А. А. Власов, Сферические почти ньютоновские пульсации звезды в РТГ, *ТМФ*, 1996, том 106, номер 2, 320–324

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf1118

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 54.70.40.11
9 апреля 2019 г., 05:52:44
A. A. Власов

СФЕРИЧЕСКИЕ ПОЧТИ НЬЮТОНОВСКИЕ ПУЛСАЦИИ ЗВЕЗДЫ В РТГ

Показано, что в отличие от ОТО в РТГ сферические пульсации звезды приводят к появлению квазистатичности во внешнем гравитационном поле.

Задача о пульсациях сферически-симметричной звезды в общей теории относительности (OTO) решена давно (см., например, [1, 2]). В релятивистской теории гравитации (РТГ) внешние уравнения гравитационного поля схожи с ОТО [3]:

\[ R^{ij} - g^{ij} R / 2 = 8 \pi T^{ij}, \]
\[ \nabla_j T^{ij} = 0, \]
\[ D_j \psi^{ij} = 0, \]

где \( \nabla \) ковариантная производная по метрике \( g_{ij} \), \( D \) ковариантная производная по метрике \( g_{ij} \),

\[ \sqrt{g} \gamma g^{ij} = \gamma^{ij} - \psi^{ij}. \]

Уравнение (2) является следствием тождества Бианки для (1).

Однако в ОТО уравнение (3) отсутствует так же, как и пространство Минковского с метрикой \( g_{ij} \). Кроме того, в РТГ подход к описанию гравитационных явлений полной: в РТГ рассматривают гравитацию как поле \( \psi^{ij} \), существующее и действующее на фронт глобальной, например инерциальной, системы координат пространства Минковского, соответственно и постановка задачи в РТГ ставится в выгравной заранее глобальной системе координат.

В этой связи в РТГ теорема Биркгофа имеет свою специфику по сравнению с ОТО, а именно, в РТГ можно только утверждать [3], что существует система координат, в которой вакуумное сферически-симметричное поле принимает известный шварцшильдов вид, но нельзя утверждать, в отличие от ОТО [1, 2, 4], что обязательна статичность вакуумного сферически-симметричного поля независимо от характера радиального движения источника, сохраняющего сферическую симметрию задачи.

Поэтому трациционное решение задачи о пульсациях сферически-симметричной звезды необходимо пересмотреть с позиций РТГ. Пульсации звезды будем по стандартной схеме рассматривать как малые возмущения на фундаментальное решение уравнений (1) (3).

Для вещества звезды тензор энергии-импульса возьмем в виде

\[ T^{ij} = (\rho + \rho\Pi + p) u^i u^j - g^{ij} p, \]

320
СФЕРИЧЕСКИЕ ПОЛЯ НЬЮТОНОВСКИЕ ПУЛЬСАЦИИ ЗВЕЗДЫ В РТГ

где $\rho$ — плотность вещества, $\rho\Pi$ — плотность внутренней энергии, $p$ — давление вещества. Плотность удовлетворяет закону сохранения массы

$$\nabla_i (\rho u^i) = 0, \tag{5}$$

плотность внутренней энергии уравнению

$$d\Pi = \frac{p}{\rho^2} d\rho. \tag{6}$$

Уравнения (2) с учетом (4) (6) можно переписать следующим образом:

$$(\rho + \rho\Pi + p) \left( \frac{d}{ds} u^i - \frac{\partial}{\partial s} u^i \right) = p. \tag{7}$$

Статическое решение уравнений (1) (7) определяется соотношениями

$$u^0 = (\rho_{00})^{-1/2}, \quad u^\alpha = 0, \quad \rho_{0\beta} = 0,$$

$$\rho + \rho\Pi + p = -\partial^\alpha \partial_\alpha p. \tag{8}$$

Линеаризуем уравнения (1) (7) относительно эйлеровых вариаций $\delta u^0, \delta u^\alpha, \delta \rho, \delta p, \delta g_{ij}$. Тогда пространственная часть уравнений (7) записывается так:

$$(\rho + \rho\Pi + p) \left( u^0 \partial_0 \delta u^0 + \delta \Pi_{00} (u^0)^2 + 2 \Pi_{0j} \delta u^j u^0 \right) = \partial^\alpha \partial_\alpha \delta p + \delta g^{\alpha\beta} \partial_\beta \delta p - \partial^\alpha \partial_\alpha \rho_{00} = -\partial^\alpha \partial_\alpha p. \tag{9}$$

Уравнение непрерывности (5) для возмущений есть

$$\partial_0 (\rho \delta u^0) + \partial_0 (\rho \delta u^0) + \partial_0 (\rho \delta u^0) + \partial_0 (\sqrt{-g} \rho \delta u^0 + \partial_0 (\sqrt{-g} \rho \delta u^0) = 0. \tag{10}$$

Вариация $\delta \vec{u}$ определяется через вектор координатного смещения $\vec{\xi} (\vec{r} \rightarrow \vec{r} + \vec{\xi})$ так: $\delta \vec{u} = u^0 \frac{d\vec{\xi}}{dt}$, а вариация давления при постоянной энтропии

$$\delta p = \delta_{LP} - (\vec{\xi}, \nabla)p, \quad \delta_{LP} = \frac{p}{\rho} \Gamma_1 \delta_{LP}, \tag{11}$$

gде $\Gamma_1$ — так называемый неравнозетный показатель адабаты, $\delta_{LP}$ — лагранжевая вариация.

