x_{ij}) = (a_{ijk}, x_{ik}) = (a_{ijk}, x_{jk}) = 1, \text{ где } i < j < k, \quad a_{ijk} = x_{ij} x_{ik} x_{jk}, \quad (4.7)$$

$$(x_{ij}, x_{k\ell}) = (x_{i\ell}, x_{jk}) = 1 \text{ при } i < j < k < \ell, \quad (4.8)$$

$$(x_{ik}, x_{ij}^{-1} x_{j\ell} x_{ij}) = 1 \text{ при } i < j < k < \ell. \quad (4.9)$$

Здесь (u, v) обозначает $uvu^{-1}v^{-1}$. В терминах x_{ij} (4.5) означает, что

$$f(x_{12}, x_{23} x_{24}) f(x_{13} x_{23}, x_{34}) = f(x_{23}, x_{34}) f(x_{12} x_{13}, x_{24} x_{34}) f(x_{12}, x_{23}). \quad (4.10)$$

Итак, каждой паре (λ, f) , $\lambda \in 1+2\mathbb{Z}$, удовлетворяющей (4.3), (4.4), (4.10), соответствует "естественный" способ построения по квазитензорной категории C новой квазитензорной категории C' за счет изменения только изоморфизмов коммутативности и ассоциативности ("естественность" означает, что если $F: C_1 \rightarrow C_2$ - тензорный функтор в смысле определения 1.8 из [6], то F - тензорный функтор из C'_1 в C'_2). Нетрудно показать, что это соответствие биективно. Интерпретация пар (λ, f) , удовлетворяющих (4.3), (4.4), (4.10), как способов изменения изоморфизмов коммутативности и ассоциативности, позволяет ввести на множестве таких пар структуру полугруппы $(\lambda_1, f_1) \cdot (\lambda_2, f_2) = (\lambda, f)$, где

$$\lambda = \lambda_1 \lambda_2, \quad f(X, Y) = f_1(f_2(X, Y) X^{\lambda_2} f_2(X, Y)^{-1}, Y^{\lambda_2}) \cdot f_2(X, Y). \quad (4.11)$$

Пусть теперь $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ удовлетворяет (1.1)-(1.6). Тогда A -модули образуют квазитензорную категорию (см. § 1). Если изменить изоморфизмы коммутативности и ассоциативности с помощью пары (λ, f) , удовлетворяющей (4.3), (4.4), (4.10), то полученная квазитензорная категория соответствует $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$, где

$$R = R \cdot (R^{21} \cdot R)^m = (R \cdot R^{21})^m \cdot R, \quad m = (\lambda-1)/2, \quad (4.12a)$$

$$\Phi = \Phi \cdot f(R^{21}R^{12}, \Phi^{-1}R^{32}R^{23}\Phi) = f(\Phi R^{21}R^{12}\Phi^{-1}, R^{32}R^{23}) \cdot \Phi. \quad (4.126)$$

формулы (4.12) определяют действие полугруппы пар (λ, f) , удовлетворяющих (4.3), (4.4), (4.10), на множестве наборов $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$, удовлетворяющих (1.1)–(1.6). К сожалению, эта полугруппа состоит только из единичного элемента $(\lambda=1, f=1)$ и инволюции $(\lambda=-1, f=1)$, переводящей $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ в $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, (R^{21})^{-1})$. Это вытекает из следующего предложения, так как в силу (4.10) $f(X, Y)$ принадлежит коммутанту свободной группы с образующими X, Y .

Предложение 4.1. Уравнениям (4.3), (4.4), где $f(X, Y)$ принадлежит свободной группе с образующими X и Y , удовлетворяют только $\lambda = \pm 1$, $f(X, Y) = Y^s X^{-s}$.

Доказательство. Если (λ, f) удовлетворяет уравнениям (4.3), (4.4), то им удовлетворяет и (λ, \tilde{f}) , где $\tilde{f}(X, Y) = Y^{-s} f(X, Y) X^s$. Из (4.3) следует, что при подходящем s либо $\tilde{f}=1$, либо несократимая запись $\tilde{f}(X, Y)$ имеет вид $X^\ell \dots Y^{-\ell}$, $\ell \neq 0$. Так как \tilde{f} удовлетворяет (4.4), то второй случай невозможен, а в первом случае $\lambda = \pm 1$. •

Заметим теперь, что если k – поле характеристики 0, то формулы (4.3), (4.4), (4.10), (4.11) имеют смысл, и если считать, что $\lambda \in k$, а $f(X, Y)$ принадлежит k -проунипотентному пополнению свободной группы с образующими X, Y , т.е. $f(X, Y)$ – формальное выражение вида $\exp F(\ln X, \ln Y)$, где F – лиевский формальный ряд над k . Тогда обе части (4.10) принадлежат k -проунипотентному пополнению K_4 , т.е. имеют вид e^v , где v принадлежит фактору алгебры лиевских формальных рядов от переменных ξ_{ij} , $1 \leq i < j \leq 4$, по идеалу, соответствующему соотношениям (4.7)–(4.9) для $x_{ij} = \exp \xi_{ij}$.

Обозначим через $\underline{GT}(k)$ полугруппу пар (λ, f) , удовлетворяющих (4.3), (4.4), (4.10), где $\lambda \in k$, а f принадлежит k -проунипотентному пополнению свободной группы. Группу обратимых элементов $\underline{GT}(k)$ обозначим $\underline{GT}(k)$ и назовем k -проунипотентным *вариантом группы Гротендика – Тейхмюллера*. Легко видеть, что $\underline{GT}(k) = \{(\lambda, f) \in \underline{GT}(k) \mid \lambda \neq 0\}$. Оказывается (см. § 5, 6), что группа $\underline{GT}(k)$ достаточно велика: она бесконечномерна, а гомоморфизм $\underline{GT}(k) \rightarrow k^*$, переводящий (λ, f) в λ , сюръективен.

Если $(\lambda, f) \in \underline{GT}(k)$, а $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ – квазитреугольная квазихопфова QUE-алгебра над $k[[h]]$, то формулы (4.12) имеют смысл. Итак, $\underline{GT}(k)$ действует на множестве квазитреугольных квазихопфовых QUE-алгебр. Скручивание (см. (1.10)–(1.12)) коммутирует с действием $\underline{GT}(k)$. Пусть теперь A – это $U_{\mathfrak{g}}$ с обычным коумножением, $R = e^{ht/2}$, $\Phi = \exp P(ht^{12}, ht^{23})$, где \mathfrak{g} – деформационная алгебра Ли над $k[[h]]$, $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ симметричен и \mathfrak{g} -инвариантен, а P – лиевский формальный ряд над k . Тогда R и Φ , определяемые формулами (4.12), имеют вид $R = e^{\lambda ht/2}$, $\Phi = \exp P(ht^{12}, ht^{23})$, где P – лиевский формальный ряд над k .

Интерпретируем элементы $\underline{GT}(k)$ как эндоморфизмы некоторого пополнения $B_n(k)$ группы B_n . Пусть λ, f удовлетворяют (4.3), (4.4), (4.10), причем $\lambda \in 1+2\mathbb{Z}$, а $f(X, Y)$ принадлежит свободной группе с образующими X, Y (забудем, что таких пар (λ, f) всего две). Пусть V – объект квазитензорной категории \mathcal{C} , $V^{\otimes 2} = V \otimes V$, $V^{\otimes 3} = V^{\otimes 2} \otimes V$ и т.д. На $V^{\otimes n}$

действует B_n . Если изменить в C изоморфизмы коммутативности и ассоциативности с помощью (λ, f) , то возникнет новое действие B_n на $V^{\otimes n}$. Оно получается из старого с помощью композиции с эндоморфизмом B_n , переводящим $\sigma_1 \mapsto \sigma_1^\lambda$, $\sigma_i \mapsto f(y_i, \sigma_i^2)^{-1} \sigma_i^\lambda \times f(y_i, \sigma_i^2)$ при $i > 1$, где $y_i = \sigma_{i-1} \dots \sigma_1 \cdot \sigma_1 \dots \sigma_{i-1}$ (в обозначениях (4.6) $y_i = x_{11} x_{21} \dots x_{i-1,1}$). Пусть теперь $K_n(k)$ - это k -проунипотентное пополнение K_n , а $B_n(k)$ - фактор полупрямого произведения B_n и $K_n(k)$ (поясним, что автоморфизмы $\text{Adg}: K_n \rightarrow K_n$, $g \in B_n$, продолжаются на $K_n(k)$) по подгруппе элементов вида $x \cdot x^{-1}$, $x \in K_n$, где x рассматривается как элемент B_n , а x^{-1} - как элемент $K_n(k)$. Формулы

$$\sigma_1 \mapsto \sigma_1^{(\lambda)}, \sigma_i \mapsto f(y_i, \sigma_i^2)^{-1} \sigma_i^{(\lambda)} f(y_i, \sigma_i^2), \quad 1 < i \leq n, \quad (4.13)$$

где $\sigma_1^{(\lambda)} = \sigma_1 \cdot (\sigma_1^2)^{(\lambda-1)/2}$, $y_i = \sigma_{i-1} \dots \sigma_1 \cdot \sigma_1 \dots \sigma_{i-1}$, определяют правое действие $\text{GT}(k)$ на $B_n(k)$, являющееся точным при $n \geq 3$. Эндоморфизмы (4.13) согласованы с вложениями $B_n(k) \rightarrow B_{n+1}(k)$, переводящими σ_i в σ_i , и индуцируют тождественные автоморфизмы групп $S_n = B_n(k)/K_n(k)$. Автор не знает, любой ли набор автоморфизмов $\gamma_n \in \text{Aut } B_n(k)$, обладающий этими свойствами, происходит из элемента $\text{GT}(k)$ (возможно, методы [15] позволят это выяснить). Во всяком случае, эндоморфизмы $B_3(k)$, переводящие σ_1 в $\sigma_1^{(\lambda)}$ и индуцирующие тождественный автоморфизм S_3 , имеют вид (4.13) или, что эквивалентно, вид

$$\sigma_1 \mapsto \sigma_1^{(\lambda)}, \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \mapsto \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \cdot [(\sigma_1 \sigma_2)^3]^{(\lambda-1)/2} f(\sigma_1^2, \sigma_2^2), \quad (4.14)$$

где f удовлетворяет (4.3) и (4.4). Обратно, из (4.3), (4.4) следует, что (4.14) определяет эндоморфизм $B_3(k)$.

