А. Л. Розенберг, Инвариантные алгебры на компактных группах, *Матем. сб.*, 1970, том 81(123), номер 2, 176–184

УДК 519.46

Инвариантные алгебры на компактных группах

А. Л. Розенберг (Москва)

1. Пусть G — компактная группа, $C(G)$ — алгебра всех комплексных непрерывных функций на G, A — замкнутая подалгебра алгебры $C(G)$. Обозначим через $A^{\perp}$ вещественный аннулятор алгебры A, т. е. линейное пространство вещественных борелевских мер, ортогональных к алгебре A. Будем считать, что пространство $A^{\perp}$ наделено топологией, индуцированной сильной топологией в пространстве всех борелевских мер на G.

Алгебра A называется однородной, если для всякой пары $(g', g'') \in G \times G$ и для всякой функции $f(x) \in A$ функция $f_1(x) = f(g' x g'')$ также принадлежит A. Нетрудно видеть, что условие однородности равносильно инвариантности A относительно свертки с функциями из алгебры $C(G)$ справа и слева. Обозначим через $\hat{G}$ множество всех характеров неприводимых представлений группы G.

Пользуясь соотношениями ортогональности для матричных элементов неприводимых унитарных представлений, легко показать (см. п. 2), что алгебра A — минимальное однородное замкнутое подпространство $C(G)$, натянутое на семейство характеров $A \cap \hat{G}$. Таким образом, все результаты об однородных алгебрах можно формулировать как теоремы о семействах неприводимых представлений группы G, подчиненных некоторым условиям (см. лемму 2 в п. 2). В работе [1] Ридер показал, что если на группе G существует однородная антисимметрическая алгебра такая, что $A^{\perp} = \{0\}$, то группа G коммутативна и связна.

Главный результат настоящей заметки — описание однородных антисимметрических алгебр на компактной группе Ли (теорема 1 из п. 2). В п. 3 утверждения п. 2 переносятся на произвольные компактные группы.

П. 4 посвящен исследованию аннулятора $A^{\perp}$ однородной антисимметрической алгебры A. Доказано, в частности, следующее обобщение теоремы Ридера: если пространство $A^{\perp}$ сепарабельно, то связная компонента единицы группы G коммутативна. Усилить этот результат нельзя.

В п. 5 исследуются произвольные (т. е. не обязательно антисимметричные) однородные алгебры.

2. Теорема 1 (основная). *Пусть G — компактная группа Ли, G_0 — связная компонента единицы e группы G, G_k — связная компонента единицы центра группы G_0.*

Однородная алгебра A на G антисимметрична тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

а) *для всякой функции* $f \in A$ *и всякого элемента* $g \in G$

$$\int_{G_0} f(gx)\,dx = \int_{G_0} f(x)\,dx, \tag{1}$$

где dx — *мера Хаара на* G;

б) *если* $\chi \in A|_{G_0} \cap \hat{G}_0$ *и* $\chi \not\equiv 1$, *то* $\chi|_{G_k} \not\equiv \chi(e)$;

в) *алгебра* $A|_{G_k}$ *антисимметрична.*

Для доказательства этой теоремы потребуется несколько лемм.

Лемма 1. *Пусть* $\chi \in \hat{G}$, $\chi \not\equiv 1$, *и существует такое целое* $n > 1$, *что*

$$\int_G \chi^n(g)\,dg \neq 0. \tag{2}$$

Тогда, если однородная алгебра A *антисимметрична, то* $\chi \notin A$.

Доказательство. Соотношение (2) означает, что коэффициент функции $\chi^{n-1}(g)$ при $\overline{\chi}(g)$ в разложении по характерам (см. [2]) не равен 0. Из однородности алгебры A следует, что если $\chi \in A$, то и $\overline{\chi} \in A$, что противоречит антисимметричности алгебры A.

