В. П. Маслов, К методу стационарной фазы для континуального интеграла Фейнмана, *ТМФ*, 1970, том 2, номер 1, 30–35

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 2, № 1
январь
1970

К МЕТОДУ СТАЦИОНАРНОЙ ФАЗЫ ДЛЯ КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА ФЕЙНМАНА

В. П. Маслов

Формула, полученная ранее автором при условии, что классические экстремали функционала $\int L dt$ невырождены, переносится на общий случай.

Рассмотрим общий лагранжиан

$$L(\dot{X}, X, t), \ X = X_1, \ \ldots, \ X_n \tag{1}$$

и фейнмановский континуальный интеграл [1]

$$\Phi(x, \xi, t) = \int \exp\left\{\frac{i}{h} \int L(\dot{X}, X, \tau) d\tau\right\} dX(\tau), \tag{2}$$

который берется по всем траекториям, исходящим из точки $\xi = \xi_1, \ldots, \xi_n$ и приходящим в момент $\tau = t$ в точку $x = x_1, \ \ldots, \ x_n$.

Фейнмановский континуальный интеграл как интеграл по траектории еще не обоснован строго математически. Поэтому всякие вычисления с помощью манипуляций с континуальным интегралом Фейнмана с математической точки зрения можно признать лишь как эвристические соображения. Однако именно такие эвристические соображения привели автора к получению квазиклассической асимптотики в целом [2]. Поэтому мы сочли нужным привести их здесь для более общего случая, когда экстремали классической вариации задачи вырождены. В этом случае, так же как и в невырожденном, обнаруживается полная аналогия (с точки зрения теории Морса) с асимптотикой обычного интеграла. Нетрудно заметить при этом в приводимом ниже выводе методологическую связь с теорией Морса (см. [3]).

Все приводимые ниже результаты могут быть получены строго [1)], если принять, что $\Phi(x, \xi, t)$ есть функция Грина для псевдодифференциального по Вейлю оператора

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = H\left(\hat{p}^{\mathrm{II}}, \frac{x^{\mathrm{I}} + x^{\mathrm{III}}}{2}, t\right),$$

[1)] Они легко извлекаются из [4].

где $\hat{p} = -ih\frac{\partial}{\partial x}$, $H(p, x, t)$ — гамильтониан, отвечающий лагранжиану $L(\dot{X}, X, t)$, а римские цифры означают порядок действия операторов $\hat{p}$ и x:

$$H\left(\overset{\text{II}}{\hat{p}}, \frac{x^{\text{I}} + x^{\text{III}}}{2}, t\right)\psi(x, t) =$$
$$= \int e^{\frac{ipx}{h}} dp \int e^{-\frac{ip\xi}{h}} H\left(p, \frac{x+\xi}{2}, t\right)\psi(\xi, t)\, d\xi.$$

Прежде чем приступать к исследованию интеграла (2), рассмотрим для аналогии K-мерный интеграл вида

$$\int e^{\frac{i}{h}F(x)}\Phi(x)\,dx, \quad x = x_1, \ldots, x_N, \tag{3}$$

где $F(x)$, $\Phi(x)$ дважды дифференцируемы, а $\Phi(x)$ сверх того финитна и $\Omega = \operatorname{Supp}\Phi(x)$ — ее носитель. Пусть $x = x^0$ — единственная в Ω стационарная точка $F(x)$:

$$F'(x^0) = 0, \quad F'(x) \neq 0 \quad \text{при} \quad x \neq x^0, \quad x \in \Omega.$$

Мы можем перейти к новым переменам $y = y_1, \ldots, y_N$ с помощью преобразования поворота так, что матрица

$$\left\| \frac{\partial^2 F}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{x=x^0} \tag{4}$$

станет диагональной. Предположим, не уменьшая общности, что при $i \leqslant k$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial y_i^2}\right|_{x=x^0} = 0, \qquad \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y_i^2}\right|_{x=x^0} = 0 \text{ при } i > k. \tag{5}$$