Объясним теперь, следуя [2], как строится канонический гомоморфизм $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GT}(\mathbb{Q}_\ell)$, где \mathbb{Q} - алгебраическое замыкание \mathbb{Q} в \mathbb{C} (в дальнейшем эта конструкция не используется). Обозначим через $\widehat{\text{GT}}$ (соответственно $\widehat{\text{GT}}_\ell$) полугруппу пар (λ, f) , удовлетворяющих (4.3), (4.4), (4.10), где f принадлежит проконечному пополнению (соотв. про- ℓ -пополнению) свободной группы, а $\lambda \in 1 + 2\hat{\mathbb{Z}}$ (соотв. $\lambda \in 1 + 2\mathbb{Z}_\ell$). Здесь $\hat{\mathbb{Z}} = \varprojlim_n \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Группы обратимых элементов в $\widehat{\text{GT}}$ и $\widehat{\text{GT}}_\ell$ обозначим $\widehat{\text{GT}}$ и GT_ℓ . Имеем

Естественные гомоморфизмы $\widehat{\text{GT}} \rightarrow \text{GT}_\ell$ и $\text{GT}_\ell \hookrightarrow \text{GT}(\mathbb{Q}_\ell)$. Остается построить гомоморфизм $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) \rightarrow \widehat{\text{GT}}$. Сначала напомним принадлежащую Г. В. Белому [21] конструкцию гомоморфизма $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{Aut } \hat{\Gamma}$, где Γ - фактор B_3 по центру, а $\hat{\Gamma}$ - проконечное пополнение Γ . Имеется канонический изоморфизм $\Gamma \xrightarrow{\sim} \pi_1(M, x)$, где M - стек, являющийся фактором $\mathbb{CP}^1 - \{0, 1, \infty\}$ по группе S_3 проективных преобразований, переставляющих $0, 1, \infty$, а x - образ точки \mathbb{CP}^1 , находящейся на действительной оси вблизи 0. Поэтому $\Gamma = \text{Gal}(F/E)$, где E - подполе S_3 -инвариантов в $\mathbb{Q}(z)$ (S_3 действует на z , как указано выше), а F - наибольшее алгебраическое расширение $\mathbb{Q}(z)$ в $L = \bigcup_n \mathbb{Q}((z^{1/n}))$, неразветвленное вне $0, 1, \infty$. $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ действует на L , оставляя E и F инвариантными. Поэтому $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ действует на $\text{Gal}(F/E) = \hat{\Gamma}$. Подгруппа $H \subset \hat{\Gamma}$, топологически порожденная образом $\sigma_1 \in B_3$, инвариантна относительно $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$, а

действие $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ на фактор-группе S_3 группы $\hat{\Gamma}$ тождественно. Полугруппа эндоморфизмов $\varphi: \hat{\Gamma} \rightarrow \hat{\Gamma}$ таких, что $\varphi(H) \subset H$, а действие φ на S_3 тождественно, антиизоморфна полугруппе пар (λ, f) , удовлетворяющих (4.3) и (4.4), где $\lambda \in 1+2\hat{\mathbb{Z}}$, а f принадлежит проконечному пополнению свободной группы: паре (λ, f) соответствует (см. (4.14)) эндоморфизм $\varphi: \hat{\Gamma} \rightarrow \hat{\Gamma}$ такой, что $\varphi(\sigma_1) = \sigma_1^\lambda$, $\varphi(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_1) = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1 \times \times f(\sigma_1^2, \sigma_2^2)$, где σ_i - образ σ_i в $\hat{\Gamma}$. Чтобы получить изоморфизм между группами обратимых элементов в этих полугруппах, скомпонуем построенный антигомоморфизм с отображением $y \mapsto y^{-1}$.

Остается показать, что пары (λ, f) , соответствующие элементам $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$, удовлетворяют (4.10). Это можно извлечь из § 2 работы Гротендика [2]. В [2] предложено для любых g и v рассмотреть "группоид Тейхмюллера" $T_{g,v}$, т.е. фундаментальный группоид стэка модулей $M_{g,v}$ компактных римановых поверхностей X рода g с v отмеченными точками x_1, \dots, x_v . Фундаментальный группоид отличается от фундаментальной группы тем, что выбирается не одна, а несколько отмеченных точек. В данном случае удобно выбрать отмеченные точки "на бесконечности" (см. § 15 из [11]) в соответствии со способами "максимального вырождения" набора (X, x_1, \dots, x_v) . Поскольку вырождение набора (X, x_1, \dots, x_v) приводит к уменьшению g и v , группоиды $T_{g,v}$ при разных g и v связаны некоторыми гомоморфизмами. Совокупность всех $T_{g,v}$ и всех таких гомоморфизмов названа в [2] башней Тейхмюллера. В [2] замечено, что имеется естественный гомоморфизм $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) \rightarrow G$, где G - группа автоморфизмов проконечного аналога башни Тейхмюллера ($T_{g,v}$ заменяется своим проконечным пополнением $\hat{T}_{g,v}$). В [2] сформулировано как правдоподобная гипотеза утверждение о том, что $\hat{T}_{0,4}$ и $\hat{T}_{1,1}$ в определенном смысле порождают всю башню $\{\hat{T}_{g,v}\}$, а все соотношения между образующими этой башни происходят из $\hat{T}_{0,4}$, $\hat{T}_{1,1}$, $\hat{T}_{0,5}$ и $\hat{T}_{1,2}$. Эта гипотеза, по-видимому, доказана в приложении В к физической работе [22]. Во всяком случае, легко убедиться, что $\hat{T}_{0,4}$ порождает подбашню $\{\hat{T}_{0,v}\}$, а все соотношения в $\{\hat{T}_{0,v}\}$ происходят из $\hat{T}_{0,4}$ и $\hat{T}_{0,5}$. Оказывается, \widehat{GT} - группа автоморфизмов башни $\{\hat{T}_{0,v}\}$. Действительно, такой автоморфизм однозначно определяется своим действием на $\hat{T}_{0,4}$, т.е. на $\hat{\Gamma}$. Это действие описывается парой (λ, f) , удовлетворяющей (4.3) и (4.4), а (4.10) необходимо и достаточно, чтобы автоморфизм $\hat{T}_{0,4}$ продолжался до автоморфизма $\hat{T}_{0,5}$. Из гипотезы Гротендика следует, что группа автоморфизмов башни $\{\hat{T}_{g,v}\}$, согласованных с естественным гомоморфизмом $\hat{T}_{0,4} \rightarrow \hat{T}_{1,1}$ (четверке точек на \mathbb{P}^1 сопоставляется двулистное накрытие \mathbb{P}^1 , разветвленное в этих точках), тоже равна \widehat{GT} : если автоморфизм $\hat{T}_{0,4}$ продолжается до автоморфизма $\hat{T}_{0,5}$, то он продолжается и до автоморфизма $\hat{T}_{1,2}$, ибо, как отмечено в [2], $M_{1,2}$ почти не отличается от $M_{0,5}$.

Гомоморфизм $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) \rightarrow \widehat{GT}$ инъективен по теореме Г.В.Белого [21]. Изучению ядра и образа гомоморфизма $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q}) \rightarrow \widehat{GT}$ посвящен ряд работ (см. [11-14] и цитированную там литературу)).

§ 5. Доказательство теоремы А"

Пусть k - поле характеристики 0, $\text{fr}_k(A, B)$ - алгебра лиевских формальных рядов над k от переменных A и B (fr - сокращение от free), $\text{Fr}_k(A, B) = \exp \text{fr}_k(A, B)$, а $M_1(k)$ - множество $\varphi \in \text{Fr}_k(A, B)$, удовлетворяющих (2.13) и (2.14), где

$$X^{ij} = X^{ji}, [X^{ij}, X^{r\ell}] = 0 \text{ при } i \neq j \neq r \neq \ell, [X^{ij} + X^{ir}, X^{jr}] = 0 \text{ при } i \neq j \neq r. \quad (5.1)$$

Пусть α_n^k - пополнение (по естественной градуировке) алгебры Ли над k с образующими X^{ij} , $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$, $i \neq j$, и определяющими соотношениями (5.1). При $n \geq 3$ алгебры α_n^k не свободны, но сводятся к свободным: α_n^k - полупрямое произведение α_{n-1}^k и топологически свободной алгебры, порожденной X_{in} , $1 \leq i \leq n-1$ (последняя является идеалом в α_n^k). При $n=3$ есть более удобная реализация: α_3^k - прямая сумма своего центра, порожденного элементом $X^{12} + X^{13} + X^{23}$, и топологически свободной алгебры, порожденной X^{12} и X^{23} . Поэтому (2.14а) эквивалентно двум равенствам, одно из которых получается подстановкой $X^{12}=A$, $X^{23}=B$, $X^{13}=-A-B$, а второе - подстановкой $X^{12}=X^{23}=0$. Второе равенство тавтологично, а первое имеет вид

$$e^{A/2} \varphi(C, A) e^{C/2} \varphi(C, B)^{-1} e^{B/2} \varphi(A, B) = 1, \quad \text{где } A + B + C = 0. \quad (5.2a)$$

Аналогично (2.14б) эквивалентно равенству

$$\varphi(B, A)^{-1} e^{A/2} \varphi(C, A) e^{C/2} \varphi(C, B)^{-1} e^{B/2} = 1, \quad \text{где } A + B + C = 0, \quad (5.2б)$$

получаемому подстановкой $X^{12}=C$, $X^{23}=B$, $X^{13}=A$. Из (5.2а) и (5.2б) следует (2.12). Если (2.12) выполнено, то (5.2а) и (5.2б) эквивалентны равенству

$$e^{A/2} \varphi(C, A) e^{C/2} \varphi(B, C) e^{B/2} \varphi(A, B) = 1, \quad \text{где } A + B + C = 0. \quad (5.3)$$

Итак, $M_1(k)$ - это множество $\varphi \in \text{Fr}_k(A, B)$, удовлетворяющих (2.12), (5.3) и (2.13). Пусть $M_\mu(k)$ - множество $\varphi \in \text{Fr}_k(A, B)$, удовлетворяющих (2.12), (2.13) и уравнению, получаемому из (5.3) заменой $e^{A/2}$, $e^{B/2}$, $e^{C/2}$ на $e^{\mu A/2}$, $e^{\mu B/2}$, $e^{\mu C/2}$. Положим $\underline{M}(k) = \{(\mu, \varphi) \mid \mu \in k, \varphi \in M_\mu(k)\}$, $M(k) = \{(\mu, \varphi) \in \underline{M}(k) \mid \mu \neq 0\}$. На $\underline{M}(k)$ действует $\underline{GT}(k)$: элемент $(\lambda, f) \in \underline{GT}(k)$ переводит $(\mu, \varphi) \in \underline{M}(k)$ в $(\lambda\mu, \bar{\varphi})$, где $\bar{\varphi}(A, B) = f(\varphi(A, B) e^A \varphi(A, B)^{-1}, e^B) \cdot \varphi(A, B)$ (ср. с (4.12)).

