I. M. Gel'fand, B. L. Feigin, D. B. Fuchs, Cohomologies of the Lie algebra of formal vector fields with coefficients in its adjoint space and variations of characteristic classes of foliations, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1974, Volume 8, Issue 2, 13–29

Функциональный анализ и его приложения,
т. 8, вып. 2, 1974, 13—29.

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБРЫ ЛИ ФОРМАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ С КОЭФФИЦИЕНТАМИ В СОПРЯЖЕННОМ С НЕЙ ПРОСТРАНСТВЕ И ВАРИАЦИИ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ КЛАССОВ СЛОЕНИЙ

И. М. Гельфанд, Б. Л. Фейгин, Д. Б. Фукс

Введение

0.1. Настоящая работа относится к теории характеристических классов слоений (см. [9], [1], [7]).

Имеются две конструкции таких классов. Первая относит обобщенному слоению (слоению в смысле Хефлигера, см. [10]) коразмерности n с тривиализованным нормальным расслоением на топологическом пространстве X гомоморфизм

$$H^* (W_n;\ \mathbf{R}) \to H^* (X;\ \mathbf{R}),$$

где W_n — (топологическая) алгебра Ли формальных векторных полей в $\mathbf{R}^n$. Этот гомоморфизм является естественным по отношению к непрерывным отображениям и, благодаря этому, относит каждому элементу кольца $H^* (W_n;\ \mathbf{R})$ характеристический класс (обобщенных) слоений коразмерности n с тривиализованным нормальным расслоением. Вторая конструкция исходит из произвольного ориентированного обобщенного слоения коразмерности n на X и доставляет гомоморфизм

$$H^* (W_n,\ \mathfrak{o}_n;\ \mathbf{R}) \to H^* (X;\ \mathbf{R}),$$

где $\mathfrak{o}_n$ — алгебра Ли группы ортогональных матриц порядка n, естественно вложенная в W_n. Этот гомоморфизм позволяет интерпретировать элементы кольца $H^* (W_n,\ \mathfrak{o}_n;\ \mathbf{R})$ как характеристические классы ориентированных слоений коразмерности n.

Обе конструкции C^∞-непрерывны, т. е. характеристические классы C^∞-близких слоений на X близки в $H^* (X;\ \mathbf{R})$; более того, гладкая деформация слоения вызывает гладкую же деформацию его характеристических классов. Естественно возникает вопрос, насколько варьируемы характеристические классы слоений. По этому поводу известны два результата. Первый принадлежит Тэрстону [13], построившему гладкое однопараметрическое семейство ориентированных (даже неособых) слоений коразмерности 1 на трехмерной сфере с непостоянным классом Годбийона — Вея (класс Годбийона — Вея есть характеристический класс, отвечающий ненулевому элементу группы $H^3 (W_1;\ \mathbf{R}) = H^3 (W_1,\ \mathfrak{o}_1;\ \mathbf{R}) \cong \mathbf{R}$); как сообщается в [8], Тэрстон подобным образом проварьировал и одну из образующих группы $H^5 (W_2;\ \mathbf{R})$. С другой стороны, Хейтш [11] доказал для (небольшой) части характеристических классов слоений жесткость, т. е. неизменяемость при гладких вариациях слоений.

0.2. В настоящей работе мы предлагаем алгебраический подход к вариациям характеристических классов слоений. Наряду с характеристическими классами слоений мы рассматриваем характеристические

классы вариаций слоений, понимая под вариацией слоения 1-струю по параметру гладкого однопараметрического семейства слоений (на одном пространстве). Определяются два сорта таких классов: характеристические классы вариаций слоений с тривиализованным нормальным расслоением и характеристические классы вариаций ориентированных слоений (конечно, можно определить характеристические классы для любой разновидности «Г-слоений», см. [10]). Простейшими примерами характеристических классов вариаций слоений служат характеристические классы слоений: значение такого характеристического класса на вариации слоения определяется просто как его значение на варьируемом слоении. Более важный набор примеров доставляют производные характеристических классов слоений по параметру; последние и существенны, конечно, при рассмотрении вопроса о варьируемости характеристических классов слоений.

Например, с вариациями ориентированных слоений коразмерности 1 связаны по крайней мере два характеристических класса: класс Годбийона — Вея и его производная по параметру. Теорема Тэрстона показывает, что второй нетривиален (нетривиальность первого установлена в [9]).

0.3. Обозначим через $\widehat{W}_n$ тензорное произведение алгебры Ли W_n на ассоциативную коммутативную алгебру $\mathbf{R}[t]/t^2\mathbf{R}[t]$. Это — алгебра Ли; ее элементы можно записывать в виде $\xi + t\eta$, $(\xi, \eta \in W_n)$; операция коммутирования задается формулой

$$[\xi + t\eta, \xi' + t\eta'] = [\xi, \xi'] + t([\xi, \eta'] + [\eta, \xi']).$$

Формулы $\xi \mapsto \xi = \xi + t0$, $\xi + t\eta \mapsto \xi$ определяют вложение $W_n \to \widehat{W}_n$ и проекцию $\widehat{W}_n \to W_n$ с тождественной композицией $W_n \to \widehat{W}_n \to W_n$. В дальнейшем мы считаем W_n подалгеброй алгебры $\widehat{W}_n$.

Алгебра $\widehat{W}_n$ играет для характеристических классов вариаций слоений ту же роль, что алгебра W_n играет для характеристических классов слоений: элементы кольца $H^*(\widehat{W}_n; \mathbf{R})$ доставляют характеристические классы вариаций слоений с тривиализованным нормальным расслоением, а элементы кольца $H^*(\widehat{W}_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{R})$ — характеристические классы вариаций ориентированных слоений. Естественные вложения

$$H^*(W_n; \mathbf{R}) \to H^*(\widehat{W}_n; \mathbf{R}), \quad H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{R}) \to H^*(\widehat{W}_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{R})$$

отвечают описанным выше интерпретациям характеристических классов слоений как характеристических классов вариаций слоений. Кроме того, имеются естественные гомоморфизмы (аддитивные)

$$\mathrm{var}\colon H^*(W_n; \mathbf{R}) \to H^*(\widehat{W}_n; \mathbf{R}), \quad \mathrm{var}\colon H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{R}) \to H^*(\widehat{W}_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{R}),$$

обладающие тем свойством, что характеристический класс вариаций слоений, определяемый элементом $\mathrm{var}(\alpha)$, есть производная по параметру характеристического класса слоений, определяемого элементом α. Этот гомоморфизм важен при изучении варьируемости характеристических классов слоений; например, если $\mathrm{var}(\alpha) = 0$, то характеристический класс слоений, отвечающий α, является жестким.

0.4. Для когомологий алгебры Ли $\widehat{W}_n$ мы построим прямые разложения

$$H^q(\widehat{W}_n; \mathbf{R}) = \bigoplus_{p+r=q} H^p(W_n; \Lambda^r W_n'),$$

$$H^q(\widehat{W}_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{R}) = \bigoplus_{p+r=q} H^p(W_n, \mathfrak{o}_n; \Lambda^r W_n'),$$

где W_n' — пространство, сопряженное с W_n (с естественной структурой W_n-модуля), а Λ^r обозначает r-ю внешнюю степень. При этом канонические изоморфизмы

$$H^*(\widehat{W}_n;\mathbf{R})\cong H^*(W_n;\Lambda^* W_n'),\quad H^*(\widehat{W}_n,\mathfrak{o}_n;\mathbf{R})\cong H^*(W_n,\mathfrak{o}_n;\Lambda^* W_n')$$

являются кольцевыми.

Вложения слагаемых $H^q(W_n;\ \Lambda^0 W_n')=H^q(W_n;\ \mathbf{R})$, $H^q(W_n,\mathfrak{o}_n;\ \Lambda^0 W_n')=$ $=H^q(W_n,\mathfrak{o}_n;\mathbf{R})$ в суммы $\bigoplus H^p(W_n,\Lambda^r W_n')=H^q(\widehat{W}_n;\mathbf{R})$, $\bigoplus H^p(W_n,\mathfrak{o}_n;\Lambda^r W_n')=$ $=H^q(\widehat{W}_n,\mathfrak{o}_n;\mathbf{R})$ совпадают, как оказывается, с естественными вложениями $H^q(W_n;\mathbf{R})\to H^q(\widehat{W}_n;\mathbf{R})$, $H^q(W_n,\mathfrak{o}_n;\mathbf{R})\to H^q(\widehat{W}_n,\mathfrak{o}_n;\mathbf{R})$ (см. п.0.3). Далее, образы гомоморфизмов var: $H^q(W_n;\mathbf{R})\to \widehat{H}^q(W_n;\mathbf{R})$ и var: $H^q(W_n,\mathfrak{o}_n;\mathbf{R})\to$ $\to H^q(\widehat{W}_n,\mathfrak{o}_n;\mathbf{R})$ лежат в $H^{q-1}(W_n;W_n')$ и в $H^{q-1}(W_n,\mathfrak{o}_n;W_n')$, благодаря чему гомоморфизмы var могут рассматриваться как гомоморфизмы $H^q(W_n;\mathbf{R})\to H^{q-1}(W_n;\ W_n')$ и $H^q(W_n,\mathfrak{o}_n;\mathbf{R})\to H^{q-1}(W_n,\mathfrak{o}_n;W_n')$; в этом качестве они имеют и прямое описание.

0.5. Главные технические результаты этой работы относятся к когомологиям $H^*(W_n;\ W_n')$ и $H^*(W_n,\ \mathfrak{o}_n;\ W_n')$. Мы придаем этим когомологиям самостоятельное значение и исследуем их более подробно, чем нужно для характеристических классов слоений.

