Ю. М. Воробьев, О линеаризации гамильтононовых систем на пуассоновых многообразиях, Матем. заметки, 2005, том 78, выпуск 3, 323–330

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm2601
О ЛИНЕАРИЗАЦИИ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ НА ПУАССОНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ
Ю. М. Воробьев

Линеаризация гамильтоновой системы на пуассоновом многообразии вдоль данного (сингулярного) симплетического листа определяет некую динамическую систему на нормальном расслоении к листу, которая называется системой в вариациях. Показано, что система в вариациях допускает согласованную гамильтонову структуру, если существует трансверсаль к листу, которая инвариант относительно фазового потока исходной системы. В случае, когда трансверсальная алгебра Ли симплетического листа является полупростой, это условие оказывается также необходимым.

Библиография: 10 названий.

1. Введение. Пусть имеется пуассоново многообразие \((M, \Psi)\) со скобкой Пуассона

\[
\{F, G\}_\Psi = \Psi(dF, dG) = \Psi^{\text{1}}(y) \frac{\partial F}{\partial y^I} \frac{\partial G}{\partial y^J}
\]

(здесь и далее суммирование проводится по повторяющимся индексам). Пусть задана гамильтонова система \((M, \Psi, H)\), соответствующая гамильтонову векторному полю

\[
X_H = \Psi^1 dH = -\Psi^{\text{1}}(y) \frac{\partial H}{\partial y^I} \frac{\partial}{\partial y^I};
\]

здесь \(\Psi^1: T^*M \rightarrow TM\) — морфизм векторных расслоений, индуцированный тензором Пуассона \(\Psi\). В соответствии с общей схемой [1], [2], процедура линеаризации для динамической системы \((M, X_H)\) задает векторное поле \(\text{Var}(X_H)\) на касательном расслоении \(TM\). Динамическая система, соответствующая \(\text{Var}(X_H)\), называется системой в вариациях векторного поля \(X_H\) на \(TM\). В локальных координатах \((y^I, u^J)\) на \(TM\) система в вариациях имеет вид

\[
\dot{y}^I = -\Psi^{\text{1}}(y) \frac{\partial H}{\partial y^I} ;
\]

\[
\dot{u}^J = -(\frac{\partial \Psi^{JS}(y)}{\partial y^I} \frac{\partial H}{\partial y^S} + \Psi^{JS} \frac{\partial^2 H}{\partial y^I \partial y^I}) u^I .
\]

Работа выполнена при частичной поддержке программы CONACYT, грант № 35212-E.
Инвариантное определение векторного поля $\text{Var}(X_H)$ дается с помощью канонической инволюции на $TTM$ [1]. Как известно, система (1.1), (1.2) является гамильтоновой относительно тангенциальной пуассоновой структуры на $TM$ [1].

Наша цель — изучение линеаризованной гамильтоновой динамики на заданном (сингилярном) симплектическом листе. Пусть задан замкнутый симплектический лист $(B, \omega)$ пуассонова многообразия $(M, \Psi)$ с симплектической структурой

$$\omega = \frac{1}{2} \omega_{ij}(\xi) d\xi^i \wedge d\xi^j.$$  \hspace{1cm} (1.3)

Ограничение $X_H$ на $B$ является гамильтоновым векторным полем на $(B, \omega)$,

$$v_f = X_H|_B = \omega^{is}(\xi) \frac{\partial f}{\partial \xi^s},$$

где $f = H|_B$. Пусть $T_B M$ — ограничение касательного расслоения $TM$ на лист $B$. Нормальным расслоением $E = T_B M / TB$ к листу $B$ называется векторное расслоение $\pi: E \to B$ над $B$, слоем которого над $\xi$ является факторпространство $E_\xi = T_\xi M / T_\xi B$.