В почти ньютоновском приближении при $g_{ij} \approx \gamma_{ij} + h_{ij}, \quad h_{ij} = \psi_{ij} - \gamma_{ij} \psi / 2, \quad h_{ij} = \text{diag}(-2U, 0, 0, 0), \quad h_{ij} \ll \gamma_{ij}, \quad \rho \Psi^2 \ll 1, \quad \delta \vec{u} = \vec{v} = \frac{\delta \vec{\xi}}{dt} \ll 1$ исходная система уравнений принимает следующий вид.

В случае статики из (8) получаем

$$\nabla p = \rho \nabla U, \tag{12}$$

$$\Delta U = -4\pi p. \tag{13}$$

6 Теоретическая и математическая физика, т. 106, № 2, 1996 г.
При этом уравнение (3) удовлетворяется автоматически.

Для возмущений, полагая в нулевом приближении $\delta h_{ij} = \delta \psi_{ij} - \gamma_{ij}\delta \psi/2 = \text{diag}(-2\delta U, 0, 0, 0)$, имеем из (9) (10)

$$\frac{\partial \delta \psi}{\partial t} = -\nabla \delta \rho + \frac{\delta \rho \nabla \rho}{\rho} + \rho \nabla \delta U,$$

(14)

$$\Delta \delta U = -4\pi \delta \rho,$$

(15)

$$\frac{\partial \delta \rho}{\partial t} = -(\nabla, \nabla \delta \rho).$$

(16)

Уравнение (3) записывается так:

$$D_2 \partial \psi_{ij} = 0,$$

(17)

t.е. (17) связывает между собой различные компоненты возмущений гравитационного поля.

Рассмотрим частный случай постоянной плотности (в ОТО см., например, [1, 2]). Тогда при $\rho = \rho_0 = \text{const}$ из (12) (13) получаем

$$U = \frac{2\pi \rho_0}{3}(3R^2 - r^2), \quad p = \frac{\pi (\rho_0)^2}{3}(R^2 - r^2),$$

(18)

здесь $R$ радиус звезды в форме шара, потенциал $h_{00} = -2U$ гладко на границе спит со статическим внешним гравитационным полем $h_{00} = -2\frac{m}{r}$ (остальные компоненты $h_{ij}$ равны нулю), масса звезды $m$ есть $\frac{2\pi \rho_0 R^3}{3}$.

Для гармонических сферических волн уравнение $\tilde{\xi}(t, r) = \frac{\xi}{r} \exp(-i\omega t) \xi(r)$ рассмаитриваемой почти ньютоновской звезды из (12) (18) с учётом (11) получаем следующее уравнение на $\xi$:

$$(1 - x^2)\xi'' + \left(-4x + \frac{3}{x}\right)\xi' + \left[ -2 - \frac{2}{x^2} + \frac{\omega^2 + 16\pi \rho_0/3}{2\pi \rho_0 \Gamma_1/3} \right] \xi = 0,$$

(19)

где $x = r/R$, $\xi' = d\xi/dx$.

Решение (19) с граничными условиями $\xi(0) = 0$, $\xi(1) = \text{const} \neq 0$ известно:

$$\xi = \sum_{n=0}^{N} a_n x^{n+1}, \quad a_{2n+1} = 0, \quad a_{n+2} = a_n \frac{n^2 + 5n + 4 - A}{n^2 + 7n + 10}, \quad A = \frac{3(\omega)^2}{2\pi \rho_0 \Gamma_1} + \frac{8}{\Gamma_1} - 2,$$

$$\frac{(\omega)^2}{3} \left[ \Gamma_1 (N + 2)(N + 3) - 8 \right], \quad N = 0, 2, 4, \ldots$$

(20)

Из (15) получаем

$$\delta U(r) = 4\pi \rho_0 R \sum_{n=0}^{N} \frac{a_n}{n+2} (x^{n+2} - 1) + \text{const}.$$

(21)

Из (20), в частности, следует, что звезда неустойчива при $\Gamma_1 < 4/3$.

Итак мы повторили известные рассуждения ОТО [1, 2].