Заметим, что $H^*(W_n;W_n')$ есть $H^*(W_n;\mathbf{R})$-модуль, а $H^*(W_n,\mathfrak{o}_n;W_n')$ есть $H^*(W_n,\mathfrak{o}_n;\ \mathbf{R})$-модуль.

Мы доказываем следующие теоремы.

Теорема I. $H^q(W_n;W_n')\cong H^{2n+1}(W_n;\quad\mathbf{R})\otimes H^{q-2n}(\mathfrak{gl}(n);\mathbf{R})$; *структура $H^*(W_n;\ \mathbf{R})$-модуля в $H^*(W_n;\ W_n')$ тривиальна (т. е. если $y\in H^p(W_n;\quad \mathbf{R})$, $x\in H^q(W_n;\quad W_n')$ и $p>0$, $q>0$, то $xy=0$).*

Теорема II.

$$H^q(W_n,\mathfrak{o}_n;W_n')\cong H^{2n+1}(W_n;\mathrm{R})\otimes H^{q-2n}(\mathfrak{gl}(n),\ \mathfrak{o}_n;\ \mathbf{R});$$

структура $H^*(W_n,\mathfrak{o}_n;\ \mathbf{R})$-модуля в $H^*(W_n;\mathfrak{o}_n;W_n')$ тривиальна.

Поле $\mathbf{R}$ в обеих теоремах может быть заменено произвольным полем характеристики 0.

Далее описываются гомоморфизмы var, в частности, находятся их ядра.

0.6. Согласно сказанному в п. 0.3, ядра гомоморфизмов var состоят из жестких характеристических классов слоений. Однако оказалось, что наше вычисление ядер дает *в точности теорему Хейтша.* (Без претензий на точность можно сказать, что это означает, что «в области формул» нельзя доказать более сильную теорему жесткости, чем теорема Хейтша.) Зато любопытное следствие о вариациях характеристических классов слоений имеют утверждения о тривиальности модульных структур. Из них вытекает, что *каковы бы ни были слоение и его вариация, произведение любого характеристического класса на производную по параметру любого другого (возможно, того же самого) характеристического класса равняется нулю.* Проиллюстрируем это утверждение примером. Пусть x_1, x_2 — естественный базис пространства $H^3(S^3\times S^3;\ \mathbf{R})$ и пусть F — ориентированное слоение коразмерности 1 на $S^3\times S^3$, класс Годбийона — Вея которого пропорционален x_1 (такое слоение можно получить умножением любого из слоений семейства Тэрстона на S^3). Тогда при вариации слоения F класс Годбийона — Вея может изменяться (это видно из примера Тэрстона), но обязательно останется пропорциональным x_1.

0.7. Структура статьи такова. Первый параграф посвящен вычислению когомологий $H^*(W_n; W_n')$ и $H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; W_n')$. Во втором параграфе вычисляются гомоморфизмы var, третий параграф посвящен когомологиям алгебры $\hat{W}_n$ и, наконец, четвертый — характеристическим классам слоений и их вариаций.

§ 1. $H^*(W_n; W_n')$ и $H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; W_n')$

1.1. Начнем с напоминания основных определений.

Пусть $\mathfrak{g}$—топологическая алгебра Ли над полем $\mathbf{k}$ характеристики 0, и пусть M — произвольный $\mathfrak{g}$-модуль. Под q-мерной коцепью алгебры $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в M понимается непрерывная кососимметрическая q-линейная функция на $\mathfrak{g}$ со значениями в M, т. е. непрерывный гомоморфизм $\Lambda^q\mathfrak{g} \to M$. Пространство этих коцепей обозначается через $C^q(\mathfrak{g}; M)$. *Дифференциалом* q-мерной коцепи L называется $(q+1)$-мерная коцепь dL, определяемая формулой

$$dL(\xi_1, \ldots, \xi_{q+1}) = \sum_{1 \leqslant s < t \leqslant q+1} (-1)^{s+t-1} L([\xi_s, \xi_t], \xi_1, \ldots \hat{\xi}_s \ldots \hat{\xi}_t \ldots, \xi_{q+1}) + \sum_{1 \leqslant s \leqslant q+1} (-1)^s \xi_s L(\xi_1, \ldots \hat{\xi}_s \ldots, \xi_{q+1}).$$

Ясно, что сопоставление $L \mapsto dL$ определяет линейное отображение $d\colon C^q(\mathfrak{g}; M) \to C^{q+1}(\mathfrak{g}; M)$ и что композиция $d \circ d\colon C^q(\mathfrak{g}; M) \to C^{q+2}(\mathfrak{g}; M)$ тривиальна. Таким образом, пространства $C^q(\mathfrak{g}; M)$ и гомоморфизмы d составляют комплекс; q-я группа гомологий этого комплекса называется *q-й группой когомологий алгебры $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в M* и обозначается через $H^q(\mathfrak{g}; M)$.

Пусть $\mathfrak{h}$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{g}$. Подпространство пространства $C^q(\mathfrak{g}; M)$, выделяемое условиями $L(\xi_1, \ldots \xi_q) = 0$ и $dL(\xi_1, \ldots, \xi_{q+1}) = 0$ при $\xi_1 \in \mathfrak{h}$, обозначается через $C^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; M)$. Очевидно, что пространства $C^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; M)$ составляют подкомплекс комплекса $\{C^q(\mathfrak{g}; M), d\}$; q-я группа гомологий этого подкомплекса называется *q-й группой когомологий алгебры $\mathfrak{g}$ по модулю $\mathfrak{h}$ с коэффициентами в M* и обозначается через $H^q(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; M)$.

Пусть $L \in C^q(\mathfrak{g}; M)$ и $K \in C^p(\mathfrak{g}; \mathbf{k})$ (когда не оговорено противное, $\mathbf{k}$ рассматривается как тривиальный $\mathfrak{g}$-модуль). Формула

$$KL(\xi_1, \ldots, \xi_{p+q}) = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant p+q} (-1)^{i_1+\ldots+i_p-[p(p+1)/2]} K(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_p}) \times L(\xi_1, \ldots \hat{\xi}_{i_1} \ldots \hat{\xi}_{i_p} \ldots, \xi_{p+q})$$

определяет коцепь $KL \in C^{p+q}(\mathfrak{g}; M)$ и умножение $C^p(\mathfrak{g}; \mathbf{k}) \otimes C^q(\mathfrak{g}; M) \to C^{p+q}(\mathfrak{g}; M)$. Ясно, что $d(KL) = (dK)L + (-1)^p K(dL)$, благодаря чему определено также умножение $H^p(\mathfrak{g}; \mathbf{k}) \otimes H^q(\mathfrak{g}; M) \to H^{p+q}(\mathfrak{g}; M)$. Это умножение при $M = \mathbf{k}$ определяет в $H^*(\mathfrak{g}; \mathbf{k}) = \bigoplus_q H^q(\mathfrak{g}; \mathbf{k})$ структуру градуированного кольца и при произвольном M определяет в $H^*(\mathfrak{g}; M) = \bigoplus_q H^q(\mathfrak{g}; M)$ структуру градуированного $H^*(\mathfrak{g}; \mathbf{k})$-модуля. Подобным же образом, $H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbf{k})$ есть градуированное кольцо, а $H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; M)$ есть градуированный $H^*(\mathfrak{g}, \mathfrak{h}; \mathbf{k})$-модуль.

Ниже через W_n обозначается топологическая алгебра Ли формальных векторных полей в n-мерном пространстве над $\mathbf{k}$, через W_n' — простран-

ство непрерывных функционалов на W_n (с естественной структурой W_n-модуля), через $\mathfrak{gl}(n)$ — подалгебра алгебры W_n, составленная из полей вида $\sum a_{ij}x_i\,\partial/\partial x_j$ (очевидным образом изоморфная обычной алгебре матриц), и через $\mathfrak{o}_n$ — подалгебра алгебры $\mathfrak{gl}(n)$, выделяемая условием $a_{ij} = -a_{ji}$.

Настоящий параграф посвящен вычислению $H^*(W_n; \mathbf{k})$-модуля $H^*(W_n; W_n')$ и вычислению $H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{k})$-модуля $H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; W_n')$. Эти вычисления мало отличаются одно от другого, и мы проведем подробно только первое, ограничившись для второго формулировкой окончательного результата и перечислением отличий от первого вычисления.