Предложение 5.1. Действие $\underline{GT}(k)$ на $M(k)$ свободно и транзитивно.

Доказательство. Если $(\mu, \varphi) \in M(k)$, $(\bar{\mu}, \bar{\varphi}) \in M(k)$, то существует ровно одно f такое, что $\bar{\varphi}(A, B) = f(\varphi(A, B) e^A \varphi(A, B)^{-1}, e^B) \cdot \varphi(A, B)$. Надо показать, что $(\lambda, f) \in \underline{GT}(k)$, где $\lambda = \bar{\mu}/\mu$. Докажем (4.10). Пусть G_n - полупрямое произведение S_n и $\exp \alpha_n^k$. Имеется гомоморфизм $B_n \rightarrow G_n$, переводящий σ_i в $\varphi(X^{11} + \dots + X^{i-1, i-1}, X^{i, i+1})^{-1} \sigma^{i, i+1} \exp(\mu X^{i, i+1}/2) \times \varphi(X^{11} + \dots + X^{i-1, i-1}, X^{i, i+1})$, где $\sigma^{ij} \in S_n$ переставляет i и j . Он индуцирует гомоморфизм $K_n \rightarrow \exp \alpha_n^k$ и, значит, гомоморфизм $\alpha_n^k: K_n(k) \rightarrow \exp \alpha_n^k$, где $K_n(k)$ - это k -проунипотентное пополнение K_n . Нетрудно показать, что левая и правая части (4.10) имеют одинаковые образы в

$\exp \alpha_4^k$. Остается доказать, что α_n — изоморфизм. Алгебра $\text{Lie } K_n(k)$ топологически порождена элементами ξ_{ij} , $1 \leq i < j \leq n$, определяющие соотношения между которыми получаются, если в (4.7)–(4.9) подставить $x_{ij} = \exp \xi_{ij}$. Главные части этих соотношений такие же, как в (5.1), а $(\alpha_n)_*(\xi_{ij}) = \mu x^{ij} + \{\text{младшие члены}\}$, где $(\alpha_n)_*: \text{Lie } K_n(k) \rightarrow \alpha_n^k$ индуцирован гомоморфизмом α_n . Поэтому α_n — изоморфизм, т.е. (4.10) доказано. (4.3) очевидно. Для доказательства равенства (4.4) можно интерпретировать его в терминах K_3 и рассуждать, как при доказательстве (4.10), или, что эквивалентно, сделать подстановку

$$X_1 = e^A, \quad X_2 = e^{-A/2} \varphi(B, A) e^B \varphi(B, A)^{-1} e^{A/2}, \quad X_3 = \varphi(C, A) e^C \varphi(C, A)^{-1}, \quad (5.4)$$

где $A + B + C = 0$. •

Отождествив $M_1(k)$ с фактором $M(k)$ по естественному действию $k^*(c \in k^*$ переводит (μ, φ) в $(c\mu, \tilde{\varphi})$, где $\tilde{\varphi}(A, B) = \varphi(cA, cB)$, получим действие $\text{GT}(k)$ на $M_1(k)$. Предложение 5.1 означает, что подгруппа $\text{GT}_1(k) = \{(\lambda, f) \in \text{GT}(k) \mid \lambda = 1\}$ действует на $M_1(k)$ свободно и транзитивно, причем если $M_1(k) \neq \emptyset$, то последовательность $1 \rightarrow \text{GT}_1(k) \rightarrow \text{GT}(k) \xrightarrow{\nu} k^* \rightarrow 1$, где $\nu(\lambda, f) = \lambda$, точна и каждому $\varphi \in M_1(k)$ соответствует гомоморфизм $\theta_\varphi: k^* \rightarrow \text{GT}(k)$ такой, что $\nu \circ \theta_\varphi = \text{id}$, а $\theta_\varphi(k^*)$ — стационарная подгруппа φ в $\text{GT}(k)$.

Алгебры Ли проалгебраических групп $\text{GT}(k)$ и $\text{GT}_1(k)$ обозначим $\mathfrak{gt}(k)$ и $\mathfrak{gt}_1(k)$. Подставив в (4.3), (4.4), (4.10) $f(X, Y) = \exp \varepsilon \psi(\ln X, \ln Y)$, $\lambda = 1 + \varepsilon s$ и линеаризовав по ε , получим, что $\mathfrak{gt}(k)$ состоит из пар (s, ψ) , $s \in k$, $\psi \in \text{fr}_k(\alpha, \beta)$ таких, что

$$\psi(\alpha, \beta) = -\psi(\beta, \alpha), \quad (5.5)$$

$$\psi(\alpha, \beta) + \psi(\beta, \gamma) + \psi(\gamma, \alpha) + \frac{\varepsilon}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 0, \quad \text{где } e^\alpha e^\beta e^\gamma = 1, \quad (5.6)$$

$$\begin{aligned} \psi(\xi_{12}, \xi_{23}^* \xi_{24}) + \psi(\xi_{13}^* \xi_{23}, \xi_{34}) &= \psi(\xi_{23}, \xi_{34}) + \\ &+ \psi(\xi_{12}^* \xi_{13}, \xi_{24}^* \xi_{34}) + \psi(\xi_{12}, \xi_{23}). \end{aligned} \quad (5.7)$$

Здесь $u^*v = \ln(e^u e^v)$, а ξ_{ij} удовлетворяют соотношениям, получаемым из (4.7)–(4.9) подстановкой $x_{ij} = \exp \xi_{ij}$. Коммутатор в $\mathfrak{gt}(k)$ имеет вид $[(s_1, \psi_1), (s_2, \psi_2)] = (0, \psi)$, где $\psi = [\psi_1, \psi_2] + s_2 D(\psi_1) - s_1 D(\psi_2) + D_{\psi_2}(\psi_1) - D_{\psi_1}(\psi_2)$, а D и D_ψ — дифференцирования $\text{fr}_k(\alpha, \beta)$ такие, что $D(\alpha) = \alpha$, $D(\beta) = \beta$, $D_\psi(\alpha) = [\psi, \alpha]$, $D_\psi(\beta) = 0$.

Если $M_1(k) \neq \emptyset$, то последовательность

$$0 \rightarrow \mathfrak{gt}_1(k) \rightarrow \mathfrak{gt}(k) \xrightarrow{\nu^*} k \rightarrow 0, \quad \nu_*(s, \psi) = s \quad (5.8)$$

точна, а каждому $\psi \in M_1(k)$ соответствует ее расщепление, определяемое алгеброй Ли стационарной подгруппы φ в $\text{GT}(k)$.

Предложение 5.2. Построенное отображение $M_1(k) \rightarrow \{\text{расщепления последовательности (5.8)}\}$ биективно. В частности, из точности (5.8) следует, что $M_1(k) \neq \emptyset$.

Доказательство. Наше отображение переводит $\varphi \in M_1(k)$ в

расщепление, определяемое элементом $(1, \psi) \in \text{gt}(k)$; где ψ находится из условия

$$\varphi(A, B)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} \varphi(tA, tB) \Big|_{t=1} = \psi(A, \varphi(A, B)^{-1} B \varphi(A, B)). \quad (5.9)$$

Если ψ задано, то существует ровно одно $\varphi \in \text{Fr}_k(A, B)$, удовлетворяющее (5.9). В силу (5.5) равенство (5.9) остается в силе при замене $\varphi(A, B)$ на $\varphi(B, A)^{-1}$. Поэтому $\varphi(A, B) = \varphi(B, A)^{-1}$. Докажем (5.3). Левую часть (5.3) обозначим $Q(A, B)$. Тогда

$$Q(A, B)^{-1} \frac{d}{dt} Q(tA, tB) \Big|_{t=1} = \psi(A, B) + \psi(B, C) + \psi(C, A) + \frac{A+B+C}{2}, \quad (5.10)$$

где $A = Q(A, B)^{-1} A Q(A, B)$, $B = \varphi(A, B)^{-1} B \varphi(A, B)$, $C = \varphi(A, B)^{-1} e^{-B/2} \times \times \varphi(B, C)^{-1} C \varphi(B, C) e^{B/2} \varphi(A, B)$. Пусть уже доказано, что $Q(A, B) \equiv 1 \pmod{\deg n}$ (т.е. $Q(A, B) = 1 +$ члены степени n и выше). Если $Q(A, B) \equiv 1 + \bar{q}(A, B) \pmod{\deg(n+1)}$, где q однороден степени n , то левая часть (5.10) сравнима с $n \cdot q(A, B) \pmod{\deg(n+1)}$. Так как $e^{\bar{B}} e^{\bar{C}} = e^{-A/2} Q(A, C) e^{-A/2} Q(A, B)$, то обозначив через α, β, γ классы вычетов $A, B - q(A, B), C - q(A, C) \pmod{\deg(n+1)}$, будем иметь $e^{\alpha} e^{\beta} e^{\gamma} = 1$. Поэтому выполнено (5.6), где $s=1$. Отсюда правая часть (5.10) сравнима с $q(A, B) + q(A, C) \pmod{\deg(n+1)}$. Из определения Q следует, что $q(A, C) = q(B, A)$. Итак, $q(B, A) = (n-1) \cdot q(A, B)$. Поэтому $q=0$ (при $n=2$ это следует из того, что $q(A, B)$ — левский многочлен и, следовательно, пропорционален $[A, B]$).