Лемма 2. *Замкнутое подпространство* $L \subset C(G)$, *инвариантное относительно сдвигов справа и слева, — однородная алгебра тогда и только тогда, когда для любых двух характеров* χ, $\chi' \in L \cap \hat{G}$ *имеем* $\chi \cdot \chi' \in L$.

Доказательство. Нужно показать, что можно перемножить произвольные два матричных элемента из L. Пусть $t_{ik}(x)$, $t'_{jl}(x)$ — некоторые матричные элементы соответственно представлений T и T'. Тогда $t_{ik} \cdot t'_{jl}$ — матричный элемент тензорного произведения $T \otimes T'$. Заметим, что если $\chi(x) = \operatorname{Sp} T(x)$ и $\chi'(x) = \operatorname{Sp} T'(x)$, то $(\chi \cdot \chi')(x) = \operatorname{Sp}(T \otimes T')(x)$, т. е. L вместе с χ и χ' содержит (см. п. 1) все матричные элементы представления $T \otimes T'$. Лемма доказана.

Пусть H — замкнутая инвариантная подгруппа произвольной компактной группы G, $p: G \to G/H$ — канонической гомоморфизм. Обозначим через P_H эпиморфизм пространства $C(G)$ на пространство $C(G/H)$, задаваемый формулой

$$P_H(f)(p(x)) = \int_H f(xh)\,dh, \tag{3}$$

где dh — мера Хаара на H такая, что $\int_H dh = 1$.

Лемма 3. 1) *Если* A — *однородная алгебра на* G, *то* $P_H(A) = \{P_H(f) \mid f \in A\}$ — *однородная алгебра на* G/H;

2) *Если исходная алгебра* A *антисимметрична, то* $P_H(A)$ *также антисимметрична.*

Доказательство. Заметим, что в силу однородности алгебры A $P_H(A)$ можно рассматривать как подпространство A, отождествив $f \in P_H(A)$ с $f \circ p \in A$. Очевидно, что подпространство $P_H(A)$ инвариантно относительно сдвигов справа и слева и замкнуто. Отсюда следует, что $P_H(A)$ натянуто на те и только те $\chi \in A \cap \hat{G}$, для которых $\chi(h) = \chi(e)$ для всех $h \in H$. Ясно, что $P_H(A)$ удовлетворяет условиям леммы 2.

Второе утверждение леммы получается само собой.

Лемма 4. *Пусть G — компактная полупростая связная группа Ли; $\chi \in \hat{G}$. Тогда найдется такое целое $n > 1$, что*

$$\int_G \chi^n(g)\,dg \neq 0. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть T — представление, соответствующее характеру χ. Как уже было замечено, $\chi^n(g) = \operatorname{Sp} T^{(n)}(g)$, где $T^{(n)}$ — n-я тензорная степень представления T. Неравенство (2) в точности означает, что в разложении $T^{(n)}$ на неприводимые компоненты содержится единичное представление. Если V — пространство представления T, то n-ю тензорную степень V можно понимать как пространство всех n-линейных форм ω на V, в котором представление $T^{(n)}$ действует по правилу:

$$(T^{(n)}(g)\,\omega)(v_1, \ldots, v_n) = \omega(T(g)v_1, \ldots, T(g)v_n). \tag{4}$$

Наличие единичного представления в разложении $T^{(n)}$ на неприводимые представления означает, что существует n-линейная форма $\omega_0 \neq 0$ такая, что $T^{(n)}(g)\,\omega_0 = \omega_0$ для всех $g \in G$. Далее, $\varkappa(g) = \det(T(g))$ — одномерный характер группы G. Так как группа G связна и полупроста, она совпадает с замыканием своего коммутанта, и, следовательно, на G нет нетривиальных одномерных характеров. Итак, $\det(T(g)) \equiv 1$, т. е. $T^{(n)}$ оставляет на месте любую кососимметричную n-линейную форму при $n = \dim T$.