1.2. Пространство $C^q(W_n; W_n')$ есть $(\Lambda^q W_n)' \otimes W_n' = \Lambda^q(W_n') \otimes \otimes W_n'$. В свою очередь W_n' естественно отождествляется с $S^*T \otimes T'$, где $T = \mathbf{k}^n$ и S^* обозначает симметрическую алгебру (ср. [4], п. 1.2). Таким образом,

$$C^q(W_n; W_n') = \Lambda^q(S^*T \otimes T') \otimes (S^*T \otimes T'),$$

что позволяет записывать элементы пространства $C^q(W_n; W_n')$ как функции аргументов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{q+1} \in T'$; $\beta_1, \ldots, \beta_{q+1} \in T$, зависящие полиномиально от координат ковекторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{q+1}$, полилинейные по $\beta_1, \ldots, \beta_{q+1}$ и меняющие знак при одновременной перестановке α_i с α_j и β_i с β_j, если $i < q+1$, $j < q+1$. Дифференциал d задается при такой записи формулой

$$\begin{aligned} dP(\alpha_1, \ldots, \alpha_{q+2}; \beta_1, \ldots, \beta_{q+2}) = \sum_{1\leqslant s<t\leqslant q+1} (-1)^{s+t-1} P(\alpha_s + \alpha_t, \alpha_1, \ldots \\ \ldots \hat{\alpha}_s \ldots \hat{\alpha}_t \ldots, \alpha_{q+2};\ \beta(s,t), \beta_1, \ldots \hat{\beta}_s \ldots \hat{\beta}_t \ldots, \beta_{q+1}) + \\ + \sum_{1\leqslant s\leqslant q} (-1)^{s+1} P(\alpha_1, \ldots \hat{\alpha}_s \ldots,\ \alpha_{q+1}, \alpha_s + \alpha_{q+2}; \beta_1, \ldots \hat{\beta}_s \ldots, \beta_{q+1}, \beta(s, q+2)), \end{aligned}$$

где $\beta(s, t) = (\alpha_t, \beta_s)\beta_t - (\alpha_s, \beta_t)\beta_s$. Подобным же образом, коцепи из $C^q(W_n; \mathbf{k})$ отождествляются с функциями от $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in T'$; $\beta_1, \ldots, \beta_q \in \in T$, полиномиальными по α, полилинейными по β и меняющими знак при одновременной перестановке α_i с α_j и β_i с β_j (ср. [4], п. 1.3). Умножение $C^p(W_n; \mathbf{k}) \otimes C^q(W_n; W_n') \to C^{p+q}(W_n; W_n')$ действует по формуле

$$\begin{aligned} PQ(\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+q+1};\ \beta_1, \ldots, \beta_{p+q+1}) = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_p\leqslant p+q} (-1)^{i_1+\ldots+i_p-[p(p+1)/2]} \times \\ \times P(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_p}; \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_p})\, Q(\alpha_1, \ldots \hat{\alpha}_{i_1} \ldots\ \hat{\alpha}_{i_p}\ \ldots, \alpha_{p+q+1}; \\ \beta_1 \ldots \hat{\beta}_{i_1} \ldots \hat{\beta}_{i_p} \ldots, \beta_{p+q+1}) \end{aligned}$$

(ср. [4], п. 1.4).

1.3. Мы используем спектральную последовательность Серра — Хохшильда (см. [12]), отвечающую подалгебре $\mathfrak{gl}(n)$ алгебры W_n. Эта спектральная последовательность сходится к $H^*(W_n; W_n')$, а ее первый член определяется формулой

$$E_1^{qr} = H^r(\mathfrak{gl}(n);\ C^q(W_n, \mathfrak{gl}(n);\ W_n')).$$

Пространство $C^q(W_n, \mathfrak{gl}(n); W_n')$ есть подпространство пространства $C^q(W_n; W_n')$, составленное из многочленов $P(\alpha_1, \ldots, \alpha_{q+1}; \beta_1, \ldots, \beta_{q+1})$, удовлетворяющих условию: суммарная степень каждого входящего в P одночлена по координатам ковекторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ отлична от 1. Хотя $\mathfrak{gl}(n)$-модуль $C^q(W_n, \mathfrak{gl}(n); W_n')$ бесконечномерен, он распадается в сумму

конечномерных модулей (суммарная степень по $\alpha_1, \ldots, \alpha_{q+1}$ является $\mathfrak{gl}(n)$-инвариантом), и потому

$$H^r(\mathfrak{gl}(n);\ C^q(W_n, \mathfrak{gl}(n);\ W_n')) = [C^q(W_n, \mathfrak{gl}(n);\ W_n')]^{\mathfrak{gl}(n)} \otimes H^r(\mathfrak{gl}(n); \mathrm{k}),$$

где $[\ \ ]^{\mathfrak{gl}(n)}$ обозначает пространство $\mathfrak{gl}(n)$-инвариантных элементов (см. [6], глава 5, теорема 1).

Дифференциал $d_1^{qr}\colon E_1^{qr} \to E_1^{q+1,r}$ индуцирован дифференциалом $d\colon C^q(W_n, \mathfrak{gl}(n);\ W_n') \to C^{q+1}(W_n, \mathfrak{gl}(n);\ W_n')$, благодаря чему E_2^{qr} есть тензорное произведение q-го пространства гомологий комплекса

$$\{[C^q(W_n,\ \mathfrak{gl}(n);\ W_n')]^{\mathfrak{gl}(n)}, d\} \tag{1}$$

на $H^r(\mathfrak{gl}(n); \mathrm{k})$. Таким образом, наша очередная задача состоит в том, чтобы вычислить гомологии комплекса (1). Это и делается ниже: предложения 1 и 2 дают более явное описание пространств, составляющих комплекс (1), предложение 3 описывает его дифференциал, и, наконец, предложение 4 описывает его гомологии.

1.4. Из основной теоремы теории инвариантов (см. [3], теорема II6A) следует, что всякая $\mathfrak{gl}(n)$-инвариантная коцепь имеет вид

$$\sum_{i_1=1}^{q} \ldots \sum_{i_{q+1}=1}^{q} k_{i_1\ldots i_{q+1}} (\alpha_{i_1}, \beta_1) \ldots (\alpha_{i_{q+1}}, \beta_{q+1}), \tag{2}$$

где $k_{i_1\ldots i_{q+1}} \in \mathrm{k}$ (ср. [4], предложение 4.4). Прежде всего выясним, какие выражения вида (2) удовлетворяют условию косой симметрии и условию, что степень по $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ отлична от 1.

Определим коцепи

$$\rho_{st}^{\varepsilon_1\varepsilon_2} \in C^{2s+2t+\varepsilon_1+\varepsilon_2}(W_n, \mathfrak{gl}(n);\ W_n'),$$
$$\sigma_u^{\varepsilon} \in C^{2u+\varepsilon}(W_n, \mathfrak{gl}(n); W_n'),\quad \psi_v \in C^{2v}(W_n; \mathrm{k}),$$

где $s, t, u, v \geqslant 0$ и $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon = 0$ или 1, равенствами

$$\rho_{st}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2s+2t+\varepsilon_1+\varepsilon_2+2};\ \beta_1, \ldots, \beta_{2s+2t+\varepsilon_1+\varepsilon_2+2}) =$$
$$= \sum_{(i_1,\ldots,i_{2s+2t+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1})} \operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_{2s+2t+\varepsilon_1+\varepsilon_2+1}) (\alpha_{i_2}, \beta_{i_1})(\alpha_{i_3}, \beta_{i_2}) \ldots (\alpha_{i_s}, \beta_{i_{s-1}}) \times$$
$$\times (\alpha_{i_{s+t+1}}, \beta_{i_s})(\alpha_{i_{s+2}}, \beta_{i_{s+1}}) \ldots (\alpha_{i_{s+t+1}}, \beta_{i_{s+t}})(\alpha_{i_{s+1}}, \beta_{i_{s+t+1}}) \times$$
$$\times (\alpha_{i_1}, \beta_{i_{s+t+2}})(\alpha_{i_2}, \beta_{i_{s+t+3}}) \ldots (\alpha_{i_{s+t}}, \beta_{i_{2s+2t+1}}) \times$$
$$\times \begin{cases} (\alpha_{i_1}, \beta_{2s+2t+2}), & \text{если } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0, \\ (\alpha_{i_{s+t+1}}, \beta_{i_{2s+2t+2}})(\alpha_{i_1}, \beta_{2s+2t+3}), & \text{если } \varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_2 = 1, \\ (\alpha_{2s+2t+3}, \beta_{i_{2s+2t+2}})(\alpha_{i_1}, \beta_{2s+2t+3}), & \text{если } \varepsilon_1 = 1,\ \varepsilon_2 = 0, \\ (\alpha_{i_{s+t+1}}, \beta_{i_{2s+2t+2}})(\alpha_{2s+2t+4}, \beta_{i_{2s+2t+3}})(\alpha_{i_1}, \beta_{2s+2t+4}), & \text{если } \varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1; \end{cases}$$

$$\sigma_u^{\varepsilon}(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2u+\varepsilon+1};\ \beta_1, \ldots, \beta_{2u+\varepsilon+1}) = \sum_{(i_1,\ldots,i_{2u+\varepsilon})} \operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_{2u+\varepsilon}) \times$$
$$\times (\alpha_{i_2}, \beta_{i_1})(\alpha_{i_3}, \beta_{i_2}) \ldots (\alpha_{i_u} \beta_{i_{u-1}})(\alpha_{i_1}, \beta_{i_{u+1}})(\alpha_{i_2}, \beta_{i_{u+2}}) \ldots (\alpha_{i_u} \beta_{i_{2u}}) \times$$
$$\times \begin{cases} (\alpha_{2u+1}, \beta_{i_u})(\alpha_{i_1}, \beta_{2u+1}), & \text{если } \varepsilon = 0, \\ (\alpha_{2u+2}, \beta_{i_u})(\alpha_{2u+2}, \beta_{i_{2u+1}})(\alpha_{i_1}, \beta_{2u+2}), & \text{если } \varepsilon = 1; \end{cases}$$

$$\psi_v(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2v};\ \beta_1, \ldots, \beta_{2v}) = \sum_{(i_1,\ldots,i_{2v})} \operatorname{sign}(i_1, \ldots, i_{2v})(\alpha_{i_2}, \beta_{i_1})(\alpha_{i_3}, \beta_{i_2}) \ldots$$
$$\ldots (\alpha_{i_v}, \beta_{i_{v-1}})(\alpha_{i_1}, \beta_{i_v})(\alpha_{i_1}, \beta_{i_{v+1}})(\alpha_{i_2}, \beta_{i_{v+2}}) \ldots (\alpha_{i_v}, \beta_{i_{2v}}).$$

Предложение 1. *Пространство* $[C^*(W_n, \mathfrak{gl}(n); W'_n)]^{\mathfrak{gl}(n)}$ *аддитивно порождается коцепями вида* $\psi_{v_1} \dots \psi_{v_m} \rho_{st}^{\varepsilon_1\varepsilon_2}$ *и* $\psi_{v_1} \dots \psi_{v_m} \sigma_u^{\varepsilon}$.

