Ю. Л. Далецкий, Гамильтоновы операторы в градуированном формальном вариационном исчислении, *Функц. анализ и его прил.*, 1986, том 20, выпуск 2, 62–64

Функциональный анализ и его приложения,
1986, т. 20, вып. 2, 62—64

УДК 519.46

ГАМИЛЬТОНОВЫ ОПЕРАТОРЫ В ГРАДУИРОВАННОМ ФОРМАЛЬНОМ ВАРИАЦИОННОМ ИСЧИСЛЕНИИ

Ю. Л. Далецкий

В этой заметке, продолжающей исследования [1—3], рассматривается градуированный вариант формального вариационного исчисления И. М. Гельфанда — Л. А. Дикого [4, 5]. Обобщаются некоторые результаты И. М. Гельфанда и И. Я. Дорфман [6—8] по описанию алгебр Ли скобок Пуассона. Полученное описание оказывается связанным с полиномиальными пуассоновскими алгебрами, рассмотренными Е. К. Скляниным [9], с другой стороны, из него выводится суперазналог теоремы Б. А. Дубровина — С. П. Новикова [10] о гидродинамических гамильтонианах. Автор благодарен И. М. Гельфанду за стимулирующую поддержку и полезное обсуждение.

1. Пусть $u_\alpha^{(k)}$ $(\alpha \in \Lambda, k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbf{Z}^n;\ k_j \geqslant 0)$ — градуированный набор символов, $p\,(u_\alpha^{(k)}) = p_\alpha$ — функция четности, значения которой — целочисленные векторы. Рассмотрим коммутативную суперaлгебру A формальных полиномов от $u_\alpha^{(k)}$ с коэффициентами из коммутативной суперaлгебры S ([11]). Совокупность A^Λ наборов $z = \{z_\alpha;\ \alpha \in \Lambda,\ z_\alpha \in A\}$ наделяется при помощи скобки типа Гельфанда—Дикого структурой суперaлгебры Ли $\mathfrak{A}$. Пусть $\dfrac{\partial}{\partial x_r} = \sum\limits_{\alpha,\,k} u_\alpha^{(k+(\delta_{jr}))} \dfrac{\partial}{\partial u_\alpha^{(k)}}$; $A_0 = \left\{ \sum\limits_r \dfrac{\partial}{\partial x_r} a_r;\ a_r \in A \right\}$. Суперпространство $M = A/A_0$ функционалов $\tilde{f} = \{f + A_0\} \overset{\text{def}}{=} \int f\,dx$, $(f \in A)$, является $\mathfrak{A}$-модулем: $z\tilde{f} = \widetilde{D_z f} = \int \sum z_\alpha \dfrac{\delta \tilde{f}}{\delta u_\alpha}\,dx$, где $\dfrac{\delta f}{\delta u_\alpha} = \sum\limits_k \left(-\dfrac{d}{dx}\right)^k \dfrac{\partial}{\partial u_\alpha^{(k)}}$, $\left(\dfrac{d}{dx}\right)^k = \prod\limits_j \dfrac{\partial^{k_j}}{\partial x_j^{k_j}}$. В комплексе де Рама пары $(\mathfrak{A}, M)$ $\mathfrak{A}$-модуль Ω_1 1-форм отождествляется с множеством A^{Λ_0} финитных элементов A^Λ, и при $\varphi = \sum\limits_\alpha (-1)^{p_\alpha^2} \varphi_\alpha\, du_\alpha$ действие $\varphi\colon \mathfrak{A} \to M$ дается формулой $\varphi(z) = \int \sum\limits_\alpha (-1)^{p_\alpha p(z_\alpha)} \varphi_\alpha z_\alpha\,dx$.

Пусть $c\colon \Omega_1 \times \Omega_1 \to A$ — кососимметричная билинейная операция: $c(\psi, \varphi) + (-1)^{(p_\psi+h)(p_\psi+h)} c(\varphi, \psi) \in A_0$ (h — четность структуры).

Определим в Ω_1 билинейную операцию $\dot{c}\colon \dot{c}(\varphi, \psi)(z) = \int (-1)^{p_z(p_\varphi+p_\psi+h)} \{D_z c(\varphi, \psi) - c(D_z\varphi, \psi) - (-1)^{p_z(p_\varphi+h)} c(\varphi, D_z\psi)\}\,dx$. Соотношение

$$\psi(H\varphi) = (-1)^{(p_\varphi+h)(p_\psi+h)} \int c(\varphi, \psi)\,dx \tag{1}$$

определяет кососимметричный оператор $H\colon \Omega_1 \to \mathfrak{A}$ со скобкой Схоутена

$$[H, H](\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \int \{(-1)^{(p(\varphi_1)+h)(p(\varphi_3)+h)} c(\varphi_1, \dot{c}(\varphi_2, \varphi_3)) + (\text{цикл})\}\,dx. \tag{2}$$

Теорема 1. *Условие гамильтоновости* $[H, H] = 0$ *оператора* (1) *есть*

$$(-1)^{(p(\varphi_1)+h)(p(\varphi_3)+h)} c(\varphi_1, \dot{c}(\varphi_2, \varphi_3)) + (\text{цикл}) \in A_0,$$