Остается доказать (2.13). Левую часть (2.13) обозначим f , а правую g . Пусть уже доказано, что $f \equiv g \pmod{\deg n}$. Для доказательства сравнения $f \equiv g \pmod{\deg(n+1)}$ достаточно показать, что $f(X^{12}, X^{13}, \dots)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} f(tX^{12}, tX^{13}, \dots) \Big|_{t=1} \equiv g(X^{12}, X^{13}, \dots)^{-1} \cdot \frac{d}{dt} g(tX^{12}, tX^{13}, \dots) \Big|_{t=1} \pmod{\deg(n+1)}$, т.е.

$$\psi(\alpha, \beta) + \psi(\gamma, \delta) \equiv \psi(\lambda, \delta) + \psi(\mu, \nu) + \psi(\alpha, \lambda) \pmod{\deg(n+1)}, \quad (5.11)$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= X^{12}, \quad \beta = f^{-1} \cdot (X^{23} + X^{24}) \cdot f, \quad \gamma = X^{13} + X^{23}, \quad \delta = \varphi(X^{13} + X^{23}, X^{34})^{-1} \cdot X^{34} \times \\ &\times \varphi(X^{13} + X^{23}, X^{34}), \quad \lambda = \varphi(X^{12}, X^{23})^{-1} X^{23} \varphi(X^{12}, X^{23}), \quad \mu = \varphi(X^{12}, X^{23})^{-1} \times \\ &\times (X^{12} + X^{13}) \varphi(X^{12}, X^{23}), \quad \nu = \varphi(X^{12}, X^{23})^{-1} \varphi(X^{12} + X^{13}, X^{24} + X^{34})^{-1} (X^{24} + \\ &+ X^{34}) \varphi(X^{12} + X^{13}, X^{24} + X^{34}) \varphi(X^{12}, X^{23}). \end{aligned}$$

С помощью (2.12), (5.3) и сравнения $f \equiv g \pmod{\deg n}$ строится (см. доказательство предложения 5.1) гомоморфизм $h: K_4(k) \rightarrow \exp(\mathfrak{a}_4^k/I)$, где $I = \{a \in \mathfrak{a}_4^k \mid a \equiv 0 \pmod{\deg(n+1)}\}$. Положив в (5.7) $\xi_{ij} = \ln h(x_{ij})$, где x_{ij} определены формулой (4.6), получим (5.11). •

Предложение 5.3. $M_1(k) \neq \emptyset$.

Доказательство. Так как $M_1(\mathbb{C}) \neq \emptyset$ (см. § 2), то последовательность (5.8) точна при $k = \mathbb{C}$. Отсюда следует точность (5.8) при $k = \mathbb{Q}$. Поэтому $M_1(\mathbb{Q}) \neq \emptyset$ (см. предложение 5.2) и тем более $M_1(k) \neq \emptyset$. Другой вариант доказательства: так как композиция гомоморфизма $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \text{GT}(\mathbb{Q}_\ell)$ (см. § 4) и гомоморфизма $\nu: \text{GT}(\mathbb{Q}_\ell) \rightarrow \mathbb{Q}_\ell^*$ — это гомоморфизм $f: \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \rightarrow \mathbb{Z}_\ell^*$, определяемый из соотношения $\sigma^{-1}(\zeta) = \zeta^{f(\sigma)}$, где $\zeta_\ell^n = 1$, $\sigma \in \text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, то образ ν бесконечен, последовательность (5.8) точна при $k = \mathbb{Q}_\ell$.

и т. д. •

Итак, теорема А" (см. § 1) доказана.

Предложение 5.4. Множество $M_1^+(k) = \{\varphi \in M_1(k) \mid \forall (-A, -B) = \varphi(A, B)\}$ непусто. На нем действует группа $GT^+(k) = \{(\lambda, f) \in GT(k) \mid f(X^{-1}, Y^{-1}) = f(X, Y)\}$, причем действие на $M_1^+(k)$ подгруппы $GT^+(k) \cap GT_1(k)$ свободно и транзитивно.

Доказательство. $M_1^+(k)$ - множество σ -инвариантных элементов $M_1(k)$, где $\sigma \in GT(k)$ - инволюция, соответствующая $\lambda = -1$, $f = 1$. Так как (5.8) обладает σ -инвариантным расщеплением, то $M_1^+(k) \neq \emptyset$. Остальное очевидно. •

З а м е ч а н и е. $\varphi_{kz}(-A, -B) \neq \varphi_{kz}(A, B)$ (см. (2.15), (2.17) или (2.18)).

Приведенное выше доказательство предложения 5.3 неконструктивно. Наша ближайшая цель - доказать предложение 5.8, показывающее, что при построении элементов $M_1(k)$ с помощью последовательных приближений никаких проблем не возникает. Для этого введем следующую модификацию $GRT(k)$ группы $GT(k)$. Обозначим через $GRT_1(k)$ множество $g \in Fr_k(A, B)$ таких, что

$$g(B, A) = g(A, B)^{-1}, \quad (5.12)$$

$$g(C, A)g(B, C)g(A, B) = 1 \text{ при } A+B+C=0, \quad (5.13)$$

$$A+g(A, B)^{-1}Bg(A, B)+g(A, C)^{-1}Cg(A, C)=0 \text{ при } A+B+C=0, \quad (5.14)$$

$$g(X^{12}, X^{23}+X^{24}) g(X^{13}+X^{23}, X^{34}) = g(X^{23}, X^{34}) g(X^{12}+X^{13}, X^{24}+X^{34}) g(X^{12}, X^2) \quad (5.15)$$

где X^{ij} удовлетворяют (5.1). $GRT(k)$ - группа с операцией

$$(g_1 \circ g_2)(A, B) = g_1(g_2(A, B)Ag_2(A, B)^{-1}, B) \cdot g_2(A, B). \quad (5.16)$$

На $GRT_1(k)$ действует k^* по формуле $\tilde{g}(A, B) = g(c^{-1}A, c^{-1}B)$, $c \in k^*$. Полупрямое произведение k^* и $GRT_1(k)$ обозначим $GRT(k)$. Алгебра Ли $\text{grt}_1(k)$ группы $GRT_1(k)$ состоит из рядов $\psi \in Fr_k(A, B)$ таких, что

$$\psi(B, A) = -\psi(A, B), \quad (5.17)$$

$$\psi(C, A) + \psi(B, C) + \psi(A, B) = 0 \text{ при } A + B + C = 0, \quad (5.18)$$

$$[B, \psi(A, B)] + [C, \psi(A, C)] = 0 \text{ при } A + B + C = 0, \quad (5.19)$$

$$\begin{aligned} \psi(X^{12}, X^{23}+X^{24}) + \psi(X^{13}+X^{23}, X^{34}) &= \psi(X^{23}, X^{34}) + \\ &+ \psi(X^{12}+X^{13}, X^{24} + X^{34}) + \psi(X^{12}, X^{23}), \end{aligned} \quad (5.20)$$

где X^{ij} удовлетворяют (5.1). Коммутатор \langle, \rangle в $\text{grt}_1(k)$ имеет вид

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = [\psi_1, \psi_2] + D_{\psi_2}(\psi_1) - D_{\psi_1}(\psi_2), \quad (5.21)$$

где $[\psi_1, \psi_2]$ - коммутатор в $Fr_k(A, B)$, а D_{ψ} - дифференцирование $Fr_k(A, B)$ такое, что $D_{\psi}(A) = [\psi, A]$, $D_{\psi}(B) = 0$. Алгебра $\text{grt}_1(k)$ градуирована, а алгебра Ли $\text{grt}(k)$ группы $GRT(k)$ является полупрямой суммой одномерной алгебры k и $\text{grt}_1(k)$, где k действует на $\text{grt}_1(k)$ следующим образом: $1 \in k$ переводит однородный элемент $\psi \in \text{grt}_1(k)$

степени n в $-n\psi$.

З а м е ч а н и я. 1) В $gt_1(k)$ имеется фильтрация, n -й член которой — это $\{(0, \psi) \in gt_1(k) | \psi = 0 \bmod \deg n\}$. По ней строится пополненная градуированная алгебра $\widehat{gr} \, gt_1(k)$. Будет показано (см. предложение 5.6), что $gr \, \widehat{gr} \, gt_1(k) = grt_1(k)$. Этим и мотивированы обозначения grt , GRT . Включение $\widehat{gr} \, gt_1(k) \subset grt_1(k)$ доказать нетрудно: (5.19) следует из того, что $\psi(\alpha, \beta) - e^{-\beta} \psi(\alpha, \beta) e^{\beta} + e^{\gamma} \psi(\alpha, \gamma) e^{-\gamma} - \psi(\alpha, \gamma) = 0$, где $(0, \psi) \in gt_1(k)$, $e^{\alpha} e^{\beta} e^{\gamma} = 1$. Это в свою очередь вытекает из аналогичного утверждения о $GT_1(k)$: если $(1, f) \in GT_1(k)$, то $X_1 \cdot f(X_1, X_2)^{-1} X_2 f(X_1, X_2) \cdot f(X_1, X_3)^{-1} X_3 f(X_1, X_3) = X_1 f(X_2, X_1) \times X_2 f(X_3, X_2) X_3 f(X_1, X_3) = f(\tilde{X}_2, X_1) f(X_3, \tilde{X}_2) f(X_1, X_3) = 1$ при $X_1 X_2 X_3 = 1$, где $\tilde{X}_2 = X_1 X_2 X_1^{-1} = X_3^{-1} X_2 X_3$. Впрочем, (5.19) можно и не проверять (см. предложение 5.7).

2) Связь между $GT_1(k)$ и $GRT_1(k)$ можно объяснить также следующим образом: если $\{g_\varepsilon\}$ — семейство элементов $Fr_k(A, B)$ такое, что $(1, f_\varepsilon) \in GT_1(k)$ при $\varepsilon \neq 0$, где $f_\varepsilon(X, Y) = g_\varepsilon(\varepsilon^{-1} \ln X, \varepsilon^{-1} \ln Y)$, то $g_0 \in GRT_1(k)$.

3) $GRT_1(k)$, как и $GT(k)$, обладает категорной интерпретацией. Пусть C — тензорная категория и заданы автоморфизмы $\tau_{V, W} \in \text{Aut}(V \otimes W)$, функториальные по $V, W \in C$, причем $c_{V, W} \tau_{V, W} = \tau_{V, W} c_{V, W}$, $\ln \tau_{U \otimes V, W} = \text{id}_U \otimes \ln \tau_{V, W} + (c_{U, V}^{-1} \text{id})(\text{id}_V \otimes \ln \tau_{U, W})(c_{U, V} \text{id})$, где c — изоморфизм коммутативности (следовало бы, конечно, сформулировать условия на C и τ , достаточные, чтобы последнее равенство имело смысл; типичный пример: C — категория \hbar -адически полных $U\mathfrak{g}$ -модулей, а $\tau_{V, W}$ — оператор в $V \otimes W$, соответствующий $e^{\hbar t} \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$, где g и t означают то же, что в § 1). Пусть имеют смысл выражения вида $g(\ln \tau_{U, V} \otimes \text{id}_W, \text{id}_U \otimes \ln \tau_{V, W})$, где $g(A, B) \in Fr_k(A, B)$. Тогда если $g \in GRT_1(k)$, то, взяв $g(\ln \tau_{U, V} \otimes \text{id}_W, \text{id}_U \otimes \ln \tau_{V, W})$ в качестве нового изоморфизма ассоциативности $(U \otimes V) \otimes W \xrightarrow{\sim} U \otimes (V \otimes W)$ и не изменив c и τ , мы приходим к структуре того же типа, что исходная.