Доказательство. Всякая коцепь из $[C^q(W_n, \mathfrak{gl}(n); W'_n)]^{\mathfrak{gl}(n)}$ есть сумма многочленов, каждый из которых получен косой симметризацией из некоторого монома, и мы можем ограничиться рассмотрением таких многочленов. Пусть

$$(\alpha_{k_1}, \beta_1) \dots (\alpha_{k_{q+1}}, \beta_{q+1})$$

— моном, косой симметризацией которого получена предложенная коцепь P. Из налагаемых на многочлены условий следует, что:

(i) каждое из чисел $1, \dots, q$ либо вовсе не встречается среди $k_1, \dots \dots, k_{q+1}$, либо встречается по крайней мере дважды;

(ii) если $1 \leqslant \mu < \nu \leqslant q$ и числа μ, ν не встречаются среди $k_1, \dots, k_{q+1}$, то $k_\mu \neq k_\nu$ (иначе одновременная перестановка α_μ с α_ν и β_μ с β_ν не меняла бы монома и его косая симметризация равнялась бы нулю).

Случай 1: $q = 2r$. В этом случае ровно r из чисел $1, \dots, q$ не содержатся среди $k_1, \dots, k_{q+1}$. В самом деле, если, скажем, среди $k_1, \dots, k_{q+1}$ не содержатся $r, \dots, q$, то среди $k_r, \dots, k_q$ не более r различных чисел, т. е. по крайней мере два из этих чисел совпадают, что противоречит (i). С другой стороны, если среди $k_1, \dots, k_{q+1}$ содержатся, скажем, числа $1, \dots, r+1$, то в силу (ii) каждое из последних чисел встречается среди $k_1, \dots, k_{q+1}$ по крайней мере дважды, откуда $q + 1 \geqslant 2(r+1)$.

Мы считаем, что среди чисел $k_1, \dots, k_{q+1}$ встречаются $1, \dots, r$ (и, может быть, $q+1$) и не встречаются $r+1, \dots, q$. При этом в силу (ii) числа $k_{r+1}, \dots, k_q$ попарно различны.

Подслучай 11: $q + 1$ *не содержится среди* $k_{r+1}, \dots, k_q$. Тогда можно считать, что $k_{r+1} = 1, \dots, k_q = r$. Среди чисел $k_1, \dots, k_r, k_{q+1}$ должны встретится хотя бы по разу $1, \dots, r$. Составим последовательность:

$$l_0 = q + 1,\ l_1 = k_{l_0},\ l_2 = k_{l_1}, \dots$$

Пусть l_u — первый элемент этой последовательности, равный одному из предыдущих элементов. Тогда среди u индексов $k_{l_0}, \dots, k_{l_u}$ имеется ровно $u - 1$ из чисел $r+1, \dots, q$ (именно, $l_1, \dots, l_{u-1}$). Значит, индексы k_i с $i \in I = \{1, \dots \hat{l}_1 \dots \hat{l}_{u-1} \dots, q\}$ попарно различны, и функция $i \mapsto k_i$ определяет перестановку $I \to I$. Последняя разлагается в произведение циклов; пусть $v_1, \dots, v_m$ — длины этих циклов.

Моном полностью описан; если $l_u = q + 1$, то $P = \pm \psi_{v_1} \dots \psi_{v_m} \sigma_u^0$, а если $l_u = l_s$ с $0 < s < u$, то $P = \pm \psi_{v_1} \dots \psi_{v_m} \rho_{s-1, u-s}^{01}$.

Подслучай 12: $q + 1$ *содержится среди* $k_{r+1}, \dots, k_q$. Тогда можно считать, что $k_{r+1} = 1, \dots, k_{q-1} = r - 1$, $k_q = q + 1$. Среди чисел $k_1, \dots, k_r$, k_{q+1} должно встретиться дважды r и по одному разу $1, \dots, r-1$. Снова составляем последовательность $l_0 = q + 1$, $l_1 = k_{l_0}, \dots$. Если l_u — первый элемент этой последовательности, равный одному из предыдущих элементов l_s, то $0 < s < u$ и $l_s = l_u = r$. Сопоставление $i \mapsto k_i$ опять определяет перестановку множества $\{1, \dots, \hat{l}_1 \dots \hat{l}_{u-1} \dots, q\}$; последняя разлагается в произведение циклов, и если $v_1, \dots, v_m$ — длины этих циклов, то $P = \pm \psi_{v_1} \dots \psi_{v_m} \rho_{s-1, u-s}^{10}$.

Случай 2: $q = 2r - 1$. В этом случае из чисел $1, \dots, q$ или r или $r - 1$ не содержатся среди $k_1, \dots, k_{q+1}$. В самом деле, если, скажем, среди $k_1, \dots \dots, k_{q+1}$ не содержатся $r-1, \dots, q$, то среди $k_{r-1}, \dots, k_q$ не более $r - 2$ различных чисел, т. е. по крайней мере два из этих чисел совпадают, что противоречит условию (ii). С другой стороны, если среди чисел $k_1, \dots, k_{q+1}$

содержатся, скажем, числа $1, \ldots, r+1$, то в силу (i) каждое из этих чисел встречается среди $k_1, \ldots, k_{q+1}$ по крайней мере дважды, откуда $q+1 \geqslant 2(r+1)$.

Подслучай 21: *среди* $k_1, \ldots, k_{q+1}$ *встречается* r *из чисел* $1, \ldots, q$.

Подслучай 22: *среди* $k_1, \ldots, k_{q+1}$ *встречается* $r-1$ *из чисел* $1, \ldots, q$.

Мы опускаем детальное рассмотрение этих подслучаев, аналогичное предыдущему. В подслучае 21 коцепь P совпадает, с точностью до знака, с коцепью вида $\psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m} \sigma_u^1$ или $\psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m} \rho_{st}^{11}$, а в подслучае 22 — с коцепью вида $\psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m} \rho_{st}^{00}$.

1.5. Наша следующая задача — перечислить соотношения между найденными образующими. Заметим, что указанная нами система образующих по виду не зависит от n, так что зависимость от n пространства $[C^q(W_n, \mathfrak{gl}(n); W_n')]^{\mathfrak{gl}(n)}$ должна проявляться только на соотношениях. Для удобства дальнейших формулировок выделим в $[C^*(W_n, \mathfrak{gl}(n); W_n')]^{\mathfrak{gl}(n)}$ пять последовательностей подпространств: A_r, B_r, C_r, D_r, F_r.

Пространство	Образующие	Размерность (q)	Степени по $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$	Степень по α_{q+1}
A_r	$\psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m} \rho_{st}^{00}$ с $v_1 + \ldots + v_m + s + t = r-1$	$2r-1$	$\underbrace{0 \ldots 0}_{r-1}\ \underbrace{2 \ldots 2}_{r}$	0
B_r	$\psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m} \rho_{st}^{11}$ с $v_1 + \ldots + v_m + s + t = r-2$	$2r-1$	$\underbrace{0 \ldots 0}_{r}\ \underbrace{2 \ldots 2}_{r-2}\ 3$	1
C_r	$\psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m} \sigma_u^1$ с $v_1 + \ldots + v_m + u = r-1$	$2r-1$	$\underbrace{0 \ldots 0}_{r}\ \underbrace{2 \ldots 2}_{r-1}$	2
D_r	$\psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m} \rho_{st}^{01}$ с $v_1 + \ldots + v_m + s + t = r-1$	$2r$	$\underbrace{0 \ldots 0}_{r}\ \underbrace{2 \ldots 2}_{r-1}\ 3$	0
F_r	$\psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m} \rho_{st}^{10}$ с $v_1 + \ldots + v_m + s + t = r-1$; $\psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m} \sigma_u^0$ с $v_1 + \ldots + v_m + u = r$	$2r$	$\underbrace{0 \ldots 0}_{r}\ \underbrace{2 \ldots 2}_{r}$	1

Системы коцепей, порождающих эти пространства, указаны во второй колонке таблицы. Каждое из этих подпространств состоит из коцепей одной размерности, указанной в третьей колонке таблицы. В двух последних колонках приведены степени элементов соответствующих пространств по α (подробнее: произвольная коцепь рассматриваемого пространства записывается в виде многочлена от α, β, и у любого монома, входящего в этот многочлен, вычисляются степени по $\alpha_1, \ldots, \alpha_{q+1}$; легко усмотреть, что степени по $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ с точностью до порядка не зависят от произвола в выборе коцепи и монома, а степень по α_{q+1} вовсе не зависит от этого произвола). Предложение 1 означает, что

$$[C^{2r-1}(W_n, \mathfrak{gl}(n); W_n')]^{\mathfrak{gl}(n)} = A_r + B_r + C_r,$$
$$[C^{2r}(W_n, \mathfrak{gl}(n); W_n')]^{\mathfrak{gl}(n)} = D_r + F_r.$$

Поскольку все наборы степеней в таблице попарно различны, наши пространства попарно не пересекаются, и задача об отыскании соотношений распадается на задачи отыскания соотношений в каждом из пространств A_r, B_r, C_r, D_r, F_r.