Пусть $p: T_B M \to E$ — естественная проекция. Так как подмножество Б инвариантно относительно фазового потока поля $X_H$, векторное поле $\text{Var}(X_H)$ имеет два инвариантных подмножества $TB$ и $T_B M$ в $TM$. Можно показать, что векторное поле $\text{Var}(X_H)$ является проектируемым относительно $p$, т.е., на $E$ существует единственное векторное поле $\text{var}_B (X_H)$ такое, что

$$(d_u p) \text{Var}(X_H)(u) = \text{var}_B (X_H)(p(u))$$

для любых $u \in T_\xi M$ и $\xi \in B$. Динамическая система $(E, B, \text{var}_B (X_H))$ называется системой в вариациях поля $X_H$ на $B$. Размерность соответствующего фазового пространства $E$ (тотального пространства нормального расслоения к листу $B$) совпадает с размерностью исходного многообразия, $\dim E = \dim M$. Кроме того, подмножество $B \subset E$ (как нулевое сечение расслоения $E$) инвариантно относительно фазового потока поля $\text{var}_B (X_H)$. Итак, система в вариациях представляет собой естественную линеаризованную модель для исходной гамильтоновой системы $X_H$ на $B$. Нас интересует следующий вопрос: при каких условиях векторное поле $\text{var}_B (X_H)$ является гамильтоновым относительно некоторой пуассоновой структуры на $E$? Эта задача, например, возникает при изучении (нелинейной) гамильтоновой динамики вблизи (сингилярного) симплектического листа в контексте теории возмущений. В общем случае, процедура линеаризации может разрушить свойство гамильтонности векторного поля $\text{var}_B (X_H)$. В симплектическом случае этот эффект изучался в работах [3–5]. В данной статье мы приводим некоторые результаты, касающиеся существования гамильтоновой структуры для $\text{var}_B (X_H)$. В основе этих результатов лежит понятие линеаризованной пуассоновой структуры симплектического листа [6], [7].

2. Существование гамильтоновых структур. Рассмотрим дуальное расслоение $E^* \subset T_B^* M$ к $E$, которое будем называть конормальным расслоением к листу $B$, и которое совпадает с ядром морфизма расслоения $\Psi_B^*: T_B^* M \to T_B M$, $\ker \Psi_B^* = E^*$. Тогда каждый слой расслоения $E^*$ наследует структуру алгебры Ли $[\cdot, \cdot]_{\text{fib}}$, которая однозначно определяется следующим условием: для произвольных функций $k, \tilde{k}$, заданных на $M$ и постоянных вдоль листа $B$, выполняется соотношение $[\eta, \tilde{\eta}]_{\text{fib}} = d([k , \tilde{k}]_{\Psi})|_B$, [6], [7].
где $\eta = dk|_B$, $\bar{\eta} = d\bar{k}|_B$. Расслоение $E^*$ является локально-тривиальным с типичным листом $\mathfrak{g}$, который называется трансверсальной алгеброй Ли симплектического листа $B$. Таким образом, нормальное расслоение пространства $E$ становится локально-тривиальным расслоением Ли–Пуассона над симплектической базой $(B, \omega_B)$. Соответствующая послойная структура Ли–Пуассона индуцирует вертикальный тензор Пуассона $\Lambda$ на $E$, который называется линеаризованной трансверсальной пуассоновой структурой исходного тензора Пуассона $\Psi$ на листе $B$ [8], [9].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Пуассонова структура $\Pi$ на $E$ называется согласованной, если она корректно определена в окрестности нулевого сечения $B$ и удовлетворяет следующим условиям:

(i) $(B, \omega_B)$ является симплектическим листом пуассоновой структуры $\Pi$;
(ii) линеаризованная трансверсальная пуассонова структура бивекторного поля $\Pi$ на $B$ совпадает с $\Lambda$.

Под трансверсалью $\mathcal{L}$ к $B$ мы будем понимать подрасслоение в $T_BM$, являющееся дополнительным к $TB$,

$$T_BM = TB \oplus \mathcal{L}. \quad (2.1)$$

Пусть $\mathrm{Fl}_H^t$ — фазовый поток гамильтонова векторного поля $X_H$. Так как $B \subset E$ — это инвариантное подмногообразие для $X_H$, дифференциал $d \mathrm{Fl}_H^t$ действует на $T_BM$, оставляя $TB$ инвариантным.