Теперь с использованием уравнения (17) вычисляем, как внутренние решения для $\delta \psi_{ij}$ в РГГ сопрягаются с внешними.
Условия гладкой спинной на границе $R + \xi(t, R)$ колеблющегося шара имеют вид

\[
[\psi_{ij} + \delta \psi_{ij}]_{\text{in}} = [\psi_{ij} + \delta \psi_{ij}]_{\text{ex}}, \quad (22a)
\]

\[
\partial_k [\psi_{ij} + \delta \psi_{ij}]_{\text{in}} = \partial_k [\psi_{ij} + \delta \psi_{ij}]_{\text{ex}}. \quad (22b)
\]

где внутреннее неизменное гравитационное поле $\psi_{ij} = \text{diag}(-4U, 0, 0)$ строится с помощью $(18)$, а внешнее неизменное поле $\psi_{ij} = \text{diag}(-4m/r, 0, 0)$.

Из уравнений $(17)$ для гармонических пульсаций по $\delta \psi_{00}$ определяем остальные компоненты:

\[
i \omega \delta \psi_{00} = -\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \delta \psi_{Or}), \quad (23a)
\]

\[
i \omega \delta \psi_{Or} = -\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \delta \psi_{rr}) - \frac{2}{r} \delta \psi_{0r}. \quad (23b)
\]

Уравнения $(23)$ показывают, что между вариантами компонент гравитационного поля существуют соотношения

\[
\delta \psi_{Or} \sim \rho^{1/r} R \delta \psi_{00}, \quad \delta \psi_{rr} \sim \rho^{1/r} R \delta \psi_{Or}, \quad \rho^{1/2} R \ll 1,
\]

t.e. по сравнению с вариацией нулевой компоненты вариации остальных компонент являются величинами более высокого порядка малости и не дают вклада в результат $(20)$ $(21)$, однако оказываются существенными при рассмотрении условий спинки.

Совместное решение $(20)$ $(23)$ приводит с учетом гладкой спинки статических решений $\psi_{ij}$ на границе $r = R$ к результату

\[
[\delta \psi_{00}(R)]_{\text{in}, \text{ex}} = 0, \quad (24a)
\]

t.e. константа в $(21)$ равна нулю, и

\[
[\delta \psi_{Or}(R)]_{\text{in}} = [\delta \psi_{Or}(R)]_{\text{ex}} = \frac{A}{R^2}, \quad (24b)
\]

где

\[
[\delta \psi_{Or}(R)]_{\text{in}} = -16 \pi \rho_0 i \omega R^2 \sum_{N=0}^{N} \frac{a_n}{3(n + 3)}.
\]

Из $(20)$ $(24)$ следует, что $(00)$ компонента возмущенного внутреннего гравитационного поля $\psi_{00} + \delta \psi_{00}$ гладко сплачивается с упомянутым ранее статическим внешним решением $\psi_{00} = -\frac{4m}{r}$, но уже $(0r)$ компонента внутреннего гравитационного поля, $\delta \psi_{Or}$, гладко сплачивается с нестационарным внешним решением $\delta \psi_{Or} = \exp(+i \omega t) \frac{A}{r^2}$ (удовлетворяющим в рассматриваемом приближении уравнению $(\Delta \delta \psi)_{Or} = 0$); остальные компоненты гравитационного поля сходятся из уравнения $(23b)$ не определяются.

Однако по аналогии теоремы Биркгофа в РТГ для гладких гравитационных полей все зависящие от времени возмущения $\delta h_{ij}$ статической внешней метрики $h_{ij}$ могут быть представлены в виде

\[
\delta h_{ij} = D^i \eta^j + D^j \eta^i.
\]
Это позволяет записать в сферических координатах с учётом (24) следующее:

\[
\begin{align*}
\delta R^0 &= \delta \varphi^0 = - \exp(+i\omega t) \frac{A}{r^2} = D_0 \eta^r, \\
\delta h^{rr} &= 2D^r \eta^r = -2D^r \eta^r, \\
\delta h^{\theta \theta} &= 2D^\theta \eta^\theta = -\frac{2}{r} \eta^r.
\end{align*}
\]

Из (25a) следует, что \( \frac{\eta^r}{r} = - \exp(+i\omega t) \frac{A}{16\pi r^2} \), т.е. из формул (25b) и (25a) можно найти оставшиеся компоненты возмущённого внутреннего гравитационного поля.

Таким образом, при пульсациях звезды, сохраняющих её сферическую симметрию, внутреннее гравитационное поле \( h_{ij} + \delta h_{ij} \) в РТГ с необходимостью является нестатическим, явно зависящим от характеристик пульсаций (частот, амплитуд) и при гармонических пульсациях будет иметь гармонические меняющиеся со временем составляющие.

Такую периодичность внутреннего гравитационного поля легко можно обнаружить, сравнивая, например, поля звезд с различными частотами колебаний, т.е. с различными векторами \( \eta^j(\omega) \) (25).

Список литературы


А.А. Власов

**SPHERICAL QUASI-NEWTONIAN STELLAR PULSATIONS IN RTG**

It is shown that in Relativistic Theory of Gravity, in contrast to GTR the spherically symmetric stellar pulsations lead to the nonstatic behaviour of an external gravitational field.