Предложение 2. (i) *Пространства* A_r *с* $r \geqslant n+2$, B_r *с* $r \geqslant n+1$, C_r *с* $r \geqslant n+1$, D_r *с* $r \geqslant n+1$ *и* F_r *с* $r \geqslant n+1$ *тривиальны.*

(ii) *В пространствах* A_r *с* $r \leqslant n$, B_r *с* $r \leqslant n$, C_r *с* $r \leqslant n$, D_r *с* $r \leqslant n$ *и* F_r *с* $r \leqslant n-1$ *указанные в таблице образующие линейно независимы.*

(iii) *Определяющую систему соотношений в пространстве* F_n *составляют равенства*

$$\psi_{v_1}\ldots\psi_{v_m}\sigma_u^0 = \sum_{s+t=u-1}\psi_{v_1}\ldots\psi_{v_m}\rho_{st}^{10} + \sum_{i=1}^{m}(-1)^{uv_i}v_i\psi_{v_1}\ldots\hat{\psi}_{v_i}\ldots\psi_{v_m}\rho_{u,\,v_i-1}^{10}. \tag{3}$$

(iv) *Определяющую систему соотношений в пространстве* A_{n+1} *составляют равенства*

$$\psi_{v_1}\ldots\psi_{v_m}\rho_{0u}^{00} = \sum_{s+t=u-1}\psi_{v_1}\ldots\psi_{v_m}\rho_{s+1,\,t}^{00} + \sum_{i=1}^{m}(-1)^{(u+1)v_i}v_i\psi_{v_1}\ldots\hat{\psi}_{v_i}\ldots\psi_{v_m}\rho_{u+1,\,v_i-1}^{00};$$

$$\sum_{i=1}^{m}v_i\psi_{v_1}\ldots\hat{\psi}_{v_i}\ldots\psi_{v_m}\rho_{0v_i-1}^{00} = 0.$$

Утверждения (i) и (ii) очевидным образом вытекают из следующих утверждений (i′) и (ii′).

(i′) *Если моном* $(\alpha_{k_1}, \beta_1)\ldots(\alpha_{k_{q+1}}, \beta_{q+1})$ *не зависит более, чем от* n *из ковекторов* $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$, *то его косая симметризация* (*по* $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$; $\beta_1, \ldots, \beta_q$) *равняется нулю.*

(ii′) *Мономы вида* $(\alpha_{k_1}, \beta_1)\ldots(\alpha_{k_{q+1}}, \beta_{q+1})$, *имеющие положительную степень не более, чем по* n *из ковекторов* $\alpha_1, \ldots, \alpha_{q+1}$, *линейно независимы.*

Доказательство утверждения (i′). Выделим из рассматриваемой косой симметризации сумму мономов, не зависящих от $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_{n+1}}$, где $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_{n+1} \leqslant q$. Эта сумма полилинейна и кососимметрична по $\beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_{n+1}}$ и потому равняется нулю.

Доказательство утверждения (ii′). Пусть $e_1, \ldots, e_n$ — базис в T и $e_1', \ldots, e_n'$ — сопряженный базис в T^*, и пусть $(\alpha_{k_1}, \beta_1)\ldots(\alpha_{k_{q+1}}, \beta_{q+1})$ — моном, имеющий положительную степень по $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_r}$ ($r \leqslant n$, $1 \leqslant j_1 < \ldots < j_r \leqslant q+1$) и нулевую степень по остальным j_r. Положим $\alpha_{j_1} = e_1', \ldots, \alpha_{j_r} = e_r'$; $\alpha_j = 0$ при $j \neq j_1, \ldots, j_r$ и определим β_i условием: $\alpha_{k_i} = \beta_i'$. Подстановка этих α и β в наш моном дает единицу, подстановка этих же α и β в любой другой моном, имеющий положительную степень не более, чем по n из α, дает 0.

Доказательство утверждения (iii). Прежде всего заметим, что для доказательства нетривиальности коцепи $P \in F_n$ достаточно доказать, что равны нулю не все числа (элементы поля $\mathbf{k}$)

$$\gamma_{i_1\ldots i_{n+1}}(P) = P(\underbrace{0, \ldots, 0}_{n}, e_1', \ldots, e_n', e_1'; e_1, \ldots, e_n, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n+1}})$$

с $1 \leqslant i_1 \leqslant n, \ldots, 1 \leqslant i_{n+1} \leqslant n$.

Действительно, так как

$$(\beta_1, \ldots, \beta_{2n+1}) \mapsto P\,(0, \ldots, 0, e_1', \ldots, e_n', e_1';\ \beta_1, \ldots, \beta_{2n+1})$$

есть полилинейная функция, кососимметрическая по $\beta_1, \ldots, \beta_n$, то из равенства нулю чисел γ следует, что

$$P\,(0, \ldots, 0, e_1', \ldots, e_n', e_1';\ \beta_1, \ldots, \beta_{2n+1}) = 0$$

при любых $\beta_1, \ldots, \beta_{2n+1}$. Пользуясь инвариантностью P относительно перестановок координат и условием косой симметричности, мы получаем отсюда, что

$$P\,(0, \ldots, 0, e_1', \ldots, e_n', e_i';\ \beta_1, \ldots, \beta_{2n+1}) = 0$$

при любых $\beta_1, \ldots, \beta_{2n+1}$ и любом i. Так как, далее,

$$\alpha_{2n+1} \mapsto P\,(0, \ldots, 0, e_1', \ldots, e_n', \alpha_{2n+1};\ \beta_1, \ldots, \beta_{2n+1})$$

есть линейная функция, то последнее означает, что

$$P\,(0, \ldots, 0, e_1', \ldots, e_n', \alpha_{2n+1};\ \beta_1, \ldots, \beta_{2n+1}) = 0$$

при любых $\beta_1, \ldots, \beta_{2n+1}, \alpha_{2n+1}$. Из этого следует, опять-таки ввиду инвариантности P, что

$$P\,(0, \ldots, 0, \alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n+1};\ \beta_1, \ldots, \beta_{2n+1}) = 0$$

при любых $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n+1};\ \beta_1, \ldots, \beta_{2n+1}$, удовлетворяющих дополнительному условию линейной независимости $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_{2n}$, а это дополнительное условие может быть отброшено благодаря непрерывности P. Ясно, наконец, что из последнего равенства вытекает, что $P = 0$, поскольку

$$P = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_n \leqslant 2n} P\,|_{\alpha_{i_1} = \ldots = \alpha_{i_n} = 0},$$

а слагаемые этой суммы получаются одно из другого перестановками $(\alpha_i, \beta_i) \leftrightarrow (\alpha_j, \beta_j)$ $(1 \leqslant i < j \leqslant 2n)$.

Далее, так как степень многочлена $P \in F_n$ по α_{n+1} равна 1, а по остальным α равна 0 или 2, то $\gamma_{i_1 \ldots i_{n+1}}(P)$ может быть отлично от нуля лишь при условии, что среди $i_1, \ldots, i_{n+1}$ дважды встречается 1 и по одному разу $2, \ldots, n$. Пусть $i_1, \ldots, i_{n+1}$ — такой набор. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $i_{n+1} = 1$. Тогда $(i_1, \ldots, i_n)$ — перестановка чисел $1, \ldots, n$. Она разбивается в произведение циклов; пусть u — длина цикла, содержащего 1, и $v_1, \ldots, v_m$ — длины остальных циклов. Легко видеть, что $\gamma_{i_1 \ldots i_{n+1}}(P)$ равняется нулю для всех мономов P нашей системы образующих, кроме трех:

$$\psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m} \rho^{10}_{0,\, u-1}, \qquad \psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m} \sigma^0_u, \qquad \psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m} \psi_u \sigma^0_0,$$

для которых $\gamma_{i_1 \ldots i_{n+1}}$ отлично от нуля (и легко вычисляется).

Второй случай: $i_{n+1} \neq 1$. Составим последовательность $l_0 = i_{n+1}$, $l_1 = i_{l_0}$, $l_2 = i_{l_1}, \ldots$. Пусть l_u — первый элемент этой последовательности, равный одному из предыдущих элементов, l_s. Ясно, что $0 < s < u$ и $l_s = l_u = 1$ и что на множестве $\{1, \ldots, n\} \setminus \{l_0, \ldots, l_{u-1}\}$ сопоставление $k \mapsto i_k$ определяет перестановку. Эта перестановка разлагается в произведение циклов. Пусть $v_1, \ldots, v_m$ — длины этих циклов. Тогда $\gamma_{i_1 \ldots i_{n+1}}(P)$ равняется нулю для всех мономов P нашей системы образующих, кроме трех:

$$\psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m} \rho^{10}_{s,\, u-s-1}, \qquad \psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m} \sigma^0_u, \qquad \psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m} \psi_{u-s} \sigma^0_s,$$

для которых $\gamma_{i_1 \ldots i_{n+1}}$ отлично от нуля (и опять-таки легко вычисляется).

Из сказанного следует, что коцепи $\psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m}\rho^{10}_{st}$ линейно независимы в E_n, а коцепи $\psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m}\sigma^0_u$ линейно через них выражаются (так как каждое γ отлично от нуля в точности для одной коцепи $\psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m}\rho^{10}_{st}$ и на каждой коцепи $\psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m}\rho^{10}_{st}$ отлично от нуля некоторое γ). Чтобы доказать формулу (3), остается вычислить значения γ на указанных выше коцепях и убедиться в том, что результаты не противоречат этой формуле. Это автоматическое, но довольно громоздкое вычисление мы опускаем.

Доказательство утверждения (iv) аналогично предыдущему. Мы ограничиваемся указанием, что для тривиальности коцепи достаточно обращение в нуль чисел

$$P(0, \ldots, 0, e_1', \ldots, e_n', e_1', 0; e_1, \ldots, e_n, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n+2}}),$$
$$P(0, \ldots, 0, e_1', \ldots, e_n', e_1' + e_2', 0; e_1, \ldots, e_n, e_{i_1}, \ldots, e_{i_{n+2}}).$$

1.6. Следующее автоматически доказываемое предложение описывает действие в $[C^*(W_n, \mathfrak{gl}(n); W_n')]^{\mathfrak{gl}(n)}$ дифференциала d.