Тогда очевидно, что по методу стационарной фазы можно вычислить асимптотику при $h \to 0$ первых k интегралов по $y_1, \ldots, y_k$ и свести задачу к вычислению $N - k$ интегралов. Нетрудно убедиться, что

$$\int e^{\frac{i}{h}F(x)}\Phi_1(x)\,dx,$$

где $\Phi_1(x) \equiv \Phi(x)$ в окрестности точки $x = x^0$, отличается от (3) на $O(h^\infty)$. Поэтому эти оставшиеся $N - k$ интегралов могут быть взяты по малой окрестности точки $x = x^0$. Таким образом, с помощью метода стационарной фазы для интеграла (3) задача сводится к асимптотике s-кратного интеграла в окрестности стационарной точки, где s — кратность нулевого собственного значения второй вариации $\delta^2 F(x)\,|_{x=x^0}$, т. е. матрицы (4).

Если область Ω такова, что содержит *все* стационарные точки функции $F(x)$, то такой интеграл можно представить в виде суммы интегралов, каждый из которых берется по области, содержащей лишь одну стационарную точку функции $F(x)$, и имеет вид (3). Это делается, как известно, при помощи разбиения единицы по этим областям:

$$\Phi(x) \equiv \Phi(x)\,\Sigma\, e_i(x) = \Sigma\,\Phi_i(x),$$

где $\Phi_i(x)$ — финитные функции с носителями, принадлежащими i-й области. Поэтому ответ дается суммой вкладов от каждой стационарной

точки. Мы покажем, что аналогичная ситуация имеет место и для фейнмановского интеграла (2). В этом случае стационарными точками на множестве траекторий будут экстремали функционала $S=\int L d\tau$:

$$\delta \int L(\dot{x}, x, \tau)\, d\tau = 0,$$

т. е. траектории классической гамильтоновой системы, выходящие из точки ξ и проходящие за время $\tau = t$ через точку x.

Вторая вариация $\delta^2 S$ функционала S является линейным оператором, функционально зависящим от траектории. На классической траектории кратность нулевого собственного значения $\delta^2 S$, как известно, равна дефекту (корангу) матрицы $\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial x_j} \right\|$, где S — действие (значения функционала S на траектории), и поэтому не превосходит n.

Покажем, что асимптотика интеграла (2) выражается через сумму по всем классическим траекториям интегралов ровно той кратности, какова кратность нулевого собственного значения второй вариации функционала $\int L d\tau$ на данной траектории, причем, если экстремаль изолированная, интеграл берется по сколь угодно малой (не зависящей от h) области. В случае, когда вторая вариация $\delta^2 h$ на экстремалях не имеет нулевого собственного значения, т. е. $\det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \xi_j} \right\|$ отличен от нуля для всех экстремалей, проходящих из ξ в x за время t, автором была установлена следующая формула для интеграла (2):

$$\Phi(x, \xi, t) = \sum_j \exp\left(\frac{i\pi}{2} \gamma^j\right) \left(\sqrt{\left| \det \left\| \frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \xi_j} \right\| \right|} \right)^{-1} \exp\left(\frac{i}{h} S^j \right) + O(h), \tag{6}$$

где S^j — значение функционала S на j-й экстремали, γ^j — индекс j-й экстремали [4]. Если лагранжиан удовлетворяет условию Лежандра

$$\left\| \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}_i \partial \dot{x}_j} \right\| > 0,$$

то γ^j есть индекс Морса j-й экстремали, т. е. число отрицательных собственных значений $\delta^2 S^j$. Он равен, как известно, числу нулей $\det \left\| \frac{\partial S}{\partial \xi_i \partial X_j} \right\| (\tau)$ при $0 \leqslant \tau \leqslant t$ с учетом кратностей или сумме дефектов матрицы $\left\| \frac{\partial^2 S}{\partial \xi_i \partial X_j} \right\|$ по всем точкам j-й экстремали. (О других способах вычисления γ^j см. также [4, 5, 6].)