ТЕОРЕМА 2.2. Если фазовый поток гамильтонова векторного поля $X_H$ допускает инвариантную трансверсаль $\mathcal{L}$ к $B$,

$$d\mathrm{Fl}_H^t(\mathcal{L}) = \mathcal{L}, \quad (2.2)$$

то система в вариациях $\vartheta_B(X_H)$ поля $X_H$ на $B$ является гамильтоновой относительно некоторой согласованной пуассоновой структуры $\Pi$ на $E$ и некоторой функции $F \in C^\infty(E),$

$$\vartheta_B(X_H) = \Pi^t(dF). \quad (2.3)$$

Ниже для доказательства этой теоремы мы приводим построение согласованной пуассоновой структуры $\Pi$ и функции Гамильтона $F$.

3. Согласованные пуассоновы структуры. Следуя [6], [7], напомним процедуру, которая позволяет, начиная с тройки $(M, \Psi, B)$, построить класс согласованных пуассоновых структур на $E$, параметризованных трансверсальами к $B$.

Имеется естественное расщепление

$$T_BE = TB \oplus E. \quad (3.1)$$

Фиксируем трансверсаль $\mathcal{L}$ к $B$. Ясно, что $\mathcal{L}$ является подрасслоением $T_BE$, которое изоморфно $E$. Ограничение проекции $p$ на слой $\mathcal{L}_x$ дает изоморфизм на $E_x$.

Под экспоненциальным отображением, соответствующим трансверсали $\mathcal{L}$ к $B$, будем понимать диффеоморфизм $f$ из некоторой окрестности подмногообразия $B$ в $E$ на другую окрестность $B$ в $M$, удовлетворяющий следующим условиям:

$$f|_B = \mathrm{id}_B, \quad (d_xf)(e) = p^{-1}(e)$$
для любого \( e \in E_\xi \) и \( \xi \in B \). В частности, \((d_\xi f)(E_\xi) = L_\xi\). Экспоненциальное отображение существует в силу теоремы о трубчатой окрестности.

Рассмотрим поднятие \( f^* \Phi \) исходной пуссонаевой структуры \( \Phi \) при экспоненциальном отображении \( f \). Выберем базис \( \{e_\sigma\} \) локальных сечений \( E^* \). Пусть \( \{e_\sigma\} \) – дуальный базис расслоения \( E \). Рассмотрим координатную систему \( (\xi^i, x^\sigma) \) на \( E \), где \( (\xi^i) \) – координаты вдоль \( B \), а \( \{x^\sigma\} \) – нормальные координаты к \( B \), ассоциированные с базисом \( \{e_\sigma\} \), \( B = \{x = 0\} \). Тогда \( f^* \Phi \) является согласованным тензором Пуассона на \( E \). Соответствующие попарные сокби для координатных функций вблизи \( B \) имеют вид

\[
\begin{align*}
\{\xi^i, \xi^j\} f^* \Phi &= -\omega^{ij} - \omega^{is} R_{smn} \omega^{mj} x^\nu + O_2, \\
\{\xi^i, x^\sigma\} f^* \Phi &= \omega_{ij} \theta^\sigma_{j\nu} x^\nu + O_2, \\
\{x^\alpha, x^\beta\} f^* \Phi &= \lambda^\alpha_{\beta \nu} x^\nu + O_2.
\end{align*}
\] (3.2) (3.3) (3.4)

Здесь \( \omega^{ij}(\xi), \omega_{ij}(\xi) = \delta^i_j \) – коэффициенты симплектической формы (1.3), а \( \lambda^\alpha_{\beta \nu}, \theta^\sigma_{ij}, R_{smn} \) – гладкие функции на \( B \). Символ \( O_k \) обозначает член порядка \( k \) в формальном разложении функции в ряд Тейлора в точке \( x = 0 \). Отметим, что функции \( \lambda^\alpha_{\beta \nu} = \lambda^\alpha_{\beta \nu}(\xi) \) являются структурными константами скобок Ли на слое \( E \) относительно базиса \( \{e_\sigma\} \).