Предложение 3. $d\rho^{00}_{st} = -\rho^{01}_{st} + (-1)^{s+t+1}\rho^{01}_{st}$; $d\rho^{01}_{st} = -\rho^{00}_{s+1,\,t} + \rho^{11}_{st}$; $d\rho^{10}_{st} = (-1)^{s+t}\rho^{00}_{s+1,\,t} + (-1)^{s+t-1}\rho^{11}_{st}$; $d\rho^{11}_{st} = (-1)^{s+t}\rho^{01}_{s+1,\,t} - \rho^{10}_{s+1,\,t}$; $d\sigma^0_u = (-1)^{u+1}\rho^{00}_{0u} + (-1)^u\sigma^1_u$; $d\sigma^1_u = (-1)^{u+1}\rho^{01}_{0u} - \rho^{10}_{0u}$.

1.7. Предложения 1—3 позволяют без каких-либо затруднений вычислить гомологии комплекса $\{[C^q(W_n, \mathfrak{gl}(n); W_n')]^{\mathfrak{gl}(n)}, d\}$. Получается следующий результат.

Предложение 4. *Если $r \neq 2n$, то r-е гомологическое пространство H_r комплекса $\{[C^q(W_n, \mathfrak{gl}(n); W_n')]^{\mathfrak{gl}(n)}\}$ тривиально; пространство H_{2n} имеет размерность, на единицу меньшую количества представлений числа $n+1$ в виде суммы натуральных слагаемых (представления, различающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми).*

Подробнее: обозначим через $x_{v_1 \ldots v_m}$, где $0 < v_1 \leqslant \ldots \leqslant v_m$ и $v_1 + \ldots + v_m = n+1$, гомологический класс цикла

$$\xi_{v_1 \ldots v_m} = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{v_i} v_i \psi_{v_1} \ldots \hat{\psi}_{v_i} \ldots \psi_{v_m}\sigma^0_{v_i - 1} \in [C^{2n}(W_n, \mathfrak{gl}(n); W_n')]^{\mathfrak{gl}(n)};$$

пространство H_{2n} порождается своими элементами $x_{v_1 \ldots v_m}$, связанными единственным соотношением

$$\sum_{v_1 \ldots v_m} \frac{(-1)^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(v_i - 1)(v_i - 2)}}{\prod_{j=1}^{n+1}(k_j!)\prod_{i=1}^{m} v_i}\, x_{v_1 \ldots v_m} = 0,$$

где k_j — число, показывающее, сколько раз j встречается среди $v_1, \ldots, v_m$.

1.8. Теперь мы можем доказать части теорем I, II из введения, относящиеся к $H^*(W_n; W_n')$. Для этого вернемся к спектральной последовательности Серра — Хохшильда (см. п. 1.3). Предложение 4 показывает, что у этой спектральной последовательности

$$E_2^{qr} = \begin{cases} 0, & \text{если } q \neq 2n, \\ E_2^{2n,\,0} \otimes H^r(\mathfrak{gl}(n); \mathrm{k}), & \text{если } q = 2n, \end{cases}$$

а $\dim E_2^{2n,0}$ на единицу меньше количества представлений числа $n+1$ в виде суммы натуральных слагаемых. Все дальнейшие дифференциалы спектральной последовательности тривиальны по размерностным соображениям, и мы получаем канонический изоморфизм

$$H^q(W_n; W_n') = E_2^{2n,0} \otimes H^{q-2n}(\mathfrak{gl}(n); \mathbf{k}).$$

Сопоставляя полученную выше информацию о $\dim E_2^{2n,0}$ с теоремой 5.5 статьи [4], мы получаем (пока не канонический) изоморфизм

$$H^q(W_n; W_n') \cong H^{2n+1}(W_n; \mathbf{k}) \otimes H^{q-2n}(\mathfrak{gl}(n); \mathbf{k}).$$

Остается доказать, что каковы бы ни были $y \in H^p(W_n; \mathbf{k})$, $x \in H^q(W_n; W_n')$ с $p > 0$, $q > 0$, произведение xy равняется нулю. Доказательство: фильтрация Серра — Хохшильда класса y по подалгебре $\mathfrak{gl}(n)$ не меньше n (см. [4], предложение 5.3), а фильтрация класса x равна $2n$; ввиду мультипликативности этой фильтрации, произведение xy имеет фильтрацию, не меньшую $3n$, следовательно, $xy = 0$.

1.9. Утверждения теорем I, II, относящиеся к $H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; W_n')$ доказываются точно так же. К $H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; W_n')$ сходится спектральная последовательность Серра — Хохшильда с

$$E_1^{q,r} = H^r(\mathfrak{gl}(n), \mathfrak{o}_n; C^q(W_n, \mathfrak{gl}(n); W_n')) =$$
$$= H^r(\mathfrak{gl}(n), \mathfrak{o}_n; \mathbf{k}) \otimes [C^q(W_n, \mathfrak{gl}(n); W_n')]^{\mathfrak{gl}(n)},$$

и, повторяя с соответствующими изменениями сказанное в п. 1.8, мы выводим из предложения 4, что

$$H^q(W_n, \mathfrak{o}_n; W_n') \cong H^{2n+1}(W_n; \mathbf{k}) \otimes H^{q-2n}(\mathfrak{gl}(n), \mathfrak{o}_n; \mathbf{k}).$$

Тривиальность $H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; W_n')$ как $H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{k})$-модуля снова доказывается на основании мультипликативности фильтрации Серра — Хохшильда, хотя относительно фильтрации элементов положительной размерности пространства $H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{k})$ можно утверждать лишь, что она не меньше 2.

§ 2. Гомоморфизмы var

2.1. Пространство $C^{q+1}(W_n; \mathbf{k}) = \Lambda^{q+1} W_n'$ естественно вкладывается в $C^q(W_n; W_n') = (\Lambda^q W_n') \otimes W_n'$, и это вложение, очевидно, перестановочно с дифференциалом. Возникающий гомоморфизм $H^{q+1}(W_n; \mathbf{k}) \to H^q(W_n; W_n')$ обозначается через var. Это — гомоморфизм, который был обещан во введении. Его связь с характеристическими классами слоений мы обсудим в § 4, а в этом параграфе он изучается как самостоятельный объект.

2.2. Как известно, коциклы $\psi_v \in C^{2v}(W_n, \mathfrak{gl}(n); \mathbf{k})$ когомологичны нулю в $C^*(W_n; \mathbf{k})$: естественно определяются коцепи $\varphi_v \in C^{2v-1}(W_n; \mathbf{k})$ с $d\varphi_v = \psi_v$ (см. [4], [5]). Оказывается, что коцепи $\varphi_{u_1} \ldots \varphi_{u_l} \psi_{v_1} \ldots \psi_{v_m}$ с $1 \leqslant u_1 < \ldots < u_l \leqslant n$, $1 \leqslant v_1 \leqslant \ldots \leqslant v_m \leqslant n$, $u_1 \leqslant v_1$, $v_1 + \ldots + v_m \leqslant n$, $u_1 + v_1 + \ldots + v_m > n$ являются коциклами, и когомологические классы $c_{u_1 \ldots u_l; v_1 \ldots v_m}$ этих коциклов составляют (аддитивный) базис пространства $H^*(W_n; \mathbf{k})$.

Через $f_1, \ldots, f_n$ ниже обозначаются естественные мультипликативные образующие алгебры $H^*(\mathfrak{gl}(n); \mathbf{k})$ $[\dim f_i = 2i - 1]$.

Теорема III.

$$\operatorname{var} C_{u_1\ldots u_l;\, v_1\ldots v_m} = \begin{cases} 0 & \textit{при } u_1+v_1+\ldots+v_m > n+1, \\ x_{u_1v_1\ldots v_m}\otimes f_{u_2}\ldots f_{u_l} & \textit{при } u_1+v_1+\ldots+v_m = n+1. \end{cases}$$

Доказательство. Поскольку класс $x_{u_1v_1\ldots v_m}\otimes f_{u_2}\ldots f_{u_l}$ представляется коциклом $\varphi_{u_2}\ldots\varphi_{u_l}\xi_{u_1v_1\ldots v_m}$, достаточно показать, что

$$\operatorname{var} C_{v_0;\, v_1\ldots v_m} = \begin{cases} 0 & \text{при } v_0+v_1+\ldots+v_m > n+1, \\ x_{v_0v_1\ldots v_m} & \text{при } v_0+v_1+\ldots+v_m = n+1. \end{cases}$$

Рассмотрим коцепь $\varphi_{v_0}\psi_{v_1}\ldots\psi_{v_m}$ в $C^*(W_N;\mathbf{k})$, где $N\gg n$. Эта коцепь уже не является коциклом: ее дифференциал равен $\psi_{v_0}\psi_{v_1}\ldots\psi_{v_m}$. Легко усмотреть, что коцепной гомоморфизм $C^*(W_N;\mathbf{k})\to C^*(W_N;W_N')$ переводит $\psi_{v_0}\psi_{v_1}\ldots\psi_{v_m}$ в

$$\sum_{i=0}^{m} v_i\psi_{v_0}\ldots\widehat{\psi}_{v_i}\ldots\psi_{v_m}(\rho^{00}_{0v_i-1}-\sigma^1_{v_i-1}) \tag{4}$$

и, следовательно, переводит $\varphi_{v_0}\psi_{v_1}\ldots\psi_{v_m}$ в некоторую $\mathfrak{gl}(n)$-инвариантную коцепь, дифференциал которой равен (4). Инвариантной коцепью с дифференциалом (4) является