Формула $\tilde{\varphi}(A, B) = \varphi(g(A, B) A g(A, B)^{-1}, B) \cdot g(A, B)$, где $\varphi \in M_\mu(k)$, $g \in GRT_1(k)$, определяет правое действие $GRT_1(k)$ на $M_\mu(k)$. Тем самым $GRT_1(k)$ действует справа на $\underline{M}(k) = \{(\mu, \varphi) | \varphi \in M_\mu(k)\}$. Формулы $\tilde{\varphi}(A, B) = \varphi(c^{-1} A, c^{-1} B)$, $\tilde{\mu} = c^{-1} \mu$, где $c \in k^*$, определяют действие k^* на $\underline{M}(k)$. В итоге получаем правое действие $GRT(k)$ на $\underline{M}(k)$. Оно коммутирует с левым действием $GT(k)$.

П р е д л о ж е н и е 5.5. Действие $GRT(k)$ на $\underline{M}(k)$ свободно и транзитивно. То же верно для действия $GRT_1(k)$ на $\underline{M}_1(k)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно доказать второе утверждение. Если $\varphi, \tilde{\varphi} \in M_1(k)$, то существует ровно одно $g \in Fr_k(A, B)$ такое, что $\tilde{\varphi}(A, B) = \varphi(g(A, B) A g(A, B)^{-1}, B) \cdot g(A, B)$, а именно

$$g(A, B) = \chi(\tilde{\varphi}(A, B) A \tilde{\varphi}(A, B)^{-1}, B) \cdot \tilde{\varphi}(A, B), \quad (5.22)$$

где $\chi \in Fr_k(A, B)$ обратно φ относительно операции (5.16), т.е. $\chi(\varphi(A, B) A \varphi(A, B)^{-1}, B) \cdot \varphi(A, B) = 1$. Рассуждая, как при доказательстве предложения 5.1, получим, что $(0, f) \in GT(k)$, где $f(X, Y) = \chi(\ln X, \ln Y)$. (5.22) означает, что g —

результат действия $(0, f)$ на φ и, значит, $g \in M_0(k)$, т.е. g удовлетворяет (5.12), (5.13). (5.15). Воспользуемся теперь равенством

$$\ln X_1 + X_1^{1/2} f(X_1, X_2)^{-1} \ln X_2 + f(X_1, X_2) X_1^{-1/2} + f(X_1, X_3)^{-1} \times \ln X_3 + f(X_1, X_3) = 0, \quad (5.23)$$

где $X_1 X_2 X_3 = 1$, доказываемым подстановкой (5.4). Сделав в (5.23) подстановку типа (5.4) с заменой φ на $\bar{\varphi}$ и воспользовавшись (5.22), получим (5.14). •

Из предложений 5.1 и 5.5 вытекает

Предложение 5.6. Каждое $\varphi \in M(k)$ определяет изоморфизм $s_\varphi: \text{GRT}(k) \xrightarrow{\sim} \text{GT}(k)$, характеризуемый тем, что любое $\gamma \in \text{GRT}(k)$ действует на φ справа так же, как $s_\varphi(\gamma)$ слева. Диаграмма

$$\begin{array}{ccc} & s_\varphi & \\ \text{GRT}(k) & \xrightarrow{\quad} & \text{GT}(k) \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & k^* & \end{array}$$

коммутативна, так что $s_\varphi(\text{GRT}_1(k)) = \text{GT}_1(k)$. Расщепление последовательности (5.8), соответствующее $\varphi \in M_1(k)$, определяется гомоморфизмом $s_\varphi \circ i: k^* \rightarrow \text{GT}(k)$, где i — каноническое вложение $k^* \rightarrow \text{GRT}(k)$. $\widehat{\text{gr}} \text{gt}_1(k) = \text{grt}_1(k)$, причем если $\varphi \in M_1(k)$, то s_φ индуцирует тождественное отображение $\text{grt}_1(k) \rightarrow \widehat{\text{gr}} \text{gt}_1(k)$.

Предложение 5.7. Из (5.17), (5.18) и (5.20) следует (5.19).

Доказательство. Левую часть (5.19) обозначим $s(B, C)$. Тогда $s(B, C) = s(C, B)$. Кроме того,

$$s(Y_1, Y_2) - s(Y_1, Y_2 + Y_3) + s(Y_1 + Y_2, Y_3) - s(Y_2, Y_3) = 0, \quad (5.24)$$

где Y_i — образующие свободной алгебры Ли. Действительно, обозначим левую часть (5.24) через $u(Y_1, Y_2, Y_3)$. Тогда из (5.17) и (5.18) следует, что $u(X^{14}, X^{24}, X^{34}) = [X^{14} + X^{24} + X^{34}, \mu^{1234}] - [X^{14} + X^{24}, \mu^{1243}] + [X^{14}, \mu^{1423}]$, где $\mu^{1234} = \{\text{левая часть (5.20)}\} - \{\text{правая часть (5.20)}\}$. Поэтому из (5.17), (5.18) и (5.20) следует (5.24). Остается доказать, что если симметричный лиевский многочлен $s(B, C)$ удовлетворяет (5.24), то $s = 0$. Хорошо известно, что если $s(x, y)$ — обычный (коммутативный) многочлен от двух групп переменных $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ и $y = (y^{(1)}, \dots, y^{(n)})$ такой, что $s(y, x) = s(x, y)$ и выполнено (5.24), то s имеет вид $f(x+y) - f(x) - f(y)$. В этом можно убедиться (см. доказательство предложения 2.2 из [1]), представив пространство однородных многочленов $s(x, y)$ степени m в виде $V_m \otimes_{S_m} W_m$, где V_m — пространство многочленов от $x_1 = (x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(n)}), \dots, x_m = (x_m^{(1)}, \dots, x_m^{(n)})$, линейных по каждому x_i , а W_m — некоторый S_m -модуль. Эти же рассуждения проходят и в лиевском случае (в качестве V_m надо взять пространство лиевских многочленов от m переменных, линейных по каждому переменному), но теперь $f(x)$ — лиевский многочлен от x , т.е. $f(x) = cx$, $c \in k$. Поэтому $s = 0$. •

Положим $\text{fr}_k^{(r)}(A, B) = \text{fr}_k(A, B) / I_r$, где $I_r = \{u \in \text{fr}_k(A, B) \mid u \equiv 0 \pmod{\deg r}\}$. Пусть $\text{Fr}_k^{(r)}(A, B) = \exp \text{fr}_k^{(r)}(A, B)$, а $M_1^{(r)}(k)$ — множество $\varphi \in \text{Fr}_k^{(r)}(A, B)$, удовлетворяющих

(2.12), (5.3) и (2.13) mod deg r .

Предложение 5.8. *Отображение $M_1^{(r+1)}(k) \rightarrow M_1^{(r)}(k)$ сюръективно.*

Доказательство. Аналогично $\text{GRT}_1(k)$ рассмотрим группу $\text{GRT}_1^{(r)}(k)$, состоящую из элементов $g \in \text{Fr}_k^{(r)}(A, B)$, удовлетворяющих (5.12)–(5.15) mod deg n . Аналогично предложению 5.5 доказывается, что $\text{GRT}_1^{(r)}(k)$ действует на $M_1^{(r)}(k)$ свободно и транзитивно. Остается доказать сюръективность гомоморфизма $\text{GRT}_1^{(r+1)}(k) \rightarrow \text{GRT}_1^{(r)}(k)$. Так как обе группы унитарны и, значит, связны, то достаточно доказать сюръективность гомоморфизма $\text{grt}_1^{(r+1)}(k) \rightarrow \text{grt}_1^{(r)}(k)$. Действительно, из предложения 5.7 следует, что $\text{grt}_1^{(r)}(k)$ – это сумма однородных компонент $\text{grt}_1(k)$ степени меньшей, чем r . •

З а м е ч а н и я. 1) Любое $\varphi \in M_1^{(r)}(k)$ такое, что $\varphi(-A, -B) = \varphi(A, B)$, можно поднять до $\bar{\varphi} \in M_1^{(r+1)}(k)$ такого, что $\bar{\varphi}(-A, -B) = \bar{\varphi}(A, B)$: достаточно положить $\bar{\varphi}(A, B) = (\tilde{\varphi}(A, B) + \tilde{\varphi}(-A, -B))/2$, где $\tilde{\varphi}$ – любой прообраз φ в $M_1^{(r+1)}(k)$.

2) Доказательство предложения 5.8 использует предложение 5.3. Стандартными методами теории деформаций можно, не используя предложение 5.3, показать, что препятствие к существованию у $\varphi \in M_1^{(r)}(k)$ прообраза в $M_1^{(r+1)}(k)$ принадлежит r -й компоненте группы 4-мерных когомологий следующего комплекса \underline{L}^* . Сначала рассмотрим комплекс \underline{L}^* , где \underline{L}^n – алгебраическая прямая сумма однородных компонент α_n^k , а дифференциал в \underline{L}^* таков, что для любой k -алгебры Ли \mathfrak{g} и любого симметричного инвариантного $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ гомоморфизмы $\alpha_n^k \rightarrow (U\mathfrak{g})^{\otimes n}$, переводящие X^{ij} в t^{ij} , определяют морфизм из \underline{L}^* в комплекс $C^*(\mathfrak{g})$ (см. 3.7)). $C^*(\mathfrak{g})$ содержит подкомплекс Харрисона-Барра $\underline{C}^*(\mathfrak{g})$ ($\mathcal{C}^n(\mathfrak{g})$ – это свободная супералгебра Ли, порожденная векторным пространством $U\mathfrak{g}$, элементы которого считаются нечетными, а $\mathcal{C}_n^{\text{н}}(\mathfrak{g})$ – свободная ассоциативная алгебра). В [23] построен проектор $e_n \in \mathbb{Q}[S_n]$ такой, что $\underline{C}^n(\mathfrak{g}) = e_n \cdot C^n(\mathfrak{g})$, а именно $e_n = (n!)^{-1} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) c_{\sigma} \cdot \sigma$, где $\sigma \in S_n$, $\varepsilon(\sigma)$ – знак σ , $c_{\sigma} = (-1)^a a! (n-1-a)!$, $a = \text{Card} \{k | \sigma^{-1}(k) > \sigma^{-1}(k+1)\}$. Искомый комплекс \underline{L}^* определяется формулой $\underline{L}^n = e_n \cdot L^n$. Автор не знает, равны ли 0 его 4-мерные когомологии H^4 . Легко видеть, что $H^n = \underline{L}^n = 0$ при $n < 2$, $\dim H^2 = \dim \underline{L}^2 = 1$, а H^3 – алгебраическая прямая сумма однородных компонент $\text{grt}_1(k)$.

