А. А. Кириллов, Унитарные представления нильпотентных групп Ли, *УМН*, 1962, том 17, выпуск 4(106), 57–110

1962 г. июль—август *т. XVII, вып. 4 (106)*

УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УНИТАРНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ НИЛЬПОТЕНТНЫХ ГРУПП ЛИ

А. А. Кириллов

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Изучение унитарных представлений некомпактных групп Ли было начато в работах И. М. Гельфанда и М. А. Наймарка в 1946—1947 гг. В частности, в этих работах было дано описание всех неприводимых унитарных представлений простейшей полупростой группы Ли (группы Лоренца) и простейшей разрешимой группы Ли (группы линейных неоднородных преобразований прямой). После этого теория унитарных представлений полупростых групп Ли развивалась очень быстро и в настоящее время близка к завершению (по крайней мере в той части, которая посвящена комплексным полупростым группам). Представления же нильпотентных и разрешимых групп Ли до последнего времени были мало изучены. Первые общие результаты об унитарных представлениях нильпотентных групп Ли были получены французским математиком Диксмье в 1957 г. [4]. Диксмье построил для каждой нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ набор неприводимых унитарных представлений, которые он назвал «неисключительными». Все эти представления однозначно определяются своим инфинитезимальным характером, зависят от q вещественных параметров и естественно реализуются в пространстве функций p переменных. Числа p и q связаны с размерностью группы соотношением $2p+q=\dim\mathfrak{G}$. Если φ — быстро убывающая бесконечно дифференцируемая функция на группе $\mathfrak{G}$, а T — неисключительное

представление $\mathfrak{G}$, то оператор $T_\varphi = \int \varphi(g) T_g \, dg$ вполне непрерывен и имеет конечный след. В случае, когда группа $\mathfrak{G}$ односвязна, неисключительных представлений оказывается достаточно, чтобы написать формулу Планшереля, т. е. восстановить функцию φ на $\mathfrak{G}$, зная операторы T_φ. Перечисленные результаты были затем усилены и дополнены в ряде статей Диксмье [5], [18], [28], [31], [32], Такеноути [33], [34] и автора [1], [2], [3]. В последней работе указан новый способ описания неприводимых унитарных представлений с помощью орбит в некотором конечномерном линейном пространстве. Такой подход позволяет решить до конца основные вопросы теории унитарных представлений нильпотентных групп Ли, а также дать более простые и наглядные доказательства ранее известных фактов. Подробное изложение этого подхода и составляет предмет настоящей статьи. Интересно, что часть излагаемых в статье результатов в той же самой формулировке оказывается справедливой не только для нильпотентных, но и для широкого класса разрешимых и даже для некоторых полупростых групп Ли.

В отличие от теории представлений полупростых групп, где главным орудием является разложение представлений на неприводимые компоненты относительно максимальной компактной подгруппы, в теории представлений нильпотентных групп основную роль играет индуктивный метод, сводящий изучение представлений данной группы к рассмотрению групп меньшей размерности. Очень удобным для этого метода аппаратом является теория индуцированных представлений, развитая Макки[1]) [6]. Необходимые сведения об индуцированных представлениях мы приводим в § 1.

Индуктивный метод, применяемый в статье, основан на следующих соображениях. Если представление T группы $\mathfrak{G}$ переводит все элементы некоторого нормального делителя $\mathfrak{G}_0$ (размерности $\geqslant 1$) в единичный оператор, то представление T можно рассматривать как представление $\widetilde{T}$ фактор-группы $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ и изучение T сводится к рассмотрению группы меньшей размерности. Если же ядро представления T дискретно, то легко показать, что группа $\mathfrak{G}$ имеет одномерный центр. Такие группы изучаются в § 4. Оказывается, что всякое представление с дискретным ядром индуцировано (в смысле Макки) некоторым представлением подгруппы $\mathfrak{G}_0$, причем $\dim \mathfrak{G}_0 = \dim \mathfrak{G} - 1$. Таким образом, и в этом случае изучение T сводится к рассмотрению группы меньшей размерности.

Центральный результат статьи (теоремы 5.1 и 5.2) можно коротко сформулировать следующим образом. Пусть $\mathfrak{G}$ — односвязная нильпотентная группа Ли, G — ее алгебра Ли, ϱ — присоединенное представление $\mathfrak{G}$ в пространстве G. Обозначим через G' пространство, сопряженное к G, и через ϱ' — представление $\mathfrak{G}$ в G', двойственное к ϱ. Оказывается, что неприводимые унитарные представления $\mathfrak{G}$ взаимно однозначно соответствуют орбитам в G' относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$.

---

[1]) В теорию представлений конечных групп понятие индуцированного представления ввел Фробениус. Для изучения некомпактных групп Ли метод индуцированных представлений до Макки применяли Вигнер [7], Гельфанд и Наймарк [8]. В последней работе содержатся по существу все основные идеи этого метода.

Более подробно связь между орбитами и представлениями обсуждается в § 6. Здесь дается простой ответ в терминах орбит на обычные вопросы теории представлений: разложение неприводимого представления группы на неприводимые представления подгруппы, разложение на неприводимые компоненты пространства функций на однородном многообразии, разложение кронекеровского произведения неприводимых представлений.

Параграф 7 посвящен представлениям инфинитезимального группового кольца и теории характеров. Основной результат этого параграфа — явное выражение инфинитезимального характера (т. е. гомоморфизма центра инфинитезимального группового кольца в поле комплексных чисел) и характера как обобщенной функции на группе через соответствующую орбиту (теоремы 7.2 и 7.4). Это позволяет доказать, что «представления общего положения» определяются инфинитезимальным характером, и дать простой вывод аналога формулы Планшереля для нильпотентных групп Ли[1]).

В восьмом параграфе результаты статьи обобщаются на неодносвязные нильпотентные и некоторые разрешимые группы. Там же обсуждается топологическая структура множества неприводимых представлений и формулируются некоторые нерешенные вопросы, возникающие в связи с настоящей статьей. В девятом параграфе разобрано несколько примеров.

Автор выражает искреннюю благодарность И. М. Гельфанду за постоянное внимание и ценные советы.

§ 1. Индуцированные представления[2])

1. Один из самых распространенных способов строить представления групп состоит в следующем. Рассмотрим однородное пространство X с группой движений $\mathfrak{G}$. Каждому элементу $g \in \mathfrak{G}$ поставим в соответствие линейный оператор T_g, действующий в пространстве функций на X по формуле

$$T_g f(x) = \alpha(x, g) f(x\bar{g}). \tag{1.1}$$

Здесь символ $x\bar{g}$ означает точку, в которую переходит точка $x \in X$ под действием $g \in \mathfrak{G}$, а $\alpha(x, g)$ — некоторая функция на $X \times \mathfrak{G}$.

Посмотрим, когда соответствие $g \to T_g$ будет представлением $\mathfrak{G}$, т. е. когда выполняются соотношения

$$T_{g_1 g_2} = T_{g_1} T_{g_2}, \quad T_e = E \text{ (единичный оператор)}. \tag{1.2}$$

Легко проверить, что для этого необходимо и достаточно, чтобы функция $\alpha(x, g)$ удовлетворяла функциональному уравнению

$$\alpha(x, g_1)\, \alpha(x\bar{g}_1, g_2) = \alpha(x, g_1 g_2) \tag{1.3}$$

и условию

$$\alpha(x, e) = 1 \quad \text{для всех } x \in X.$$

---

[1]) Оба последних результата получены ранее Диксмье [4].

[2]) Мы даем здесь краткие доказательства тех свойств индуцированных представлений, которые понадобятся нам в дальнейшем. Более полное изложение см. в работах Макки [6] и Брюа [9].

Этот способ строить представления группы $\mathfrak{G}$ допускает некоторое обобщение. Именно, можно вместо обычных функций на X рассматривать вектор-функции со значениями в некотором линейном пространстве L. Функцию $\alpha(x, g)$ нужно тогда заменить операторной функцией, значения которой — линейные операторы в пространстве L. Для того чтобы соответствие $g \to T_g$ было представлением, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось функциональное уравнение (1.3) и условие

$$\alpha(x, e) = E \quad \text{для всех} \quad x \in X. \tag{1.4}$$

Найдем общее решение уравнения (1.3), удовлетворяющее условию (1.4) [1]). Пусть x_0 — некоторая фиксированная точка X, $\mathfrak{G}_0$ — подгруппа $\mathfrak{G}$, оставляющая x_0 на месте. Выберем для каждой точки $x \in X$ элемент $g_x \in \mathfrak{G}$, переводящий x_0 в x [2]). Тогда каждый элемент $g \in \mathfrak{G}$ однозначно представляется в виде $g = g_0 g_{\bar{x}}$, где $g_0 \in \mathfrak{G}_0$, а $x = x_0 \bar{g}$. Подставляя в (1.3) x_0 вместо x, g_x вместо g_1 и g вместо g_2, получим $\alpha(x_0, g_x)\, \alpha(x, g) = \alpha(x_0, g_x g)$, или

$$\alpha(x, g) = \alpha^{-1}(x_0, g_x)\, \alpha(x_0, g_x g). \tag{1.5}$$

Обозначим для краткости $\alpha(x_0, g)$ через $\alpha(g)$. Соотношение (1.5) показывает, что для определения $\alpha(x, g)$ достаточно знать $\alpha(g)$. Но функция $\alpha(g)$ также не произвольна. Она удовлетворяет функциональному уравнению

$$\alpha(g_0 g) = \alpha(g_0)\, \alpha(g) \quad \text{для всех} \quad g_0 \in \mathfrak{G}_0 \tag{1.6}$$

и условию $\alpha(e) = E$, как видно из (1.3) и (1.4), если положить $x = x_0$, $g_1 = g_0$, $g_2 = g$. Так как элемент g однозначно представляется в виде $g = g_0 g_x$, из (1.6) следует, что $\alpha(g) = \alpha(g_0)\, \alpha(g_x)$.

Введем обозначения $\alpha(g_0) = U_{g_0}$, $\alpha(g_x) = \beta(x)$. Первоначальная функция $\alpha(x, g)$ выражается через U_{g_0} и $\beta(x)$ по формуле

$$\alpha(x, g) = \beta^{-1}(x)\, U_{g_0} \beta(y), \tag{1.7}$$

где $g_0 \in \mathfrak{G}_0$ и $y \in X$ определяются из соотношения $g_x g = g_0 g_y$. Отображение $g_0 \to U_{g_0}$, как видно из (1.6), является представлением $\mathfrak{G}_0$ в пространстве L, т. е.

$$U_{g_0 g_0'} = U_{g_0} U_{g_0'} \quad \text{и} \quad U_e = E.$$

Легко проверить, что и обратно, если заданы операторная функция $\beta(x)$ (значения которой — обратимые операторы в L) и представление $g_0 \to U_{g_0}$ подгруппы $\mathfrak{G}_0$ в пространстве L, то функция $\alpha(x, g)$, определенная формулой (1.7), удовлетворяет (1.3) и (1.4). Поэтому общий вид функций $\alpha(x, g)$ дается формулой (1.7).

Покажем теперь, что без ограничения общности можно считать $\beta(x) \equiv E$. Точнее говоря, представление T_g всегда можно заменить эквивалентным представлением, для которого $\beta(x) \equiv E$. В самом деле, рассмотрим вместо T_g эквивалентное представление $\widetilde{T}_g = C T_g C^{-1}$, где C — оператор, действую-

---

[1]) Мы частично повторяем здесь рассуждения, приведенные в [10], § 1.

[2]) В интересующих нас случаях это можно сделать так, чтобы выбранные элементы g_x заполняли гладкое подмногообразие в $\mathfrak{G}$.

щий по формуле

$$Cf(x) = c(x) f(x).$$

Здесь $c(x)$ — некоторая функция на X, значения которой — обратимые операторы в L. Если оператор T_g задается формулой $T_g f(x) = \alpha(x, g) f(x\bar{g})$, то оператор $\widetilde{T}_g$ задается формулой $\widetilde{T}_g f(x) = c(x)\, \alpha(x, g)\, c^{-1}(x\bar{g})\, f(x\bar{g})$. Это значит, что функциям $\alpha(x, g)$ и

$$\widetilde{\alpha}(x, g) = c(x)\, \alpha(x, g)\, c^{-1}(x\bar{g}) \tag{1.8}$$

соответствуют эквивалентные представления. Пусть $g_x g = g_0 g_y$. Тогда по формуле (1.7) $\alpha(x, g) = \beta^{-1}(x)\, U_{g_0} \beta(y)$, $\widetilde{\alpha}(x, g) = \widetilde{\beta}^{-1}(x)\, \widetilde{U}_{g_0} \widetilde{\beta}(y)$. Подставляя эти выражения в (1.8), получим: $\widetilde{U}_{g_0} = U_{g_0}$, $\widetilde{\beta}(x) = \beta(x) c^{-1}(x)$. В частности, если $c(x) = \beta(x)$, то $\widetilde{\beta}(x) \equiv E$.

Итак, представление T_g с точностью до эквивалентности определяется представлением U_{g_0} подгруппы $\mathfrak{G}_0$. Легко проверить, что если представление U_{g_0} заменить эквивалентным ему представлением, то представление T_g также заменится на эквивалентное. Поэтому мы можем и T_g и U_{g_0} рассматривать с точностью до эквивалентности.

Определение. Мы будем говорить, что *представление* T_g *группы* $\mathfrak{G}$, заданное формулой (1.1), *индуцировано представлением* $U_{g_0} = \alpha(x_0, g_0)$ *подгруппы* $\mathfrak{G}_0$, оставляющей на месте точку $x_0 \in X$.

Если $\alpha(x, g)$ — обычная числовая функция, то представление U_{g_0} *одномерно*, а представление T_g называется в этом случае *мономиальным*.

2. До сих пор на пространство L и вектор-функции на X мы не налагали никаких ограничений. Теперь мы будем предполагать, что L — гильбертово пространство, а значения функции $\alpha(x, g)$ — унитарные операторы в L. Кроме того, мы будем рассматривать не все вектор-функции на X со значениями в L, а только измеримые вектор-функции, для которых сходится интеграл

$$\int_X \| f(x) \|_L^2 \, dx,$$

где dx означает меру на X, инвариантную относительно $\mathfrak{G}$[1]). Множество таких вектор-функций образует гильбертово пространство относительно скалярного произведения

$$(f_1, f_2) = \int_X (f_1(x), f_2(x))_L \, dx. \tag{1.9}$$

(Разумеется, нужно отождествить функции, совпадающие почти всюду на X.) Это гильбертово пространство мы обозначим через H. Операторы T_g, определенные формулой (1.1), будут унитарными операторами в H, так как сдвиг с помощью элемента $g \in \mathfrak{G}$ и умножение на унитарную операторную функцию $\alpha(x, g)$, очевидно, не меняют скалярного произведения (1.9).

[1]) В дальнейшем мы будем рассматривать однородные многообразия X, на которых действует нильпотентная группа Ли $\mathfrak{G}$. В этом случае на X всегда существует мера, инвариантная относительно $\mathfrak{G}$. Определение унитарного индуцированного представления можно дать и в том случае, когда на X нет инвариантной меры (см., например, [6] или [9]).

Повторяя приведенные выше рассуждения, легко показать, что представление T_g с точностью до унитарной эквивалентности определяется унитарным представлением U_{g_0} подгруппы $\mathfrak{G}_0$. В дальнейшем мы будем рассматривать только унитарные индуцированные представления.

3. Установим теперь свойства индуцированных представлений, которые понадобятся нам в дальнейшем.

Заметим прежде всего, что в наших рассуждениях участвовала фиксированная точка $x_0 \in X$. Вместо этой точки можно было, конечно, взять любую другую, например точку $\widetilde{x}_0 = x_0\bar{g}$. Подгруппой, оставляющей $\widetilde{x}_0$ на месте, является $\widetilde{\mathfrak{G}}_0 = g^{-1}\mathfrak{G}_0 g$. Соответствующее представление $\widetilde{U}$ имеет вид $\widetilde{U}_{\widetilde{g}_0} = \alpha(\widetilde{x}_0, \widetilde{g}_0) = \alpha(x_0 g, \widetilde{g}_0) = \alpha^{-1}(x_0, g)\,\alpha(x_0, g\widetilde{g}_0)$. Так как $g\widetilde{g}_0 g^{-1}$ лежит в $\mathfrak{G}_0$, мы можем написать $g\widetilde{g}_0 = g_0 g$, где $g_0 \in \mathfrak{G}_0$. Тогда $\widetilde{U}_{\widetilde{g}_0} = \alpha^{-1}(x_0, g)\,\alpha(x_0, g_0 g) = \alpha^{-1}(x_0, g)\, U_{g_0}\alpha(x_0, g)$. Следовательно, $\widetilde{U}_{\widetilde{g}_0}$ эквивалентно $\widetilde{U}_{g\widetilde{g}_0 g^{-1}}$. Так как представление T_g не зависит от того, какая точка в X принята за начальную, мы получаем следующее утверждение:

Л е м м а 1.1. *Пусть $\mathfrak{G}_0$ и $\widetilde{\mathfrak{G}}_0 = g^{-1}\mathfrak{G}_0 g$ — подгруппы $\mathfrak{G}$, U и $\widetilde{U}$ — представления $\mathfrak{G}_0$ и $\widetilde{\mathfrak{G}}_0$ такие, что $\widetilde{U}_{\widetilde{g}_0}$ эквивалентно $U_{g\widetilde{g}_0 g^{-1}}$. Тогда представления $\mathfrak{G}$, индуцированные U и $\widetilde{U}$, эквивалентны.*

Мы приведем теперь другую реализацию индуцированных представлений, которая во многих случаях более удобна. Вместо вектор-функций на однородном пространстве X мы будем рассматривать вектор-функции на самой группе $\mathfrak{G}$ со значениями в L, удовлетворяющие условиям

$$F(g_0 g) = U_{g_0} F(g) \text{ для } g_0 \in \mathfrak{G}_0 \tag{1.10}$$

и

$$\int_X \| F(g) \|_L^2 \, dx < \infty. \tag{1.11}$$

Последнее условие требует пояснения. Из соотношения (1.10) и унитарности U_{g_0} следует, что функция $\| F(g) \|_L^2$ постоянна на правых классах смежности по $\mathfrak{G}_0$. Поэтому ее можно рассматривать как функцию на $X = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$: $\| F(g) \|_L^2 = \varphi(x_0 \bar{g})$. Условие (1.11) означает, что

$$\int_X \varphi(x)\, dx < \infty.$$

Множество вектор-функций, удовлетворяющих условиям (1.10) и (1.11), образует гильбертово пространство $\widetilde{H}$ относительно скалярного произведения

$$(F_1, F_2) = \int_X (F_1(g),\ F_2(g))_L \, dx.$$

В пространстве $\widetilde{H}$ мы зададим унитарное представление $\widetilde{T}_g$ группы $\mathfrak{G}$, действующее по формуле

$$\widetilde{T}_g F(g') = F(g' g). \tag{1.12}$$

Оказывается, что это представление унитарно эквивалентно представлению T_g, индуцированному U_{g_0}. Для доказательства достаточно проверить, что отображение γ: $f(x) \to F(g) = \alpha(x_0, g) f(x_0 \bar{g})$ является унитарным отображением H в $\widetilde{H}$, при котором оператору T_g соответствует оператор $\gamma T_g \gamma^{-1} = \widetilde{T}_g$.

Лемма 1.2. *Пусть* $\mathfrak{G}$ — *группа Ли,* $\mathfrak{G}_0$ *и* $\mathfrak{G}_{00} \subset \mathfrak{G}_0$ — *ее замкнутые подгруппы,* V — *представление* $\mathfrak{G}_{00}$, U — *представление* $\mathfrak{G}_0$, *индуцированное представлением* V. *Тогда представления группы* $\mathfrak{G}$, *индуцированные* U *и* V, *эквивалентны.*

Доказательство. Обозначим через L пространство представления V. Тогда представление U действует в гильбертовом пространстве H функций на $\mathfrak{G}_0$ со значениями в L, удовлетворяющих условию

$$\varphi(g_{00}g_0) = V_{g_{00}}\varphi(g_0) \text{ для } g_{00} \in \mathfrak{G}_{00}. \tag{1.13}$$

Операторы представления U действуют в H по формуле

$$U_{g_0}\varphi(g_0') = \varphi(g_0'g_0). \tag{1.14}$$

Обозначим через T^U и T^V представления $\mathfrak{G}$, индуцированные представлениями U и V соответственно. Пространство $\mathfrak{H}^U$, в котором действует T^U, состоит из функций на $\mathfrak{G}$ со значениями в H, удовлетворяющих условию

$$f(g_0 g) = U_{g_0} f(g) \text{ для } g_0 \in \mathfrak{G}_0. \tag{1.15}$$

Заметим, что значение функции $f(g) \in \mathfrak{H}^U$ при каждом g является элементом H, т. е. функцией на $\mathfrak{G}_0$. Поэтому элементы $\mathfrak{H}^U$ можно представлять себе как функции $F(g, g_0)$ на $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}_0$ со значениями в L. Условия (1.13) и (1.15) в терминах функций F принимают вид

$$F(g, g_{00}g_0) = V_{g_{00}}F(g, g_0), \tag{1.13'}$$

$$F(g_0 g, g_0') = U_{g_0}F(g, g_0') = F(g, g_0'g_0). \tag{1.15'}$$

Положив в последнем равенстве $g_0' = e$, мы получим

$$F(g, g_0) = F(g_0 g, e) = \Phi(g_0 g). \tag{1.16}$$

Проверим теперь, что отображение $F \to \Phi$ является изоморфизмом пространств $\mathfrak{H}^U$ и $\mathfrak{H}^V$, при котором операторам T_g^U соответствуют операторы T_g^V. В самом деле, из равенства (1.13') вытекает, что функции $\Phi(g$ удовлетворяют условию

$$\Phi(g_{00}g) = V_{g_{00}}\Phi(g), \tag{1.13''}$$

определяющему пространство $\mathfrak{H}^V$. Очевидно и обратное: каждой функции $\Phi \in \mathfrak{H}^V$ соответствует в силу (1.16) функция $F(g, g_0)$, удовлетворяющая (1.13') и (1.15').

Далее, если $F_1 = T_g^U F_2$, то $F_1(g', g_0) = F_2(g'g, g_0)$ и, следовательно, $\Phi_1(g') = \Phi_2(g'g) = T_g^V \Phi_2(g')$. Для доказательства леммы остается показать, что соответствие $F \to \Phi$ унитарно. Обозначим через X (соответственно X_1, X_2) однородное пространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_{00}$ ($\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$, $\mathfrak{G}_0/\mathfrak{G}_{00}$). Выберем на X (X_1, X_2) начальную точку и зафиксируем для каждой точки $x \in X$ ($x_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$) элемент $g_x \in \mathfrak{G}(g_{x_1} \in \mathfrak{G}$, $g_{x_2} \in \mathfrak{G}_0)$, переводящий начальную точку в x

(x_1, x_2)[1]). Заметим, что после того, как выбраны g_{x_1} и g_{x_2}, в качестве g_x можно взять совокупность всех элементов вида $g_{x_2}g_{x_1}$. В дальнейшем мы считаем что g_x выбраны именно таким образом.