Известно, что всякая компактная связная группа Ли локально изоморфна прямому произведению своей связной полупростой подгруппы G_s и связной компоненты единицы центра G_k, т. е. $G = G_k \cdot G_s$ и $G_k \cap G_s$ — конечная подгруппа.

Лемма 5. *Если G — связная компактная группа Ли, $\chi \in \hat{G}$, то $\varkappa = \frac{1}{\chi(e)}\chi|_{G_k} \in \hat{G}_k$, $\chi|_{G_s} \in \hat{G}_s$ и $\chi(th) = \varkappa(t)\chi(h)$ для всякой пары $(t, h) \in G_k \times G_s$.*

Доказательство. Пусть далее dg, dt, dh — меры Хаара соответственно на G, G_k, G_s такие, что $\int_G dg = \int_{G_k} dt = \int_{G_s} dh = 1$. Заметим, что для любой непрерывной функции f

$$\int_G f(g)\,dg = \int_{G_k}\int_{G_s} f(th)\,dh\,dt. \tag{5}$$

Воспользуемся теперь функциональным уравнением для характеров из $\hat{G}$:

$$\int_G \chi(gg_1g^{-1}g_2)\,dg = \frac{1}{\chi(e)}\chi(g_1)\chi(g_2). \tag{6}$$

Если g_1 принадлежит центру группы G, из (6) получаем

$$\chi(g_1g_2) = \frac{1}{\chi(e)}\chi(g_1)\chi(g_2).$$

Далее, ввиду (5) для всякой пары $(h_1, h_2) \in G_s \times G_s$

$$\int\limits_{G_s} \chi(hh_1h^{-1}h_2)\,dh = \int\limits_{G_k}\int\limits_{G_s} \chi((th)h_1(th)^{-1}h_2)\,dh\,dt =$$
$$= \int\limits_{G} \chi(gh_1g^{-1}h_2)\,dg = \frac{1}{\chi(e)}\chi(h_1)\chi(h_2).$$

Лемма 6. *Пусть G — компактная связная группа Ли, $\chi \in \hat{G}$ и $\chi|_{G_k} \equiv \equiv \chi(e)$. Тогда найдется такое целое $n > 1$, что*

$$\int\limits_{G} \chi^n(g)\,dg \neq 0.$$

Доказательство. Так как $\chi(t) = \chi(e)$ для всех $t \in G_k$, из формулы (5) получаем

$$\int\limits_{G} \chi^n(g)\,dg = \int\limits_{G_s} \chi^n(h)\,dh.$$

Остается только применить лемму 4.

Лемма 7. *Пусть G — произвольная компактная группа, $\chi \in \hat{G}$, $n > 0$ и $m > 0$ — такие целые числа, что $\int\limits_{G} \chi^n(g^m)\,dg \neq 0$. Тогда $\int\limits_{G} \chi^{n+m}(g)\,dg \neq 0$.*

Доказательство. Заметим, что $\chi^n(g^m)$ — сумма некоторых матричных элементов представления $T^{(n+m)}$, где T — представление, соответствующее характеру χ. Далее, при замене представления на эквивалентное интегралы матричных элементов по группе не меняют своих значений. Они могут быть либо нулями, либо единицами. Таким образом, можно считать, что $T^{(n+m)}$ разложено на неприводимые компоненты.

Если интеграл от какого-нибудь матричного элемента неприводимого представления не равен нулю, то это представление — единичное. Итак, доказано неравенство

$$\int\limits_{G} \chi^n(g^m)\,dg \leqslant \int\limits_{G} \chi^{n+m}(g)\,dg.$$

Лемма 8. *Пусть Γ — конечная группа. Всякая однородная антисимметричная алгебра A на Γ состоит из одних констант.*

Доказательство. Пусть $\chi \in \hat{\Gamma}$ и r — порядок группы Γ. Тогда $\chi(\gamma^r) = \chi(e)$ для любого элемента $\gamma \in \Gamma$, и доказательство следует из леммы 7.

Докажем теперь *необходимость* условий а), б) и в) теоремы.