Предложение 5.9. *Из (5.12), (5.13) и (5.15) следует (5.14). Иначе говоря, $\text{GRT}_1(k) = M_0(k)$.*

Доказательство. Достаточно показать, что если $\varphi \in M_0(k)$, $\varphi \equiv 1 \pmod{\deg n}$, то результат действия на φ некоторого $g \in \text{GRT}_1(k)$, где $g \equiv 1 \pmod{\deg n}$, сравним с $1 \pmod{\deg (n+1)}$. Действительно, пусть ψ – компонента степени n ряда $\ln \varphi \in \text{Fr}_k(A, B)$. Тогда ψ удовлетворяет (5.17), (5.18), (5.20), а значит, и (5.19), т.е. $\psi \in \text{grt}_1(k)$. Поэтому можно положить $g = \text{Exp}(-\psi)$, где Exp – экспоненциальное отображение $\text{grt}_1(k) \rightarrow \text{GRT}_1(k)$, соответствующее операции (5.16). •

З а м е ч а н и я. 1) Воспользовавшись предложением 5.9 или методом его доказательства, легко получить доказательство предложения 5.5, которое проще

приведенного выше, но использует предложение 5.7.

2) Вот схема другого доказательства предложения 5.2. Обозначим через $\text{Spl}(k)$ множество гомоморфизмов $k \rightarrow g^t(k)$, расщепляющих (5.8). Положим $\text{GT}_0(k) = \{(\lambda, f) \in \text{GT}(k) \mid \lambda = 0\}$, $\text{GT}'_0(k) = \{(0, f) \in \text{GT}(k) \mid f \text{ удовлетворяет (5.23)}\}$. В процессе доказательства предложения 5.5 построено отображение $M_1(k) \rightarrow \text{GT}'_0(k)$. Нетрудно показать, что оно биективно. С другой стороны, элементу $\text{Spl}(k)$ или, что то же самое, элементу $g^t(k)$ вида $(1, \psi)$ соответствует однопараметрическая подгруппа $\gamma: k^* \rightarrow \text{GT}(k)$. A priori γ — формальное отображение (т.е. $\gamma(\lambda)$ выражается через формальные ряды по λ^{-1}), но фактически γ регулярно и, более того, продолжается до регулярного (т.е. полиномиального) отображения $\gamma: k^* \rightarrow \text{GT}(k)$. Это следует из того, что $\gamma(\lambda) = (\lambda, f_\lambda)$, где $\lambda \frac{d}{d\lambda} f_\lambda(X, Y) = \psi(\lambda f_\lambda(X, Y) \cdot \ln X \cdot f_{\lambda^{-1}}(X, Y)^{-1} \cdot \lambda \ln Y) \times \times f_{\lambda^{-1}}(X, Y)$. Положим $f = f_0$. Тогда $(0, f) \in \text{GT}'_0(k)$. Действительно, так как $(\lambda, f_\lambda) \in \text{GT}(k)$ и $(-1, 1) \in \text{GT}(k)$, то $(-\lambda, f_\lambda) = (-1, 1) \cdot (\lambda, f_\lambda) \in \text{GT}(k)$ и, чтобы доказать (5.23), достаточно из равенства (4.4) для (λ, f_λ) вычесть (4.4) для $(-\lambda, f_\lambda)$, разделить на λ и устремить λ к 0. Композиция построенных отображений $\text{Spl}(k) \rightarrow \text{GT}'_0(k) \rightarrow M_1(k)$ обратна отображению $M_1(k) \rightarrow \text{Spl}(k)$, о котором идет речь в предложении 5.2.

3) На самом деле $\text{GT}_0(k) = \text{GT}'_0(k)$. Действительно, выберем $\varphi \in M_1(k)$, и пусть g — результат действия $(0, f) \in \text{GT}_0(k)$ на φ . Тогда $g \in M_0(k)$. Поэтому $g \in \text{GRT}_1(k)$ (см. предложение 5.9). Если $\tilde{\varphi}$ — результат правого действия g^{-1} на φ , то при левом действии $(0, f)$ на $\tilde{\varphi}$ получается 1, т.е. $(0, f)$ — это образ $\tilde{\varphi}$ при каноническом отображении $M_1(k) \rightarrow \text{GT}'_0(k)$.

4) Вот еще одно доказательство теоремы Б. Зафиксируем $\varphi \in M_1(k)$, и пусть $(0, f)$ — соответствующий элемент $\text{GT}'_0(k)$. Пусть $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ — квазитреугольная квазихопфова QUE-алгебра над $k[[h]]$. Подействовав элементом $(0, f) \in \text{GT}'_0(k)$ на $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ (см. (4.12)), получим треугольную квазихопфову QUE-алгебру $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ (треугольность — это квазитреугольность плюс равенство $R^{21} = R^{-1}$). Согласно предложениям 3.6 и 3.7 из [1], можно подходящим скручиванием добиться, чтобы $R=1$, $\Phi=1$, причем тогда (A, Δ, ε) — универсальная обертывающая некоторой деформационной алгебры Ли \mathfrak{g} над $k[[h]]$. В этой ситуации положим $t = 2h^{-1} \cdot \ln R$ и покажем, что t — симметричный \mathfrak{g} -инвариантный элемент $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, а $\Phi = \varphi(ht^{12}, ht^{23})$. Так как $R=1$, то $R^{21} = R$, т.е. $t^{21} = t$. Из (1.5) следует \mathfrak{g} -инвариантность t . Подставив в (5.23) $X_1 = (\Delta \text{id})(R^{21}R)^{-1}$, $X_2 = (R^{12})^{-1}(\Phi^{213})^{-1} \times R^{31}R^{13}\Phi^{213}R^{12}$, $X_3 = \Phi^{-1}R^{32}R^{23}\Phi$ и воспользовавшись тем, что $X_1^{-1} \cdot R^{21}R^{12}$ коммутирует с X_1, X_2, X_3 , получим, что $(\Delta \text{id})(\ln(R^{21}R)) = \Phi^{-1} \cdot \ln(R^{32}R^{23}) \cdot \Phi + (R^{12})^{-1}(\Phi^{213})^{-1} \cdot \ln(R^{31}R^{13}) \cdot \Phi^{213} \times R^{12}$, т.е. $(\Delta \text{id})(t) = t^{13} + t^{23}$. Поэтому $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Имеем $\varphi(\chi(A, B)A\chi(A, B)^{-1}, B) \cdot \chi(A, B) = 1$, где $\chi(A, B) = f(e^A, e^B)$ (см. доказательство предложения 5.5). Положив $A = h \cdot \Phi t^{12} \Phi^{-1}$, $B = ht^{23}$, получим $\varphi(h \cdot \Phi t^{12} \Phi^{-1}, ht^{23}) \cdot \Phi \Phi^{-1} = 1$, т.е. $\Phi = \varphi(ht^{12}, ht^{23})$.

§ 6. Об алгебре $\text{grt}_1(k)$

Напомним, что $\text{fr}_k(A, B)$ обозначает множество лиевских формальных рядов $\psi(A, B)$ с коэффициентами из k , а $\text{grt}_1(k)$ — это множество $\psi \in \text{fr}_k(A, B)$, удовлетворяющих (5.17)–(5.20). Согласно предложению 5.7, из (5.17), (5.18), (5.20) следует (5.19). Кроме того, из (5.17) и (5.19) следует (5.18): действительно, из (5.17) и (5.19) легко вывести, что левая часть (5.18) коммутирует с A и B . $\text{grt}_1(k)$ — алгебра Ли с коммутатором (5.21). Множество всех $\psi \in \text{fr}_k(A, B)$, удовлетворяющих (5.17), (5.19) и, следовательно, (5.18), тоже образует алгебру Ли с коммутатором (5.21). Эту алгебру обозначим $\text{Ih}(k)$ в честь Ихары. Алгебры $\text{grt}_1(k)$ и $\text{Ih}(k)$ градуированы: $\text{grt}_1(k) = \hat{\bigoplus}_{n \geq 0} \text{grt}_1^n(k)$, $\text{Ih}(k) = \hat{\bigoplus}_{n \geq 0} \text{Ih}^n(k)$, где $\hat{\bigoplus}$ обозначает пополненную прямую сумму. Так как $\text{Ih}^1(k)$ порождается центральным элементом $A-B$, то изучение $\text{Ih}(k)$ сводится к изучению подалгебры $\underline{\text{Ih}}(k) = \hat{\bigoplus}_{n \geq 1} \text{Ih}^n(k)$. Отметим, что $\text{grt}_1(k) \subset \underline{\text{Ih}}(k)$ (достаточно подставить в (5.20) $X^{12}=A$, $X^{13}=X^{14}=X^{23}=X^{24}=X^{34}=0$).

Ихара [13, 14] использует следующую реализацию $\text{Ih}(k)$. Он называет непрерывное дифференцирование $\partial: \text{fr}_k(A, B) \rightarrow \text{fr}_k(A, B)$ специальным, если $\partial(A)=[R_1, A]$, $\partial(B)=[R_2, B]$, $\partial(C)=[R_3, C]$ для некоторых $R_1, R_2, R_3 \in \text{fr}_k(A, B)$, где $C=-A-B$. Специальные дифференцирования образуют алгебру Ли $\text{SDer } \text{fr}_k(A, B)$. На $\text{fr}_k(A, B)$ действует группа S_3 , переставляя A, B, C . Поэтому S_3 действует на $\text{SDer } \text{fr}_k(A, B)$ и на множестве внутренних дифференцирований $\text{Int } \text{fr}_k(A, B)$. Оказывается, подалгебра S_3 -инвариантов алгебры $\text{SDer } \text{fr}_k(A, B)/\text{Int } \text{fr}_k(A, B)$ канонически изоморфна $\underline{\text{Ih}}(k)$: элементу $\psi \in \underline{\text{Ih}}(k)$ соответствует класс дифференцирования $\partial_\psi: \text{fr}_k(A, B) \rightarrow \text{fr}_k(A, B)$ такого, что $\partial_\psi(A)=0$, $\partial_\psi(B)=[\psi, B]$. Действительно, $\text{SDer } \text{fr}_k(A, B)/\text{Int } \text{fr}_k(A, B)$ можно отождествить с алгеброй дифференцирований $\partial: \text{fr}_k(A, B) \rightarrow \text{fr}_k(A, B)$ таких, что $\partial(A)=0$, $\partial(B)=[\psi, B]$, $\partial(C)=[\chi, C]$ для некоторых $\psi, \chi \in \text{fr}_k(A, B)$ и $\partial(B)=0 \bmod \deg 3$. Такое ∂ определяется заданием $\psi, \chi \in \text{fr}_k(A, B)$ таких, что $[\psi(A, B), B] + [\chi(A, B), C] = 0$, $\psi = 0 \bmod \deg 2$, $\chi = 0 \bmod \deg 2$. Инвариантность ∂ относительно перестановки B и C означает, что $\chi(A, B) = \psi(A, C)$. Инвариантность ∂ по модулю $\text{Int } \text{fr}_k(A, B)$ относительно перестановки A и B означает, что $\psi(B, A) = -\psi(A, B)$. Наконец, $\partial \langle \psi_1, \psi_2 \rangle = [\partial \psi_1, \partial \psi_2]$: действительно, в (5.21) $D_\psi = \text{ad } \psi - \partial_\psi$ и, следовательно, $\langle \psi_1, \psi_2 \rangle = -\partial_{\psi_1}(\psi_2) - \partial_{\psi_2}(\psi_1) - [\psi_1, \psi_2]$.