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{v_i}v_i\psi_{v_0}\ldots\widehat{\psi}_{v_1}\ldots\psi_{v_m}\sigma^0_{v_i-1}. \tag{5}$$

Следовательно, гомоморфизм $C^*(W_N;\mathbf{k})\to C^*(W_N;W_N')$ переводит коцепь $\varphi_{v_0}\psi_{v_1}\ldots\psi_{v_m}$ в сумму коцепи (5) и некоторого инвариантного коцикла. Поскольку N велико, последний есть дифференциал некоторой инвариантной коцепи, $\omega\in C^*(W_N;W_N')$. Коцепь ω единственным образом (N велико!) записывается через скалярные произведения (α_μ,β_ν) (см. п. 1.4). Пусть ω_n — коцепь из $C^*(W_n;W_n')$, записываемая через эти скалярные произведения так же, как ω; тогда образ $\varphi_{v_0}\psi_{v_1}\ldots\psi_{v_m}\in C^*(W_n;\mathbf{k})$ при гомоморфизме $C^*(W_n;\mathbf{k})\to C^*(W_n;W_n')$ есть

$$\sum(-1)^{v_i}v_i\psi_{v_0}\ldots\widehat{\psi}_{v_i}\ldots\psi_{v_m}\sigma^1_{v_i-1}+d\omega_n,$$

т. е. $\xi_{v_0\ldots v_m}+d\omega_n$ при $v_0+\ldots+v_m=n+1$ и $d\omega_n$ при $v_0+\ldots$ $\ldots+v_m>n+1$. Теорема доказана.

Следствие. *Последовательность*

$$H^*(W_{n+1};\mathbf{k})\to H^*(W_n;\mathbf{k})\xrightarrow{\operatorname{var}}H^*(W_n;W_n'),$$

в которой первый гомоморфизм индуцирован включением $W_n\to W_{n+1}$, *точна.*

2.4. Гомоморфизм var: $H^{q+1}(W_n,\mathfrak{o}_n;\mathbf{k})\to H^q(W_n,\mathfrak{o}_n;W_n')$ определяется дословно так же, как его абсолютный аналог из п. 2.1. Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} H^{q+1}(W_n,\mathfrak{o}_n;\mathbf{k}) & \xrightarrow{\operatorname{var}} & H^q(W_n,\mathfrak{o}_n;W_n') \\ \downarrow & & \downarrow \\ H^{q+1}(W_n;\mathbf{k}) & \xrightarrow{\operatorname{var}} & H^q(W_n;W_n'), \end{array}$$

вертикальные стрелки которой индуцированы включениями комплексов.

Из теоремы I, II следует, что правый вертикальный гомоморфизм является мономорфизмом, благодаря чему диаграмма дает полное описание верхнего гомоморфизма var через нижний. Мы ограничимся формулировкой относительного варианта следствия из теоремы III.

Последовательность

$$H^*(W_{n+1}, \mathfrak{o}_{n+1}; \mathbf{k}) \to H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{k}) \xrightarrow{\text{var}} H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; W_n'),$$

в которой первый гомоморфизм индуцирован включением, точна.

§ 3. Когомологии алгебры Ли $\hat{W}_n$

3.1. Положим $\hat{W}_n = W_n \otimes (\mathbf{k}[t] / t^2 \mathbf{k}[t])$. Как и в случае $\mathbf{k} = \mathbf{R}$ (см. п. 0.3), $\hat{W}_n$ есть алгебра Ли; как и в случае $\mathbf{k} = \mathbf{R}$, ее элементы записываются в виде $\xi + t\eta$ с $\xi, \eta \in W_n$. Алгебра W_n естественно вкладывается в $\hat{W}_n$ ($\xi \mapsto \xi + t0$), и формула $\xi + t\eta \mapsto \xi$ определяет ретракцию $\hat{W}_n \to W_n$.

Определим $\gamma_s : C^{q-s}(W_n; \Lambda^s W_n') \to C^q(\hat{W}_n; \mathbf{k})$ формулой

$$(\gamma_s L)(\xi_1 + t\eta_1, \ldots, \xi_q + t\eta_q) =$$
$$= \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant q} (-1)^{i_1 + \ldots + i_s - s(s+1)/2} [L(\xi_1, \ldots \hat{\xi}_{i_1} \ldots \hat{\xi}_{i_s} \ldots, \xi_q)](\xi_{i_1} \wedge \ldots \wedge \xi_{i_s}).$$

Гомоморфизмы γ_s, очевидно, перестановочны с дифференциалом и определяют некоторые гомоморфизмы $g_s : H^{q-s}(W_n; \Lambda^s W_n') \to H^q(\hat{W}_n; \mathbf{k})$. Сумма гомоморфизмов g_s дает гомоморфизм

$$g = \bigoplus_s H^{q-s}(W_n; \Lambda^s W_n') \to H^q(\hat{W}_n; \mathbf{k}).$$

П р е д л о ж е н и е 5. *Гомоморфизм g является изоморфизмом.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обратной к g является сумма гомоморфизмов $H^q(\hat{W}_n; \mathbf{k}) \to H^{q-s}(W_n; \Lambda^s W_n')$, индуцированных гомоморфизмами $\beta_s : C^q(\hat{W}_n; \mathbf{k}) \to C^{q-s}(W_n; \Lambda^s W_n')$, определяемыми формулой

$$[(\beta_s L)(\xi_1, \ldots, \xi_{q-s})](\eta_1 \wedge \ldots \wedge \eta_s) = L(\xi_1, \ldots, \xi_{q-s}, t\eta_1, \ldots, t\eta_s).$$

Так как $\Lambda^* W_n'$ — кольцо (с обычным внешним умножением), то и $H^*(\hat{W}_n; \Lambda^* W_n')$ — кольцо. Очевидным дополнением к предложению 5 служит следующее

П р е д л о ж е н и е 6. *Изоморфизм $H^*(\hat{W}_n; \Lambda^* W_n') \to H^*(\hat{W}_n; \mathbf{k})$, определяемый изоморфизмами из предложения* 5, *является кольцевым.*

Предложение 5 интерпретирует вычисления § 1 как частичное вычисление кольца $H^*(\hat{W}_n; \mathbf{k})$. Полным вычислением этого кольца мы пока не располагаем. Ограничимся замечанием, что, как показывает несложный подсчет, $H^q(\hat{W}_1; \mathbf{k}) = H^q(W_1; \mathbf{k}) \oplus H^{q-1}(W_1; W_1')$.

3.2. Определим еще гомоморфизм $\delta : C^q(W_n; \mathbf{k}) \to C^q(\hat{W}_n; \mathbf{k})$ формулой

$$\delta L(\xi_1 + t\eta_1, \ldots, \xi_q + t\eta_q) = \sum_{i=1}^{q} L(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \eta_i, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_q).$$

Этот гомоморфизм также перестановочен с дифференциалом и определяет некоторый гомоморфизм

$$\text{var} : H^q(W_n; \mathbf{k}) \to H^q(\hat{W}_n; \mathbf{k}).$$

Это обозначение мотивируется тем, что, как легко проверить, диаграмма

$$\begin{tikzcd} & H^{q-1}(W_n;\, W_n') \arrow[dd, "g_1"] \\ H^q(W_n;\, \mathbf{k}) \arrow[ur, "\mathrm{var}"] \arrow[dr, "\mathrm{var}"'] & \\ & H^q(\widehat{W}_n;\, \mathbf{k}) \end{tikzcd}$$

коммутативна.

3.3. Вместе с W_n подалгеброй алгебры $\widehat{W}_n$ является и $\mathfrak{o}_n$. Дословное повторение сказанного в предыдущей части параграфа дает изоморфизмы

$$\bigoplus_s H^{q-s}(W_n,\ \mathfrak{o}_n;\ \Delta^s W_n') \to H^q(\widehat{W}_n,\ \mathfrak{o}_n;\mathbf{k}),$$

составляющие кольцевой изоморфизм $H^*(W_n, \mathfrak{o}_n;\ \Lambda^* W'_n) \to H^*(\widehat{W}_n; \mathbf{k})$, и гомоморфизм $\mathrm{var}: H^q(W_n,\ \mathfrak{o}_n;\mathbf{k}) \to H^q(\widehat{W}_n,\ \mathfrak{o}_n;\mathbf{k})$ с коммутативной диаграммой

$$\begin{tikzcd} & H^{q-1}(W_n,\ \mathfrak{o}_n;\, W_n') \arrow[dd, "g_1"] \\ H^q(W_n,\ \mathfrak{o}_n;\, \mathbf{k}) \arrow[ur, "\mathrm{var}"] \arrow[dr, "\mathrm{var}"'] & \\ & H^q(\widehat{W}_n,\ \mathfrak{o}_n;\, \mathbf{k}). \end{tikzcd}$$

§ 4. Характеристические классы вариаций слоений

4.1. Интерпретация элементов колец $H^*(\widehat{W}_n; \mathbf{R})$ и $H^*(\widehat{W}_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{R})$ как характеристических классов вариаций слоений почти дословно повторяет известную интерпретацию элементов колец $H^*(W_n; \mathbf{R})$ и $H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{R})$ как характеристических классов слоений (см., например, [2]). Поэтому мы излагаем эту интерпретацию бегло.

Мы ограничиваемся неособыми слоениями на гладких многообразиях, поскольку с гомотопической точки зрения это — общий случай.

Пусть F — ориентированное слоение класса C^∞ коразмерности n на гладком многообразии X. Под *деформацией* этого слоения понимается C^∞-слоение коразмерности $n+1$ на $X \times \mathbf{R}$, слои которого лежат в множествах вида $X \times t$ и пересечение которого с $X \times 0$ совпадает с F (при естественном отождествлении $X = X \times 0$). Две деформации называются касающимися одна другой, если в каждой точке множества $X \times 0 \subset X \times \mathbf{R}$ 1-струи этих деформаций совпадают. Класс касающихся деформаций слоения F называется *вариацией* слоения F.