а) Пусть $\Gamma = G/G_0$. Отображение P_{G_0} переводит алгебру A в антисимметричную однородную алгебру $P_{G_0}(A)$, на Γ (по лемме 8) $P_{G_0}(A)$ состоит из одних констант. Из определения P_{G_0} следует, что это и есть утверждение а).

б) Для любых двух функций $f_1, f_2 \in C(G)$ положим $\langle f_1, f_2\rangle_0 = \int\limits_{G_0} f_1(x)\overline{f_2}(x)dx$.

Лемма 9. *Пусть $\chi_0 \in A|_{G_0} \cap \hat{G}_0$. Тогда найдется $\chi \in A \cap \hat{G}$ такой, что $\langle\chi_0, \chi\rangle_0 \neq 0$.*

Доказательство. Пусть $f \in A$ и ψ — такая непрерывная функция на G, что $\psi(x)=0$, если $x \notin G_0$. Тогда $(f*\psi)|_{G_0} = f|_{G_0} * \psi|_{G_0}$. Положим

$$\psi(x) = \begin{cases} \chi_0(x) & \text{для } x \in G_0, \\ 0 & \text{для } x \notin G_0. \end{cases}$$

Пусть $\chi \in A \cap \hat{G}$ и $(\chi * \psi)(t) = \int\limits_{G_0} \chi(x^{-1}t)\psi(x)\,dx = 0$ для всех $t \in G_0$. Это означает, что сужение на G_0 представления T, соответствующего χ, не содержит представления T_0, соответствующего χ_0, т. е. матричные элементы $T|_{G_0}$ и T_0 ортогональны. Так как $\chi(x^{-1}t) = \sum\limits_{i,k} \overline{t_{ki}(x)}\, t_{ki}(t)$, то $(\chi*\psi)(t)=0$ для всех $t \in G$. Пусть $f \in A$ — такая функция, что $f|_{G_0} = \chi_0$. Имеем $(f*\psi)*\chi \equiv \equiv f*(\psi*\chi) \equiv 0$. [Если $\chi \in \hat{G}$ и $\langle \chi, \chi_0 \rangle_0 = 0$, то $\chi * \psi|_{G_0} = 0$. Если $(f*\psi)*\chi=0$ для всех $\chi \in A \cap \hat{G}$, то $f*\psi \equiv 0$, но $f*\psi|_{G_0} = \chi_0$. Лемма доказана.

Пусть теперь $\chi_0 \in A|_{G_0} \cap \hat{G}_0$ и $\chi_0|_{G_k} = \chi(e)$. Возьмем $\overline{\chi \in A \cap}\, \hat{G}$ такой, что $\langle \chi, \chi_0 \rangle_0 \neq 0$. По лемме 6 найдется такое целое $n > 1$, что $\int\limits_{G_0} \chi_0^n(x)\,dx \neq 0$. Ясно, что тогда $\int\limits_G \chi^n(x)\,dx \neq 0$. Так как $\chi \in A$, то из (1) следует, что

$$\int\limits_G \chi^n(x)\,dx = \sum_{i=1}^{r} \int\limits_{G_0} \chi^n(g_i x)\,dx = r \int\limits_{G_0} \chi^n(x)\,dx.$$

Здесь r — порядок группы $\Gamma = G/G_0$, $g_1, \ldots, g_r$ — представители различных классов смежности G по G_0.