Норма функции Φ в $\mathfrak{H}^V$ задается равенством

$$\|\Phi\|^2_{\mathfrak{H}^V} = \int_X \|\Phi(g_x)\|^2_L \, d\mu(x), \tag{1.17}$$

где $d\mu(x)$ — инвариантная мера на X. Аналогично

$$\|F\|^2_{\mathfrak{H}^U} = \int_{X_1} \|F(g_{x_1}, g_0)\|^2_H \, d\mu_1(x_1), \tag{1.18}$$

$$\|\varphi\|^2_H = \int_{X_2} \|\varphi(g_{x_2})\|^2_L \, d\mu_2(x_2). \tag{1.19}$$

Подставляя в (1.18) выражение (1.19) для нормы в H, получим

$$\|F\|^2_{\mathfrak{H}^U} = \int_{X_1} \left(\int_{X_2} \|F(g_{x_1}, g_{x_2})\|^2_L \, d\mu_2(x_2) \right) d\mu_1(x_1) =$$

$$= \int_{X_1 \times X_2} \|\Phi(g_{x_2}g_{x_1})\|^2_L \, d\mu_2(x_2) \, d\mu_1(x_1) = \int_X \|\Phi(g_x)\|^2_L \, d\tilde{\mu}(x), \tag{1.20}$$

где $d\tilde{\mu}(x) = d\mu_1(x_1)\, d\mu_2(x_2)$.

Для того чтобы установить равенство интегралов (1.20) и (1.17), остается проверить, что $d\tilde{\mu} = d\mu$. Покажем, что $d\tilde{\mu}$ — инвариантная мера на X. В самом деле, если $g_x = g_{x_2}g_{x_1}$, то для любого $g \in \mathfrak{G}$ имеем

$$g_x g = g_{x_2} g_{x_1} g = g_{x_2} g_0(x_1, g)\, g_{x_1\bar{g}} = g_{00}(x_2, x_1, g)\, g_{\overline{x_2 g_0(x_1, g)}}\, g_{x_1\bar{g}}.$$

Поэтому $d\tilde{\mu}(x\bar{g}) = d\mu_2(\overline{x_2 g_0(x_1, g)})\, d\mu_1(x_1\bar{g}) = d\mu_2(x_2)\, d\mu_1(x_1) = d\tilde{\mu}(x)$. Так как инвариантные меры $d\mu$, $d\mu_1$ и $d\mu_2$ определены однозначно с точностью до постоянного множителя, мы можем нормировать их так, чтобы $d\mu = d\mu_1 d\mu_2$. Лемма доказана.

Л е м м а 1.3. *Пусть $\mathfrak{G}$ — группа Ли, $\mathfrak{G}_0$ — ее замкнутая подгруппа, U — представление $\mathfrak{G}_0$, разлагающееся в прямую сумму (дискретную или непрерывную)*[2]) *представлений U^s: $U = \int U^{(s)}\, d\mu(s)$. Тогда представление T группы $\mathfrak{G}$, индуцированное U, разлагается в прямую сумму $T = \int T^{(s)}\, d\mu(s)$ представлений $T^{(s)}$, индуцированных $U^{(s)}$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть представление U действует в пространстве L. Тогда T действует в пространстве H вектор-функций на $\mathfrak{G}$ со значениями в L. Справедливость леммы вытекает из того, что разложению $L = \int L^{(s)}\, d\mu(s)$ соответствует разложение $H = \int H^{(s)} d\mu(s)$, где $H^{(s)}$ — пространство вектор-функций на $\mathfrak{G}$ со значениями в $L^{(s)}$.

---

[1]) В нашем случае это можно сделать так, чтобы элементы g_x заполняли гладкое подмногообразие в $\mathfrak{G}$. Для дальнейшего достаточно, впрочем, чтобы совокупность элементов g_x была борелевским множеством в $\mathfrak{G}$.

[2]) Определение непрерывной суммы пространств и представлений см., например, в [11].

Следствие. *Если индуцированное представление T неприводимо, то представление U, индуцирующее T, также неприводимо.*

В самом деле, в противном случае U разлагалось бы в прямую сумму двух представлений: $U=U_1+U_2$. Тогда и представление T имело бы вид T_1+T_2, что противоречит его неприводимости.

Лемма 1.4. *Пусть T — представление $\mathfrak{G}$, при котором все элементы некоторого нормального делителя $\mathfrak{G}_1$ переходят в единичный оператор. Представление T можно в этом случае рассматривать как представление $\widetilde{T}$ фактор-группы $\widetilde{\mathfrak{G}}=\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$. Обозначим через φ естественный гомоморфизм $\mathfrak{G}$ на $\widetilde{\mathfrak{G}}$. Если представление $\widetilde{T}$ индуцировано представлением $\widetilde{U}$ подгруппы $\widetilde{\mathfrak{G}}_0\subset\widetilde{\mathfrak{G}}$, то представление T индуцировано представлением U подгруппы $\mathfrak{G}_0=\varphi^{-1}(\widetilde{\mathfrak{G}}_0)$, заданным формулой $U_{g_0}=\widetilde{U}_{\varphi(g_0)}$.*

Доказательство. Представление $\widetilde{T}$ можно реализовать в виде

$$\widetilde{T}_{\widetilde{g}}\widetilde{f}(\widetilde{x})=\widetilde{\alpha}(\widetilde{x},\widetilde{g})\widetilde{f}(\overline{\widetilde{x}\widetilde{g}}),$$

где $\widetilde{f}(\widetilde{x})$ — вектор-функция на $\widetilde{X}=\widetilde{\mathfrak{G}}/\widetilde{\mathfrak{G}}_0$. Представление T действует в том же пространстве и имеет вид

$$T_g\widetilde{f}(\widetilde{x})=\widetilde{\alpha}(\widetilde{x},\varphi(g))\widetilde{f}(\overline{\widetilde{x}\varphi(g)}). \tag{1.21}$$

Обозначим через ψ естественный гомеоморфизм многообразия $X=\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ на $\widetilde{X}$, переводящий начальную точку $x_0\in X$ в начальную точку $\widetilde{x}_0\in\widetilde{X}$. Тогда (1.21) можно переписать в виде

$$T_gf(x)=\alpha(x,g)f(\overline{xg}), \tag{1.22}$$

где $f(x)=\widetilde{f}(\psi(x))$, $\alpha(x,g)=\widetilde{\alpha}(\psi(x),\varphi(g))$. Из (1.22) следует, что представление T_g индуцировано представлением $U_{g_0}=\alpha(x_0,g_0)=\widetilde{\alpha}(\psi(x_0),\varphi(g_0))=\widetilde{U}_{\varphi(g_0)}$ подгруппы $\mathfrak{G}_0$, оставляющей на месте точку x_0. Так как $\psi(x_0)=\widetilde{x}_0$, подгруппа $\mathfrak{G}_0$ совпадает с $\varphi^{-1}(\widetilde{\mathfrak{G}}_0)$.

4. С каждым индуцированным представлением связано коммутативное семейство проекционных операторов в пространстве этого представления. Пусть представление T группы $\mathfrak{G}$ индуцировано представлением U_{g_0} подгруппы $\mathfrak{G}_0$. Пространство H, в котором действует T, мы реализуем в виде пространства вектор-функций на $X=\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$. Тогда каждому измеримому множеству $M\subset X$ можно сопоставить оператор P_M, действие которого состоит в умножении на характеристическую функцию множества M. Очевидно, P_M — самосопряженный проекционный оператор в H. Непосредственно проверяется, что семейство $\{P_M\}$ обладает свойствами:

1. $P_{M_1}P_{M_2}=P_{M_2}P_{M_1}=P_{M_1\cap M_2}$.
2. Если $M_i\cap M_j=0$ при $i\neq j$, то $\Sigma P_{M_i}=P_{\cup M_i}$.
3. $P_X=E$ (единичный оператор).
4. $T_g^{-1}P_MT_g=P_{M\overline{g}}$.

Замечательно, что существование системы проекционных операторов, обладающей свойствами 1—4, является характеристическим свойством индуцированных представлений. А именно справедлива

Теорема Макки (см. [12]). *Пусть заданы однородное многообразие $X = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$ и представление T группы $\mathfrak{G}$ в пространстве H. Если каждому измеримому множеству $M \subset X$ можно сопоставить самосопряженный проекционный оператор P_M в H так, чтобы выполнялись условия* 1—4, *то представление T индуцировано некоторым представлением подгруппы* $\mathfrak{G}_0$.

Мы не будем доказывать теорему Макки, так как в дальнейшем она не используется. Отметим только, что теорема Стона — фон Неймана, используемая в §§ 3—4, а также лемма 4.3 могут быть легко получены из теоремы Макки.

§ 2. Представления алгебры Ли и инфинитезимального группового кольца

Мы напомним в этом параграфе некоторые известные факты теории представлений групп Ли, связанные с понятием инфинитезимального группового кольца. Определение алгебр Ли и их свойства предполагаются известными (см. [13], гл. X).

1. Пусть $\mathfrak{G}$ — группа Ли, G — ее алгебра Ли[1]), T — унитарное представление $\mathfrak{G}$ в пространстве H. Назовем вектор ξ из H *дифференцируемым*, если $T_g\xi$ — дифференцируемая вектор-функция на $\mathfrak{G}$. Множество $S(H)$ бесконечно дифференцируемых векторов образует всюду плотное (незамкнутое) подпространство в H. В самом деле, для любой бесконечно дифференцируемой финитной функции φ на $\mathfrak{G}$ и любого вектора $\xi \in H$ вектор $\xi_1 = \int \varphi(g)\, T_g \xi\, dg$ бесконечно дифференцируем. Функцию φ всегда можно подобрать так, чтобы норма разности $\|\xi - \xi_1\|$ была как угодно мала. Для этого достаточно, например, чтобы φ была сосредоточена в малой окрестности единицы и выполнялось условие $\int \varphi(g)\, dg = 1$.

В пространстве $S(H)$ можно определить представление алгебры Ли G, соответствующее представлению T группы $\mathfrak{G}$. Пусть $x \in G$. Возьмем кривую в группе $\mathfrak{G}$ такую, что $g(0) = e$ и касательный вектор к $g(t)$ в точке $t = 0$ совпадает с x. Если ξ — дифференцируемый вектор из H, то $T_{g(t)}\xi$ — дифференцируемая функция t. Положим

$$T_x \xi = \frac{d}{dt}\left(T_{g(t)}\xi\right)\Big|_{t=0}. \tag{2.1}$$

Очевидно, T_x — линейный оператор в пространстве $S(H)$. Несложная проверка показывает, что соответствие $x \longrightarrow T_x$ является представлением алгебры G в пространстве $S(H)$, т. е. выполняются соотношения

$$T_{ax+by} = aT_x + bT_y, \tag{2.2}$$

[1]) Всюду в дальнейшем группы Ли будут обозначаться готической буквой $\mathfrak{G}$, снабженной в случае надобности различными индексами. Алгебра Ли будет обозначаться латинской буквой G с теми же индексами, а пространство, сопряженное к G, — символом G'.

здесь x, $y \in G$, a, b — вещественные числа и

$$T_{[x,\, y]} = T_x T_y - T_y T_x, \tag{2.3}$$

где $[x, y]$ — коммутатор элементов x и y.

Можно показать, что операторы T_x, которые мы определили в пространстве $S(H)$, расширяются до кососамосопряженных операторов (вообще говоря, неограниченных) в H. Представления группы и алгебры связаны соотношением

$$T_{\exp x} = e^{T_x}, \tag{2.4}$$

где exp означает каноническое отображение алгебры на группу.

В пространстве $S(H)$ можно ввести счетную систему норм следующим образом. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — базис в алгебре G. Положим для $\xi \in S(H)$

$$\| \xi \|_p = \max_{\substack{\Sigma k_i \leqslant p, \\ k_i \geqslant 0}} \| T_{x_1}^{k_1} \ldots T_{x_n}^{k_n} \xi \|_H. \tag{2.5}$$

Заметим, что для всякой бесконечно дифференцируемой быстро убывающей функции φ на $\mathfrak{G}$ оператор $T_\varphi = \int \varphi(g) T_g\, dg$ является непрерывным оператором из H в $S(H)$ относительно норм (2.5). В дальнейшем мы увидим, что, когда $\mathfrak{G}$ — нильпотентная группа Ли, а T — неприводимое представление, пространство $S(H)$ с системой норм (2.5) будет счетно-нормированным ядерным пространством. Поэтому операторы T_φ будут в этом случае ядерными операторами (см. теорему 7.3).

2. Пусть G — алгебра Ли группы $\mathfrak{G}$, $x_1, \ldots, x_n$ — ее базис. Обозначим через R кольцо всех многочленов с комплексными коэффициентами от некоммутирующих переменных $x_1, \ldots, x_n$. Пусть R_0 — двусторонний идеал в R, порожденный многочленами вида

$$x_i x_j - x_j x_i - [x_i, x_j].$$

Фактор-кольцо $A = R/R_0$ называется *инфинитезимальным* групповым кольцом группы $\mathfrak{G}$[1]). Оно естественно изоморфно кольцу левоинвариантных дифференциальных операторов на группе $\mathfrak{G}$.

Элементы кольца A можно записывать, как и элементы R, в виде многочленов от $x_1, \ldots, x_n$, хотя эта запись, разумеется, неоднозначна. Однако если потребовать, чтобы в выражении

$$p = \sum a_{j_1, \ldots, j_k} x_{j_1} \ldots x_{j_k}$$

коэффициенты $a_{j_1, \ldots, j_k}$ были симметричны по всем индексам, то запись элементов A в виде многочленов $p(x)$ становится однозначной.

Во многих вопросах теории групп Ли важно знать, как устроен центр кольца A, который мы обозначим через $Z(A)$.

Пусть G' — пространство, сопряженное к G. Обозначим через ϱ' представление $\mathfrak{G}$ в G', двойственное к присоединенному представлению ϱ в G.

[1]) Это кольцо называют также обертывающей алгеброй и ассоциативной оболочкой алгебры G.

Элементы A можно отождествить с полиномиальными функциями на G', поставив в соответствие многочлену $p(x)=\sum a_{j_1,\ldots,j_k} x_{j_1} \ldots x_{j_k}$ (с симметричными коэффициентами $a_{j_1,\ldots,j_k}$) функцию [1])

$$P(f)=\sum i^k a_{j_1,\ldots,j_k}(f, x_{j_1}) \ldots (f, x_{j_k}).$$

И. М. Гельфанд доказал следующее

Предложение 1 (см. [14]). *Элемент $p \in A$ тогда и только тогда принадлежит центру A, когда соответствующая полиномиальная функция $P(f)$ инвариантна относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$.*

Известно, что для полупростой алгебры Ли кольцо $Z(A)$ изоморфно кольцу многочленов от r переменных, где r — ранг алгебры. Для нильпотентных групп это не так, но можно показать (см. [4]), что поле отношений $Z(A)$ изоморфно полю рациональных функций от $n-2p$ переменных, где n — размерность алгебры, а p — некоторое целое число, называемое дефектом коммутативности.

Мы будем использовать следующий факт, доказанный Шевалле:

Предложение 2. *Пусть V — вещественное n-мерное линейное пространство, в котором действует линейная нильпотентная группа Ли $\mathfrak{G}$. Существуют такие полиномиальные функции $P_0, P_1, \ldots, P_k$ на V, инвариантные относительно $\mathfrak{G}$, что множество*

$$V_0=\{v\colon P_0(v)\neq 0\}$$

расслаивается относительно $\mathfrak{G}$ на $(n-k)$-мерные орбиты, задаваемые уравнениями

$$P_i(v)=\mathrm{const} \qquad (i=1, 2, \ldots, k).$$

Очевидно, множество V_0 открыто и всюду плотно в V. Поэтому орбиты, лежащие в V_0, естественно назвать орбитами общего положения. Из предложений 1 и 2 вытекает, в частности, что дефект коммутативности, введенный Диксмье, равен половине размерности орбит общего положения в G' относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$.

3. Представление T алгебры Ли в пространстве $S(H)$, построенное в п. 1, можно в силу соотношения (2.3) продолжить до представления инфинитезимального группового кольца A. Элементы $Z(A)$ переходят при этом в операторы, перестановочные со всеми операторами представления. В частности, при неприводимом представлении T каждый элемент $p \in Z(A)$ переходит в скалярный оператор $T_p=\chi(p)E$ [2]). Таким образом, каждое неприводимое унитарное представление T группы $\mathfrak{G}$ определяет гомоморфизм $p \longrightarrow \chi(p)$ центра инфинитезимального группового кольца в поле комплексных чисел. Этот гомоморфизм называют инфинитезимальным характером представления T. Ниже мы увидим, что представления нильпотентных групп Ли, как правило, определяются своим инфинитезимальным характером с точностью до эквивалентности (см. § 7).

---

[1]) Отметим, что соответствие между элементами A и полиномиальными функциями на G' не является изоморфизмом колец.

[2]) Операторы T_p, $p \in Z(A)$, будут явно вычислены в § 7. Поэтому мы не даем здесь доказательства их скалярности (ср. Диксмье, [4]).

§ 3. Специальная нильпотентная группа $\mathfrak{N}$

Простейшая некоммутативная нильпотентная группа Ли — это группа треугольных вещественных матриц вида

$$\begin{Vmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Мы обозначим эту группу через $\mathfrak{N}$, а соответствующую алгебру Ли — через N. Алгебра N состоит из вещественных матриц вида

$$\begin{Vmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Матрицы

$$x = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad y = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \quad \text{и} \quad z = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

образуют базис в N. Соотношения коммутирования для базисных векторов имеют вид

$$[x, y] = z, \quad [x, z] = 0, \quad [y, z] = 0. \tag{3.1}$$

Посмотрим, как устроены унитарные представления группы $\mathfrak{N}$. Пусть T — неприводимое унитарное представление $\mathfrak{N}$ в пространстве H. Элементы центра группы переходят в унитарные операторы, перестановочные со всеми операторами представления. Поэтому при неприводимом представлении T элементы центра переходят в операторы, кратные единичному. Следовательно, элементы центра алгебры также переходят в операторы, кратные единичному. В частности, $T_z = i\lambda E$. Чтобы полностью определить представление алгебры, нужно еще знать операторы T_x и T_y. Эти операторы должны быть кососамосопряженными и удовлетворять условию

$$T_x T_y - T_y T_x = T_z = i\lambda E. \tag{3.2}$$

Рассмотрим отдельно два случая.

I. $\lambda = 0$. В этом случае из (3.2) следует, что $T_x T_y = T_y T_z$, т. е. операторы представления, соответствующие базисным векторам, перестановочны. Тогда все операторы представления алгебры, а следовательно, и группы (ср. (2.4)) перестановочны между собой. Следовательно, все они кратны единичному оператору, и представление T неприводимо лишь в том случае, когда оно одномерно.

Итак, случай $\lambda = 0$ соответствует одномерным представлениям алгебры, которые имеют вид

$$T_x = i\mu, \quad T_y = i\nu, \quad T_z = 0. \tag{3.3}$$

Соответствующие одномерные представления группы задаются формулой

$$T_{\exp(ax+by+cz)} = e^{i(\mu a + \nu b)}. \tag{3.4}$$

II. $\lambda \neq 0$. Положим $iT_x = P$, $\frac{1}{i\lambda} T_y = Q$. Тогда P и Q — самосопряженные операторы, и из (3.2) следует

$$PQ - QP = iE. \tag{3.5}$$

Это — фундаментальное соотношение, связывающее операторы координаты и импульса в квантовой механике [1]). Примером такой пары операторов являются $P = i\frac{d}{dt}$, $Q = t$ в пространстве $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$. В этом случае

$$T_x = \frac{d}{dt}, \quad T_y = i\lambda t, \quad T_z = i\lambda. \tag{3.6}$$

Соответствующие представления группы имеют вид

$$T_{\exp(ax+by+cz)} f(t) = e^{i\lambda\left(bt+c+\frac{ab}{2}\right)} f(x+a). \tag{3.7}$$

Очевидно, чтобы найти все представления $\mathfrak{N}$, нужно найти все пары самосопряженных операторов, удовлетворяющие соотношению (3.5). Этой задаче и различным ее обобщениям было посвящено много работ. Нам понадобится следующая

Теорема Стона — фон Неймана ([15], [16]). *Если P и Q — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве H, удовлетворяющие условию* (3.5), *то пространство H можно представить в виде дискретной прямой суммы инвариантных и неприводимых относительно P и Q подпространств H_k, в каждом из которых пара P, Q унитарно эквивалентна паре $P_0 = i\frac{d}{dt}$, $Q_0 = t$ в $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$.*

Мы наметим доказательство этой теоремы. Оператор P — самосопряженный, поэтому $U_\tau = e^{i\tau P}$ — унитарный оператор в H. Из (3.5) легко выводится, что $U_\tau^{-1} Q U_\tau = Q + \tau E$. Это значит, что операторы Q и $Q + \tau E$ унитарно эквивалентны. Отсюда можно получить, что оператор Q имеет лебеговский спектр [2]), т. е. пространство H можно реализовать в виде пространства вектор-функций $f(t)$ на прямой со значениями в гильбертовом пространстве L так, что скалярное произведение в H задается равенством

$$(f_1, f_2)_H = \int_{-\infty}^{\infty} (f_1(t), f_2(t))_L \, dt,$$

а оператор Q действует по формуле $Qf(t) = tf(t)$.

Рассмотрим в пространстве H оператор $\widetilde{P}$: $f(t) \to if'(t)$. Очевидно, $\widetilde{P}$ — самосопряженный оператор, удовлетворяющий соотношению $\widetilde{P}Q - Q\widetilde{P} = iE$. Поэтому оператор $R_\tau = e^{i\tau P} e^{-i\tau\widetilde{P}}$ будет унитарным оператором, перестановочным с Q. Как показано в [11], такой оператор R_τ должен иметь вид $R_\tau f(t) = R(t, \tau) f(t)$, где $R(t, \tau)$ — операторная функция, значения которой — унитарные операторы в L. Итак, $e^{i\tau P} = R(t, \tau) e^{i\tau\widetilde{P}}$. Так как $\{e^{i\tau P}\}$ — группа, функция $R(t, \tau)$ удовлетворяет функциональному уравнению (ср. § 1, п. 1), из которого вытекает, что $R(t, \tau) = S^{-1}(t) S(t+\tau)$, где $S(t) = R(0, t)$. Оператор S: $f(t) \to S(t) f(t)$ унитарен в H. Поэтому пара P, Q эквивалентна паре $P_1 = SPS^{-1}$, $Q_1 = SQS^{-1}$. Непосредственный подсчет показывает, что

[1]) При постоянной Планка h, равной 1.