Через \( \Omega^k(B, E) \) будем обозначать пространство векторно-значных \( k \)-форм на \( B \) со значениями в пространстве гладких сечений пространства \( E \). В частности, \( \Omega^0(B, E) = C^\infty(B; E) \) является пространством векторно-значных функций на \( E \). Введем матрично-значную 1-форму \( \theta^\sigma \) и векторно-значную 2-форму \( \mathcal{R} \mathcal{L} = (\mathcal{R}_\sigma) \in \Omega^2(B, E^*) \) с компонентами

\[
\theta^\sigma_\beta = \theta^\sigma_{ij}(\xi) \ d\xi^i, \quad \mathcal{R}_\sigma = \frac{1}{2} \mathcal{R}_{ij\sigma}(\xi) \ d\xi^i \land d\xi^j
\]

относительно базиса \( \{e_\sigma\} \). Можно показать [10], что существует линейная связность \( \nabla \mathcal{L} \) на \( E \), для которой форма связности относительно базиса \( \{e_\sigma\} \) задается в точности 1-формой \( \theta^\sigma \). Важное наблюдение состоит в следующем: параллельный перенос \( \nabla \mathcal{L} \) сохраняет послойную структуру Ли–Пуассона линейной связности \( E \). Кроме того, форма кривизны связности \( \nabla \mathcal{L} \) выражается через \( \mathcal{R} \mathcal{L} \) следующим образом:

\[
\mathrm{Curv} \nabla \mathcal{L} = d\theta^\sigma \land \theta^\sigma \land \theta^\sigma = -\mathrm{ad}^* \circ \mathcal{R} \mathcal{L}.
\]

Здесь \( \mathrm{ad}^* \) – оператор коприсоединенного представления, действующий на слоях расслоения \( E \). Через

\[
\mathrm{hor}_i \overset{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial \xi^i} - \theta^\sigma_{ij}(\xi) x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\sigma}
\] (3.5)

обозначим горизонтальный лифт базисного векторного поля \( \partial/\partial \xi^i, i = 1, \ldots, \dim B \). Также введем скалярную 2-форму \( \mathcal{F} = \frac{1}{2} \mathcal{F}_{ij}(\xi, x) \ d\xi^i \land d\xi^j \) на \( E \) с коэффициентами

\[
\mathcal{F}_{ij}(\xi, x) \overset{\text{def}}{=} \omega_{ij}(\xi) - x^\nu \mathcal{R}_{ij\nu}(\xi).
\] (3.6)

Заметим, что \( \mathcal{F}_{ij}(\xi, 0) = \omega_{ij}(\xi) \) и, следовательно, \( \det[\mathcal{F}_{ij}(\xi, 0)] \neq 0 \ \forall \xi \in B \). Таким образом, 2-форма \( \mathcal{F} \) является невырожденной в открытой области

\[
\mathcal{N} = \{(\xi, x) \in E \mid \det[\mathcal{F}_{ij}(\xi, x)] \neq 0\},
\]
содержащей $B$. Элементы обратной к $[\mathcal{F}_{ij}]$ матрицы обозначим через $\mathcal{F}^{ij} = \mathcal{F}^{ij}(\xi, x)$, $\mathcal{F}^{is}\mathcal{F}_{sj} = \delta^i_j$. Введем бивекторное поле $\Pi_{\mathcal{L}}$ на $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{E}$, ассоциированное с данными $(\nabla \mathcal{L}, \mathcal{H})$, которые задаются соотношением

$$
\Pi_{\mathcal{L}} \overset{\text{def}}{=} -\frac{1}{2} \mathcal{F}^{ij} \text{hor}_i \wedge \text{hor}_j + \Lambda.
$$

(3.7)

Здесь бивекторное поле $\Lambda$ на $\mathcal{E}$ задано соотношением

$$
\Lambda = \frac{1}{2} \lambda_{\nu}^{\alpha\beta}(\xi) x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \wedge \frac{\partial}{\partial x^\beta}
$$

и определяет линеаризованную трансверсальную пулсонову структуру тензорного поля $\Psi$ на $B$.