Эта формула получена в общем случае в [4] с помощью канонического оператора [4, 7, 8]. В [2] для частного случая

$$L(\dot{x}, x, t) = \frac{\dot{x}^2}{2} + v(x, t),\ x = x_1, \ldots, x_n,\ \left| \frac{\partial^2 V}{\partial x_i \partial x_j} \right| < C \tag{7}$$

эта формула была получена (говоря на языке континуального интеграла) с помощью сведения континуального интеграла к следующему повторному. Интервал 0, t разбивается на отрезки 0, $t_1, \ldots, t_N$ $(t_N = t)$ такие, что

на отрезке t_i, t_{i+1} из любой точки ξ в любую точку x проходит лишь одна экстремаль функционала S (это оказывается возможным из-за условия (7)) и рассматриваются все кривые $\tilde{X}(\tau)$, проходящие через заданные точки

$$\xi, \xi^1, \ldots, \xi^N \quad (\xi^i = (\xi_1{}^i, \ldots, \xi_n{}^i)), \xi^N = x)$$

в моменты $0, t_1, \ldots, t_N$, соответственно. Тогда очевидно, что

$$\Phi(x, \xi, t) = \int d\xi^1 \ldots d\xi^{N-1} \int \exp\left\{\frac{i}{h} \int L(\dot{\tilde{x}}, \tilde{x}, \tau)\right\} d\tilde{x}(\tau). \tag{8}$$

Поскольку внутренний интеграл имеет лишь одну экстремаль, можно найти его асимптотику по методу Сесиль Моретт [9]. В результате получим

$$\Phi(x, \xi, t) = \iint d\xi^1 \ldots d\xi^{N-1} \exp\left\{\frac{i}{h} \sum_i S(t_i, t_{i+1}, \xi^i, \xi^{i+1})\right\} \times$$
$$\times \left\{\prod_i \sqrt{\left|\det\left\|\frac{\partial^2 S(t_i, t_{i+1}, \xi^i, \xi^{i+1})}{\partial\xi_j^i d\xi_k^{i+1}}\right\|\right|}\right\}^{-1}, \tag{9}$$

где $S(t_i, t_{i+1}, \xi^i, \xi^{i+1})$ — действие вдоль классической траектории, проходящей из точки ξ^i, t_i в точку ξ^{i+1}, t_{i+1}. Этот последний $n \cdot N$-кратный интеграл вычисляется по обычному методу стационарной фазы [2] (см. также [4, «Метод шагов вдоль траектории»]). Возможность применения метода стационарной фазы для интеграла (9) обусловливается отличием от нуля d $\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial x_i \partial \xi_j}\right\|$ на каждой экстремали.

Теперь оставим лишь предположение о том, что все экстремали изолированы. Тогда очевидно, что точку $\tau = t_{N-1}$ можно выбрать так, чтобы она не была фокальной [2] ни для какой экстремали.

Пусть $\xi^k(S^j)$ — точка пересечения плоскости $\xi^k = (\xi_1{}^k, \ldots, \xi_n{}^k)$ с j-й экстремалью и пусть $e_j{}^k(\xi^k)$ — финитная функция, равная 1 в ε-окрестности точки $\xi^k(S^j)$ и 0 вне 2ε-окрестности этой точки. Очевидно, что

$$\Phi(x, \xi, t) = \sum_j \int d\xi^1 \ldots d\xi^{N-1} \prod_k e_j{}^k(\xi^k) \exp\left\{\frac{i}{h} \sum_i S(t_i, t_{i+1}, \xi^i, \xi^{i+1})\right\} \times$$
$$\times \left\{\prod_i \sqrt{\left|\det\left\|\frac{\partial^2 S(t_i, t_{i+1}, \xi^i, \xi^{i+1})}{\partial\xi_\mu{}^i \partial\xi_\nu{}^{+1}}\right\|\right|}\right\}^{-1} + O(h^\infty), \tag{10}$$

поскольку вне 2ε-окрестностей точек $\xi^k(S^j)$, $j = 1, 2, \ldots, k = 1, 2, \ldots$ $\ldots, N-1$, у интеграла (2) нет стационарных точек [3].

В силу выбора точки $t = t_{N-1}$ интеграл

$$\int d\xi^1 \ldots d\xi^{N-2} \prod_k e_j{}^k(\xi^k) \exp\left\{\frac{i}{h} \sum_i S(t_i, t_{i+1}, \xi^i, \xi^{i+1})\right\} \times$$
$$\times \left\{\prod_i \sqrt{\left|\det\left\|\frac{\partial^2 S(t_i, t_{i+1}, \xi^i, \xi^{i+1})}{\partial\xi_\mu{}^i \partial\xi_\nu{}^{i+1}}\right\|\right|}\right\}^{-1} \tag{11}$$

[2] Т. е. $\det\left\|\frac{\partial^2 S}{\partial\xi_i \partial\xi_j^{N-1}}\right\| \neq 0$ при $\tau = t_{N-1}$ на любой экстремали.