[2]) Используя, например, унитарную классификацию самосопряженных операторов, данную в [17], гл. 4.

$P_1 = i\frac{d}{dt}$, $Q_1 = t$. Представим теперь пространство L в виде прямой дискретной суммы одномерных подпространств L_k. Тогда H будет прямой дискретной суммой подпространств H_k, состоящих из вектор-функций со значениями в L_k. Очевидно, подпространства H_k инвариантны относительно P_1 и Q_1, в каждом из них пара P_1, Q_1 эквивалентна паре $i\frac{d}{dt}$, t в пространстве $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$.

Из теоремы Стона — фон Неймана следует, что все унитарные представления группы $\mathfrak{N}$ исчерпываются найденными нами представлениями (3.4) и (3.7). Кроме того, из нее легко получить, что приводимые представления $\mathfrak{N}$, при которых базисный вектор $z \in N$ переходит в $i\lambda E$ $(\lambda \neq 0)$, также имеют вид (3.7), только $f(t)$ нужно считать вектор-функцией на прямой со значениями в некотором гильбертовом пространстве L. Пространство представления состоит в этом случае из всех измеримых вектор-функций, для которых $\int \|f(t)\|_L^2\, dt < \infty$, а скалярное произведение задается формулой $(f_1, f_2) = \int (f_1(t) f_2(t))_L\, dt$. Полученные результаты можно сформулировать следующим образом:

Лемма 3.1. *Всякое унитарное представление T группы $\mathfrak{N}$, при котором элемент $z \in N$ переходит в $i\lambda E$, $\lambda \neq 0$, индуцировано некоторым представлением U подгруппы $\mathfrak{N}_0 = \{\exp(by+cz)\}$, имеющим вид*

$$U_{\exp(by+cz)} = e^{i(\mu b+\lambda c)}E,$$

где константу μ можно выбрать произвольно.

В самом деле, рассматривая вещественную прямую как многообразие $\mathfrak{N}/\mathfrak{N}_0$, мы видим, что формула (3.7) является частным случаем формулы (1.1), определяющей индуцированное представление. Подгруппа $\mathfrak{N}_0$ — нормальный делитель в $\mathfrak{N}$. Она является стационарной подгруппой всех точек прямой. Взяв за начальную точку $t_0 = \frac{\mu}{\lambda}$, мы получим, что представление T индуцировано представлением U, имеющим вид

$$U_{\exp(by+cz)} = e^{i\lambda(bt_0+c)}E = e^{i(\mu b+\lambda c)}E,$$

где E — единичный оператор в L. В частности, если представление T неприводимо, то оно индуцировано одномерным представлением

$$U_{\exp(by+cz)} = e^{i(\mu b+\lambda c)}.$$

§ 4. Нильпотентные группы Ли с одномерным центром

1. Мы напомним определение нильпотентных групп и некоторые их свойства. Группа Ли $\mathfrak{G}$ называется *нильпотентной*, если существует такая последовательность $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}_n \supset \mathfrak{G}_{n-1} \supset \ldots \supset \mathfrak{G}_0 = \{e\}$ нормальных делителей $\mathfrak{G}$, что $\mathfrak{G}_{k+1}/\mathfrak{G}_k$ лежит в центре $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_k$. Это эквивалентно существованию в алгебре Ли G такой последовательности идеалов $G = G_n \supset G_{n-1} \supset \ldots \supset G_0 = \{0\}$, что $[G, G_{k+1}]$ лежит в G_k. Без ограничения общности можно считать, что размерности G_k возрастают на 1 с возрастанием k, так что $\dim G_k = k$. Если $\mathfrak{G}$ — нильпотентная группа, то все ее подгруппы и фактор-группы также

нильпотентны. Для односвязных нильпотентных групп каноническое отображение exp алгебры на группу взаимно однозначно.

В §§ 4—7 мы будем рассматривать только односвязные группы.

Рассмотрим подробнее строение нильпотентных групп с одномерным центром.

Лемма 4.1. *Если G — нильпотентная алгебра Ли с одномерным центром Z, то существует разложение (в дальнейшем называемое каноническим разложением) $G = X + Y + Z + W$, в котором пространства X, Y и Z одномерны, а базисные векторы x, y, z выбраны так, что выполняются соотношения*:

$$[x, y] = z, \quad [y, w] = 0 \quad \textit{для} \quad w \in W. \tag{4.1}$$

Доказательство. Пусть z — базисный вектор в Z. Так как G нильпотентна, существует такой двумерный идеал G_2, что $[G, G_2] \subset Z$[1]). Дополним вектор z до базиса в G_2 вектором y. Так как y не принадлежит центру G, коммутатор $[x, y]$ не может равняться нулю для всех $x \in G$. Поэтому существует элемент $x \in G$, для которого $[x, y] = z$. Обозначим через G_0 подпространство G, состоящее из элементов, перестановочных с y. Очевидно, y и z принадлежат G_0. Поэтому G_0 можно представить в виде $Y + Z + W$, где Y — одномерное подпространство, порожденное вектором y. Обозначим через X одномерное подпространство, порожденное x, и покажем, что $G = G_0 + X$. В самом деле, пусть t — любой элемент G. Коммутатор $[t, y]$ лежит в Z и, следовательно, имеет вид az. Тогда $t - ax$ коммутирует с y и, значит, лежит в G_0. Поэтому t однозначно представляется в виде $t = ax + t_0$, $t_0 \in G_0$.

Следствие. *В каждой некоммутативной нильпотентной алгебре Ли с одномерным центром есть подалгебра, изоморфная N* (см. § 3).

В самом деле, подалгебра, натянутая на векторы x, y, z, очевидно, изоморфна N.

Лемма 4.2. *Пусть $\mathfrak{G}$ — односвязная нильпотентная группа Ли, G — ее алгебра Ли, $G = X + Y + Z + W$ — каноническое разложение G, построенное в лемме 4.1. Подпространство $G_0 = Y + Z + W$ является идеалом в G. Группа $\mathfrak{G}$ разлагается в полупрямое произведение*[2]) *нормального делителя $\mathfrak{G}_0 = \exp G_0$ и однопараметрической подгруппы* $\exp X$.

Доказательство. Подпространство G_0 состоит из всех элементов $t_0 \in G$, коммутирующих с y. Пусть $t \in G$, $t_0 \in G_0$. Тогда, используя тождество Якоби, можно написать $[[t, t_0], y] = -[[t_0, y], t] - [[y, t], t_0] = 0$, так как $[t_0, y] = 0$ и $[y, t] \in Z$. Поэтому $[t, t_0] \in G_0$. Первая часть леммы доказана.

Якобиан отображения $(t_0, ax) \to \exp t_0 \exp ax$ в точке $t_0 = 0$, $a = 0$ совпадает с якобианом канонического отображения $(t_0, ax) \to \exp(t_0 + ax)$ и поэтому отличен от нуля. Следовательно, существует окрестность V единицы груп-

---

[1]) Мы предполагаем, что $\dim G > 1$.

[2]) Говорят, что группа $\mathfrak{G}$ разлагается в полупрямое произведение подгрупп $\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_2$, если каждый элемент $g \in \mathfrak{G}$ однозначно представляется в виде

$$g = g_1 g_2, \quad g_1 \in \mathfrak{G}_1, \quad g_2 \in \mathfrak{G}_2.$$

пы $\mathfrak{G}$, в которой каждый элемент представляется в виде

$$g = \exp t_0 \cdot \exp ax. \tag{4.2}$$

Пусть теперь $g = \exp t_0 \cdot \exp ax$, $g' = \exp t_0' \cdot \exp a'x$. Покажем, что произведение gg' также представимо в виде (4.2). Запишем gg' следующим образом: $gg' = \exp t_0 \cdot \exp ax \cdot \exp t_0' \cdot \exp a'x = \exp t_0 (\exp ax \cdot \exp t_0' \cdot \exp(-ax)) \exp ax \cdot \exp a'x$. Заметим, теперь, что $\mathfrak{G}_0 = \exp G_0$ — нормальный делитель $\mathfrak{G}$. Поэтому $\exp ax \cdot \exp t_0' \cdot \exp(-ax) = \exp t_0'' \in \mathfrak{G}_0$. Тогда $gg' = \exp t_0 \cdot \exp t_0'' \cdot \exp ax \cdot \exp a'x = \exp t_0''' \cdot \exp(a+a')x$. Каждый элемент $\mathfrak{G}$ может быть представлен как произведение конечного числа элементов из V[1]. Следовательно, все элементы $\mathfrak{G}$ представимы в виде (4.2). Покажем, что это представление однозначно. Пусть

$$\exp t_0 \cdot \exp ax = \exp t_0' \cdot \exp a'x.$$

Тогда $\exp(a-a')x = \exp(-t_0) \cdot \exp t_0' \in \mathfrak{G}_0$. Так как отображение exp взаимно однозначно, отсюда следует, что $(a-a')x \in G_0$. Но это возможно лишь при $a = a'$, что и доказывает однозначность разложения.

Отметим, что в доказательстве второй части леммы мы нигде не использовали специальный вид нормального делителя $\mathfrak{G}_0$. Поэтому мы доказали фактически следующее утверждение: если G_0 — идеал в G и $G = G_0 + X$, где X — некоторое одномерное подпространство, то группа $\mathfrak{G} = \exp G$ разлагается в полупрямое произведение подгрупп $\mathfrak{G}_0 = \exp G_0$ и $\exp X$. Это утверждение мы используем в дальнейшем.

2. Посмотрим теперь, как устроены представления нильпотентной группы $\mathfrak{G}$ с одномерным центром. Пусть T — неприводимое унитарное представление $\mathfrak{G}$. Элементы центра G переходят при представлении T в операторы, кратные единичному. Поэтому $T_z = i\lambda E$. Мы будем называть представление T *локально точным*, если $\lambda \neq 0$[2].

Лемма 4.3[3]. *Каждое локально точное представление T группы $\mathfrak{G}$ индуцировано некоторым представлением U подгруппы $\mathfrak{G}_0$ (см. лемму 4.2), таким, что*

$$U_{\exp(by+cz)} = e^{i(\mu b + \lambda c)} E. \tag{4.3}$$

Представление U можно выбрать так, чтобы константа μ равнялась любому наперед заданному вещественному числу.

Доказательство. Пусть T — локально точное представление $\mathfrak{G}$ в пространстве H. Мы воспользуемся тем, что в алгебре G есть подалгебра, изоморфная N (см. следствие леммы 4.1). Из леммы 3.1 следует, что H можно реализовать как пространство вектор-функций на прямой со значениями в гильбертовом пространстве L, так что операторы представ-

---

[1]) Легко показать, что множество элементов $g \in \mathfrak{G}$, которые представляются в виде произведения конечного числа элементов из V, открыто и замкнуто в $\mathfrak{G}$. Так как $\mathfrak{G}$ связна, это множество совпадает с $\mathfrak{G}$.

[2]) Нетрудно проверить, что это определение эквивалентно обычному: представление локально точно, если ядро его дискретно.

[3]) Результаты, близкие к леммам 4.3 и 4.4, получены Диксмье [5]; ср. также теорему 14.1 в [6].

ления подалгебры N в этой реализации имеют вид

$$T_x = \frac{d}{dt}, \quad T_y = i\lambda t, \quad T_z = i\lambda. \tag{4.4}$$

Элементы подалгебры G_0 коммутируют с y. Поэтому операторы T_{g_0}, $g_0 \in \mathfrak{G}_0$, коммутируют с $T_y = i\lambda t$. Как показано в [11], всякий унитарный оператор в H, перестановочный с умножением на t, имеет вид $A: f(t) \longrightarrow \longrightarrow A(t) f(t)$, где $A(t)$ — операторная функция, значения которой — унитарные операторы в L. Поэтому для $g_0 \in \mathfrak{G}_0$ операторы представления имеют вид

$$T_{g_0} f(t) = A(t, g_0) f(t). \tag{4.5}$$

Пусть теперь g — произвольный элемент $\mathfrak{G}$. По лемме 4.2 g однозначно представляется в виде $g = g_0 \cdot \exp ax$. Из (4.4) и (4.5) следует

$$T_g f(t) = A(t, g_0) f(t+a). \tag{4.6}$$

Заметим теперь, что лемма 4.2 позволяет отождествить вещественную прямую с однородным пространством $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$, сопоставив каждому вещественному числу t класс смежности $\mathfrak{G}_0 \exp tx$. Поэтому формулу (4.6) можно рассматривать как частный случай (1.1). Принимая за начальную точку t_0, мы получаем, что представление T, заданное формулой (4.6), индуцировано представлением U подгруппы $\mathfrak{G}_0$, имеющим вид

$$U_{g_0} = A(t_0, g_0).$$

В частности, $U_{\exp(by+cz)} = e^{i\lambda(t_0 b + c)} E$. Выбирая $t_0 = \frac{\mu}{\lambda}$, мы получаем (4.3). Лемма доказана.

Назовем представление U подгруппы $\mathfrak{G}_0$ допустимым, если оно неприводимо и

$$U_{\exp(by+cz)} = e^{i\lambda c} E,$$

где $\lambda \neq 0$.

Из леммы 4.3 следует, что каждое локально точное представление $\mathfrak{G}$ индуцировано некоторым допустимым представлением $\mathfrak{G}_0$. (Нужно лишь положить константу μ в (4.3) равной нулю.) Оказывается, что на самом деле существует взаимно однозначное соответствие между допустимыми представлениями $\mathfrak{G}_0$ и локально точными представлениями $\mathfrak{G}$.

Лемма 4.4. *Если U — допустимое представление $\mathfrak{G}_0$, то представление T группы $\mathfrak{G}$, индуцированное U, неприводимо и локально точно. Представления T и T', индуцированные допустимыми представлениями U и U', эквивалентны тогда и только тогда, когда U и U' эквивалентны.*

Доказательство. Пусть U и U' — допустимые представления $\mathfrak{G}_0$, действующие в пространствах L и L', и $U_{\exp(by+cz)} = e^{i\lambda c} E$, $U'_{\exp(by+cz)} = e^{i\lambda' c} E$. Представление $T\,(T')$ действует в пространстве $H\,(H')$ вектор-функций на прямой со значениями в $L\,(L')$. Посмотрим, когда существует такой унитарный оператор K из H в H', что

$$KT_g = T'_g K \quad \text{для всех } g \in \mathfrak{G}. \tag{4.7}$$

Из (4.7) следует, в частности, что $KT_z = T'_z K$ и $KT_y = T^{\prime}_y K$. Первое из этих

соотношений дает

$$i\lambda K = i\lambda' K.$$

Отсюда следует, что искомый оператор K может существовать, только если $\lambda=\lambda'$. В этом случае второе соотношение дает

$$i\lambda t\cdot Kf(t) = K(i\lambda t f)(t),$$

т. е. оператор K перестановочен с умножением на t. Тогда его можно представить в виде $Kf(t)=K(t)f(t)$, где $K(t)$ — операторная функция, значения которой — унитарные операторы из L в L' [1]). Наконец, из условия $KT_{\exp ax} = T'_{\exp ax}K$ мы получаем, что $K(t)=K(t+a)$ при любом a для почти всех t. Это значит, что оператор K имеет вид

$$Kf(t) = K_0 f(t),$$

где K_0 — некоторый унитарный оператор из L в L'. Очевидно, что оператор K обладает свойством (4.7) тогда и только тогда, когда

$$K_0 U_{g_0} = U'_{g_0} K_0. \tag{4.8}$$

Отсюда утверждения леммы получаются без труда. В самом деле, эквивалентность T и T' означает существование унитарного оператора K, удовлетворяющего (4.7). Мы показали, что это равносильно существованию оператора K_0, удовлетворяющего (4.8), что в свою очередь равносильно эквивалентности U и U'. Таким образом, вторая половина леммы доказана.

Для доказательства первой половины заметим, что приводимость T равносильна существованию в пространстве H не скалярного унитарного оператора K такого, что $KT_g=T_gK$. Так же, как и выше, можно показать, что это равносильно существованию в пространстве L не скалярного унитарного оператора K_0 такого, что $K_0U_{g_0}=U_{g_0}K_0$, что в свою очередь равносильно приводимости U_g. Лемма полностью доказана.

§ 5. Описание представлений нильпотентных групп Ли

1. Основной метод, используемый нами в дальнейшем, состоит в том, что изучение представлений данной группы мы сводим к изучению представлений некоторых групп меньшей размерности. Это делается следующим образом. Пусть T — неприводимое представление группы $\mathfrak{G}$. Рассмотрим соответствующую алгебру Ли G и ее центр Z. Возможны два случая.

I. $\dim Z>1$. Пусть $z_1, \ldots, z_k$ — базис в Z. Так как представление T неприводимо, операторы представления, соответствующие элементам центра, кратны единичному:

$$T_{z_1} = i\lambda_1 E, \ \ldots, \qquad T_{z_k} = i\lambda_k E.$$

Рассмотрим в Z подпространство Z_0, состоящее из векторов $z=c_1z_1+\ldots+c_kz_k$, для которых $\Sigma c_k\lambda_k=0$. Очевидно, $\dim Z_0 \geqslant \dim Z-1>0$ и для всех $z_0\in Z_0$ оператор T_{z_0} равен нулю. Следовательно, при представлении T все элементы нормального делителя $\mathfrak{Z}_0=\exp Z_0$ переходят в единичный оператор. Поэтому

[1]) Доказательство этого утверждения несущественно отличается от доказательства теоремы III § 2 в [11].

представление $\widetilde{T}$ можно рассматривать как представление $\widetilde{T}$ группы $\widetilde{\mathfrak{G}}=\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_0$, имеющей меньшую размерность.

II. $\dim Z=1$. Пусть $G=X+Y+Z+W$ — каноническое разложение G (см. лемму 4.1), z — базисный вектор в Z. Здесь опять возможны два случая.

1) $T_z=0$. Тогда элементы центра группы $\mathfrak{Z}=\exp Z$ переходят при представлении T в единичный оператор, и T можно рассматривать как представление $\widetilde{T}$ группы $\widetilde{\mathfrak{G}}=\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$ меньшей размерности.

2) $T_z=i\lambda E$, $\lambda\neq 0$. Тогда по лемме 4.3 представление T индуцировано некоторым представлением U подгруппы $\mathfrak{G}_0=\exp(Y+Z+W)$. Таким образом, изучение T и в этом случае сводится к изучению представлений группы меньшей размерности.

Применением описанного метода без труда доказывается

Теорема 5.1[1]). *Каждое неприводимое унитарное представление T нильпотентной группы Ли $\mathfrak{G}$ мономиально, т. е. индуцировано одномерным представлением некоторой подгруппы.*

Доказательство мы проведем индукцией по размерности группы. Пусть теорема доказана для групп размерности $\leqslant n$. Рассмотрим неприводимое представление T группы $\mathfrak{G}$, которая имеет размерность $n+1$. Пусть G — соответствующая алгебра Ли, Z — ее центр. Если $\dim Z>1$, то, как мы видели выше, существует нормальный делитель $\mathfrak{Z}_0$ размерности $\geqslant 1$, элементы которого переходят в единичный оператор при представлении T. Обозначим через φ естественный гомоморфизм $\mathfrak{G}$ на $\widetilde{\mathfrak{G}}=\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_0$. Представление T можно, очевидно, записать в виде $T_g=\widetilde{T}_{\varphi(g)}$, где $\widetilde{T}$ — представление группы $\widetilde{\mathfrak{G}}$. Так как $\dim\widetilde{\mathfrak{G}}\leqslant n$, представление $\widetilde{T}$ по предположению индукции индуцировано одномерным представлением $\widetilde{U}$ некоторой подгруппы $\widetilde{\mathfrak{G}}_0\subset\widetilde{\mathfrak{G}}$. Тогда по лемме 1.4 представление T индуцировано представлением U подгруппы $\mathfrak{G}_0=\varphi^{-1}(\widetilde{\mathfrak{G}}_0)$, имеющим вид $U_{g_0}=\widetilde{U}_{\varphi(g)}$. Представление U действует в том же пространстве, что и $\widetilde{U}$, и, следовательно, одномерно.

Аналогичные рассуждения справедливы и в том случае, когда $\dim Z=1$ и $T_z=0$.

Остается разобрать случай $\dim Z=1$ и $T_z=i\lambda E$, где $\lambda\neq 0$. Тогда по лемме 4.3 представление T индуцировано некоторым представлением U подгруппы $\mathfrak{G}_0$ размерности n. По предположению индукции представление U индуцировано одномерным представлением V некоторой подгруппы $\mathfrak{G}_{00}\subset\mathfrak{G}_0$. Применяя лемму 1.2, получаем, что представление T индуцировано одномерным представлением V.

Для доказательства теоремы остается рассмотреть случай $\dim\mathfrak{G}=1$. Но группа $\mathfrak{G}$ в этом случае изоморфна группе сдвигов вещественной прямой. Каждое неприводимое представление T одномерно и, как легко видеть, индуцировано самим собой. Теорема полностью доказана.

2. Нас интересуют теперь следующие вопросы:

1) Когда мономиальное представление T неприводимо?

---

[1]) Этот результат независимо получен Диксмье [18] и автором [1].

2) Когда два неприводимых мономиальных представления T и T' эквивалентны?

Для решения этих вопросов нам понадобятся некоторые приготовления.

Рассмотрим несколько подробнее структуру одномерных представлений. Пусть $\mathfrak{G}$ — нильпотентная группа Ли, G — ее алгебра Ли, U — унитарное одномерное представление $\mathfrak{G}$. Соответствующее представление алгебры G, очевидно, имеет вид

$$x \longrightarrow i(f, x), \tag{5.1}$$

где f — некоторый вещественный линейный функционал на G. Однако не для каждого функционала f формула (5.1) задает представление G. В самом деле, операторы U_x удовлетворяют соотношению $U_{[x, y]} = U_x U_y - U_y U_x$, которое в случае одномерных представлений превращается в условие

$$U_{[x, y]} = 0.$$

Поэтому, чтобы формула (5.1) задавала представление G, необходимо, чтобы выполнялось условие

$$(f, [x, y]) = 0 \tag{5.2}$$

для всех $x, y \in G$. Легко проверить, что это условие является также и достаточным.

Пусть теперь G' — множество вещественных линейных функционалов на G. Назовем подалгебру $G_1 \subset G$ подчиненной функционалу $f \in G'$, если соотношение (5.2) выполняется для любых x, y из G_1. В этом случае формула

$$U_{\exp x} = e^{i(f, x)} \tag{5.3}$$

задает одномерное унитарное представление подгруппы $\mathfrak{G}_1 = \exp G_1$.

Наконец, обозначим через ϱ' представление $\mathfrak{G}$ в пространстве G', двойственное к присоединенному представлению ϱ в пространстве G.

Теперь мы можем сформулировать ответ на поставленные выше вопросы.