в) Алгебра $A|_{G_k}$ порождается характерами $\varkappa = \frac{1}{\chi(e)} \chi|_{G_k}$, где $\chi \in A|_{G_0} \cap \hat{G}_0$. Пусть $\chi_1, \chi_2 \in A|_{G_0} \cap \hat{G}_0$ и $\frac{1}{\chi_1(e)} \chi_1|_{G_k} = \frac{1}{\chi_2(e)} \overline{\chi_2}|_{G_k}$. Тогда $\chi_1 \cdot \chi_2$ — след некоторого представления группы G_0. Ясно, что все характеры из $\hat{G}_0$, встречающиеся в разложении $\chi_1 \cdot \chi_2$, тривиальны на G_k, и, следовательно, (см. п. б) теоремы) тривиальны на G_0. (Считается очевидным, что $A|_{G_0}$ содержит все характеры из $\hat{G}_0$, которые входят в разложения функций из $A|_{G_0}$.) Легко показать, что тогда $\chi_1 = \chi_2 = 1$. Нужно только соответствующие χ_1 и χ_2 представления T_1 и T_2 привести в каждой точке к диагональному виду и вспомнить, что $(\chi_1 \cdot \chi_2)(x) = \mathrm{Sp}\,(T_1 \otimes T_2)(x)$. Из подсчета следа и получается доказываемое равенство.

Пусть теперь $\chi', \chi'' \in A \cap \hat{G}$, $\langle \chi', \chi_1 \rangle_0 \neq 0$ и $\langle \chi'', \chi_2 \rangle \neq 0$. Тогда $\int\limits_G \chi'(x)\chi''(x)\,dx = r \int\limits_{G_0} \chi'(x)\chi''(x)\,dx \neq 0$ (см. п. а) теоремы). Следовательно, $\chi' = \overline{\chi''}$, т. е. $\chi' = \chi'' = 1$.

Достаточность. Пусть выполняются условия а), б), в). Предположим, что найдется такой нетривиальный характер $\chi \in A \cap \hat{G}$, что $\overline{\chi} \in A$. Ввиду а) в разложении $\chi|_{G_0}$ все характеры нетривиальны. Итак, существует нетривиальный характер $\chi_0 \in A|_{G_0} \cap \hat{G}_0$ такой, что $\overline{\chi}_0 \in A$. Тогда, согласно в), $\chi_0|_{G_k} = \chi(e)$, но этот случай предусмотрен условием б).

Доказательство теоремы закончено.

Теорема 2. *Пусть A — однородная антисимметричная алгебра на компактной группе Ли G. Тогда $A|_{G_0}$ и $A|_{G_k}$ — однородные антисимметричные алгебры на G_0 и G_k соответственно.*

Доказательство. Антисимметричность алгебр $A|_{G_0}$ и $A|_{G_k}$ следует из пунктов б) и в) теоремы 1. Нужно доказать замкнутость этих алгебр. Обозначим через $\tilde{A}$ алгебру, полученную из A путем присоединения всех функций, постоянных на классах смежности G по G_0. G_0 — максимальное множество антисимметрии алгебры $\tilde{A}$. По теореме Шилова — Бишопа (см. [3]), $\tilde{A}|_{G_0}$ — замкнутая подалгебра $C(G_0)$, но $\tilde{A}|_{G_0} = A|_{G_0}$. Замкнутость $A|_{G_k}$ доказывается аналогично.

3. Пусть группа G — проективный предел семейства компактных групп $\{G_i\}_{i \in I}$, $\varphi_i : G \to G_i$ — соответствующие эпиморфизмы.

Лемма 10. *Всякая однородная алгебра A на G есть индуктивный предел алгебр $A_i = \{f \in C(G_i) \mid f \circ \varphi_i \in A\}$ на G_i* (см. п. 2). *Алгебра A антисимметрична тогда и только тогда, когда все A_i антисимметричны.*

Доказательство. В качестве мономорфизмов A_i в A берутся отображения $\varphi_i^* : f \to f \circ \varphi_i$. Проверка свойств индуктивного предела не представляет никакого труда.

Лемма 10 позволяет применить результаты п. 2 к алгебрам на произвольных компактных группах, так как всякая компактная группа есть проективный предел семейства компактных групп Ли.