Предложение 3.1 [8]. Для любой трансверсаль $\mathcal{L}$ векторное поле $\Pi_{\mathcal{L}}$ в (3.7) задает согласованное тензор Пуассона на $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{E}$.

Заметим, что пулсонову структуру $\Pi_{\mathcal{L}}$ не зависит от выбора трансверсаль $\mathcal{L}$ с точностью до изоморфизма в окрестности $B$ (см. [6], [7]). Этот факт ведет к понятию линеаризованной пулсоновой структуры данного симплектического листа $B$.

Пусть задано линейное векторное поле $\mathcal{V}_f$ на $\mathcal{E}$, которое проектируется на гамильтоново векторное поле $v_f$ на $(B, \omega)$, $\mathcal{V}_f = v_f^i(x) \frac{\partial}{\partial x^i} + V^\alpha_{\nu}(\xi) x^\nu \frac{\partial}{\partial x^\alpha}$.

где $V = (V^\alpha_{\nu}(\xi))$ – матрично-значная функция на $B$.

Предложение 3.2. Линейное векторное поле $\mathcal{V}$ является гамильтоновым относительно пулсоновой структуры $\Pi_{\mathcal{L}}$ и послойно линейной функции $F = \pi^* f - \langle x, \eta \rangle$, $\eta \in C^\infty(B, \mathcal{E})$, тогда и только тогда, когда пара $(\eta, V)$ удовлетворяет следующим уравнениям на $B$:

$$
d\eta - (\theta \mathcal{L})^T \eta = -i_{v_f} \mathcal{R}_{\mathcal{L}},
$$

(3.8)

$$
V = -(i_{v_f} \theta \mathcal{L} + \text{ad}^* \circ \eta).
$$

(3.9)

Здесь $i_{v_f}$ обозначает внутреннее произведение векторного поля $v_f$ и дифференциальной формы на $B$.

4. Инвариантные трансверсали и динамическое кручение. Пусть $f$ – экспоненциальное отображение, ассоциированное с трансверсально $\mathcal{L}$. Рассмотрим поднятие пулсоновой структуры $f^* \Psi$ на $E$. Симплектический лист $(B, \omega)$ является также симплектическим листом для $f^* \Psi$, что нормальное расслоение отождествляется с $E$. Разлагая гамильтонову систему $(E, f^* \Psi, f^* H = H \circ f)$ в ряд Тейлора в точке $x = 0$ и используя соотношения (3.2)–(3.4), получаем

$$
\frac{d\xi^i}{dt} = \omega^{is}(\xi) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi^s} + \gamma^i_s(\xi) x^\nu + O_2,
$$

(4.1)

$$
\frac{dx^\sigma}{dt} = \left[\lambda_{\nu}^{\alpha\beta}(\xi) \eta_{\beta}(\xi) - \theta_{ij}^\nu(\xi) \omega^{js}(\xi) \frac{\partial f(\xi)}{\partial \xi^s} \right] x^\nu + O_2.
$$

(4.2)
Здесь \( f(\xi) = f^*H(\xi, 0) \) и
\[
\eta_\nu(\xi) = -\frac{\partial (f^*H)}{\partial x^\nu}(\xi, 0),
\]
(4.3)
а гладкие функции \( \Upsilon^i_\nu \) на \( B \) заданы соотношениями
\[
\Upsilon^i_\nu = -\omega^{ij} \frac{\partial \eta^j}{\partial \xi^i} + \omega^{ij} \theta^\alpha_{\mu j} \eta_\alpha + \omega^{is} \bar{R}_{sm\nu} \omega^{mj} \frac{\partial f}{\partial \xi^i}. 
\]
(4.4)
С помощью функций \( \eta_\nu \) определим вектор-функцию функции \( \eta^L = \eta_\nu(\xi) \otimes e^\nu(\xi) \) на \( B \) (глобальное сечение расслоения \( E^* \)). Кроме того, можно показать, что \( \Upsilon^i_\nu \) задают векторное поле
\[
\Upsilon^L = \Upsilon^i_\nu(\xi) x^\nu \frac{\partial}{\partial \xi^i}
\]
на \( E \), которое можно назвать \( \text{kручением} \) фазового потока поля \( X_{f^*H} \) относительно разложения (2.1). Зануление кручения \( \Upsilon^L = 0 \) имеет следующую интерпретацию: трансверсальный инвариант относительно \( d\tilde{F}^t_{f^*H} \). Ниже мы увидим, что \( \eta^L \) и \( \Upsilon^L \) зависят от выбора \( L \).