Теорема 5.2. *Пусть $\mathfrak{G}$ — односвязная нильпотентная группа Ли, G — ее алгебра Ли. Для каждого функционала f на G и подалгебры G_1, подчиненной f, обозначим через $T^{(f, G_1)}$ представление $\mathfrak{G}$, индуцированное одномерным представлением $U_{\exp x} = e^{i(f, x)}$ подгруппы $\mathfrak{G}_1 = \exp G_1$. Тогда*

1) *Представление $T^{(f, G_1)}$ неприводимо тогда и только тогда, когда G_1 — подалгебра максимальной размерности, подчиненная f.*

2) *Неприводимые представления $T^{(f_1, G_1)}$ и $T^{(f_2, G_2)}$ эквивалентны тогда и только тогда, когда функционалы f_1 и f_2 конгруэнтны относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$.*

Доказательство. Для групп размерности 1 теорема очевидна. Предположим, что она доказана для групп размерности $\leqslant n$, и рассмотрим группу $\mathfrak{G}$ размерности $n+1$. Пусть G — алгебра Ли группы $\mathfrak{G}$, Z — центр G, f — вещественный функционал на G, G_1 — подалгебра, подчиненная f. Обозначим через Z_0 подпространство Z, определенное условием $z_0 \in Z_0$, если $(f, z_0) = 0$. Очевидно, $\dim Z_0 \geqslant \dim Z - 1$.

I. $\dim Z_0 \geqslant 1$. Рассмотрим сначала случай, когда $Z_0 \subset G_1$. Пусть $\mathfrak{Z}_0 = \exp Z_0$ и φ — естественный гомоморфизм $\mathfrak{G}$ на $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_0$. Соответствующий гомоморфизм G на $\widetilde{G} = G/Z_0$ мы также обозначим буквой φ. Функционалу f на G соответствует функционал $\tilde{f}$ на $\widetilde{G}$, определенный равенством

$(\widetilde{f}, \varphi(x)) = (f, x)$. Легко проверить, что подалгебра $G_1 \subset G$ подчинена f тогда и только тогда, когда подалгебра $\varphi(G_1) \subset \widetilde{G}$ подчинена $\widetilde{f}$. Кроме того, функционалы f_1 и f_2 могут определять эквивалентные представления $T^{(f_1, G_1)}$ и $T^{(f_2, G_2)}$, лишь когда они совпадают на Z[1]). А если f_1 и f_2 совпадают на Z, то они конгруэнтны относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$ тогда и только тогда, когда $\widetilde{f}_1$ и $\widetilde{f}_2$ конгруэнтны относительно $\varrho'(\widetilde{\mathfrak{G}})$. Так как $\dim\widetilde{\mathfrak{G}} \leqslant n$, справедливость теоремы для рассматриваемого случая следует из предположения индукции и леммы 1.4.

Пусть теперь $Z_0 \not\subset G_1$. Тогда G_1 не будет подалгеброй максимальной размерности, подчиненной f, так как подалгебра $\widetilde{G}_1$, порожденная G_1 и Z_0, имеет большую размерность, чем G_1, и, как легко видеть, подчинена f. Покажем, что в этом случае представление $T^{(f, G_1)}$ приводимо. В силу леммы 1.3 для этого достаточно показать, что представление $\widetilde{T}$ подгруппы $\widetilde{\mathfrak{G}}_1 = \exp \widetilde{G}_1$, индуцированное одномерным представлением группы $\mathfrak{G}_1$, приводимо. Так как Z_0 принадлежит центру G, группа $\widetilde{\mathfrak{G}}_1$ является прямым произведением группы $\mathfrak{G}_1$ и некоторой коммутативной группы $R\ (= \exp(Z_0 - Z_0 \cap G_1))$. Непосредственная проверка показывает, что представление $\widetilde{T}$ является прямым произведением одномерного представления $\mathfrak{G}_1$ и регулярного представления R[2]). Поэтому $\widetilde{T}$ всегда приводимо, если $\dim R > 0$.

II. $\dim Z_0 = 0$. Это возможно, лишь когда $\dim Z = 1$ и $(f, z) = \lambda \neq 0$ для базисного вектора $z \in Z$. Пусть $G = X + Y + Z + W$ — каноническое разложение G (см. лемму 4.1). Обозначим, как и в § 4, через G_0 подалгебру $Y + Z + W$, состоящую из элементов G, коммутирующих с y.

Если подалгебра G_1, подчиненная f, не содержит Z, то, как и в случае I, легко показать, что G_1 не является подалгеброй максимальной размерности, подчиненной f, и что представление $T^{(f, G_1)}$ приводимо.

Мы можем, следовательно, в дальнейших рассуждениях ограничиться подалгебрами, которые содержат Z.

Л е м м а 5.1. *Для каждого функционала f_1 и подчиненной ему подалгебры G_1, содержащей Z, существует такой функционал f_2 и такая подалгебра G_2, подчиненная f_2, что*

1) *f_1 и f_2 конгруэнтны относительно* $\varrho'(\mathfrak{G})$;
2) *представления $T^{(f_1, G_1)}$ и $T^{(f_2, G_2)}$ эквивалентны*;
3) $\dim G_1 = \dim G_2$;
4) *G_2 содержится в G_0*;
5) $(f_2, y) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В качестве функционала f_2 мы возьмем функционал $\varrho'(\exp ax) f_1$, где x — базисный вектор в X, а константа a

---

[1]) В самом деле, непосредственное вычисление показывает, что $T^{(f, G_1)}_{\exp z} = e^{i(f, z)}E$. Поэтому, если $T^{(f_1, G_1)}$ и $T^{(f_2, G_2)}$ эквивалентны, то $(f_1, z) = (f_2, z)$.

[2]) Регулярным представлением группы $\mathfrak{G}$ называется представление в пространстве $\mathscr{L}^2(\mathfrak{G})$, заданное формулой $T_g f(g') = f(g'g)$.

подобрана так, чтобы $(f_2, y)=0$. Для этого достаточно положить $a=\frac{1}{\lambda}(f_1, y)$. Тогда $(f_2, y)=(\varrho'(\exp ax) f_1, y)=(f_1, \varrho^{-1}(\exp ax) y)=(f_1, y-az)=$ $=(f_1, y)-\lambda a=0$. Подгруппа $G_2'=\varrho^{-1}(\exp ax) G_1$, очевидно, подчинена f_2 и имеет ту же размерность, что и G_1. По лемме 1.1 представления $T^{(f_1, G_1)}$ и $T^{(f_2, G_2')}$ эквивалентны. Если бы G_2' содержалась в G_0, лемма была бы доказана. Предположим поэтому, что $G_2' \not\subset G_0$, и положим $G_2=G_2' \cap G_0+Y$. Множество G_2 является подалгеброй. В самом деле, $G_2' \cap G_0$ — подалгебра (как пересечение подалгебр), а Y коммутирует с $G_2' \cap G_0$.

Заметим теперь, что можно так выбрать подпространства X и W в каноническом разложении $G=X+Y+Z+W$ и подпространство $W_0 \subset W$, чтобы выполнялись соотношения:

$$G_2'=X+Z+W, \qquad G_2=Y+Z+W_0 \tag{5.4}$$

и

$$(f_2, x)=(f_2, w_0)=0 \text{ для всех } x \in X,\ w_0 \in W_0. \tag{5.5}$$

В самом деле, в качестве базисного вектора x мы выбирали (см. лемму 4.1) любой элемент, удовлетворяющий соотношению $[x, y]=z$. Так как подалгебра G_2' не содержится в G_0, в ней есть элементы, не коммутирующие с y. Поэтому можно считать, что $X \subset G_2'$. Кроме того, G_2' по условию содержит Z. Следовательно, G_2' можно представить в виде $X+Z+W_0$, где W_0 — подпространство G_2', дополнительное к $X+Z$. Так как $(f_2, z) \neq 0$, подпространства X и W_0 можно выбрать так, чтобы выполнялись соотношения (5.5).

Докажем теперь, что размерности G_2' и G_2 совпадают. В силу соотношений (5.4) достаточно показать, что $Y \not\subset G_2'$. Но если бы $Y \subset G_2'$, то подалгебра G_2' содержала бы одновременно векторы x и y, что невозможно, так как $(f_2, [x, y])=(f_2, z) \neq 0$, а подалгебра G_2' подчинена f_2.

Для доказательства леммы остается проверить, что представления $T^{(f_2, G_2')}$ и $T^{(f_2, G_2)}$ эквивалентны. Пусть $\widetilde{G}=X+Y+Z+W_0$ — подалгебра, порожденная G_2' и G_2. Мы покажем, что представления V' и V группы $\widetilde{\mathfrak{G}}=\exp \widetilde{G}$, индуцированные одномерными представлениями $U_{\exp t}=e^{i(f_2, t)}$ подгрупп $\mathfrak{G}_2'=\exp G_2'$ и $\mathfrak{G}_2=\exp G_2$, эквивалентны. Отсюда будет следовать эквивалентность представлений $T^{(f_2, G_2')}$ и $T^{(f_2, G_2)}$ (которые в силу леммы 1.2 индуцированы V' и V).

Рассмотрим подробнее представления V' и V. Докажем сначала, что W_0 — идеал в $\widetilde{G}$.

В самом деле, так как подалгебры G_2' и G_2 подчинены функционалу f_2 и $(f_2, z) \neq 0$, мы имеем

$$[G_2', G_2'] \subset X+W_0, \qquad [G_2, G_2] \subset Y+W_0.$$

Отсюда следует, что $X+W_0$ и $Y+W_0$ — подалгебры. Следовательно, их пересечение W_0 — также подалгебра. Известно, что в нильпотентной алгебре всякая подалгебра коразмерности 1 является идеалом [1]). Поэтому W_0 будет идеалом в $X+W_0$ и в $Y+W_0$, а следовательно, и в $\widetilde{G}$.

---

[1]) См., например, Шевалле, Теория групп Ли, т. 3, глава 4, § 1.

Функционал f_2 равен нулю на W_0. Отсюда легко выводится, что представления V' и V тривиальны на $\exp W_0$. Значит, их можно рассматривать как представления $\widetilde{V}'$ и $\widetilde{V}$ факторгруппы $\widetilde{\mathfrak{G}}/\exp W_0$. Но эта последняя группа, очевидно, изоморфна группе $\mathfrak{N}$ (см. § 3), и эквивалентность $\widetilde{V}'$ и $\widetilde{V}$ легко проверяется. Лемма доказана.

Вернемся теперь к доказательству теоремы 5.2. В силу леммы 5.1 мы можем рассматривать только такие функционалы f и подалгебры G_1, для которых справедливы соотношения:

$$[f, y] = 0, \qquad G_1 \subset G_0.$$

Пусть f_0 означает сужение функционала f на G_0. Обозначим через $U^{(f_0, G_1)}$ представление группы $\mathfrak{G}_0 = \exp G_0$, индуцированное одномерным представлением $U_{\exp t} = e^{i(f_0, t)}$ подгруппы $\mathfrak{G}_1 = \exp G_1$. Очевидно (см. лемму 1.2), представление $T^{(f, G_1)}$ индуцировано $U^{(f_0, G_1)}$. Из леммы 5.1 легко выводится, что подалгебра $G_1 \subset G_0$ тогда и только тогда будет подалгеброй максимальной размерности в G, подчиненной f, когда она является подалгеброй максимальной размерности в G_0, подчиненной f_0.

Заметим теперь, что по предположению индукции теорема 5.2 справедлива для группы $\mathfrak{G}_0$. Поэтому, если G_1 имеет не максимальную возможную размерность, то представление $U^{(f_0, G_1)}$ приводимо. Следовательно, и $T^{(f, G_1)}$ приводимо. Пусть теперь G_1 — подалгебра максимальной размерности, подчиненная f.

Тогда представление $U^{(f_0, G_1)}$ подгруппы $\mathfrak{G}_0$ неприводимо и зависит только от той орбиты в G_0' относительно $\varrho'(\mathfrak{G}_0)$, которой принадлежит f_0. Покажем, что $U^{(f_0, G_1)}$ — допустимое представление (см. § 4). В самом деле, это представление реализуется в пространстве функций на $\mathfrak{G}_0$, удовлетворяющих условию

$$F(\exp t \cdot g_0) = e^{i(f_0, t)} F(g_0) \qquad \text{для} \qquad t \in G_1,$$

а операторы представления действуют по формуле

$$U_{g_0'}^{(f_0, G_1)} F(g_0') = F(g_0' g_0).$$

Имеем

$$U_{\exp(by+cz)}^{(f_0, G_1)} F(g_0) = F(g_0 \exp(by + cz)) = F(\exp(by + cz) g_0) =$$
$$= e^{i(f_0, by+cz)} F(g_0) = e^{i\lambda c} F(g_0), \text{ где } \lambda = (f_0, z).$$

Итак, $U_{\exp(by+cz)}^{(f_0, G)} = e^{i\lambda c}E$, т. е. представление $U^{(f_0, G_1)}$ допустимо. Из леммы 4.4 теперь следует, что представление $T^{(f, G_1)}$, индуцированное (в силу леммы 1.2) представлением $U^{(f, G_1)}$, неприводимо и зависит только от орбиты в G_0', содержащей f_0.

Остается показать, что функционалы f_1 и f_1' конгруэнтны относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$ тогда и только тогда, когда их сужения на G_0 f_0 и f_0' конгруэнтны относительно $\varrho'(\mathfrak{G}_0)$ [1]). В самом деле, если $f' = \varrho'(g) f$, то $g \in \mathfrak{G}_0$, так как в противном случае мы имели бы:

$$g = g_0 \exp ax$$

[1]) Разумеется, это верно лишь при сделанном выше предположении $(f, y) = (f', y) = 0$.

и

$$(f', y) = (\varrho'(g_0 \exp ax) f, y) = (f, \varrho^{-1}(g_0 \exp ax) y) = (f, y - az) \neq 0.$$

Поэтому, если f и f' конгруэнтны относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$, то они (а следовательно, и их сужения на G_0) конгруэнтны относительно $\varrho'(\mathfrak{G}_0)$. Обратно, пусть $f_0' = \varrho'(g_0) f_0$. Покажем, что тогда $f' = \varrho'(g_0 \exp by) f$ при некотором b. Так как $\varrho'(\exp by)$ не меняет значения функционала на G_0 (y лежит в центре G_0), достаточно подобрать b так, чтобы $(f', x) = (\varrho'(g_0 \exp by) f, x)$. Элементарные выкладки показывают, что выражение в правой части равно $(\varrho'(\exp g_0) f_0, x) - b(f, z)$, поэтому искомая константа b всегда существует. Теорема 5.2 полностью доказана.

3. Для практического применения теоремы 5.2 полезно уметь вычислять максимальную размерность подалгебр, подчиненных функционалу f. Для этой цели служит

Лемма 5.2. *Если G_1 — подалгебра максимальной размерности в G, подчиненная функционалу f, а Ω — орбита в G', содержащая f, то*

$$\dim G_1 = \dim G - \frac{1}{2} \dim \Omega. \tag{5.6}$$

Доказательство. Рассмотрим билинейную форму B_f в G, определенную равенством $B_f(x, y) = (f, [x, y])$. Покажем сначала, что ранг этой формы равен размерности орбиты Ω. В самом деле, Ω можно представить в виде $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_f$, где $\mathfrak{G}_f$ — подгруппа, состоящая из элементов g, для которых $\varrho'(g) f = f$ (стационарная подгруппа точки $f \in \Omega$). Легко проверить, что алгебра Ли G_f группы $\mathfrak{G}_f$ состоит из элементов x, для которых $(f, [x, y]) = 0$ при всех $y \in G$. Следовательно, G_f совпадает с подпространством, ортогональным к G в смысле формы B_f. Отсюда $\dim G_f = \dim G - \operatorname{rang} B_f$ и $\dim \Omega = \dim \mathfrak{G} - \dim \mathfrak{G}_f = \dim G - \dim G_f = \operatorname{rang} B_f$. Заметим, что форма B_f кососимметрична, поэтому ее ранг — четное число. Мы доказали, таким образом, что все орбиты в G' четномерны. Вернемся к доказательству леммы. Для одномерной алгебры лемма тривиальна. Предположим, что она верна для алгебр размерности $\leqslant n$, и рассмотрим алгебру G размерности $n+1$. Как и в доказательстве теоремы 5.2, рассмотрим два случая.

I. Существует центральный идеал Z_0 размерности $\geqslant 1$, на котором функционал f обращается в нуль. Обозначим через φ естественное отображение G на $\widetilde{G} = G/Z_0$ и через $\widetilde{f}$ — функционал на $\widetilde{G}$, соответствующий функционалу f. Если G_1 — подалгебра максимальной размерности в G, подчиненная f, то она содержит Z_0 и $\widetilde{G}_1 = \varphi(G_1)$ — подалгебра максимальной размерности в $\widetilde{G}$, подчиненная $\widetilde{f}$. Справедливость леммы следует теперь из предположения индукции и очевидных равенств:

$$\operatorname{rang} B_f = \operatorname{rang} B_{\widetilde{f}}, \quad \dim \widetilde{G} = \dim G - \dim Z_0, \quad \dim \widetilde{G}_1 = \dim G_1 - \dim Z_0.$$

II. $\dim Z = 1$, $(f, z) \neq 0$. В силу леммы 5.1 можно считать, что подалгебра G_1 лежит в G_0. Тогда по предположению индукции $\dim G_1 = \dim G_0 - {}^1/_2 \operatorname{rang} B_{f_0}$, где f_0 — сужение функционала f на G_0. Утверждение леммы следует теперь из легко проверяемого равенства $\operatorname{rang} B_{f_0} = \operatorname{rang} B_f - 2$.

§ 6. Орбиты и представления

В этом параграфе мы рассмотрим более подробно строение орбит в G' и их связь с представлениями группы.

1. Пусть $\mathfrak{G}$ — односвязная нильпотентная группа Ли, G — ее алгебра Ли, G_0 — подалгебра коразмерности 1 в G[1]). Нас интересует связь между орбитами в G' относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$ и орбитами в G'_0 относительно $\varrho'(\mathfrak{G}_0)$. Обозначим через p естественную проекцию G' в G'_0, которая каждому функционалу f на G сопоставляет его сужение на G_0. Условимся называть вертикальными прямыми в G' прямые, заданные уравнением

$$p(f) = \text{const}.$$

Посмотрим, как устроено пересечение орбиты $\Omega \in G'$ с вертикальной прямой l. Мы предположим, что прямая l имеет с орбитой Ω хотя бы одну общую точку f. Все точки орбиты Ω получаются из f преобразованиями группы $\varrho'(\mathfrak{G})$. Обозначим через $\widetilde{\mathfrak{G}}$ подмножество $\mathfrak{G}$, состоящее из таких элементов $\widetilde{g}$, для которых

$$\varrho'(\widetilde{g}) f \in l. \tag{6.1}$$

Очевидно, пересечение Ω и l состоит из всех точек вида $\varrho'(\widetilde{g}) f$, где $\widetilde{g} \in \widetilde{\mathfrak{G}}$. Покажем, что $\widetilde{\mathfrak{G}}$ является связной подгруппой $\mathfrak{G}$. Пусть $f_0 = p(f)$ — проекция прямой l на G'_0. Из (6.1) видно, что множество $\widetilde{\mathfrak{G}}$ состоит из всех элементов $\widetilde{g} \in \mathfrak{G}$, для которых преобразование $\varrho'(\widetilde{g})$ (рассматриваемое как преобразование G'_0) оставляет на месте точку f_0. Поэтому $\widetilde{\mathfrak{G}}$ — подгруппа $\mathfrak{G}$ Заметим теперь, что условие (6.1) эквивалентно системе равенств

$$(\varrho'(\widetilde{g}) f, x_k) = (f, x_k) \qquad (k = 1, \ldots, n), \tag{6.2}$$

где $x_1, \ldots, x_n$ — базис в G_0.

Пусть $\widetilde{g} = \exp \tau x$, где $x \in G$, а τ — вещественный параметр. Тогда выражения $P_k = (\varrho'(\widetilde{g}) f, x_k)$ будут многочленами от τ. Уравнения системы (6.2) либо выполняются тождественно, либо имеют лишь конечное число решений. С другой стороны, решения системы (6.2) — это значения параметра τ, при которых $\exp \tau x \in \widetilde{\mathfrak{G}}$. Так как $\widetilde{\mathfrak{G}}$ — группа, то вместе с значением τ_0 решениями (6.2) должны быть числа $0, \pm\tau, \pm 2\tau, \pm 3\tau$ и т. д. Отсюда следует, что пересечение группы $\widetilde{\mathfrak{G}}$ с каждой однопараметрической подгруппой $\exp \tau x$ либо состоит из единичного элемента, либо содержит всю однопараметрическую подгруппу. Мы доказали, таким образом, связность группы $\widetilde{\mathfrak{G}}$.

Рассмотрим теперь двумерную плоскость R в G', проходящую через начало координат (нулевой функционал) и прямую l[2]). Преобразования

---

[1]) Напомним, что в нильпотентной алгебре всякая подалгебра коразмерности 1 является идеалом (см. сноску на стр. 79).

[2]) Мы предполагаем, что l не проходит через начало координат. Нетрудно проверить, что, когда l содержит нулевой функционал, все точки l неподвижны относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$. Следовательно, лемма 6.1 (см. ниже) справедлива и в этом случае.

$\varrho'(\tilde{g})$, $\tilde{g}\in\tilde{\mathfrak{G}}$ образуют связную нильпотентную группу линейных преобразований G', сохраняющих прямую l. Поэтому пространство R инвариантно относительно этой группы. Выберем в R базис из вектора, соединяющего начало координат с точкой $f\in l$, и вектора, выходящего из начала координат параллельно l. Тогда преобразованиям $\varrho'(\tilde{g})$ в R будут соответствовать матрицы второго порядка, переводящие каждый вектор вида $\begin{pmatrix}1\\ s\end{pmatrix}$ (т. е. точку прямой l) снова в вектор того же вида. Кроме того, из нильпотентности $\varrho'(\tilde{\mathfrak{G}})$ следует, что оба собственных значения этих матриц равны 1. Отсюда легко выводится, что матрицы $\varrho'(\tilde{g})$ имеют вид $\begin{Vmatrix}1 & 0\\ \tau & 1\end{Vmatrix}$. Наконец, из связности $\tilde{\mathfrak{G}}$ вытекает, что τ либо тождественно равно нулю, либо пробегает всю вещественную прямую.

Мы доказали следующее утверждение:

Лемма 6.1. *Если орбита $\Omega\in G'$ имеет общую точку f с вертикальной прямой l, то пересечение Ω с l либо состоит из одной точки f, либо содержит всю прямую l.*

Нетрудно видеть, что для всех вертикальных прямых, пересекающихся с данной орбитой Ω, имеет место одна и та же возможность из двух, указанных в лемме 6.1. Это непосредственно следует из того, что преобразования $\varrho'(\mathfrak{G})$ транзитивно действуют на Ω и переводят вертикальные прямые снова в вертикальные.