Теорема 3. *Пусть G — компактная группа. Однородная алгебра A на G антисимметрична тогда и только тогда, когда* 1) *среди нетривиальных одномерных характеров, принадлежащих A, нет сопряженных,* 2) *для всякого $\chi \in A \cap \hat{G}$, $\chi \not\equiv 1$, и для всех целых $n > 0$*

$$\int_G \chi^n(g)\, dg = 0.$$

Доказательство. *Достаточность.* Предположим сначала, что G — группа Ли.

Если A не антисимметрична, то найдется нетривиальный характер $\chi \in A \cap \hat{G}$ такой, что $\overline{\chi} \in A$.

Возможны два случая:

1. $|\chi||_{G_0} = \text{const}$. Тогда все $\chi_j \in \hat{G}$ в разложении $|\chi|^2 = \chi_1 + \ldots + \chi_k$ могут рассматриваться как характеры группы $\Gamma = G/G_0$, так как $\chi_j|_{G_0} = \chi_j(e)$, $j = 1, \ldots, k$. Следовательно, $\int_G \chi_j^r(x)\, dx \neq 0$ для $j = 1, \ldots, k$; здесь r — порядок группы Γ.

Если все χ_j тривиальны, то $|\chi| \equiv \chi(e)$, а отсюда нетрудно вывести, что $\dim \chi = 1$.

2. $|\chi|\,|_{G_0} \neq \mathrm{const}$. Тогда в разложении $|\chi^2|\,|_{G_0} = \chi_1' + \ldots + \chi_l'$ найдется хотя бы один нетривиальный характер. Пусть это будет χ_1'. Ясно, что $\overline{\chi}_1' \in A|_{G_0}$. В разложении $|\chi_1'|^2 = \chi_1'' + \ldots + \chi_m''$ найдется хотя бы один нетривиальный характер, например χ_1''.

По лемме 6 найдется такое целое $n > 1$, что $\int\limits_{G_0} \chi_1''^{\,n}(x)\,dx \neq 0$. Согласно лемме 9 найдется характер $\chi_1 \in A \cap \hat{G}$ такой, что в разложение $\chi_1|_{G_0}$ по неприводимым характерам входит χ_1''. Из леммы 7 тогда следует, что если r — порядок группы $\Gamma = G/G_0$, то $\int\limits_G \chi^{n+r}(g)\,dg \neq 0$.

Пусть теперь G — произвольная компактная группа, представленная в виде проективного предела семейства компактных групп Ли $\{G_i\}_{i \in I}$. Нужно проверить (см. лемму 10), что все алгебры A_i антисимметричны. Но если условия 1) и 2) выполняются для A, то они, как легко видеть, выполняются для всех A_i.

Необходимость. Утверждение 1) теоремы очевидно, утверждение 2) совпадает с леммой 1.

4. Пусть G, G_1 — компактные группы, $\varphi \in \mathrm{Hom}(G, G_1)$.

Обозначим через φ^* гомоморфизм $C^*(G) \to C^*(G_1)$, определенный формулой $\varphi_*(F)(f) = F(f \circ \varphi)$ для всяких функции $f \in C(G_1)$ и функционала $F \in C^*(G)$.

Лемма 11. *Пусть G — компактная группа, A — однородная алгебра на G, $\varphi: G \to G_1$ — эпиморфизм. Тогда $\varphi_*|_{A^\perp}$ — эпиморфизм $A^\perp$ на $A_\varphi^\perp$, где $A_\varphi = \{f \in C(G_1) \mid f \circ \varphi \in A\}$.*

Доказательство. Ясно, что $\varphi_*(A^\perp) \subset A_\varphi^\perp$. Далее, если $F \in A_\varphi^\perp$, то $F_\varphi \in A^\perp$, где функционал F_φ определен формулой $F_\varphi(f(g)) = F\left(\int\limits_{\mathrm{Ker}(\varphi)} f(gh)\,dh\right)$ для всех $f \in C(G)$.