Теперь из соотношения (4.2) следует, что система в вариациях гамильтонова векторного поля \( X_{f^*H} \) на \( B \) имеет вид
\[
\frac{d\xi}{dt} = v_f,
\]
(4.5)
\[
\frac{dx}{dt} = -(ad^*_\eta + i_{v_f} \theta)x.
\]
(4.6)
Соответственно, векторное поле можно представить в виде
\[
\text{var}_B(X_{f^*H}) = \text{hor}_{v_f} - \left< \text{ad}^*_\eta x, \frac{\partial}{\partial x} \right>.
\]
(4.7)
Здесь \( \text{hor}_{v_f} \) является горизонтальным лифтом гамильтонова векторного поля \( v_f \) относительно связности \( \nabla L \).

Теперь рассмотрим две трансверсали \( L \) и \( \tilde{L} \) к \( B \). Пусть \( l: T_B M \to \tilde{L} - \text{проекция вдоль} \ T_B \) в соответствии с разложением (3.1). Заведомо базис \( \{ n_\sigma \} \) (локальных) сечений расслоения \( L \), можно ввести базис \( \{ \tilde{n}_\sigma \} \) сечений расслоения \( \tilde{L} \) в виде \( \tilde{n}_\sigma(\xi) = l_\xi(n_\sigma(\xi)) \). Тогда имеем
\[
\tilde{n}_\sigma(\xi) = n_\sigma + u_\sigma(\xi),
\]
(4.8)
где \( u_\sigma \) - некоторые векторные поля на \( B \), \( u_\sigma(\xi) \in T_\xi B \). Используя эти векторные поля \( \text{и симплектическую} \ 2\text{-форму} \ \omega \) на \( B \), определим векторно-значную 1-форму \( \varrho \in \Omega^1(B, E^*) \) следующим образом:
\[
\varrho := -(i_{u_\sigma}) \otimes e^\nu,
\]
(4.9)
или, в координатном виде, как \( \varrho_{ij} = \omega_{ij} u^j \). Так как \( \omega \) невырожденная форма, при фиксированном \( L \) формула (4.9) заменяет однозначное соответствие между множеством всех
трансверсалей к B и пространством $\Omega^1(B, \mathfrak{e}^*)$ векторно-значных 1-форм на B. Непосредственные вычисления показывают, что данные, соответствующие $\mathcal{L}$ и $\tilde{\mathcal{L}}$, удовлетворяют соотношениям

$$\nabla^{\tilde{\mathcal{L}}} = \nabla^{\mathcal{L}} - ad^* \vartheta,$$

$$\mathcal{R}^{\tilde{\mathcal{L}}} = \mathcal{R}^{\mathcal{L}} + (\nabla^{\mathcal{L}})^* g^{\mathcal{L}} + \frac{1}{2} [g^{\mathcal{L}} \wedge g^{\mathcal{L}}].$$

(4.10)

(4.11)

Кроме того,

$$\eta^{\tilde{\mathcal{L}}} = \eta^{\mathcal{L}} - L_u f.$$  

(4.12)

Из этих соотношений вытекает следующее утверждение.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.1.** Система в вариациях, соответствующая гамильтоновой системе $X_{\mathfrak{g}^* H}$ не зависит от выбора экспоненциального отображения f,

$$\text{var}_B(X_{\mathfrak{g}^* H}) = \text{var}_B(X_H).$$

Сравнивая (3.8) и (4.7) с (4.4), мы видим, что условие $\Gamma^{\mathcal{L}} = 0$ эквивалентно уравнениям (3.8), (3.9) для $\eta^{\mathcal{L}}$ в (4.3). Таким образом, из предложения 3.2 следует основной результат нашей статьи.