Мы будем называть орбиту Ω орбитой первого (соответственно второго) рода, если ее пересечение с каждой вертикальной прямой, имеющей с ней общую точку, состоит из одной точки (соответственно содержит всю прямую).

2. Рассмотрим более подробно орбиты первого рода.

Лемма 6.2. *Пусть Ω — орбита первого рода в G'. Тогда*

1) *проекция $\Omega_0=p(\Omega)$ является орбитой в G_0' относительно $\varrho'(\mathfrak{G}_0)$;*

2) *сужение представления T^{Ω} на $\mathfrak{G}_0$ неприводимо и эквивалентно T^{Ω_0}*[1]*;*

3) *полный прообраз $p^{-1}(\Omega_0)$ расслаивается на одномерное семейство $\Omega^{(s)}$ орбит первого рода в G';*

4) *представление группы $\mathfrak{G}$, индуцированное представлением T^{Ω_0} подгруппы $\mathfrak{G}_0$, разлагается в прямой интеграл неприводимых представлений $T^{(s)}$, соответствующих орбитам $\Omega^{(s)}$.*

Доказательство. Очевидно, множество $\Omega_0=p(\Omega)$ однородно относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$. Покажем, что оно однородно уже относительно $\varrho'(\mathfrak{G}_0)$. В самом деле, группа $\mathfrak{G}_0$ имеет коразмерность 1 в $\mathfrak{G}$. Поэтому орбита каждой точки в Ω_0 относительно $\varrho'(\mathfrak{G}_0)$ имеет в Ω_0 коразмерность не больше 1. Но мы знаем, что размерность этой орбиты, так же как и $\dim\Omega_0=\dim\Omega$, — четное число (см. лемму 5.2). Следовательно, некоторая окрестность любой точки Ω_0 однородна относительно $\varrho'(\mathfrak{G}_0)$. Множество точек, которые можно получить из данной точки преобразованиями из $\varrho'(\mathfrak{G}_0)$, будет, как легко видеть, открыто и замкнуто в Ω_0. Так как Ω_0 связно (на нем транзитивно

---

[1]) Символ T^{Ω} означает неприводимое представление, соответствующее орбите Ω.

действует связная группа $\varrho'(\mathfrak{G})$), это множество совпадает с Ω_0. Мы доказали первое утверждение леммы.

Пусть теперь $f \in \Omega$ и G_1 — подалгебра максимальной размерности, подчиненная f. Как показано в § 5 (лемма 5.2), $\dim G_1 = \dim G - \frac{1}{2}\dim\Omega$. Рассмотрим подалгебру $\widetilde{G}_1 = G_1 \cap G_0$. Очевидно, $\widetilde{G}_1$ — подалгебра G_0, подчиненная функционалу $f_0 = p(f)$. Так как $\dim \widetilde{G}_1 \geqslant \dim G - 1 = \dim G_0 - \frac{1}{2}\dim\Omega_0$, то $\widetilde{G}_1$ — подалгебра максимальной размерности, подчиненная f_0, и $\dim \widetilde{G}_1 = \dim G - 1$. Пусть $G_1 = \widetilde{G}_1 + X$. Тогда $G_0 + X$ имеет размерность $\dim G_0 + 1 = \dim G$ и, следовательно, совпадает с G. Представим $\mathfrak{G}$ в виде полупрямого произведения нормального делителя $\mathfrak{G}_0$ и однопараметрической подгруппы $\exp X$ (ср. замечание к лемме 4.2). Подгруппа $\mathfrak{G}_1 = \exp G_1$ будет тогда полупрямым произведением $\widetilde{\mathfrak{G}}_1$ и $\exp X$. Отсюда следует, что однородное пространство $M = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ естественно отождествляется с однородным пространством $\widetilde{M} = \mathfrak{G}_0/\widetilde{\mathfrak{G}}_1$. А именно группа $\mathfrak{G}_0$ транзитивно действует на M и стационарная подгруппа некоторой точки совпадает с $\widetilde{\mathfrak{G}}_1$.

Представление T^{Ω}, соответствующее орбите Ω, может быть реализовано в пространстве $\mathcal{L}^2(M)$, так что операторы представления имеют вид

$$T_g f(m) = \alpha(m, g) f(m\overline{g}) \tag{6.3}$$

и функция $\alpha(m, g)$ удовлетворяет условию

$$\alpha(m_0, \exp t) = e^{i(f, t)} \text{ для } t \in G_1. \tag{6.4}$$

Из формул (6.3) и (6.4) непосредственно вытекает, что сужение T^{Ω} на $\mathfrak{G}_0$ индуцировано одномерным представлением $\exp t \longrightarrow e^{i(f, t)} = e^{i(f_0, t)}$ подгруппы $\widetilde{\mathfrak{G}}_1$. Но выше мы показали, что $\widetilde{G}_1$ — подалгебра максимальной размерности, подчиненная функционалу $f_0 \in \Omega_0$. Отсюда следует второе утверждение леммы.

Рассмотрим теперь полный прообраз $p^{-1}(\Omega_0)$ орбиты Ω_0. Очевидно, множество $p^{-1}(\Omega_0)$ инвариантно относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$. Покажем, что оно расслаивается на одномерное семейство орбит первого рода. Прежде всего заметим, что все орбиты, лежащие в $p^{-1}(\Omega_0)$,— первого рода. В самом деле, если бы в $p^{-1}(\Omega_0)$ была орбита второго рода, то она содержала бы целую вертикальную прямую и, следовательно, пересекалась бы с орбитой Ω, что невозможно. Пусть теперь l — вертикальная прямая, пересекающая Ω. Так как l целиком лежит в $p^{-1}(\Omega)$, через каждую точку l проходит некоторая орбита первого рода. Обратно, всякая орбита первого рода, лежащая в $p^{-1}(\Omega)$, взаимно однозначно проектируется на Ω_0 и, значит, пересекается с l в некоторой точке. Мы получили требуемое расслоение $p^{-1}(\Omega_0)$.

Выясним, наконец, как устроено представление T группы $\mathfrak{G}$, индуцированное представлением T^{Ω_0}. Пространство H, в котором действует это представление, реализуется в виде пространства функций на $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих соотношению

$$\varphi(\widetilde{g}_1 g) = \widetilde{U}_{\widetilde{g}_1}\varphi(g), \tag{6.5}$$

где $\widetilde{U}$ — одномерное представление $\widetilde{\mathfrak{G}}_1$, заданное формулой

$$\widetilde{U}_{\exp t} = e^{i(f_0, t)}.$$

Нас интересует теперь, каким образом представление $\widetilde{U}$ можно продолжить до представления группы $\mathfrak{G}_1$. Мы знаем, что алгебра G_1 подчинена функционалу f, поэтому формула

$$\exp t \longrightarrow e^{i(f, t)}$$

задает одномерное представление группы $\mathfrak{G}_1$, продолжающее $\widetilde{U}$. Легко проверить, что алгебра G_1 подчинена всем функционалам, лежащим на одной вертикальной прямой с функционалом f. Это следует из того, что коммутант G_1 лежит в G_0, а значения функционала f на G_0 целиком определяются его проекцией $p(f)$. Обозначим через $f^{(s)}$ функционал, определенный условиями

$$p(f^{(s)}) = f_0, \quad (f^{(s)}, x) = s.$$

Тогда формула

$$\exp t \longrightarrow e^{i(f^{(s)}, t)}$$

задает одномерное представление $U^{(s)}$ группы $\mathfrak{G}_1$, продолжающее представление $\widetilde{U}$. Из доказанного нами утверждения 3) леммы 6.2 следует, что каждый функционал $f^{(s)}$ принадлежит некоторой орбите первого рода $\Omega^{(s)}$, размерность которой равна $\dim \Omega$. Отсюда мы заключаем, что G_1 — подалгебра максимальной размерности, подчиненная $f^{(s)}$. Значит, представления $T^{(s)}$ группы $\mathfrak{G}$, индуцированные одномерными представлениями $U^{(s)}$, неприводимы.

Пусть $H^{(s)}$ — пространство представления $T^{(s)}$, реализованное в виде пространства функций на $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих условию

$$\varphi(g_1 g) = U^{(s)}_{g_1}\varphi(g), \qquad g_1 \in \mathfrak{G}_1. \tag{6.6}$$

Покажем, что отображение

$$\varphi(g) \longrightarrow \varphi_s(g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isa}\varphi(\exp(ax)\cdot g)\, da \tag{6.7}$$

задает разложение H в прямой интеграл пространств $H^{(s)}$. В самом деле, если $\varphi(g)$ удовлетворяет соотношению (6.5), то для $t \in \widetilde{G}_1$

$$\varphi_s(\exp t \cdot g) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isa}\varphi(\exp(ax)\cdot \exp t \cdot g)\, da =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-isa}\widetilde{U}_{\exp(ax)\cdot\exp t\cdot\exp(-ax)}\,\varphi(\exp(ax)\cdot g)\, da.$$

Но

$$\widetilde{U}_{\exp(ax)\cdot\exp t\cdot\exp(-ax)} = U^{(s)}_{\exp(ax)} U^{(s)}_{\exp t} U^{(s)}_{\exp(-ax)} = U^{(s)}_{\exp t}.$$

Поэтому $\varphi_s(g)$ удовлетворяет (6.5). Кроме того, из (6.7) непосредственно вытекает, что

$$\varphi_s(\exp(ax)\cdot g) = e^{isa}\varphi_s(g). \tag{6.8}$$

Соотношения (6.5) и (6.8) в совокупности эквивалентны соотношению (6.6), определяющему пространство $H^{(s)}$.

Можно проверить, что при подходящей нормировке скалярных произведений в H и $H^{(s)}$ выполняется равенство

$$\|\varphi\|_H^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi_s\|_{H^{(s)}}^2 \, ds.$$

Эта проверка осуществляется так же, как в доказательстве леммы 1.2, и может быть опущена.

Наконец, если $\varphi(g') = T_g\psi(g') = \psi(g'g)$, то $\varphi_s(g') = \psi_s(g'g) = T^{(s)}\psi_s(g')$. Таким образом, представление T разлагается в прямой интеграл представлений $T^{(s)}$, и последнее утверждение леммы доказано.

3. Рассмотрим теперь орбиты второго рода в G'. В этом случае ситуация описывается следующей леммой:

Лемма 6.3. *Пусть Ω — орбита второго рода в G'. Тогда*

1) *проекция $p(\Omega)$ расслаивается на однопараметрическое семейство орбит Ω_s в G'_0 относительно $\varrho'(\mathfrak{G}_0)$ так, что $\varrho'(\exp ax)\,\Omega_s = \Omega_{s+a}$;*

2) *сужение представления T^Ω на $\mathfrak{G}_0$ разлагается в прямой интеграл представлений $T^{(s)}$, соответствующих орбитам Ω_s;*

3) *представления группы $\mathfrak{G}$, индуцированные представлениями $T^{(s)}$, эквивалентны T^Ω.*

Доказательство. Проекция $p(\Omega)$ имеет размерность $\dim\Omega - 1$ и, очевидно, однородна относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$. Отсюда и из того, что все орбиты четномерны, вытекает, что $p(\Omega)$ расслаивается под действием $\varrho'(\mathfrak{G}_0)$ на орбиты размерности $\dim\Omega - 2 = \dim p(\Omega) - 1$. Пусть Ω_0 — одна из этих орбит. Легко проверить, что множества $\Omega_s = \varrho'(\exp sx)\,\Omega_0$ также являются орбитами относительно $\varrho'(\mathfrak{G}_0)$. Так как $p(\Omega)$ однородно относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$, совокупность всех Ω_s покрывает $p(\Omega)$. Покажем, что при $s_1 \neq s_2$ множества Ω_{s_1} и Ω_{s_2} различны. В противном случае преобразование $\varrho'(\exp sx)$, где $s = s_2 - s_1$, переводило бы Ω_{s_1} в себя. Тогда, если $f_0 \in \Omega_{s_1}$, то $\varrho'(\exp sx) f_0$ также лежит в Ω_{s_1} и, следовательно, имеет вид $\varrho'(g_0) f_0$, где $g_0 \in \mathfrak{G}_0$. Это значит, что преобразование $\varrho'(g_0^{-1}\exp sx)$ оставляет на месте точку f_0. Отсюда можно заключить (см. доказательство леммы 6.1), что вся однопараметрическая подгруппа, содержащая $g_0^{-1}\exp sx$, оставляет f_0 на месте. Так как при $s \neq 0$ эта подгруппа и $\mathfrak{G}_0$ порождают всю группу $\mathfrak{G}$, мы получаем, что множество Ω_{s_1} инвариантно относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$, что невозможно. Полученное противоречие доказывает, что Ω_{s_1} и Ω_{s_2} различны. Мы доказали первое утверждение леммы.

Пусть теперь $f_0 = p(f) \in \Omega_0$ и G_1 — подалгебра максимальной размерности в G_0, подчиненная функционалу f_0. Очевидно, что G_1, как подалгебра G, подчинена функционалу f. Равенства

$$\dim G_1 = \dim G_0 - \frac{1}{2}\dim\Omega_0 = \dim G - \frac{1}{2}\dim\Omega$$

показывают, что G_1 — подалгебра максимальной размерности в G, подчиненная f. Поэтому представление T^Ω можно реализовать в пространстве H

функций на $\mathfrak{G}$, удовлетворяющих соотношению

$$\varphi(g_1 g) = U_{g_1}\varphi(g),$$

где U_{g_1} — одномерное представление группы $\mathfrak{G}_1 = \exp G_1$, заданное формулой

$$U_{\exp t} = e^{i(f_0,\, t)}.$$

Разобьем группу $\mathfrak{G}$ на классы смежности по $\mathfrak{G}_0$: $\mathfrak{G} = \bigcup \mathfrak{M}_s$, где $\mathfrak{M}_s = \exp sx \cdot \mathfrak{G}_0$. Очевидно, множества $\mathfrak{M}_s$ инвариантны относительно правых сдвигов элементами $g_0 \in \mathfrak{G}_0$. Отображение $\varphi \longrightarrow \varphi_s$, сопоставляющее каждой функции $\varphi \in H$ ее сужение на $\mathfrak{M}_s$, задает разложение H в прямой интеграл пространств $H^{(s)}$. Каждое пространство $H^{(s)}$ может быть отождествлено с пространством функций на $\mathfrak{G}_0$, удовлетворяющих соотношению

$$\varphi_s(g_1 g) = U_{\exp(sx)\cdot g_1 \cdot \exp(-sx)}\varphi(g)$$

для всех $g_1 \in \mathfrak{G}_1^{(s)} = \exp(-sx)\cdot\mathfrak{G}_1\cdot\exp(sx)$. Подалгебра $G_1^{(s)}$, соответствующая группе $\mathfrak{G}_1^{(s)}$, будет, как легко видеть, подалгеброй максимальной размерности в G_0, подчиненной функционалу $f_s = \varrho'(\exp(sx)) f_0$. Поэтому формула

$$T_{g_0}^{(s)}\varphi_s(g) = \varphi_s(g g_0)$$

задает в $H^{(s)}$ представление группы $\mathfrak{G}_0$, соответствующее орбите Ω_s. Наконец, легко проверить, что при соответствующей нормировке инвариантных мер на $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_1$ и $\mathfrak{G}_0/\mathfrak{G}_1$ выполняется равенство

$$\|\varphi\|_H^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \|\varphi_s\|_{H^{(s)}}^2\, ds.$$

Мы доказали второе утверждение леммы.

Доказательство третьего утверждения непосредственно следует из леммы 1.2.

З а м е ч а н и е. Из лемм 6.2 и 6.3 вытекает, в частности, что *каждая орбита в G' относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$ гомеоморфна четномерному евклидову пространству.*

4. С помощью лемм, доказанных в этом параграфе, можно дать простой ответ в терминах орбит на основные вопросы теории представлений нильпотентных групп, касающиеся разложения представлений на неприводимые компоненты. Результат может быть сформулирован следующим образом:

Т е о р е м а 6.1. *Пусть $\mathfrak{G}$ — односвязная нильпотентная группа Ли, $\mathfrak{G}_0$ — ее замкнутая подгруппа, p — естественная проекция G' на G_0'.*

1. *Если T — неприводимое представление группы $\mathfrak{G}$, соответствующее орбите $\Omega \subset G'$, то сужение T на $\mathfrak{G}_0$ разлагается в прямой интеграл неприводимых представлений $\mathfrak{G}_0$, соответствующих тем орбитам в G_0', которые содержатся в $p(\Omega)$.*

2. *Если T — неприводимое представление подгруппы $\mathfrak{G}_0$, соответствующее орбите $\Omega \subset G_0'$, то представление группы $\mathfrak{G}$, индуцированное представлением T, разлагается в прямой интеграл неприводимых представлений $\mathfrak{G}$, соответствующих тем орбитам в G', которые пересекаются с прообразом $p^{-1}(\Omega)$.*

3. *Если T_1 и T_2 — неприводимые представления $\mathfrak{G}$, соответствующие орбитам Ω_1 и Ω_2, то их кронекеровское произведение $T_1 \otimes T_2$* [1]) *разлагается в прямой интеграл неприводимых представлений $\mathfrak{G}$, соответствующих тем орбитам в G', которые содержатся в арифметической сумме* [2]) *орбит Ω_1 и Ω_2.*

Доказательство первых двух утверждений теоремы непосредственно получается последовательным применением лемм 6.2 и 6.3. Заметим, что в конкретных примерах леммы 6.2. и 6.3 не только позволяют указать, какие представления входят в разложение, но и определить «кратность» вхождения.

Следует отметить также, что утверждение 2 решает задачу о разложении на неприводимые компоненты представления, возникающего в пространстве функций на однородном многообразии $X = \mathfrak{G}/\mathfrak{G}_0$. В самом деле, это представление, очевидно, индуцировано единичным представлением подгруппы $\mathfrak{G}_0$.

Утверждения 1 и 2 теоремы 6.1 можно рассматривать как аналог следующей теоремы двойственности, доказанной для конечных групп Фробениусом и для компактных групп А. Вейлем ([20], § 23):

Представление T группы $\mathfrak{G}$, индуцированное неприводимым представлением U подгруппы $\mathfrak{G}_0$, столько раз содержит неприводимую компоненту V, сколько раз сужение V на $\mathfrak{G}_0$ содержит U.

Докажем теперь утверждение 3. Пусть представления T_1 и T_2 действуют в пространствах H_1 и H_2. Тогда в тензорном произведении $H_1 \otimes H_2$ возникает представление группы $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$, которое мы обозначим через $T_1 \times T_2$. Легко проверить, что если T_1 (T_2) индуцировано представлением U_1 (U_2) подгруппы $\mathfrak{G}_1$ $(\mathfrak{G}_2)$, то представление $T_1 \times T_2$ индуцировано представлением $U_1 \times U_2$ подгруппы $\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2$.

Кронкеровское произведение $T_1 \otimes T_2$ представлений T_1 и T_2 можно рассматривать как сужение представления $T_1 \times T_2$ на «диагональную» подгруппу $\mathfrak{G}\times\mathfrak{G}$, состоящую из элементов вида (g, g). Представлению $T_1 \times T_2$ соответствует в $G' \times G'$ орбита $\Omega_1 \times \Omega_2$. Проекция этой орбиты в G' совпадает, очевидно, с арифметической суммой $\Omega_1 + \Omega_2$. Утверждение 3 вытекает поэтому из утверждения 1.

§ 7. Представления группового кольца

1. Рассмотрим образ инфинитезимального группового кольца A группы $\mathfrak{G}$ при неприводимом представлении T.

Теорема 7.1. *Всякое неприводимое унитарное представление нильпотентной группы Ли может быть реализовано в пространстве функций m переменных так, что образом инфинитезимального группового кольца A будет алгебра D_m всех дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами* [3]). *Число m для каждого представления определено однозначно и равно половине размерности соответствующей орбиты в G'.*

---

[1]) Определение кронекеровского, или тензорного, произведения представлений см., например, в [19], гл. 4.

[2]) Арифметической суммой множеств Ω_1 и Ω_2, лежащих в линейном пространстве, называется множество $\Omega_1 + \Omega_2$ элементов, представимых в виде $\omega_1 + \omega_2$, где $\omega_1 \in \Omega_1$, $\omega_2 \in \Omega_2$.

[3]) Для представлений, соответствующим орбитам общего положения, этот факт доказан в [4].

Доказательство. Для одномерной группы теорема очевидна. Предположим, что она верна для групп размерности $\leqslant n$, и рассмотрим группу $\mathfrak{G}$ размерности $n+1$. Пусть G — алгебра Ли группы $\mathfrak{G}$ и Z — ее центр.

В случае, когда некоторый идеал $Z_0 \subset Z$ переходит в нуль при представлении T, справедливость теоремы очевидным образом вытекает из предположения индукции.

Рассмотрим поэтому более сложный случай: $\dim Z = 1$ и $T_z = i\lambda E$, где $\lambda \neq 0$. Пусть $G = X + Y + Z + W$ — каноническое разложение G. Как мы видели в § 4, в этом случае представление T индуцировано некоторым представлением U подгруппы $\mathfrak{G}_0 = \exp(Y+Z+W)$, для которого $U_{\exp(by+cz)} = e^{i\lambda c}E$. Пусть представление U действует в пространстве L. Тогда T реализуется в пространстве вектор-функций на прямой со значениями в L. Операторы представления T имеют вид

$$T_{g_0 \exp(ax)} f(t) = U_{\exp(tx) \cdot g_0 \cdot \exp(-tx)} f(t+a).$$

Отсюда мы легко получаем, что операторы представления алгебры G имеют вид

$$T_x = \frac{d}{dt}, \quad T_y = i\lambda t, \quad T_z = i\lambda, \quad T_w = U_{\varrho(\exp(tx))\, w}, \quad w \in W.$$

По предположению индукции пространство L можно реализовать в виде пространства функций с суммируемым квадратом на R^m так, что операторы U_y, U_z, U_w, $w \in W$, порождают алгебру D_m всех дифференциальных операторов с полиномиальными коэффициентами на R^m. Пусть $t_1, \ldots, t_m$ — координаты в R^m. Представление T действует, очевидно, в пространстве функций $(m+1)$ переменных $t_1, \ldots, t_m, t$, а образ D инфинитезимального группового кольца порождается операторами

$$\frac{\partial}{\partial t}, \quad i\lambda t, \quad i\lambda, \quad U_{\varrho(\exp(tx))\, w_k} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-3),$$

где $w_1, \ldots, w_{n-3}$ — базис в W.