Следствие. *Пусть G — проективный предел семейства компактных групп $\{G_i\}_{i \in I}$, $\varphi_i: G \to G_i$ — соответствующие эпиморфизмы, A — однородная алгебра на G. Тогда $A^\perp$ есть проективный предел семейства аннуляторов $\{A_{\varphi_i}^\perp\}_{i \in I}$.*

Теорема 4. *Пусть A — однородная антисимметричная алгебра на компактной группе Ли G, r — порядок группы $\Gamma = G/G_0$. Тогда $\dim A^\perp \geqslant r - 1$.*

Доказательство. Пусть $g_1, \ldots, g_r$ — представители различных классов смежности G по G_0. Для всякого набора $c = (c_1, \ldots, c_r)$ вещественных чисел таких, что $\sum\limits_{i=1}^{r} c_i = 0$, и произвольной функции $f \in C(G)$ положим

$$F_c(f) = \sum_{i=1}^{r} c_i \int\limits_{G_0} f(g_i x)\,dx.$$

Множество таких наборов c образует $(r-1)$-мерное вещественное пространство; отображение $c \to F_c$ — мономорфизм этого пространства в $A^\perp$ (см. п. а) теоремы 1).

Теорема 5. *Пусть G — компактная группа Ли, A — однородная антисимметричная алгебра на G. Если G_0 некоммутативна, то $A^{\perp}$ — несепарабельное пространство.*

Доказательство. Обозначим для всякого $g \in G$ через δ_g меру, действующую по формуле $\int\limits_G f d\delta_g = f(g)$ для любой функции $f \in C(G)$.

Положим для $g \in G_s$

$$F_g(f) = \int\limits_{G_k}\int\limits_{G_s} f(th)\, d\delta_g(h)\, dt - \int\limits_{G_0} f(x)\, dx,$$

где dt и dx — такие меры Хаара на G_k и G_0 соответственно, что $\int\limits_{G_k} dt = \int\limits_{G_0} dx = 1$. Далее, $F_g \in A^{\perp}$ для любого $g \in G_s$. По теореме 2 $A|_{G_0}$ — однородная алгебра на G_0, так что можно считать, что G связна. Пусть $t_{ij} \in A$ — матричный элемент неприводимого представления T. Тогда $t_{ij}(th) = \varkappa(t)\, t_{ij}(h)$, где $t \in G_k$, $h \in G_s$, $\varkappa \in \hat{G}_k$ (см. лемму 5). Если $t_{ij} \not\equiv 1$, то $\varkappa \not\equiv 1$ (лемма 6). Итак, если $t_{ij} \not\equiv 1$, то $\int\limits_{G_0} t_{ij}(x)\, dx = 0$ и $\int\limits_{G_k} t_{ij}(t)\, dt = \int\limits_{G_k} \varkappa(t)\, dt = 0$.

Очевидно, что $F_g(1) = 0$. Ясно, что множество различных функционалов F_g независимо в топологии $A^{\perp}$ и что это множество находится во взаимно однозначном соответствии с множеством элементов группы $G_s/G_s \cap G_k$, т. е. множество различных функционалов F_g — континуум, поскольку $G_s \cap G_k$ — конечная группа.

Следствие 1. *Пусть G — произвольная компактная группа, A — однородная антисимметричная алгебра на G. Тогда*

1) *если порядок группы $\Gamma = G/G_0$ не меньше r, то* $\dim A^{\perp} \geqslant r - 1$;

2) *если G_0 — некоммутативная группа, то $A^{\perp}$ — несепарабельное пространство.*

Доказательство. Представляя G в виде проективного предела компактных групп Ли, можно легко показать, что 1) существует эпиморфизм φ группы G на компактную группу Ли G' такую, что порядок группы $\Gamma' = G'/G'_0$ не меньше r; 2) существует эпиморфизм τ группы G на компактную группу Ли G'' такую, что G''_0 некоммутативна. Осталось только применить лемму 11 и теоремы 4,5 к алгебрам A_φ и A_τ.

Следствие 2. *Если на компактной группе G имеется однородная антисимметричная алгебра A такая, что $A^{\perp} = \{0\}$, то группа G коммутативна и связна.*

Это — основной результат работы [1].