Пусть Φ — вариация слоения F. Фиксируем деформацию φ, представляющую вариацию Φ, и обозначим через $S(\varphi)$ многообразие ∞-струй субмерсий $X \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n+1}$ с истоком, лежащим в множестве $X \times 0$, и устьем $0 \in \mathbf{R}^{n+1}$, постоянных на слоях слоения φ, согласованных с ориентацией этого слоения и таких, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \times \mathbf{R} \arrow[r] \arrow[dr, "\text{проекция}"'] & \mathbf{R}^{n+1} \arrow[d, "(x_1, \dots, x_{n+1}) \mapsto x_{n+1}"] \\ & \mathbf{R} \end{tikzcd}$$

коммутативна. Далее, назовем элементы $\xi, \eta \in S(\varphi)$ касающимися, если совпадают: (i) сужения $\xi|_{X\times 0}$, $\eta|_{X\times 0}$; (ii) определяемые ξ, η 2-струи субмерсий $X \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^{n+1}$. Отождествляя касающиеся элементы многообразия $S(\varphi)$, мы получаем новое многообразие; последнее в очевидном смысле определяется вариацией Φ, и мы обозначаем его через $S(\Phi)$.

Для S (Ф) имеют смысл обычные дифференциальные понятия, в частности, касательные пространства и комплекс де Рама; гомологии комплекса де Рама совпадают с когомологиями многообразия S (Ф). Заметим, что естественная проекция многообразия S (Ф) на многообразие касательных n-реперов к $X \times 0$, нормальных к слоению и согласованных с ориентацией последнего, является гомотопической эквивалентностью. Кроме того, на S (Ф) свободно действует группа $SO(n)$ (как группа движений пространства $\mathbf{R}^{n+1}$, неподвижных на оси x_{n+1}), и фактор-пространство S (Ф) / $SO(n)$ естественно гомотопически эквивалентно X.

Обычная в теории характеристических классов слоений конструкция определяет канонический эпиморфизм касательного пространства $T_\xi S$ (Ф) в произвольной точке $\xi \in S$ (Ф) на $\hat{W}_n = W_n \otimes (\mathbf{R}[t]/t^2\mathbf{R}[t])$. Именно, фиксируем гладкую кривую на S (Ф) с началом ξ, касающуюся предложенного вектора из $T_\xi S$ (Ф). Эта кривая представляется как однопараметрическое семейство субмерсий φ_t некоторого открытого множества $U \subset X \times I$ в $\mathbf{R}^{n+1}$. Далее, эти субмерсии получаются из одной (φ_0) компонированием с диффеоморфизмами $\rho_t : \mathbf{R}^{n+1} \to \mathbf{R}^{n+1}$, не меняющими последнюю координату и гладко зависящими от t. Семейство ρ_t определяет гладкое векторное поле в $\mathbf{R}^{n+1}$ с нулевой ($n+1$)-й составляющей, а произвол конструкции делает его определенным лишь с точностью до прибавления плоского векторного поля и векторного поля, делящегося на квадрат последней координаты, т. е. как элемент алгебры $\hat{W}_n$.

Построенный гомоморфизм $T_\xi S$ (Ф) $\to \hat{W}_n$ определяет гомоморфизм $\Lambda^q(\hat{W}_n') \to \Lambda^q(T_\xi S(\Phi))'$ и, поскольку последний определен при любом ξ, —гомоморфизм

$$C^*(\hat{W}_n;\ \mathbf{R}) \to \Omega^*(S(\Phi)), \tag{6}$$

где Ω^* обозначает комплекс де Рама. Гомоморфизм (6) перестановочен с действием группы $SO(n)$ и с дифференциалом, и потому он определяет гомоморфизмы

$$C^*(\hat{W}_n, \mathfrak{o}_n;\ \mathbf{R}) \to \Omega^*(S(\Phi)/SO(n)),$$

$$H^*(\hat{W}_n;\ \mathbf{R}) \to H^*(S(\Phi);\ \mathbf{R}), \tag{7}$$

$$H^*(\hat{W}_n, \mathfrak{o}_n;\ \mathbf{R}) \to H^*(S(\Phi)/SO(n);\ \mathbf{R}) = H^*(X;\ \mathbf{R}), \tag{8}$$

а если нормальное расслоение к слоению F тривиализовано, то имеется сечение $X \to S$ (Ф), определяющее гомоморфизм $H^*(S(\Phi);\ \mathbf{R}) \to H^*(X;\ \mathbf{R})$, композиция которого с (7) дает гомоморфизм

$$H^*(\hat{W}_n;\ \mathbf{R}) \to H^*(X;\ \mathbf{R}). \tag{9}$$

Гомоморфизмы (8) и (9) и позволяют интерпретировать элементы кольца $H^*(\hat{W}_n, \mathfrak{o}_n;\ \mathbf{R})$ как характеристические классы вариаций слоений, а элементы кольца $H^*(\hat{W}_n;\ \mathbf{R})$ — как характеристические классы вариаций слоений с тривиализованным нормальным расслоением.

4.2. Пусть F — гладкое слоение коразмерности n на X и φ — его деформация. Обозначим через F_t ($t \in \mathbf{R}$) слоение на X, определяемое слоением φ при отождествлении $X = X \times t$, и через Ф определяемую φ вариацию слоения F. Слоение F_t определяет некоторый гомоморфизм

$$\alpha_t : H^*(W_n, \mathfrak{o}_n;\ \mathbf{R}) \to H^*(X;\ \mathbf{R}),$$

а вариация Ф в силу конструкции 4.1 определяет некоторый гомоморфизм

$$\beta : H^*(\hat{W}_n, \mathfrak{o}_n;\ \mathbf{R}) \to H^*(X;\ \mathbf{R}),$$

и ясно, что диаграммы

$$\begin{tikzcd} H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{R}) \arrow[dr, "\alpha_0"] \arrow[dd, "\text{включение}"'] & \\ & H^*(X; \mathbf{R}), \\ H^*(\widehat{W}_n, \mathfrak{o}_n \mathbf{R}) \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{R}) \arrow[dr, "\left.\frac{\partial\alpha}{\partial t}\right|_{t=0}"] \arrow[dd, "\text{var}"'] & \\ & H^*(X; \mathbf{R}) \\ H^*(\widehat{W}_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{R}) \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

коммутативны. Если нормальное расслоение слоения F тривиализовано, то то же верно для когомологий $H^*(W_n; \mathbf{R})$ и $H^*(\widehat{W}_n; \mathbf{R})$ (мы сохраняем в этом случае обозначения α_t и β).

Предложение 7. *Если класс $x \in H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{R})$ лежит в образе гомоморфизма включения $H^*(W_{n+1}, \mathfrak{o}_{n+1}; \mathbf{R}) \to H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{R})$, то $\alpha_t(x)$ не зависит от t. Если нормальное расслоение к слоению F тривиализовано и класс $x \in H^*(W_n; \mathbf{R})$ лежит в образе гомоморфизма включения $H^*(W_{n+1}; \mathbf{R}) \to H^*(W_n; \mathbf{R})$, то $\alpha_t(x)$ не зависит от t.*

Это предложение совпадает с теоремой Хейтша [11]; оно вытекает из следствия теоремы III (п. 2.3) и предложения п. 2.4. Заметим, что совсем простое доказательство теоремы Хейтша имеется в статье Бернштейна — Розенфельда [2].

Предложение 8. *Для любых x, $y \in H^*(W_n, \mathfrak{o}_n; \mathbf{R})$ класс $\alpha_t(x)\left[\frac{\partial\alpha_t(y)}{\partial t}\right]_{t=0}$ равен нулю. Если нормальное расслоение к слоению тривиализовано, то то же верно для любых x, $y \in H^*(W_n; \mathbf{R})$.*

Это следует из теорем I, II и мультипликативности гомоморфизмов (8), (9).

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 10 декабря 1973 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн И. Н., Розенфельд Б. И., О характеристических классах слоений, Функц. анал. 6, вып. 1 (1972), 68—69.
2. Бернштейн И. Н., Розенфельд Б. И., Однородные пространства бесконечномерных алгебр Ли и характеристические классы слоений, УМН **XXVIII**, вып. 4 (1973), 103—138.
3. Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления, М., ИЛ, 1947.
4. Гельфанд И. М., Фукс Д. Б., Когомологии алгебры Ли формальных векторных полей, Изв. АН СССР, серия матем., **34** (1970), 322—337.
5. Годбийон К., Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей, УМН **XXVIII**, вып. 4 (1973), 139—152.
6. Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, М., ИЛ, 1962.
7. Bott R., Haefliger A., On characteristic classes of Γ-foliations, Bull. Amer. Math. Soc. **78**, № 6 (1972), 1039—1044.
8. Bott R., Some remarks on continious cohomology, Symposium «Manifolds», Tokyo, 1973.
9. Godbillon C., Vey J., Un invariant des feuilletages de codimension 1, C. r. Acad. Sci. (Paris) **273**, № 2 (1971), A92—A95.
10. Haefliger A., Homotopy and Integrability, Springer Lecture Notes **197** (1971), 133—163.
11. Heitsch J., On deformations of secondary characteristic classes, Topology **12**, № 4 (1973).
12. Hochschild G., Serre J.-P., Cohomology of Lie algebras, Ann. Math. **57** (1953), 591—603.
13. Thurston W., Non-cobordant foliations of S^3, Bull. Amer. Math. Soc. **78**, № 4 (1972), 511—514.