Обозначим через $A(t)$ матрицу преобразования $\varrho(\exp tx)$ относительно базиса $y, z, w_1, \ldots, w_{n-3}$ в G_0. Известно [1]), что $A(t) = e^{tA}$, где A — матрица преобразования $u \to [x, u]$. Так как алгебра G нильпотентна, матрица A в некоторой степени равна нулю. Поэтому в выражении $A(t) = e^{tA} = \sum \frac{t^k A^k}{k!}$ будет лишь конечное число членов, отличных от нуля. Следовательно, элементы матрицы $A(t)$ — многочлены от t. То же самое справедливо и относительно матрицы $A^{-1}(t) = A(-t)$. Значит, существуют такие многочлены $a_{ij}(t)$, $b_i(t)$, $c_i(t)$, что

$$w_i = \sum_j a_{ij}(t)\, \varrho(\exp(tx))\, w_j + b_i(t)\, \varrho(\exp(tx))\, y + c_i(t)\, \varrho(\exp(tx))\, z.$$

Так как кольцо D содержит все многочлены от t, то оно вместе с $U_{\varrho(\exp(tx))\, w_i}$ содержит и

$$\sum_j a_{ij}(t)\, U_{\varrho(\exp(tx))\, w_j} + b_i(t)\, U_{\varrho(\exp(tx))\, y} + c_i(t)\, U_{\varrho(\exp(tx))\, z} = U_{w_i}.$$

[1]) См. [13], гл. X.

Но операторы U_{w_i}, U_y и U_z по предположению индукции порождают D_m. Значит, D содержит D_m и, кроме того, операторы t и $\frac{\partial}{\partial t}$. Следовательно, $D \supset D_{m+1}$. Обратное включение очевидно. По предположению индукции $m = \frac{1}{2} \dim \Omega_U$. Поэтому $m+1 = \frac{1}{2}(\dim \Omega_U + 2) = \frac{1}{2} \dim \Omega_T$ (см. лемму 6.3). Мы доказали существование требуемой реализации. Единственность числа m следует из того, что при разных m алгебры D_m неизоморфны.

Следствие. *Пространство $S(H)$* (см. § 2) *совпадает в этом случае с ядерным пространством S* (см. Гельфанд и Шилов, «Обобщенные функции», вып. 4).

В самом деле, система норм (2.5) эквивалентна в этом случае системе

$$\|f\|_p = \max_{\substack{\Sigma (k_i+l_i) \leq p \\ k_i,\ l_i \geq 0}} \left\| t_1^{k_1} \ldots t_m^{k_m} \frac{\partial^{l_1+\ldots+l_m}}{\partial t_1^{l_1} \ldots \partial t_m^{l_m}} f(t_1, \ldots, t_m) \right\|_{\mathscr{L}^2},$$

которая, как известно (см., например, Смирнов, Курс высшей математики, т. 5), эквивалентна системе

$$\|f\|_p = \max_{\substack{\Sigma (k_i+l_i) \leq p \\ k_i,\ l_i \geq 0}} \sup_{t_1, \ldots, t_m} \left| t_1^{k_1} \ldots t_m^{k_m} \frac{\partial^{l_1+\ldots+l_m}}{\partial t_1^{l_1} \ldots \partial t_m^{l_m}} f(t_1, \ldots, t_m) \right|,$$

определяющей пространство S.

Особый интерес представляет образ центра инфинитезимального группового кольца при неприводимом представлении T. Оказывается, можно дать явное выражение для операторов T_p, $p \in Z(A)$, в терминах орбит.

Теорема 7.2. *Пусть T — неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{G}$, A — инфинитезимальное групповое кольцо группы $\mathfrak{G}$, $Z(A)$ — его центр. Будем задавать элементы $Z(A)$ в виде многочленов на G', инвариантных относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$* (см. § 2). *Пусть $p(\Omega)$ — значение p на орбите Ω, соответствующей представлению T. Тогда*

$$T_p = p(\Omega) E, \tag{7.1}$$

где E — единичный оператор в пространстве представления T.

Доказательство проведем опять с помощью индукции по размерности группы. Пусть сначала в алгебре G есть центральный идеал Z_0, переходящий в нуль при представлении T. Тогда T можно рассматривать как представление $\widetilde{T}$ группы $\widetilde{\mathfrak{G}} = \mathfrak{G}/\exp Z_0$. Обозначим через π естественную проекцию G на $\widetilde{G} = G/Z_0$ и через π' соответствующее вложение $\widetilde{G}'$ в G'. Множество $\widetilde{G}'$ естественно отождествить с подпространством в G', состоящим из всех функционалов, равных нулю на Z_0. Тогда вложение π' будет тождественным отображением и представлениям T и $\widetilde{T}$ будет соответствовать одна и та же орбита Ω [1]).

Проекция $\pi: G \to \widetilde{G}$ может быть продолжена до отображения всего инфинитезимального группового кольца A группы $\mathfrak{G}$ в аналогичное кольцо $\widetilde{A}$

[1]) Рассматриваемая в одном случае как орбита в G' относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$, а в другом — как орбита в $\widetilde{G}'$ относительно $\varrho'(\widetilde{\mathfrak{G}})$.

группы $\mathfrak{G}$. Будем задавать элементы A и $\widetilde{A}$ в виде многочленов на G' и $\widetilde{G}'$ соответственно (см. § 2). Нетрудно видеть, что тогда отображение π будет просто сужением на $\widetilde{G}'$ многочленов, заданных на G'. Каждый элемент $Z(A)$ переходит при этом отображении в элемент $Z(\widetilde{A})$. По предположению индукции теорема справедлива для группы $\widetilde{\mathfrak{G}}$. Поэтому, если $p \in Z(A)$, то $T_p = \widetilde{T}_{\pi(p)} = \pi(p)(\Omega) E = p(\Omega) E$. Следовательно, теорема справедлива и для группы $\mathfrak{G}$.

Рассмотрим второй возможный случай: алгебра G имеет одномерный центр Z, и представление T не равно нулю на Z. Пусть $G = X + Y + Z + W$ — каноническое разложение G. Покажем прежде всего, что элемент $p \in Z(A)$ не содержит x. В самом деле, из соотношений $[x, y] = z$, $[u, y] = 0$ для $u \in Y + Z + W$ легко выводится, что для любого $p \in A$ имеет место равенство

$$py - yp = z \frac{\partial p}{\partial x}.$$

Поэтому если $p \in Z(A)$, то $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$, т. е. p не содержит x. Следовательно, в нашем случае $Z(A)$ содержится в $Z(A_0)$, где A_0 — инфинитезимальное групповое кольцо группы $\mathfrak{G}_0 = \exp G_0 = \exp(Y + Z + W)$.

Заметим теперь, что по лемме 6.3 представление T группы $\mathfrak{G}$ распадается в прямой интеграл неприводимых представлений $T^{(s)}$ подгруппы $\mathfrak{G}_0$. Образ элемента $p \in Z(A) \subset Z(A_0)$ при каждом из представлений $T^{(s)}$ равен по предположению индукции $p(\Omega_s) E$. Но так как p — многочлен, инвариантный относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$, значение $p(\Omega_s) = p(\varrho'(\exp(sx))\Omega_0)$ не зависит от s. Поэтому образ элемента p при представлении T равен $p(\Omega) E$. Теорема доказана, так как для одномерной группы равенство (7.1), очевидно, справедливо.

С помощью теоремы 7.2 легко показать, что неприводимые унитарные представления нильпотентных групп Ли определяются, как правило, своим инфинитезимальным характером. В самом деле, если мы знаем инфинитезимальный характер представления T, то для каждого многочлена p на G', инвариантного относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$, нам известно значение p на орбите Ω, соответствующей представлению T. В силу предложения 2 § 2 существуют такие многочлены $p_1, \ldots, p_k$ на G', инвариантные относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$, что орбита Ω общего положения однозначно определяется значениями $p_1(\Omega), \ldots, p_k(\Omega)$.

Мы получаем, таким образом, следующее предложение, впервые доказанное Диксмье [4]:

Предложение 3. *Представления группы $\mathfrak{G}$, соответствующие орбитам общего положения в G', определяются с точностью до эквивалентности своим инфинитезимальным характером.*

2. Наряду с инфинитезимальным групповым кольцом мы будем рассматривать обычное групповое кольцо группы $\mathfrak{G}$, т. е. совокупность $\mathcal{L}^1(\mathfrak{G})$ суммируемых функций на $\mathfrak{G}$ с операцией свертки в качестве умножения.

Каждому унитарному представлению T группы $\mathfrak{G}$ соответствует представление группового кольца, при котором функция $\varphi \in \mathcal{L}^1(\mathfrak{G})$ переходит

в оператор

$$T_\varphi = \int \varphi(g)\, T_g\, dg.$$

Непосредственно проверяется, что при этом $\| T_\varphi \| \leqslant \| \varphi \|_{\mathscr{L}^1(\mathfrak{G})}$ и выполняются соотношения

$$T_{a\varphi_1 + b\varphi_2} = aT_{\varphi_1} + bT_{\varphi_2};\quad T_{\varphi_1 * \varphi_2} = T_{\varphi_1} T_{\varphi_2},$$

где $\varphi_1 * \varphi_2$ означает свертку функций φ_1 и φ_2.

Мы будем рассматривать также подкольцо L_0 группового кольца, состоящее из бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций на $\mathfrak{G}$.

Большую роль в теории представлений играет понятие характера. Для конечномерного представления характер χ определяется как след матрицы представления T_g:

$$\chi(g) = \operatorname{sp} T_g. \tag{7.2}$$

Известно, что характер представления определяет само представление с точностью до эквивалентности.

Когда представление T бесконечномерно, выражение (7.2) теряет смысл, так как оператор T_g, вообще говоря, не имеет конечного следа. Однако во многих случаях операторы T_φ, соответствующие «достаточно хорошим» функциям φ из группового кольца, оказываются вполне непрерывными операторами с конечным следом. Мы будем называть такие функции φ *основными*. Соответствие $\varphi \longrightarrow \operatorname{sp} T_\varphi$ является, очевидно, линейным функционалом на пространстве основных функций. Такой функционал принято называть *обобщенной функцией* и записывать в виде

$$\operatorname{sp} T_\varphi = \int \varphi(g)\, \chi(g)\, dg.$$

Эту обобщенную функцию $\chi(g)$ мы назовем, следуя И. М. Гельфанду, *характером представления* T. Заметим, что в случае конечномерного представления это определение совпадает с обычным.

Мы покажем теперь, что в качестве пространства основных функций можно взять подкольцо L_0 группового кольца.

Теорема 7.3. *Для любого неприводимого унитарного представления* T *и любой функции* $\varphi \in L_0$ *оператор* T_φ *вполне непрерывен и имеет конечный след*[1]).

Доказательство. Воспользуемся теоремой 7.1. Пусть m — половина размерности орбиты, соответствующей представлению T. Возьмем в пространстве функций m переменных какой-нибудь дифференциальный оператор M с полиномиальными коэффициентами, обратный к которому является вполне непрерывным оператором с конечным следом. По теореме 7.1 существует элемент p инфинитезимального группового кольца, образ которого при представлении T совпадает с M. Пусть D — дифференциальный оператор на $\mathfrak{G}$, соответствующий элементу p. Тогда $T_\varphi = M^{-1} M T_\varphi = M^{-1} T_p T_\varphi = M^{-1} T_{D\varphi}$. Если φ принадлежит L_0, то $D\varphi$ также принадлежит L_0 и оператор $T_{D\varphi}$ — ограниченный оператор в пространстве представления T.

---

[1]) Этот результат независимо получен Диксмье [4] и автором [2].

Таким образом, T_φ есть произведение M^{-1} и некоторого ограниченного оператора. Поэтому оператор T_φ, так же как и M^{-1}, будет вполне непрерывным оператором с конечным следом.

Следствие. *Для любого неприводимого унитарного представления T и любой функции $\varphi \in \mathscr{L}^1(\mathfrak{G})$ оператор T_φ вполне непрерывен.*

В самом деле, каждую функцию $\varphi \in \mathscr{L}^1(\mathfrak{G})$ можно аппроксимировать (по норме $\mathscr{L}^1(\mathfrak{G})$) функциями φ_n из L_0. Отсюда вытекает, что оператор T_φ является равномерным пределом вполне непрерывных операторов T_{φ_n} и, следовательно, сам вполне непрерывен.

3. Для явного вычисления характеров нам будет удобно вместо функций на группе $\mathfrak{G}$ рассматривать соответствующие им функции на алгебре G. Соответствие, о котором идет речь, устанавливается с помощью канонического отображения $\exp : G \longrightarrow \mathfrak{G}$. Напомним, что для односвязных нильпотентных групп Ли каноническое отображение задает аналитический гомеоморфизм G на $\mathfrak{G}$, при котором инвариантной мере на $\mathfrak{G}$ соответствует евклидова мера на G.

В пространстве функций на G естественно определяется преобразование Фурье, которое переводит каждую функцию ψ на G в функцию

$$\widetilde{\psi}(f) = \int_G e^{i(f, x)} \psi(x)\, dx$$

на пространстве G', сопряженном к G.

В дальнейшем мы будем говорить о преобразовании Фурье функций на $\mathfrak{G}$, понимая под этим преобразование Фурье соответствующих функций на G. Таким образом, если φ — функция на $\mathfrak{G}$, то $\widetilde{\varphi}$ означает функцию на G', заданную формулой

$$\widetilde{\varphi}(f) = \int_G \varphi(\exp x)\, e^{i(f, x)}\, dx.$$

Как обычно, преобразованию Фурье основных функций соответствует преобразование Фурье обобщенных функций. Оказывается, что преобразования Фурье характеров неприводимых представлений совпадают с δ-функциями на соответствующих орбитах. Точный смысл этого утверждения состоит в следующем:

Теорема 7.4. *Пусть T — неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{G}$, Ω — соответствующая этому представлению орбита в G'. Для любой функции $\varphi \in L_0$ выполняется равенство*

$$\operatorname{sp} T_\varphi = \int_\Omega \widetilde{\varphi}(f)\, d\omega(f), \tag{7.3}$$

где $d\omega(f)$ — некоторая мера на Ω, инвариантная относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$ [1].

Доказательство. Пусть G — алгебра Ли группы $\mathfrak{G}$, Z — ее центр. Рассмотрим первый случай: некоторое подпространство $Z_0 \subset Z$ размерности $\geqslant 1$ переходит в нуль при представлении T. Обозначим через π

[1]) Этим требованием мера $d\omega(f)$ определяется однозначно с точностью до численного множителя, выбор которого зависит от нормировки инвариантной меры на $\mathfrak{G}$.

естественную проекцию G на $G_1 = G/Z_0$ и через π' сопряженное отображение G_1' в G'. Кроме того, отождествим для удобства пространство G_1 с каким-нибудь подпространством в G, дополнительным к Z_0. Тогда $G = G_1 + Z_0$, отображение π является проекцией G на G_1 параллельно Z_0, а π' означает продолжение функционала на G_1 до функционала на G, нулевого на Z_0. Представление T имеет вид

$$T_{\exp x} = T'_{\exp \pi(x)},$$

где T' — представление группы $\mathfrak{G}_1 = \exp G_1$. Отсюда

$$T_\varphi = \int\limits_G \varphi(\exp x) T'_{\exp \pi(x)} dx = \int\limits_{G_1}\int\limits_{Z_0} \varphi(\exp(x_1 + z_0)) T'_{\exp x_1} dx_1 dz_0 = T_\psi,$$

где ψ — функция на $\mathfrak{G}_1$, определенная равенством

$$\psi(\exp x_1) = \int\limits_{Z_0} \varphi(\exp(x_1 + z_0)) dz_0.$$

Очевидно, если $\varphi \in L_0(\mathfrak{G})$, то $\psi \in L_0(\mathfrak{G}_1)$. Поэтому можно воспользоваться предположением индукции и написать

$$\operatorname{sp} T'_\psi = \int\limits_{\Omega_1} \widetilde{\psi}(f_1) d\omega_1(f_1), \tag{7.4}$$

где $\widetilde{\psi}$ — преобразование Фурье функции ψ, а $d\omega_1$ — инвариантная относительно $\varrho'(\mathfrak{G}_1)$ мера на орбите Ω_1, соответствующей представлению T'.

Выразим теперь функцию $\widetilde{\psi}$ через $\widetilde{\varphi}$:

$$\widetilde{\psi}(f_1) = \int\limits_{G_1} \psi(\exp x_1) e^{i(f_1, x_1)} dx_1 = \int\limits_{G_1}\int\limits_{Z_0} \varphi(\exp(x_1 + z_0)) e^{i(f_1, x_1)} dx_1 dz_0 =$$

$$= \int\limits_G \varphi(\exp x) e^{i(\pi'(f_1), x)} dx = \widetilde{\varphi}(\pi'(f_1)).$$

Подставляя в (7.4) полученное выражение для $\widetilde{\psi}$ и принимая во внимание равенства $T_\varphi = T'_\psi$, $\Omega = \pi'(\Omega_1)$, мы получаем

$$\operatorname{sp} T_\varphi = \int\limits_\Omega \widetilde{\varphi}(f) d\omega(f).$$

Мера $d\omega$ получается перенесением меры $d\omega_1$ с помощью π'. Так как отображение π' перестановочно с преобразованиями из $\varrho'(\mathfrak{G})$, то инвариантность $d\omega$ следует из инвариантности $d\omega_1$.

Рассмотрим второй случай: $\dim Z = 1$, $T_z = i\lambda E$, $\lambda \neq 0$. (Мы используем результат и обозначения леммы 4.3.) Представление T реализуется в пространстве H вектор-функций на прямой со значениями в гильбертовом пространстве L, и операторы представления имеют вид

$$T_{g_0 \exp ax} f(t) = U_{\exp(tx) \cdot g_0 \cdot \exp(-tx)} f(t + a),$$

где U — некоторое неприводимое представление подгруппы $\mathfrak{G}_0$. Оператор T_φ имеет вид

$$T_\varphi f(t_1) = \sum_{-\infty}^{\infty} K(t_1, t_2) f(t_2) dt_2, \tag{7.5}$$

где $K(t_1, t_2)$ — операторная функция, которая выражается через φ по формуле

$$K(t_1, t_2) = \int\limits_{\mathfrak{G}_0} \varphi(\exp(-t_2 x)\cdot g_0\cdot \exp(t_1 x))\, U_{g_0}\, dg_0. \tag{7.6}$$

Лемма 7.1. *Пусть H — гильбертово пространство вектор-функций на прямой со значениями в гильбертовом пространстве L. Предположим, что оператор T в H имеет след и задан в виде* (7.5), *где операторная функция $K(t_1, t_2)$ такова, что $k(t_1, t_2) = \operatorname{sp} K(t_1, t_2)$ — бесконечно дифференцируемая функция t_1 и t_2. Тогда след оператора T может быть найден по формуле*

$$\operatorname{sp} T = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t, t)\, dt.$$

Доказательство. Пусть $f_1(t), \ldots, f_n(t), \ldots$ — базис в $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$, а $e_1, \ldots, e_n, \ldots$ — базис в L.

Тогда векторы $\xi_{ij} = f_i(t)\cdot e_j$ образуют базис в H. Так как оператор T имеет след, ряд $\sum\limits_{i,j} (T\xi_{ij}, \xi_{ij})_H$ абсолютно сходится и сумма его равна $\operatorname{sp} T$. С другой стороны, сумма этого ряда равна

$$\sum_i \Big(\sum_j (T\xi_{ij}, \xi_{ij})_H \Big) = \sum_i \int\int \Big[f_i(t_2)\overline{f_i(t_1)} \sum_j (K(t_1, t_2)\, e_j, e_j)_L \Big]\, dt_1\, dt_2 =$$
$$= \sum_i \int\int k(t_1, t_2)\, f_i(t_2)\overline{f_i(t_1)}\, dt_1\, dt_2 = \operatorname{sp} K,$$

где K — интегральный оператор в $\mathscr{L}^2(-\infty, \infty)$, заданный ядром $k(t_1, t_2)$. Как известно (см., например, Смирнов, Курс высшей математики, т. 4), след K может быть вычислен по формуле

$$\operatorname{sp} K = \int\limits_{-\infty}^{\infty} k(t, t)\, dt,$$

что и доказывает лемму.

Применим теперь доказанную лемму к вычислению следа оператора T_φ. Для этого перепишем соотношение (7.6) при $t_1 = t_2 = t$ в виде

$$K(t, t) = \int\limits_{\mathfrak{G}_0} \varphi(g_0)\, U^{(t)}_{g_0}\, dg_0, \tag{7.7}$$

где $U^{(t)}$ означает представление $\mathfrak{G}_0$, заданное формулой

$$U^{(t)}_{g_0} = U_{\exp(tx)\cdot g_0\cdot \exp(-tx)}.$$

Кроме того, введем обозначение φ_0 для сужения функции φ на $\mathfrak{G}_0$. Тогда для следа T_φ мы можем написать выражение

$$\operatorname{sp} T_\varphi = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \operatorname{sp} U^{(t)}_{\varphi_0}\, dt. \tag{7.8}$$

По предположению индукции на каждой орбите Ω_t, соответствующей

представлению $U^{(t)}$, существует такая мера $d\omega_t$, что

$$\operatorname{sp} U^{(t)}_{\varphi_0} = \int\limits_{\Omega_t} \widetilde{\varphi}_0(f_0)\, d\omega_t(f_0). \tag{7.9}$$

Нам нужно теперь выразить $\widetilde{\varphi}_0$ через $\widetilde{\varphi}$. Мы покажем, что значение $\widetilde{\varphi}_0(f_0)$ весьма просто выражается через значения $\widetilde{\varphi}$ на вертикальной прямой l (см. § 6), заданной уравнением $p(f) = f_0$. В самом деле, будем задавать функционал $f \in G'$ двумя «координатами»: проекцией $f_0 = p(f)$ и параметром τ вдоль прямой l. В качестве параметра τ удобно взять значение функционала f на элементе $x \in G$, не лежащем в G_0. Тогда интеграл функции $\widetilde{\varphi}$ по прямой l можно записать так:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(f_0, \tau)\, d\tau = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{G_0} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(\exp(x_0 + ax))\, e^{i[(f_0, x_0) + a\tau]}\, d\tau\, dx_0\, da.$$

Так как $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{ia\tau}\, d\tau = 2\pi\delta(a)$, мы получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(f_0, \tau)\, d\tau = 2\pi \int\limits_{G_0} \varphi(\exp x_0)\, e^{i(f_0, x_0)}\, dx_0 = 2\pi\widetilde{\varphi}_0(f_0). \tag{7.10}$$

Соединяя вместе (7.8), (7.9) и (7.10), получаем окончательно

$$\operatorname{sp} T_\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \int\limits_{\Omega_t} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \widetilde{\varphi}(f_0, \tau)\, d\tau\, d\omega_t(f_0)\, dt. \tag{7.11}$$

Множество, по которому берется интеграл в (7.11), совпадает, очевидно, с орбитой $\Omega \subset G'$, соответствующей представлению T (ср. лемму 6.3). Мы доказали, таким образом, существование на орбите Ω такой меры $d\omega$, что для любой функции $\varphi \in L_0$ выполняется равенство

$$\operatorname{sp} T_\varphi = \int\limits_{\Omega} \widetilde{\varphi}(f)\, d\omega(f). \tag{7.12}$$

В координатах f_0, τ эта мера имеет вид

$$d\omega(f) = \frac{1}{2\pi}\, dt\, d\omega_t(f_0)\, d\tau. \tag{7.13}$$

Нам нужно теперь доказать инвариантность меры $d\omega$ относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$. Это можно сделать, непосредственно вычислив, как преобразуется выражение (7.13) под действием $\varrho'(\mathfrak{G})$, но мы покажем, что инвариантность $d\omega$ следует из соотношения (7.12).