**ТЕОРЕМА 4.2.** Пусть существует трансверсальный $\mathcal{L}$, которая инвариантна относительно $d \Phi_{\mathfrak{g}^* H}$. Пусть $\Pi^{\mathcal{L}}$ - соответствующая пуссонова структура в (3.7). Тогда векторное поле $\text{var}_B(X_H)$ является гамильтоновым относительно $\Pi^{\mathcal{L}}$ и функции

$$F^{\mathcal{L}}(\xi, x) = f(\xi) - \langle x, \eta^{\mathcal{L}}(\xi) \rangle.$$ 

В частном случае, анализируя уравнения (3.8), (3.9), можно вывести следующий критерий.

**ТЕОРЕМА 4.3.** Если трансверсальная алгебра $\mathfrak{lie}$ и симплектического листа $\mathfrak{g}$ является полуэфильной, то существование $X_H$-инвариантной трансверсаль является необходимым и достаточным условием для того, чтобы система в вариациях $\text{var}_B(X_H)$ была гамильтоновой в классе согласованных гамильтоновых структур на $E$.

С помощью этого критерия можно описать возможные препятствия к существованию гамильтоновой структуры в следующей простой ситуации.

**ПРИМЕР 4.4.** Пусть $B = (a, b) \times S^1$ - двумерный цилиндр с введенной на нем канонической симплектической структурой $\omega = ds \wedge d\tau$, где $s \in (a, b)$ и $\tau (\text{mod} 2\pi)$ - угловая координата на окружности $S^1 = \mathbb{R} / 2\pi \mathbb{Z}$. Рассмотрим циклические пуссоновы скобки на $\mathbb{R}^3$, связанные с алгеброй $\mathfrak{so}(3)$,

$$\{x^1, x^2\} = x^3, \quad \{x^2, x^3\} = x^1, \quad \{x^3, x^1\} = x^2.$$ 

Рассмотрим $M = (a, b) \times S^1 \times \mathbb{R}^3$ как прямое произведение двух пуссоновых многообразий. Ясно, что $B = (a, b) \times S^1$ является симплектическим листом многообразия $M$. Рассмотрим гамильтонову систему на $M$, соответствующую функции

$$H = 1 - \langle x, \phi(s, \tau) \rangle + O_2,$$
где $\phi(s, \tau) = \phi(s, \tau + 2\pi)$ — гладкая вектор функция, $2\pi$-периодическая по $\tau$. Соответствующая система в вариациях гамильтонового поля $X_H$ на листе $B$ имеет вид

$$\dot{s} = 0, \quad \dot{\tau} = 1,$$
$$\frac{dx}{d\tau} = \phi(s, \tau) \times x.$$  

(4.13)

(4.14)

Ясно, что (4.14) представляет собой однопараметрическое семейство периодических линейных систем на $\mathbb{R}^3$. Пусть $M(s)$ — соответствующая матрица монодромии, гладко зависящая от $s$. Тогда можно показать, что система (4.13), (4.14) допускает согласованную гамильтонову структуру тогда и только тогда, когда $M(s)$ удовлетворяет уравнению типа Лакса

$$\frac{dM(s)}{ds} = [M(s), A \circ \mu(s)]$$

для некоторой гладкой вектор-функции $\mu(s)$. Здесь $A \circ \mu(s)$ обозначает $(3 \times 3)$ кососимметричную матрицу векторного произведения на $\mathbb{R}^3$. Отсюда следует, что спектр $M(s)$ не зависит от $s$ (т.е. монодромия обладает свойством изоспектральной деформации). В противном случае, когда рев $M(s)$ меняется вместе с изменением $s$, система (4.13), (4.14) не допускает согласованную гамильтонову структуру.

Автор благодарит М. В. Карасева и Рубена Флореса Эспинозу за полезные обсуждения различных аспектов данной работы.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