5. Пусть A — произвольная однородная алгебра на компактной группе G; обозначим через H максимальное множество антисимметрии алгебры A, содержащее единицу группы G. Очевидно, что H — инвариантная замкнутая подгруппа G и что максимальные множества антисимметрии алгебры A — это множества вида $g \cdot H$ при всех $g \in G$ и только они.

Теорема 6. *Пусть* $A^{\perp}$, G, *и* H — *то же, что и выше. Тогда*

1) *если* $A^{\perp}=\{0\}$, *то* H — *связная подгруппа центра группы* G_0;

2) *если* $\dim A^{\perp}>0$ *и* $A^{\perp}$ *сепарабелен, то* G_0 — *коммутативная подгруппа и число элементов группы* G/G_0 *не более чем счетно.*

Доказательство.

Лемма 12. *Пусть* X — *компакт,* A — *замкнутая подалгебра* $C(X)$, B — *единичный шар в* $C^*(X)$. *Тогда носители крайних точек множества* $A^{\perp}\cap B$ *суть множества антисимметрии.*

Это — факт известный и легко доказываемый. Из него можно сделать полезный вывод:

$$\dim A^{\perp}=\dim(A|_H)\times(\text{число элементов группы } G/H). \tag{7}$$

Лемма 13. *Пусть* G — *проективный предел семейства компактных групп* $\{G_i\}_{i\in I}$, $\varphi_i: G\to G_i$ — *соответствующие эпиморфизмы,* A — *однородная алгебра на* G, H_i — *максимальные множества антисимметрии алгебр* A_i *такие, что* $e\in H_i$. *Тогда* H — *проективный предел семейства* $\{H_i\}_{i\in I}$ *и* $A_i|_{H_i}=\{f\in C(H_i)\,|\,f\circ\varphi_i|_H\in A|_H\}$.

Доказательство этой леммы не представляет никакого труда.

1) Если $A^{\perp}=\{0\}$, то из (7) и из следствия 2 п. 5 видно, что H — связная коммутативная подгруппа. Представим G в виде проективного предела компактных групп Ли $\{G_i\}_{i\in I}$. Все H_i коммутативны и связны.

Лемма 14. *Если* G — *компактная связная группа Ли и* H — *инвариантная абелева подгруппа* G, *то* H *лежит в центре группы* G.

Действительно, $H\cap G_s$ — инвариантная абелева подгруппа G_s. Значит, $H\cap G_s$ дискретна. Нетрудно видеть, что всякая дискретная инвариантная подгруппа связной топологической группы лежит в центре этой группы.

2) Из (7) видно, что $\dim A^{\perp}>0$ тогда и только тогда, когда $\dim(A|_H)^{\perp}>0$.

Если $H\not\supset G_0$, то найдется такое $i\in I$, что $H_i\not\supset(G_i)_0$ и $\dim A_i^{\perp}>0$. Тогда G_i/H_i — многообразие положительной размерности. Отсюда и из (7) следует, что $A^{\perp}$ несепарабелен (см. лемму 11).

Итак, $G_0\subset H$. Если G_0 некоммутативна, то, по следствию 1 п. 5, $A^{\perp}$ несепарабелен.

Если число элементов группы G/G_0 несчетно, то из очевидного уточнения следствия 1 п. 4 и (7) получаем, что $A^{\perp}$ несепарабелен.

Автор благодарит В. Я. Лина и Е. А. Горина за внимание к этой работе и ценные советы.

(Поступила в редакцию 26/VIII 1968 г.)

Литература

1. D. Rider, Translation invariant Dirichlet algebras on compact groups, Proc. Amer. Math. Soc., **17**, № **5** (1966), 977—983.
2. А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применения, Москва, ИЛ, 1950.
3. E. Bishop, A generalization of the Stone-Weierstrass theorem, Pacific. J. Math., **10**, № **3** (1961), 777—783.