Пусть $\varphi \in L_0$. Положим $\psi(g) = \varphi(g_1 g g_1^{-1})$. Очевидно,

$$\operatorname{sp} T_\psi = \operatorname{sp}(T_{g_1}^{-1} T_\varphi T_{g_1}) = \operatorname{sp} T_\varphi. \tag{7.14}$$

С другой стороны,

$$\operatorname{sp} T_\psi = \int\limits_{\Omega} \widetilde{\varphi}(f)\, d\omega_1(f), \tag{7.15}$$

где $d\omega_1$ означает меру, в которую переходит $d\omega$ под действием $\varrho'(g_1)$. Сопоставляя равенства (7.14) и (7.15), мы заключаем, что для любой

функции $\varphi \in L_0$

$$\int_{\Omega} \widetilde{\varphi}(f)\, d\omega(f) = \int_{\Omega} \widetilde{\varphi}(f)\, d\omega_1(f),$$

откуда $d\omega = d\omega_1$, и инвариантность $d\omega$ доказана.

Для доказательства теоремы достаточно теперь проверить ее для одномерной группы $\mathfrak{G}$. В этом случае каждая орбита в G' состоит из одной точки ω, а соответствующее представление $\mathfrak{G}$ имеет вид

$$\exp x \longrightarrow e^{i\omega x}.$$

Формула (7.4) принимает вид очевидного равенства

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\exp x)\, e^{i\omega x}\, dx = \widetilde{\varphi}(\omega).$$

4. Явное выражение для характеров неприводимых представлений, полученное выше, позволяет дать простой вывод аналога формулы Планшереля для нильпотентных групп Ли. Речь идет о том, чтобы восстановить функцию φ на группе $\mathfrak{G}$, если известны операторы T_φ для всех неприводимых унитарных представлений T группы $\mathfrak{G}$.

В случае, когда $\mathfrak{G}$ — аддитивная группа вещественных чисел, преобразование $\varphi \longrightarrow T_\varphi$ совпадает с преобразованием Фурье. Формула Планшереля утверждает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^2\, dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\varphi}(\lambda)|^2\, d\lambda. \tag{7.16}$$

Из этой формулы легко выводится формула обращения

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x}\widetilde{\varphi}(\lambda)\, d\lambda. \tag{7.17}$$

Известно, что аналоги этих формул справедливы для широкого класса групп и имеют вид

$$\int_{\mathfrak{G}} |\varphi(g)|^2\, dg = \int_{\hat{\mathfrak{G}}} \operatorname{sp}[(T_\varphi^\lambda)^* T_\varphi^\lambda]\, d\mu(\lambda), \tag{7.16'}$$

$$\varphi(g) = \int_{\hat{\mathfrak{G}}} \operatorname{sp}[(T_g^\lambda)^* T_\varphi^\lambda]\, d\mu(\lambda), \tag{7.17'}$$

где $d\mu$ — некоторая мера на множестве $\hat{\mathfrak{G}}$ всех унитарных неприводимых представлений $\mathfrak{G}$ [1]).

Для частного случая $g = e$ формула (7.17) превращается в

$$\varphi(e) = \int_{\hat{\mathfrak{G}}} \operatorname{sp} T_\varphi^\lambda\, d\mu(\lambda). \tag{7.18}$$

[1]) Так называемая «абстрактная формула Планшереля» выведена Сигалом [21] для всех сепарабельных локально компактных групп с двусторонне инвариантной мерой. Напротив, «конкретная формула Планшереля», включающая описание входящих в нее представлений и вычисление меры $d\mu$, известна лишь для немногих классов групп (см., например, [22], [23]).

Формулы (7.16′) и (7.17′) в свою очередь легко выводятся из (7.18). Для этого достаточно применить формулу (7.18) к функциям $\psi_1(g_1)=\int\limits_{\mathfrak{G}}\varphi(g)\overline{\varphi(gg_1)}\,dg$ и $\psi_2(g_1)=\varphi(gg_1)$.

Итак, для вывода формулы обращения и аналога формулы Планшереля достаточно доказать равенство (7.18). Мы покажем, что для случая, когда $\mathfrak{G}$ — односвязная нильпотентная группа Ли, это равенство имеет простой и наглядный смысл. Перейдем к преобразованиям Фурье и воспользуемся теоремой 7.4. Тогда равенство (7.18) примет вид

$$\int\limits_{G'}\widetilde{\varphi}(f)\,df=\int\limits_{\hat{\mathfrak{G}}}\left(\int\limits_{\Omega_\lambda}\widetilde{\varphi}(f)\,d\omega_\lambda(f)\right)d\mu(\lambda). \tag{7.19}$$

Это означает не что иное, как разложение евклидовой меры df на G' по каноническим мерам на орбитах. Существование такого разложения следует из общей теории меры (см., например, Халмош, Теория меры, § 48 и Дуб, Вероятностные процессы, гл. 1, §§ 8—9).

Ясно, что внешний интеграл в правой части (7.19) достаточно брать не по всему множеству $\hat{\mathfrak{G}}$ (которое мы отождествим в силу § 5 с множеством орбит в G' относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$), а лишь по множеству Λ орбит общего положения, так как объединение орбит, не входящих в Λ, имеет меру нуль в G'.

В множестве Λ можно ввести естественные координаты. Пусть коразмерность орбит общего положения в G' равна k и $P_1, \ldots, P_k$ — независимые многочлены на G', инвариантные относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$. В качестве координат орбиты Ω мы возьмем числа $\lambda_i=P_i(\Omega)$ $(i=1, 2, \ldots, k)$. Оказывается, что мера $d\mu$ записывается в координатах $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ в виде рациональной дифференциальной формы на Λ.

Предложение 4[1]). *Существует такая рациональная функция $R(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, что для любой функции $\varphi\in L_0$ справедливо равенство*

$$\int|\varphi(g)|^2\,dg=\int\limits_{\Lambda}\operatorname{sp}[(T_\varphi^\lambda)^*T_\varphi^\lambda]\,|R(\lambda)|\,d\lambda, \tag{7.20}$$

где $d\lambda=d\lambda_1 d\lambda_2\ldots d\lambda_k$.

Доказательство. В силу сказанного выше мы должны показать, что евклидова мера df на G' разлагается по каноническим мерам на орбитах общего положения, причем «плотность», соответствующая орбите $\Omega_{\lambda_1,\ldots,\lambda_k}$, является рациональной функцией от $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Мы проведем доказательство по индукции, используя результаты §§ 6—7, а также две леммы Диксмье об инвариантных многочленах на G'.

Пусть $\mathfrak{G}$ — односвязная нильпотентная группа Ли, $\mathfrak{G}_0$ — ее замкнутая подгруппа коразмерности 1. Покажем, что предложение 4 справедливо для группы $\mathfrak{G}$, если оно справедливо для группы $\mathfrak{G}_0$. Предположим сначала, что размерности орбит общего положения в G' и в G_0' совпадают. Тогда почти все орбиты в G' являются орбитами первого рода. Введем, как и в § 6, в мно-

---

[1]) Этот результат получен впервые Диксмье ([4], теорема 3, п. VII) в несколько другой формулировке.

жество G' две «координаты»: $f_0 = p(f)$ и $\tau = (f, x)$. Как мы видели в доказательстве теоремы 7.4, каноническая мера на орбите первого рода Ω в G' имеет вид

$$d\omega(f) = d\omega_0(f_0),$$

где $d\omega_0$ — каноническая мера на $\Omega_0 = p(\Omega)$. По предположению индукции существуют такие координаты $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ на Λ_0 и такая рациональная функция $R_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$, что

$$df_0 = |R_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)| \, d\omega_{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k}(f_0) \, d\lambda_1 \, d\lambda_2 \ldots d\lambda_k.$$

По лемме 2 из [4] существует инвариантный многочлен P на G' вида $P(f_0, \tau) = Q_0(f_0)\tau + Q_1(f_0)$, где $Q_0(f_0)$ — инвариантный многочлен на G'_0. Отсюда легко выводится, что каждый многочлен $Q(f_0)$, инвариантный относительно $\varrho'(\mathfrak{G}_0)$, будет инвариантным относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$ (ср. предложение 3 в [4]). Возьмем в качестве координат на Λ числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ и $\lambda_{k+1} = P(\Omega)$. Тогда

$$|R_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)| \, d\omega_{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k}(f_0) \, d\lambda_1 \ldots d\lambda_k \, d\lambda_{k+1} = df_0 \, d\lambda_{k+1} =$$
$$= \left| \frac{D(f_0, \lambda_{k+1})}{D(f_0, \tau)} \right| df_0 \, d\tau = |Q_0(f_0)| \, df_0 \, d\tau.$$

Так как Q_0 — инвариантный многочлен, он рационально выражается через $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Полагая $R(\lambda) = \frac{R_0(\lambda)}{Q_0(\lambda)}$, мы получаем требуемое разложение

$$df = df_0 \, d\tau = |R(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)| \, d\omega_{\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}}(f) \, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{k+1}.$$

Пусть теперь почти все орбиты в G' являются орбитами второго рода. Из леммы 12 в [4] следует, что в Λ_0 существуют такие координаты $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}$, в которых преобразование $\varrho'(\exp ax)$ (где x — элемент G, не лежащий в G_0) имеет вид $(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}) \to (\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1} + aR_1(\lambda_1, \ldots, \lambda_k))$, $R_1 \not\equiv 0$. По предположению индукции

$$df_0 = |R_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)| \, d\omega_{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}}(f_0) \, d\lambda_1 \ldots d\lambda_{k+1}.$$

Нетрудно видеть, что функция R_0 не зависит от λ_{k+1}. В самом деле, преобразование $\varrho'(\exp ax)$ не меняет df_0 и переводит $d\omega_{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}}$ в $d\omega_{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1} + aR_1}$. Отсюда $|R_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1})| = |R_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1} + aR_1)|$ при всех a. Имеем, следовательно,

$$df_0 = |\hat{R}_0(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)| \, d\omega_{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k, \lambda_{k+1}}(f_0) \, d\lambda_1 \ldots d\lambda_k \, d\lambda_{k+1}.$$

Остается заметить, что выражение $\frac{1}{2\pi |R_1|} d\tau \, d\omega_{0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{k+1}}(f_0) \, d\lambda_{k+1}$ совпадает с канонической мерой (7.13) на орбите $\Omega_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k}$ в G'. Поэтому, полагая $R(\lambda) = 2\pi R_1(\lambda) \cdot \hat{R}_0(\lambda)$, мы получаем

$$df = |R(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)| \, d\omega_{\lambda_1, \ldots, \lambda_k}(f) \, d\lambda_1 \ldots d\lambda_k,$$

и предложение 4 доказано, так как для одномерных групп оно, очевидно, справедливо (ср. формулу (7.16)).

§ 8. Некоторые обобщения и нерешенные вопросы

1. Прежде всего мы покажем, каким образом теоремы, доказанные в статье, переносятся на неодносвязные нильпотентные группы. Известно (см. [13], гл. IX), что всякая неодносвязная группа Ли $\widetilde{\mathfrak{G}}$ может быть пред-

ставлена как фактор-группа некоторой односвязной группы $\mathfrak{G}$ по дискретному нормальному делителю D, лежащему в центре $\mathfrak{G}$. Каждому представлению $\widetilde{T}$ неодносвязной группы $\widetilde{\mathfrak{G}}$ можно сопоставить представление T односвязной группы $\mathfrak{G}$:

$$T_g = \widetilde{T}_{\varphi(g)},$$

где φ означает естественный гомоморфизм $\mathfrak{G}$ на $\widetilde{\mathfrak{G}}$.

Легко проверить, что формула (8.1) устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми представлениями $\widetilde{\mathfrak{G}}$ и теми представлениями $\mathfrak{G}$, при которых элементы D переходят в единичный оператор. Это позволяет без труда сводить все вопросы теории представлений неодносвязных групп к соответствующим вопросам для односвязных групп. Окончательный результат допускает следующую удобную формулировку:

Теорема 8.1. *Пусть $\widetilde{\mathfrak{G}}$ — неодносвязная нильпотентная группа Ли, G — ее алгебра Ли. Обозначим через R решетку в G, которая является прообразом единичного элемента группы при каноническом отображении. Все теоремы настоящей статьи сохраняют силу для неодносвязной группы $\widetilde{\mathfrak{G}}$, если условиться называть алгеброй Ли группы $\widetilde{\mathfrak{G}}$ фактор-группу $\widetilde{G} = G/R$, а пространством, сопряженным к алгебре Ли,— подгруппу $\widetilde{G}' \subset G'$, двойственную к $\widetilde{G}$ в смысле Понтрягина.*

Докажем, например, что неприводимые унитарные представления $\widetilde{\mathfrak{G}}$ взаимно однозначно соответствуют орбитам в $\widetilde{G}'$. Как мы видели выше, представления $\widetilde{\mathfrak{G}}$ можно рассматривать как представления односвязной группы $\mathfrak{G}$, тривиальные на дискретном нормальном делителе $D = \exp R$. В силу § 5 представления $\mathfrak{G}$ соответствуют орбитам в G'. Пусть T — представление $\mathfrak{G}$, соответствующее орбите $\Omega \subset G'$. Тогда для всех элементов z из центра G и всех функционалов f из Ω выполняется соотношение (см. § 7)

$$T_{\exp z} = e^{i(f,\, z)} E.$$

Поэтому представление T тривиально на $D = \exp R$ тогда и только тогда, когда $e^{i(f,\, r)} = 1$ для всех $r \in R$. Последнее условие означает, что f принадлежит подгруппе $\widetilde{G}'$. Мы получили теорему 5.2 для неодносвязных групп. Доказательство других теорем проводится аналогично и может быть опущено.

2. Заметим теперь, что часть результатов настоящей статьи справедлива не только для нильпотентных групп.

Будем называть группу Ли $\mathfrak{G}$ *вполне разрешимой*, если в ней существует возрастающая последовательность нормальных делителей $\{e\} = \mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}_1 \subset \ldots \ldots \subset \mathfrak{G}_n = \mathfrak{G}$, размерности которых возрастают на 1, так что $\dim \mathfrak{G}_k = k$ [1]). Примером вполне разрешимой группы является группа K_n треугольных матриц n-го порядка с произвольными положительными числами на главной диагонали [2]).

[1]) Это определение эквивалентно следующему: группа $\mathfrak{G}$ вполне разрешима, если операторы присоединенного представления имеют только вещественные собственные значения. Ср. также определение группы типа (E) в [34].

[2]) Можно показать, что всякая вполне разрешимая группа изоморфна некоторой подгруппе K_n при достаточно большом n.

Оказывается, что для вполне разрешимых групп сохраняют силу результаты §§ 5—6, устанавливающие связь между представлениями $\mathfrak{G}$ и орбитами в G'. Доказательство этого факта проводится по индукции аналогично тому, как это сделано в §§ 5—6 для нильпотентных групп. Единственным существенным отличием является то, что группы, допускающие локально точное представление, уже не обязательно содержат подгруппу, изоморфную $\mathfrak{N}$ (см. §§ 3—4). Легко показать, однако, что эти группы всегда содержат либо подгруппу, изоморфную $\mathfrak{N}$, либо подгруппу, изоморфную группе линейных неоднородных преобразований прямой. Последняя группа изоморфна группе $\mathfrak{M}$ матриц вида $\begin{Vmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{Vmatrix}$ и является простейшей некоммутативной разрешимой группой. Заменой теоремы Стона — фон Неймана является в этом случае теорема Гельфанда — Наймарка [8], описывающая все унитарные представления $\mathfrak{M}$.

Вполне вероятно, что теоремы §§ 5—6 в какой-то форме обобщаются на произвольные разрешимые группы Ли.

Напротив, теоремы § 7 (за исключением теоремы 7.2), как правило, не переносятся на разрешимые группы. Так, уже для простейшей разрешимой группы $\mathfrak{M}$ операторы T_φ для $\varphi \in L_0$ не являются вполне непрерывными. Поэтому то определение характера, которое мы дали в § 7, и вся дальнейшая теория неприменимы к этой группе.

3. Множество $\hat{\mathfrak{G}}$ всех неприводимых представлений группы $\mathfrak{G}$ называют, *двойственным объектом к* $\mathfrak{G}$. Если $\mathfrak{G}$ коммутативна, то $\hat{\mathfrak{G}}$ совпадает с двойственной группой в смысле Понтрягина. Для некоммутативных групп множество $\hat{\mathfrak{G}}$ уже не является группой.

Одним из средств изучения $\hat{\mathfrak{G}}$ является введение в него естественной топологии. Существует несколько способов топологизации $\hat{\mathfrak{G}}$ [24] — [26], которые, как показано в [26], [27], приводят к одному и тому же результату. Мы изложим здесь способ, предложенный И. М. Гельфандом. Пусть T — неприводимое унитарное представление группы $\mathfrak{G}$ в гильбертовом пространстве H. Окрестность представления T определяется выбором конечного числа векторов $\xi_1, \ldots, \xi_k$ из H, компактного множества F в $\mathfrak{G}$ и положительного числа ε. Эта окрестность состоит из всех неприводимых представлений S, в пространстве которых существуют такие векторы $\eta_1, \ldots, \eta_k$ что для всех $g \in F$ выполняется неравенство

$$|(T_g\xi_i, \xi_j) - (S_g\eta_i, \eta_j)| < \varepsilon \qquad (1 \leqslant i, j \leqslant k).$$

Как правило, топологическое пространство $\hat{\mathfrak{G}}$ оказывается не хаусдорфовым. Полное описание этого пространства дано пока только для группы $SL(n, C)$ комплексных матриц n-го порядка с определителем 1 [27] и для простейших нильпотентных групп Ли [28].

Результаты настоящей статьи позволяют высказать предположение, что для нильпотентных групп Ли пространство $\hat{\mathfrak{G}}$ гомеоморфно множеству $X(G')$ [1])

---

[1]) Топология в $X(G')$ определяется как наиболее сильная, в которой естественное отображение $G' \to X(G')$ непрерывно (фактор-топология в смысле Бурбаки).

орбит в G' относительно ϱ' ($\mathfrak{G}$). Эта гипотеза справедлива для групп, рассмотренных в [28]. Кроме того, можно доказать следующее утверждение:

Теорема 8.2. *Отображение $X(G')$ в $\hat{\mathfrak{G}}$, определенное в § 5, непрерывно.*

Мы наметим доказательство этой теоремы. Пусть орбиты Ω_n сходятся к Ω. Это значит, что можно выбрать такие функционалы $f_n \in \Omega_n$, что $\lim f_n = f \in \Omega$. Обозначим через G_n подалгебру максимальной размерности в G, подчиненную функционалу f_n. Мы можем считать (перейдя, если нужно, к подпоследовательности), что все алгебры G_n имеют одну и ту же размерность k и что существуют векторы $x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}$ в G, удовлетворяющие условиям:

1) при каждом n векторы $x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}$ образуют базис в G, а векторы $x_1^{(n)}, \ldots, x_k^{(n)}$ — базис в G_n;

2) пространство, порожденное векторами $x_1^{(n)}, \ldots, x_l^{(n)}$, $k < l < m$, является подалгеброй в G;

3) при $n \longrightarrow \infty$ векторы $x_1^{(n)}, \ldots, x_m^{(n)}$ стремятся к векторам $x_1, \ldots, x_m$, образующим базис в G. Пусть G_∞ означает подалгебру, натянутую на $x_1, \ldots, x_k$. Очевидно, G_∞ подчинена f. Если $\dim \Omega_n = \dim \Omega$, то G_∞ — подалгебра максимальной размерности, подчиненная f. В этом случае представление T, соответствующее орбите Ω, индуцировано одномерным представлением

$$\exp t \longrightarrow e^{i(f,\, t)}$$

подгруппы $\mathfrak{G}_\infty = \exp G_\infty$. Представление $T^{(n)}$, соответствующее орбите Ω_n, индуцировано одномерным представлением

$$\exp t \longrightarrow e^{i(f_n,\, t)}$$

подгруппы $\mathfrak{G}_n = \exp G_n$.

Воспользуемся тем, что группа $\mathfrak{G}$ разлагается в полупрямое произведение подгруппы $\mathfrak{G}_n$ и $(m-k)$ однопараметрических подгрупп $\{\exp \tau x_i^{(n)}\}$, $k < i \leqslant m$. С помощью этого разложения можно отождествить однородное пространство $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_n$ с $(m-k)$-мерным евклидовым пространством R^{m-k}. Представление $T^{(n)}$ реализуется в пространстве функций на R^{m-k}, и операторы представления имеют вид

$$T_g^{(n)} f(s) = \alpha_n(s, g)\, f((\overline{sg})_n).$$

Представление T реализуется в том же пространстве и имеет вид

$$T_g f(s) = \alpha(s, g)\, f(\overline{sg}).$$

Легко проверить, что при $n \longrightarrow \infty$ функции $\alpha_n(s, g)$ и преобразования $s \longrightarrow (\overline{sg})_n$ стремятся равномерно на каждом компакте к функции $\alpha(s, g)$ и преобразованию $s \longrightarrow \overline{sg}$. Отсюда без труда выводится, что $T^{(n)} \longrightarrow T$.

Если же $\dim \Omega_n > \dim \Omega$, то G_∞ уже не будет подалгеброй максимальной размерности, подчиненной f. В этом случае представления $T^{(n)}$ стремятся к приводимому представлению $T^{(\infty)}$, индуцированному одномерным представлением

$$\exp t \longrightarrow e^{i(f,\, t)}$$

подгруппы $\mathfrak{G}_\infty$. Можно показать, что представление $T^{(\infty)}$ разлагается в пря-

мой интеграл неприводимых представлений $\mathfrak{G}$ (одно из которых совпадает с T) и все эти представления являются пределами последовательности $T^{(n)}$.

Некоторую информацию о топологическом строении $\hat{\mathfrak{G}}$ дает изучение представлений инфинитезимального группового кольца A. Если элемент $p \in A$ принадлежит центру A, то при неприводимом представлении T он переходит в скалярный оператор $\lambda(p, T)E$. Берна и Диксмье [29] показали, что функция $\lambda(p, T)$ при всех $p \in Z(A)$ непрерывна на $\hat{\mathfrak{G}}$. Мы приведем это доказательство.