З а м е ч а н и е. Если по правому действию (4.13) группы $\text{GT}_1(k)$ на пополненной свободной группе с образующими σ_1^2 и σ_2^2 построить обычным образом левое действие, а затем перейти от групп к алгебрам Ли и от фильтрованных алгебр к градуированным, то получится действие $\text{grt}_1(k)$ на $\text{fr}_k(A, B)$, заданное формулой $\psi \mapsto \partial_\psi$.

Перейдем к «гамильтоновой» интерпретации $\text{Ih}(k)$. Для любой алгебры Ли \mathfrak{a} обозначим через $\mathcal{F}(\mathfrak{a})$ фактор $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$ по подпространству, порожденному элементами вида $x \otimes y - y \otimes x$ и $[x, y] \otimes z - x \otimes [y, z]$, где $x, y, z \in \mathfrak{a}$. Образ $x \otimes y$ в $\mathcal{F}(\mathfrak{a})$ будем обозначать (x, y) . Равенства $(x, y) = (y, x)$ и $((x, y), z) = (x, [y, z])$ позволяют рассматривать (x, y) как

инвариантное скалярное произведение со значениями в $\mathcal{F}(\alpha)$ (любое k -значное инвариантное скалярное произведение в α получается из него композицией с некоторым линейным функционалом $\mathcal{F}(\alpha) \rightarrow k$). Если α - свободная алгебра Ли с образующими Y_1, \dots, Y_m , то вместо $\mathcal{F}(\alpha)$ будем писать $\mathcal{F}(Y_1, \dots, Y_m)$. Элемент $f \in \mathcal{F}(A, B)$ можно рассматривать как формулу, определяющую для каждой метризованной алгебры Ли g (т.е. конечномерной алгебры Ли с невырожденным инвариантным скалярным произведением) функцию $f_g: g \times g \rightarrow k$. Например, $f = ([A, B], [A, B]) \in \mathcal{F}(A, B)$ определяет функцию $f_g(x, y) = ([x, y], [x, y])$. Нетрудно показать, что если $f \neq 0$, то $f_g \neq 0$ для некоторой метризованной алгебры Ли g (в качестве g можно взять $gl(n)$, где n достаточно велико). Если g - метризованная алгебра Ли, то $g \times g$ отождествляется с $g^* \times g^*$ и, следовательно, в пространстве функций на $g \times g$ имеется естественная скобка Пуассона ("скобка Кириллова"). Если $f, \varphi \in \mathcal{F}(A, B)$, то $\{f_g, \varphi_g\} = \psi_g$ для некоторого $\psi \in \mathcal{F}(A, B)$, не зависящего от g и обозначаемого $\{f, \varphi\}$. Итак, $\mathcal{F}(A, B)$ - алгебра Ли относительно скобки Пуассона. Рассмотренное выше действие S_3 на $\text{fr}_k(A, B)$ индуцирует действие S_3 на $\mathcal{F}(A, B)$.

Предложение 6.1. 1) Действие S_3 на $\mathcal{F}(A, B)$ сохраняет скобку Пуассона.

2) Подалгебра S_3 -инвариантов алгебры $\mathcal{F}(A, B)$ изоморфна $\oplus_n \text{Ih}^n(k)$, где \oplus - алгебраическая прямая сумма.

Доказательство. 1) Достаточно показать, что для любой алгебры Ли g действие S_3 на пуассоновой алгебре g -инвариантных функций на $g^* \times g^*$, получающееся при отождествлении $g^* \times g^*$ с $\{(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in g^* \times g^* \times g^* \mid \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0\}$ посредством проекции $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \mapsto (\lambda_1, \lambda_2)$, сохраняет скобку Пуассона. Это следует из того, что рассматриваемую пуассонову алгебру можно представить, как фактор пуассоновой алгебры g -инвариантных функций на $g^* \times g^* \times g^*$ по идеалу функций, обращающихся в 0 при $\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$ (пуассоновость этого идеала известна из теории гамильтоновой редукции).

2) Если $f \in \mathcal{F}(Y_1, \dots, Y_m)$, то обозначим через $\partial f / \partial Y_1$ лиевский многочлен от Y_1, \dots, Y_m такой, что линейная по Z часть выражения $f(Y_1, \dots, Y_{i-1}, Y_i + Z, Y_{i+1}, \dots, Y_m)$ равна $(\partial f / \partial Y_i, Z)$. Из g -инвариантности f_g для любой метризованной алгебры Ли g следует, что $\sum_{i=1}^m [Y_i, \partial f / \partial Y_i] = 0$.

Л е м м а. Если $\sum_{i=1}^m [Y_i, P_i] = 0$, где P_i - лиевские многочлены от Y_1, \dots, Y_m , то

существует ровно одно $f \in \mathcal{F}(Y_1, \dots, Y_m)$ такое, что $\partial f / \partial Y_i = P_i$ для всех i .

Доказательство. Обычная связь между полиномиальными и симметричными полилинейными функциями позволяет ограничиться случаем, когда P_1 не содержит Y_1 , а P_2, \dots, P_m и f линейны по Y_1 . В этом случае если f существует, то $f = (Y_1, P_1)$. Обратно, если $f = (Y_1, P_1)$, то $\partial f / \partial Y_i = P_i$ для всех i . Действительно, положим $Q_i = P_i - \partial f / \partial Y_i$. Тогда $Q_i = 0$, $\sum_{i=1}^m [Y_i, Q_i] = 0$. При $i > 1$ запишем Q_i в виде

$R_1(\text{ad } Y_2, \dots, \text{ad } Y_m)Y_1$, где R_i - ассоциативный многочлен. Тогда $\sum_{i=2}^m u_i R_i(u_2, \dots, u_m) = 0$, откуда $R_2 = \dots = R_m = 0$. •

Пусть $\psi \in \text{Ih}^n(k)$. Тогда из леммы следует существование и единственность $f \in \mathcal{F}(A, B)$ такого, что $\partial f / \partial A = \psi(A, -A-B)$, $\partial f / \partial B = \psi(B, -A-B)$. Ясно, что $f(B, A) = f(A, B)$. Кроме того, $f(A, B) = f(-A-B, B)$ (обе части этого равенства имеют одинаковые частные производные). Отсюда следует S_3 -инвариантность f . Обратно, если $f \in \mathcal{F}(A, B)$ инвариантно относительно S_3 , то, определив $\psi(A, B)$ из соотношения $\psi(A, -A-B) = \partial f / \partial A$, получим, что $\psi \in \text{Ih}(k)$.

Для доказательства того, что скобка Пуассона в $\mathcal{F}(A, B)$ соответствует коммутатору в $\text{Ih}(k)$, воспользуемся вложением $\text{Ih}(k) \rightarrow \text{Der } \text{fr}_k(A, B)$, переводящим ψ в $\delta_\psi = \sigma \partial_\psi \sigma$, где $\partial_\psi \in \text{Der } \text{fr}_k(A, B)$ имеет прежний смысл, а σ - автоморфизм $\text{fr}_k(A, B)$ такой, что $\sigma(A) = -A-B$, $\sigma(B) = B$. Имеем $\delta_\psi(A) = [\psi(-A, -B, A), A]$, $\delta_\psi(B) = [\psi(-A, -B, B), B]$. Если ψ соответствует $f \in \mathcal{F}(A, B)$, то $\delta_\psi(A) = [A, \partial f / \partial f / \partial A]$, $\delta_\psi(B) = [B, \partial f / \partial B]$. Эти формулы можно рассматривать как уравнение Гамильтона, соответствующее f . Остается воспользоваться связью между скобкой Пуассона гамильтонианов и коммутатором соответствующих векторных полей. •

З а м е ч а н и я. 1) Элемент $f \in \mathcal{F}(A, B)$, соответствующий $\psi \in \text{gr}_1^n(k) \subset \text{Ih}(k)$ (см. доказательство предложения 6.1), допускает следующую интерпретацию. Пусть $\varphi \in M_1(k)$, а $\tilde{\varphi}$ получается из φ действием $\text{Exp}(\psi)$, где Exp - экспоненциальное отображение $\text{gr}_1^n(k) \rightarrow \text{GRT}_1(k)$. Если \mathfrak{g} - метризованная алгебра Ли над k , а $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ соответствует скалярному произведению в \mathfrak{g} , то $\Phi = \varphi(ht^{12}, ht^{23})$ и $\tilde{\Phi} = \tilde{\varphi}(ht^{12}, ht^{23})$ связаны преобразованием (1.11) для некоторого $F \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[\hbar]]$ (см. теорему А). Нетрудно показать, что F можно выбрать так, чтобы 1) $F \equiv 1 \pmod{\hbar^n}$, 2) $\hbar^{-n}(F-1) \pmod{\hbar} \in L_{n+1}$, где L_{n+1} - множество элементов $U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$, являющихся многочленами степени не выше $n+1$ от элементов $\mathfrak{g} \otimes 1$ и $1 \otimes \mathfrak{g}$, 3) образ $\hbar^{-n}(F-1) \pmod{\hbar}$ в $L_{n+1}/L_n = \text{Sym}^{n+1}(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) = \text{Sym}^{n+1}(\mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^*)$, рассматриваемый как функция на $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, равнялся $-f_{\mathfrak{g}}$.

2) Делинь заметил, что, рассуждая, как при доказательстве предложения 6.1, можно для любого n получить S_n -эквивариантный изоморфизм между фактором алгебры специальных дифференцирований $\text{fr}_k(A_1, \dots, A_n)$ по идеалу внутренних дифференцирований и фактором $\mathcal{F}(A_1, \dots, A_n)$ по подпространству, порожденному (A_i, A_i) , $1 \leq i \leq n+1$, где $A_{n+1} = -A_1 - \dots - A_n$. Именно элементу $f \in \text{fr}_k(A_1, \dots, A_n)$ соответствует дифференцирование $A_i \mapsto [A_i, \partial f / \partial A_i]$, $1 \leq i \leq n$.