[3] Таким образом, в точках $t_1, \ldots, t_{N-1}$ мы ставим 2ε-диафрагмы около экстремалей. Оставшийся интеграл не имеет экстремалей и поэтому пренебрежимо мал при $h \to 0$.

имеет лишь невырожденные стационарные траектории, и к нему может быть применена формула (6). Таким образом, мы приходим к n-кратному интегралу. Переход от такого n-кратного интеграла к интегралу кратности, равной дефекту матрицы $\left\| \frac{\partial^2 S^j}{\partial \xi_i \partial X_k} \right\|$, проделан в [4].

Пусть s — дефект матрицы

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_1 \partial \xi_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 S}{\partial x_n \partial \xi_1} & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 S}{\partial x_n \partial \xi_n} \end{matrix} \right\|$$

на j-й траектории. Это значит, что $n - s$ строк этой матрицы линейно независимы. Без уменьшения общности положим, что это последние $n - s$ строк, так что первые s строк через них выражаются. Перейдем на j-й классической траектории к переменным $p_1, \ldots, p_s, x_{s+1}, \ldots, x_n$, т. е. по первым s переменным совершим преобразование Лежандра. В этом случае, как известно, новое действие

$$\widetilde{S}(p_1, \ldots, p_s, x_{s+1}, \ldots, x_n, \xi, t)$$

выражается через S^j следующим образом:

$$\widetilde{S}^j = S^j - \sum_{i=1}^{s} p_i x_i (p_1, \ldots, p_s, x_{s+1}, \ldots, x_n).$$

Оказывается [4], что

$$Y_s = \det \left\| \begin{matrix} \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial p_1 \partial \xi_1} & \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial p_1 \partial \xi_2} & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial p_s \partial \xi_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x_{s+1} \partial \xi_1} & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial^2 \widetilde{S}}{\partial x_n \partial \xi_n} \end{matrix} \right\| \qquad (12)$$

отличен от нуля.

Окончательный ответ для j-го члена суммы (10) такой же, как и для j-го члена суммы (6), только S^j надо заменить на $\widetilde{S}^j$ и det, стоящий там под знаком корня, на det (12), после чего совершить переход от $p_1, \ldots, p_s$ к $x_1, \ldots, x_s$ с помощью обратного преобразования Фурье (переход от $p_1, \ldots, p_s$ к $x_1, \ldots, x_s$ представлению). При этом интеграл по $dp_1, \ldots, dp_s$ можно брать лишь по окрестности [4] точки $p_1, \ldots, p_s$ — значений первых s компонент импульса в момент t для j-й траектории.

Московский государственный университет

Поступила в редакцию 16 июля 1969 г.

[4] Более точная оценка получится, если подынтегральное выражение умножить на финитную функцию, равную 1 в ε-окрестности точки $p_1, \ldots, p_s$ и нулю вне 2ε-окрестности этой точки.

Литература

[1] Р. Фейнман. Пространственно-временной подход к нерелятивистской квантовой механике. В сб.: «Вопросы причинности в кантовой механике», ИЛ, 1955.
[2] В. П. Маслов. ЖВМ и МФ, 1, 638, 1961.
[3] Г. Зейферт, В. Трельфалль. Вариационное исчисление в целом, ИЛ, 1947.
[4] В. П. Маслов. Теория возмущений и асимптотические методы, МГУ, 1965.
[5] В. И. Арнольд. Функциональный анализ, I, 1967, 1—16.
[6] Д. Б. Фукс. ДАН СССР, 178, 303, 1968.
[7] В. С. Буслаев. ДАН СССР, 184, 59, 1969.
[8] В. Л. Дубнов, ДАН СССР, 183, 754, 1968.
[9] Cecile Morette. Phys. Rev., 81, 848, 1951.

ON THE STATIONARY PHASE METHOD FOR FEYNMAN'S CONTINUAL INTEGRAL

V. P. Maslov

The formula obtained earlier by the author under condition that classical paths are not degenerate, is generalized.