Элементу $p \in Z(A)$ соответствует дифференциальный оператор P на $\mathfrak{G}$, перестановочный со сдвигами. Для любого неприводимого представления T группы $\mathfrak{G}$ и любой функции $\varphi \in L_0$ имеет место равенство

$$T_{P\varphi} = T_p T_\varphi = \lambda(p, T) T_\varphi.$$

Пусть теперь $T^{(n)} \longrightarrow T$. Выберем функцию $\varphi \in L_0$ и вектор ξ так, чтобы $(T_\varphi \xi, \xi) \neq 0$. Из определения топологии в $\hat{\mathfrak{G}}$ легко выводится, что существуют такие векторы ξ_n в пространствах представлений $T^{(n)}$, для которых $(T_\varphi^{(n)} \xi_n, \xi_n) \longrightarrow (T_\varphi \xi, \xi)$ и $(T_{P\varphi}^{(n)} \xi_n, \xi_n) \longrightarrow (T_{P\varphi} \xi, \xi)$. Так как

$$\lambda(p, T^{(n)}) = \frac{(T_{P\varphi}^{(n)} \xi_n, \xi_n)}{(T_\varphi^{(n)} \xi_n, \xi_n)},$$

отсюда следует, что $\lambda(p, T^{(n)}) \longrightarrow \lambda(p, T)$.

Соединяя этот результат с теоремой 7.2 и предложением 2 § 2, мы получаем следующее утверждение:

Теорема 8.3. *Пусть Λ — множество орбит общего положения в G'* (см. § 2). *Множество $\hat{\mathfrak{G}}_\Lambda \subset \hat{\mathfrak{G}}$, состоящее из представлений, которые соответствуют орбитам общего положения, открыто и плотно в $\hat{\mathfrak{G}}$. Отображение $\Lambda \longrightarrow \hat{\mathfrak{G}}_\Lambda$ является гомеоморфизмом.*

4. В заключение мы сформулируем несколько нерешенных вопросов возникающих в связи с настоящей статьей.

1. Обобщаются ли теоремы §§ 5—6 настоящей статьи на произвольные разрешимые группы Ли? В частности, нельзя ли перенести теоремы 5.1 и 5.2 на разрешимые группы без гладкой двойственности (в смысле Макки [30]), рассматривая вместо орбит в G' эргодические множества относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$?

2. Всегда ли $\hat{\mathfrak{G}}$ гомеоморфно $X(G')$?

3. Дать в явном виде классификацию орбит в G' для группы треугольных матриц с единицами по главной диагонали [1]). Верно ли, что в этом случае множество всех представлений распадается на конечное число классов $\hat{\mathfrak{G}}_k$ так, что все представления одного класса реализуются в пространстве функций на одном и том же однородном многообразии $\mathfrak{G}/\mathfrak{G}_k$?

4. Как устроены неунитарные неприводимые представления нильпотентных групп Ли? В частности, соответствуют ли они орбитам в $G' + iG'$ (комплексной оболочке G') относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$?

---

[1]) Классификацию орбит общего положения см. в § 9.

5. Интересно отметить, что многие факты теории представлений полупростых групп Ли можно сформулировать точно в такой же форме, в какой они доказаны здесь для нильпотентных групп. Приведем два примера.

Рассмотрим сначала задачу о классификации представлений группы $\mathfrak{G}$ комплексных матриц n-го порядка с определителем 1. Попробуем применить формально теорему 5.2 настоящей статьи. Алгебра Ли группы $\mathfrak{G}$ состоит из всех комплексных матриц со следом нуль.

Пространство G' естественным образом отождествляется с самой алгеброй Ли (с помощью картановской метрики: $(x, y) = \operatorname{Re} \operatorname{sp}(xy)$). Преобразование $\varrho'(g)$ действует в G' по формуле

$$x \longrightarrow gxg^{-1}.$$

Поэтому орбиты в G' относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$ — это классы сопряженных элементов в G'.

В качестве представителя из орбиты общего положения можно взять диагональную матрицу λ с различными собственными значениями. Легко проверить, что подалгебра M треугольных матриц с произвольными элементами на главной диагонали является подалгеброй максимальной размерности в G', подчиненной λ. Пусть $T^{(\lambda, M)}$ означает представление $\mathfrak{G}$, индуцированное одномерным представлением

$$U_{\exp m} = e^{i \operatorname{Re} \operatorname{sp}(m\lambda)}$$

треугольной подгруппы $\mathfrak{M} = \exp M$. Как показано в [10], представления $T^{(\lambda, M)}$ образуют основную серию представлений группы $\mathfrak{G}$.

Рассматривая другие орбиты в G' (соответствующие матрицам с кратными собственными значениями), мы получим вырожденные серии представлений $\mathfrak{G}$.

Дополнительные серии представлений $\mathfrak{G}$ не укладываются непосредственно в эту схему. Однако их можно получить, рассматривая орбиты в комплексной оболочке пространства G' относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$.

Пусть теперь $\mathfrak{G}$ — группа $SU(2)$ унитарных матриц второго порядка с определителем 1. Как известно, характеры этой группы имеют вид

$$\chi_k(g) = \frac{\sin(k+1)\varphi}{\sin\varphi}, \tag{8.1}$$

если матрица g имеет собственные значения $e^{i\varphi}$ и $e^{-i\varphi}$. Оказывается, что теорему 7.4 настоящей статьи можно сформулировать так, чтобы она включала как частный случай формулы (8.1). Для этого нужно при перенесении основных и обобщенных функций с группы на алгебру учитывать, что инвариантная мера на $\mathfrak{G}$ переходит, вообще говоря, не в евклидову меру на G, а в меру

$$d\mu(x) = |j(x)|^2\, dx,$$

где dx — евклидова мера, а $j(x)$ — некоторая функция на G. Поэтому естественно считать, что основной функции φ (соответственно обобщенной функции χ) на $\mathfrak{G}$ соответствует функция $\varphi_1(x) = \varphi(\exp x) \cdot j(x)$ (соответственно $\chi_1(x) = \chi(\exp x) \cdot j(x)$) на G. Для нильпотентных групп $j(x) \equiv 1$, и изменение формулировки не нарушает справедливости теоремы 7.4. В случае группы

$SU(2)$ функция $j(x)$ имеет вид

$$j(x)=\frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

если матрица $x\in G$ имеет собственные значения $i\varphi$ и $-i\varphi$. Преобразование Фурье функции $\chi_1(x)=\chi(\exp x)\cdot j(x)=\frac{\sin(k+1)\varphi}{\varphi}$ является δ-функцией, сосредоточенной на сфере радиуса $k+1$ в пространстве G', т. е. на орбите в G' относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$.

Приведенные примеры позволяют надеяться, что многие результаты настоящей статьи в той или иной форме переносятся на более широкие классы группы.

§ 9. Примеры [1])

1. Простейший пример некоммутативной нильпотентной группы — это группа $\mathfrak{N}$, представления которой описаны в § 3. Напомним, что эта группа состоит из матриц вида

$$\begin{Vmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}.$$

Алгебра Ли N этой группы состоит из матриц

$$\begin{Vmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

а пространство N', сопряженное к N, удобно отождествить с пространством матриц вида

$$\begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 \\ z & y & 0 \end{Vmatrix}.$$

Преобразования $\varrho'(g)$ в координатах x, y, z выглядят следующим образом:

$$x\longrightarrow x-bz,$$
$$y\longrightarrow y+az,$$
$$z\longrightarrow z.$$

Отсюда видно, что орбиты в N' бывают двух типов:

1) плоскости $z=\lambda\neq 0$,

2) точки $x=\mu$, $y=\nu$, $z=0$.

Орбите первого типа соответствует бесконечномерное представление T^{λ} (см. 3.7)). Орбите второго типа — одномерное представление $T^{(\mu,\nu)}$ (см. (3.4)).

---

[1]) Мы рассматриваем здесь лишь небольшое число примеров для иллюстрации построенной выше общей теории. По поводу других примеров см., например, работу Диксмье [32]. Результаты этой работы без труда выводятся из нашей теории.

На этом примере связь между орбитами и представлениями выглядит особенно просто. Посмотрим, например, как устроено кронекеровское произведение двух неприводимых представлений $\mathfrak{N}$.

Используя теорему 6.1, сразу получаем

$$T^{\lambda_1} \otimes T^{\lambda_2} = \begin{cases} \infty \cdot T^{\lambda_1+\lambda_2}, & \text{если } \lambda_1+\lambda_2 \neq 0, \\ \infty \cdot \int\int T^{(\mu,\nu)}\, d\mu\, d\nu, & \text{если } \lambda_1+\lambda_2 = 0, \end{cases}$$

$$T^{\lambda} \otimes T^{(\mu,\nu)} = T^{\lambda},$$

$$T^{(\mu_1,\nu_1)} \otimes T^{(\mu_2,\nu_2)} = T^{(\mu_1+\mu_2,\nu_1+\nu_2)}.$$

2. Рассмотрим более сложный пример — группу $\mathfrak{N}_n$ треугольных матриц n-го порядка с единицами на главной диагонали[1]). Аналогично предыдущему примеру пространство N'_n, сопряженное к алгебре Ли этой группы, удобно реализовать в виде пространства нижних треугольных матриц вида

$$x = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ * & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ * & * & \ldots & 0 & 0 \\ * & * & \ldots & * & 0 \end{Vmatrix}.$$

Преобразования $\varrho'(g)$ задаются формулой $\varrho'(g)x = [gxg^{-1}]_{\text{ниж}}$[2]).

Пусть $\Delta_k(x)$ — определитель левого нижнего углового минора порядка k матрицы x. Можно показать (см. [31]), что многочлены $\Delta_k(x)$ $\left(k = 1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ образуют базис в кольце всех многочленов на N'_n, инвариантных относительно $\varrho'(\mathfrak{N}_n)$. Орбита общего положения задается уравнениями $\Delta_k(x) = \text{const} \neq 0$. Размерность этой орбиты равна $\dim N_n - \left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n(n-1)}{2} - \left[\frac{n}{2}\right]$.

Несложный подсчет с помощью леммы 5.2 показывает, что подалгебра максимальной размерности в N_n, подчиненная функционалу общего положения, должна иметь размерность $\left[\frac{n}{2}\right] \times \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Но в алгебре N_n есть коммутативный идеал P как раз такой размерности. Этот идеал состоит из матриц вида $\begin{Vmatrix} 0 & p \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$, где p — произвольная матрица порядка $\left[\frac{n}{2}\right] \times \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Очевидно, P является подалгеброй, подчиненной любому функционалу из N'_n. Пусть $\mathfrak{P}$ — подгруппа $\mathfrak{N}_n$, соответствующая подалгебре P. Пространство $\mathfrak{N}_n/\mathfrak{P}$ естественно отождествляется с подгруппой матриц вида

$$\begin{Vmatrix} X_1 & 0 \\ 0 & X_2 \end{Vmatrix}, \quad X_1 \in \mathfrak{N}_{\left[\frac{n}{2}\right]}, \quad X_2 \in \mathfrak{N}_{\left[\frac{n+1}{2}\right]}.$$

---

1) Представления группы $\mathfrak{N}_n$ (неисключительные) рассмотрены также в [31].

2) Матрица gxg^{-1} уже не является, вообще говоря, нижней треугольной. Символ $[gxg^{-1}]_{\text{ниж}}$ означает нижнюю треугольную матрицу, у которой элементы, стоящие под главной диагональю, совпадают с соответствующими элементами матрицы gxg^{-1}.

В качестве представителя из орбиты общего положения можно взять матрицу $\begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ \Lambda & 0 \end{Vmatrix}$, где

$$\Lambda = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \dots 0 & \lambda_k \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \lambda_2 \dots 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 \dots 0 & 0 \end{Vmatrix} \text{ при } n = 2k \quad \text{и} \quad \Lambda = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & 0 \dots 0 & \lambda_k \\ 0 & \lambda_2 \dots 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 \dots 0 & 0 \end{Vmatrix} \text{ при } n = 2k+1.$$

Тогда соответствующее представление $\mathfrak{N}_n$ можно записать следующим образом [1]). Если $g = \begin{Vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix}$, то

$$T_g^\Lambda f(X_1, X_2) = e^{i \operatorname{sp} (\Lambda X_1 B A_2^{-1} X_2^{-1})} f(X_1 A_1, X_2 A_2). \tag{9.1}$$

Характер этого представления можно вычислить с помощью теоремы 7.4. Мы приведем окончательный результат. Пусть сначала $n = 2k$ и $g = \begin{Vmatrix} A_1 & B \\ 0 & A_2 \end{Vmatrix}$. Обозначим через Δ_l определитель левого нижнего углового минора порядка l матрицы B и положим

$$\beta_l = (-1)^{k-l} \frac{\Delta_{k-l+1}}{\Delta_{k-l}} \quad (l = 1, 2, \dots, k-1), \quad \beta_k = \Delta_1.$$

Тогда

$$\chi_\Lambda(g) = (2\pi)^{\frac{k(k-1)}{2}} \delta(A_1) \delta(A_2) \frac{e^{i \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \beta_l}}{\prod_{l=1}^{k} |\lambda_l^{k-l} \beta_l^{l-1}|}, \tag{9.2}$$

где $\delta(A)$ означает $\prod_{i<j} \delta(a_{ij})$.

Пусть теперь $n = 2k+1$. Запишем матрицу g в виде

$$\left\Vert \begin{array}{c|c|c} A_1 & a_1 & B \\ \hline 0 \dots 0 & 1 & a_2 \\ \hline & 0 & \\ 0 & \vdots & A_2 \\ & 0 & \end{array} \right\Vert,$$

и пусть β_l определены так же, как и выше. Тогда

$$\chi_\Lambda(g) = (2\pi)^{\frac{k(k+1)}{2}} \delta(A_1) \delta(A_2) \delta(a_1) \delta(a_2) \frac{e^{i \sum_{l=1}^{k} \lambda_l \beta_l}}{\prod_{l=1}^{k} |\lambda_l^{k-l} \beta_l^{l}|}, \tag{9.3}$$

---

[1]) Формула для представлений общего положения группы $\mathfrak{N}_n$ и формула Планшереля для этой группы были доложены автором на Всесоюзной конференции по функциональному анализу в 1958 г. Несколько другую формулу для представлений (соответствующую другому выбору подалгебры в N_n) независимо получил С. Худяев. Позже эти результаты были опубликованы Диксмье [31].

где
$$\delta(A)=\prod_{i<j}\delta(a_{ij}),\ \delta(a)=\prod_{i=1}^{k}\delta(a_i).$$

Формула Планшереля для группы $\mathfrak{N}_n$ имеет вид

$$\int_{\mathfrak{N}_n}|\varphi(g)|^2\,dg=\int \operatorname{sp}\,[(T_\varphi^\Lambda)^*T_\varphi^\Lambda]\,d\mu(\Lambda), \tag{9.4}$$

где

$$d\mu(\Lambda)=(2\pi)^{-k^2}\lambda_2^2\lambda_3^4\ldots\lambda_k^{2k-2}\,d\lambda_1\ldots d\lambda_k \text{ при } n=2k \tag{9.5}$$

и

$$d\mu(\Lambda)=(2\pi)^{-k(k+1)}\,|\lambda_1\lambda_2^3\ldots\lambda_k^{2k-1}|\,d\lambda_1\ldots d\lambda_k \text{ при } n=2k+1. \tag{9.6}$$

3. Пусть $\mathfrak{G}$ — нильпотентная группа Ли, Ω — орбита в G' относительно $\varrho'(\mathfrak{G})$.

Можно показать, что существуют такие координаты $x_1,\ldots,x_n$ в G', в которых орбита Ω задается уравнениями

$$x_{2k+1}=P_1(x_{k+1},\ldots,x_{2k}),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$x_n=P_{n-2k}(x_{k+1},\ldots,x_{2k}),$$

где $P_1,\ldots,P_{n-2k}$ — многочлены. Таким образом, каждая $2k$-мерная орбита Ω является произведением k-мерной гиперплоскости и k-мерной алгебраической поверхности. Можно показать также, что мера $d\omega$ в этих координатах имеет вид

$$d\omega=dx_1\,dx_2\ldots dx_{2k}.$$

Поэтому характеры нильпотентных групп как функции канонических координат выражаются через δ-функции и функции вида

$$F(a)=\int_{-\infty}^{\infty}\ldots\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\sum a_{j_1\ldots j_k}x_1^{j_1}\ldots x_k^{j_k}}\,dx_1\ldots dx_k. \tag{9.7}$$

Следующий пример показывает, что любая функция вида (9.7) при $k=1$ может входить в выражение для характера некоторой нильпотентной группы.

Пусть $\mathfrak{G}$ — подгруппа группы линейных неоднородных преобразований n-мерного евклидова пространства, порожденная всеми параллельными переносами и однопараметрической подгруппой $\{e^{tA}\}$ однородных преобразований.

В качестве матрицы A мы возьмем жорданову клетку n-го порядка с нулевым собственным значением

$$A=\begin{Vmatrix}0&1&\ldots&0&0\\0&0&\ldots&0&0\\0&0&\ldots&0&1\\0&0&\ldots&0&0\end{Vmatrix}.$$

Легко проверить, что $\mathfrak{G}$ — нильпотентная группа и что преобразования

$\varrho'(g)$ в G' имеют вид:

$$\begin{aligned}
&x_0 \longrightarrow x_0 + t_1 x_1 + \ldots + t_n x_n,\\
&x_1 \longrightarrow x_1,\\
&x_2 \longrightarrow t x_1 + x_2,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
&x_n \longrightarrow \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} x_1 + \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} x_2 + \ldots + x_n.
\end{aligned}$$

Орбиты общего положения в G' имеют размерность 2 и могут быть заданы в параметрической форме:

$$\begin{aligned}
x_0 &= \tau,\\
x_1 &= P^{(n-1)}(\sigma),\\
x_2 &= P^{(n-2)}(\sigma),\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
x_{n-1} &= P'(\sigma),\\
x_n &= P(\sigma),
\end{aligned}$$

где τ и σ — вещественные параметры, а P — некоторый многочлен степени $n-1$ (свой для каждой орбиты). Мера $d\omega$ равна в этом случае $d\sigma\, d\tau$, а формула для характера принимает вид

$$\chi(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sum\limits_{k=0}^{n} a_k x_k(\sigma,\tau)}\, d\sigma\, d\tau = 2\pi\delta(a_0) \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sum\limits_{k=1}^{n} a_k P^{(n-k)}(\sigma)}\, d\sigma.$$

Если положить $P(\sigma) = \frac{\sigma^{n-1}}{(n-1)!}$, то интеграл, входящий в эту формулу, примет вид

$$F(a_1, \ldots, a_n) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\left(a_n \frac{\sigma^{n-1}}{(n-1)!} + \ldots + a_2\sigma + a_1\right)}\, d\sigma. \tag{9.8}$$

При $n=1$, 2, 3 функция (9.8) выражается через элементарные функции. При $n=4$ она сводится к так называемой функции Эйри. При $n>4$ функция (9.8) не выражается через специальные функции одной переменной.

Поступило в редакцию 17 октября 1961 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. А. Кириллов, Индуцированные представления нильпотентных групп Ли, ДАН 128, № 5 (1959).

[2] А. А. Кириллов, Об унитарных представлениях нильпотентных групп Ли, ДАН 130, № 6 (1960).

[3] А. А. Кириллов, Унитарные представления нильпотентных групп Ли, ДАН 138, № 2 (1961).

[4] J. Dixmier, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, II, Bull. Soc. Math France 85 (1957). (Русск. перевод в журнале «Математика» 5 : 1 (1961).)

[5] J. Dixmier, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, V, Bull. Soc. Math. France 87, № 1 (1959).

[6] G. W. Mackey, Induced representations of locally compact groups, Ann. Math. 55 (1952), 101—139.

[7] E. P. Wigner, On the unitary representations of the inhomogeneous Lorentz group, Ann. Math. 40 (1939), 149—204.

[8] И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Унитарные представления группы линейных преобразований прямой, ДАН 55, № 7 (1947).

[9] F. Bruhat, Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. France 84 (1956).

[10] И. М. Гельфанд, М. А. Наймарк, Унитарные представления классических групп, Труды МИАН 36 (1950).

[11] М. А. Наймарк, С. В. Фомин, Непрерывные суммы гильбертовых пространств, УМН 10, вып. 2 (1955).

[12] G. W. Mackey, Imprimitivity for representations of locally compact groups, I, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 35 (1949), 537—545.

[13] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, М., Гостехиздат, 1954.

[14] И. М. Гельфанд, Центр инфинитезимального группового кольца, Матем. сб. 26(86) (1950).

[15] J. von Neumann, Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, Math. Ann. 104 (1931), 570.

[16] M. H. Stone, Linear transformations in Hilbert space, III, Operational methods and groups theory, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 16 (1930).

[17] А. И. Плеснер, В. А. Рохлин, Спектральная теория линейных операторов, УМН 1, вып. 1 (11), (1946).

[18] J. Dixmier, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, I, Amer. Journ. Math. 81, № 1 (1959), 160—170.

[19] И. М. Гельфанд, Р. А. Минлос, З. Я. Шапиро, Представления группы вращений и группы Лоренца, М., Физматгиз, 1958.

[20] А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применения, М., ИЛ, 1950.

[21] J. E. Segal, On Extension of Plancherel's formula to separable unimodular groups, Ann. Math. 52 (1950), 272—292.

[22] И. М. Гельфанд, М. И. Граев, Аналог формулы Планшереля для классических групп, Труды Моск. матем. о-ва 4 (1955).

[23] Harish-Chandra, Plancherel formula for complex semisimple Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. USA 37 (1951), 813—818.

[24] R. Godement, Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, Trans. Amer. Math. Soc. 63 (1948), 1—84.

[25] J. Kaplansky, Normed algebras, Duke Math. Journ. 16 (1949), 399—418.

[26] J. M. G. Fell, C*-algebras with smooth duals, Illinois Journ. Math., № 4 (1960), 221—230.

[27] J. M. G. Fell, The dual spaces of C*-algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 94, № 3 (1960), 365—403.

[28] J. Dixmier, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, VI, Canad. Journ. Math. 12, № 2 (1960), 324—352.

[29] P. Bernat, J. Dixmier, Sur le dual d'un groupe de Lie, Compt. Rend. Acad. Sci. (Paris), № 10 (1960), 1778—1779.

[30] G. W. Mackey, Borel structure in groups and their duals, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 134—165.

[31] J. Dixmier, Sur les représentations unitaires groupes de Lie nilpotents, IV, Canad. Journ. Math. 11 (1959), 321—344.

[32] J. Dixmier, Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, III, Canad. Journ. Math. 10, № 3 (1958), 321—348.

[33] O. Takenouchi, Families of unitary operators defined on groups, Math. Journ. Okayama Univ. 6, № 2 (1957), 171—179.

[34] O. Takenouchi, Sur la facteur-représentation d'un groupe de Lie resoluble de type (*E*), Math. Journ., Okayama Univ. 7, № 2 (1957), 151—161.