П р е д л о ж е н и е 6.2. (Делинь-Ихара [13]). $\dim \text{Ih}^n(k) = \alpha_n - \beta_{n+1}$, где $\alpha_n = (3n)^{-1} \cdot \left\{ \sum_{d|n} (1 - a(d/3)) \mu(d) 2^{n/d} - \varepsilon_n \right\}$, $\beta_n = (6n)^{-1} \left\{ \sum_{d|n} (1 + 3a(d/2) + 2a(d/3)) \mu(d) 2^{n/d} + 2\varepsilon_n \right\}$, μ - функция Мебиуса, $a(x) = 1$ при $x \in \mathbb{Z}$, $a(x) = 0$ при $x \notin \mathbb{Z}$, $\varepsilon_n = -1$, если n имеет вид 3^m , $\varepsilon_n = 2$ при $n = 2 \cdot 3^m$, $\varepsilon_n = 0$ в остальных случаях.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть V - двумерное векторное пространство с базисом A, B . На V действует S_3 , переставляя A, B и $C = -A-B$. Пусть $L_n(V)$ - однородная

компонента степени n свободной алгебры Ли, порожденной V , т.е. $L_n(V) = \text{fr}_k^n(A, B)$. Формула $\psi \mapsto A\psi(-A-B, A) + B\psi(-A, -B, B)$ определяет изоморфизм $\text{Ih}^n(k) \xrightarrow{\sim} \xrightarrow{\sim} (V \otimes L_n(V))^{\text{S}_3} \cap \text{Ker} f$, где f - коммутаторное отображение $V \otimes L_n(V) \rightarrow L_{n+1}(V)$. Так как f сюръективно, то $\dim \text{Ih}^n(k) = \dim(V \otimes L_n(V))^{\text{S}_3} - \dim(L_{n+1}(V))^{\text{S}_3}$. Остается воспользоваться формулой для характера представления $\text{GL}(V)$ в $L_n(V)$ ([16], гл. II, § 3, формула (16)). •

Вот значения чисел $a_n = \dim \text{Ih}^n(k)$ при $n \leq 13$: $a_1 = a_2 = a_4 = a_6 = 0$, $a_3 = a_5 = a_8 = 1$, $a_7 = a_{10} = 2$, $a_9 = 4$, $a_{11} = 9$, $a_{12} = 7$, $a_{13} = 21$. Базис в $\bigoplus_{n \leq 7} \text{Ih}^n(k)$ образуют элементы $\text{Ih}(k)$, соответствующие (см. предложение 6.1) элементам $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathcal{F}(A, B)$, где

$$f_1 = ([A, B], [A, B]), \quad (6.1)$$

$$f_2 = (x, x) + (x, y) + (y, y), \text{ где } x = [A, [A, B]], y = [B, [A, B]], \quad (6.2)$$

$$f_3 = (z, z), \text{ где } z = [A, [A, [A, B]]] + [A, [B, [A, B]]] + [B, [B, [A, B]]], \quad (6.3)$$

$$f_4 = ([A, u], [B, u]), \text{ где } u = [A, B]. \quad (6.4)$$

В процессе доказательства предложения 1 из [14] Ихара получил следующий результат.

Предложение 6.3. Для любого нечетного $n \geq 3$ существует $\psi \in \text{grt}_1^n(k)$ такое, что $\psi(A, B) \equiv \sum_{m=1}^{n-1} C_n^m (\text{ad } A)^{m-1} (\text{ad } B)^{n-m-1} [A, B] \pmod{[p_k, p_k]}$, где p_k - коммутант $\text{fr}_k(A, B)$.

Доказательство Ихары использует $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$. Вот другое доказательство. Можно считать, что $k = \mathbb{C}$. Положим $\bar{\varphi}(A, B) = \varphi(-A, -B)$. Согласно предложению 5.5, $\bar{\varphi}$ получается из φ действием некоторого $g \in \text{GRT}_1(\mathbb{C})$. Пусть $\tilde{\psi}$ - однородная компонента степени n образа g при логарифмическом отображении $\text{GRT}_1(\mathbb{C}) \rightarrow \text{grt}_1(\mathbb{C})$. Из (2.15) легко вывести, что $(n(2\pi i)^n / 2\zeta(n)) \cdot \tilde{\psi}$ является искомым. •

Нетрудно показать, что если $\psi_1, \psi_2 \in p_k$, то правая часть (5.21) принадлежит $[p_k, p_k]$. Поэтому из предложения 6.3 следует, что $\text{grt}_1^n(k)$ имеет по крайней мере одну образующую степени n для каждого нечетного $n \geq 3$.

В о п р о с ы. Верно ли, что $\text{grt}_1^n(k)$ имеет ровно одну образующую степени n для каждого нечетного $n \geq 3$ и не имеет образующих других степеней? Свободна ли алгебра $\bigoplus_n \text{grt}_1^n(k)$?

З а м е ч а н и я. 1) Положительный ответ на первый вопрос эквивалентен конъюнкции гипотезы Делина из введения к [14] и гипотезы о плотности по Зарисскому образа $\text{Gal}(\mathbb{Q}/\mathbb{Q})$ в $\text{GT}(\mathbb{Q}_p)$.

2) При $n=1, 2, 4, 6$ имеем $\text{grt}_1^n(k) = \text{Ih}^n(k) = 0$. Так как $\dim \text{Ih}^3(k) = \dim \text{Ih}^5(k) = 1$, то из предложения 6.3 следует, что $\text{grt}_1^n(k) = \text{Ih}^n(k)$ при $n=3, 5$. Так как $\dim \text{Ih}^8(k) = 1$, а $[\text{Ih}^3(k), \text{Ih}^5(k)] \neq 0$ (см. [14]), то $\text{grt}_1^8(k) = \text{Ih}^8(k) = [\text{grt}_1^3(k), \text{grt}_1^5(k)]$. Можно показать, что $\dim \text{grt}_1^7(k) = 1 < \dim \text{Ih}^7(k)$ и $\text{grt}_1^7(k)$ порождается элементом, соответствующим $8f_3 - f_4 \in \mathcal{F}(A, B)$, где f_3 и f_4 определяются формулами (6.3), (6.4).

С п и с о к л и т е р а т у р ы

- [1] Дринфельд В.Г. Квазихопфовы алгебры // Алгебра и анализ. 1989. Т.1, N 6. С.114-149.
- [2] Grothendieck A. Esquisse d'un programme. Preprint. Paris: 1984. 57 p.
- [3] Drinfeld V.G. Quantum groups//Proc.Internat. Congress of Math.(Berkeley, 1986). Vol.1. Providence: AMS, 1987. P.798-820.
- [4] Faddeev L.D. Integrable models in (1+1)-dimensional quantum field theory // Recent advances in field theory and statistical mechanics (Lectures in Les Houches, 1982). Amsterdam: Elsevier, 1984. P.563-608.
- [5] Решетихин Н.Ю. Квазитреугольные алгебры Хопфа, решения уравнения Янга-Бакстера и инварианты связей // Алгебра и анализ. 1989. Т.1, N 2. С.169-188.
- [6] Deligne P., Milne J. Tannakian categories // Hodge cycles, motives, and Shimura varieties. Lecture Notes in Math. Vol.900. Berlin: Springer, 1982. P.101-228. (Рус.пер.: Делинь П., Милн Дж.С. Категории Таннаки // Ходжевы циклы и мотивы. М.: Мир, 1985. С.94-201).
- [7] Kohno T. Monodromy representations of braid groups and Yang-Baxter equations// Ann.Inst.Fourier de Grenoble. 1987. Vol.37, N 4. P.139-160.
- [8] Kohno T. Quantized universal enveloping algebras and monodromy of braid groups. Preprint. Nagoya: Nagoya University, 1988. 70 p.
- [9] Tsuchiya A., Kanie Y. Vertex operators in two dimensional conformal field theory on \mathbb{P}^1 and monodromy representations of braid groups // Conformal field theory and solvable lattice models. Advanced Studies in Pure Mathematics 16. Tokyo: Kinokuniya, 1988. P.297-372.
- [10] Knizhnik V.G., Zamolodchikov A.B. Current algebra and Wess-Zumino models in two dimensions // Nucl.Phys. 1984. Vol.B247. P.83-103.
- [11] Deligne P. Le groupe fondamentale de la droite projective moins 3 points // Galois groups over \mathbb{Q} . Mathematical Science Research Institute Publications 16. Berlin: Springer, 1989. P.79-298.
- [12] Anderson G., Ihara Y. Pro- ℓ branched coverings of \mathbb{P}^1 and higher circular ℓ -units // Ann. of Math. 1988. Vol.128, N 2. P.271-293.
- [13] Ihara Y. Some problems on three point ramifications and associated large Galois representations // Advanced Studies in Pure Mathematics 12. Tokyo: Kinokuniya, 1987. P.173-188.
- [14] Ihara Y. The Galois representations arising from $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ and Tate twists of even degree. // Galois groups over \mathbb{Q} . Mathematical Science, Research Institute Publications 16. Berlin: Springer, 1989. P.299-313.

- [15] I h a r a Y. Automorphisms of pure sphere braid groups and Galois representations. Preprint UTYO-MATH 88-18. Tokyo: Tokyo University, 1988. 30 p.
- [16] Б у р б а к и Н. Группы и алгебры Ли. Гл.1-3. М.: Мир, 1976. 496 с.
- [17] Kohno T. Série de Poincaré-Koszul associée aux groupes de tresses pures // Invent. math. 1985. Vol.82. P.57-75.
- [18] Б а х т у р и н Ю.А. Тождества в алгебрах Ли. М.: Наука, 1985. 448 с.
- [19] У и т т е к е р Е.Т., В а т с о н Г.Н. Курс современного анализа. Часть II. М.: Изд-во физ.-мат.лит., 1963. 516 с.
- [20] A r t i n E. Theory of braids // Ann. of Math. 1947. Vol.48. P.101-126.
- [21] Б е л ы й Г.В. О расширениях Галуа максимального кругового поля// Изв. АН СССР. Сер.мат. 1979. Т.43, N 2. С.267-276.
- [22] M o o r e G., S e i b e r g N. Classical and quantum conformal field theory. Preprint IASSNS-HEP-88/39. // Comm. Math.,Phys. 1989. Vol.123. P.177-254.
- [23] B a r r M. Harrison cohomology, Hochschild homology and triples // J.Algebra. 1963. Vol.8. P.314-323.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР

310164, Харьков, пр. Ленина, 47

Поступило 12 декабря 1989 г.