и соответствующая скобка Пуассона определяется формулой

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\} = \int c(d\tilde{f}, d\tilde{g})\,dx.$$

2. Рассмотрим, в частности, дифференциальную операцию

$$c(\varphi, \psi) = \sum_{\alpha, \beta, k, l} (-1)^{p_\beta p(\psi_\beta)} \varphi_\alpha^{(k)} c_{\alpha\beta kl}(u)\, \psi_\beta^{(l)}, \tag{3}$$

где

$$c_{\beta\alpha lk} = (-1)^{(p_\alpha+h)(p_\beta+h)} c_{\alpha\beta kl}; \quad p(c_{\alpha\beta kl}) = p_\alpha + p_\beta + h.$$

В этом случае

$$(H\varphi)_\beta = \sum_\alpha (-1)^{p(\varphi_\alpha)(p_\alpha+p_\beta)+(p_\beta^2+h^2+p_\beta h)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^l c_{\alpha\beta kl}(u) \left(\frac{d}{dx}\right)^k \varphi_\alpha \tag{4}$$

и

$$\dot{c}(\varphi, \psi)_\gamma = \sum_{\alpha, \beta, k, l} (-1)^{p(\psi_\beta)(p_\beta+p_\gamma)+p_\gamma(p_\alpha+p_\beta+h)} \varphi_\alpha^{(k)} \frac{\partial c_{\alpha\beta kl}}{\partial u_\gamma} \psi_\beta^{(l)}. \tag{5}$$

Пусть коэффициенты $c_{\alpha\beta kl}$ удовлетворяют уравнению

$$\sum_\gamma a_\gamma(u) \frac{\partial v}{\partial u_\gamma} = v, \quad (a_\gamma \in A,\ p(a_\gamma) = p_\gamma). \tag{6}$$

Тогда

$$c(\varphi, \psi) = \sum_\gamma (-1)^{p_\gamma^2} \dot{c}_\gamma(\varphi, \psi)\, a_\gamma(u),$$

и условие гамильтоновости оператора H принимает вид

$$\int \sum_\gamma (-1)^{p_\gamma^2} \{(-1)^{(p(\varphi_1)+h)(p(\varphi_3)+h)} \dot{c}(\varphi_1, \dot{c}(\varphi_2, \varphi_3)) + (\text{цикл})\}_\gamma\, a_\gamma(u)\, dx = 0. \tag{7}$$

Равенство нулю стоящего в скобках выражения означает, что операция $\dot{c}$ вносит в Ω_1 структуру супералгебры Ли. Различные решения уравнения (6) приводят к различным реализациям условия гамильтоновости, например

Т е о р е м а 2. *Пусть* $c_{\alpha\beta kl} = \sum_{\gamma_1, \ldots, \gamma_m} u_{\gamma_1} \ldots u_{\gamma_m} c_{\alpha\beta kl}^{\gamma_1 \ldots \gamma_m}$, $a_\gamma = \frac{1}{m} u_\gamma$, *где коэффициенты* $C_{\alpha\beta kl}^{\gamma_1 \ldots \gamma_m}$ *симметричны по верхним индексам.*

Тогда для гамильтоновости дифференциального оператора (4) *необходимо и достаточно, чтобы операция*

$$\dot{c}(\varphi, \psi)_\gamma = \sum_{\alpha, \beta, k, l} (-1)^{p(\psi_\beta)(p_\beta+p_\gamma)+p_\gamma(p_\alpha+p_\beta+h)} \varphi_\alpha^{(k)} \sum_{\gamma_2, \ldots, \gamma_m} u_{\gamma_2} \ldots u_{\gamma_m} c_{\alpha\beta kl}^{\gamma\gamma_2 \ldots \gamma_m} \psi_\beta^l$$

вносила в Ω_1 *структуру супералгебры Ли.*

З а м е ч а н и е 1. При $m = 1$ теорема 2 приводит к супераналогу теоремы, полученной И. М. Гельфандом и И. Я. Дорфман (см. [8] и в градуированном варианте [3]).

З а м е ч а н и е 2. При $c(\varphi, \psi) = \sum_{\alpha, \beta} (-1)^{p_\beta p(\psi_\beta)} \left(\sum_{\gamma_1, \ldots, \gamma_m} u_{\gamma_1} \ldots u_{\gamma_m} c_{\alpha\beta}^{\gamma_1 \ldots \gamma_m}\right) \psi_\beta$ условие теоремы 2 означает, что $c_{\alpha\beta}^{\gamma_1 \ldots \gamma_m}$ — структурные константы m — линейной алгебры скобок Пуассона [9]. Другими словами, $c_{\alpha\beta}^{\gamma}(\gamma_2, \ldots, \gamma_m) = c_{\alpha\beta}^{\gamma\gamma_2 \ldots \gamma_m}$ при фиксированных $\gamma_2, \ldots, \gamma_m$ — структурные константы супералгебры Ли и каждая из этих структур порождает 2-коцикл относительно каждой другой.

З а м е ч а н и е 3. Из теоремы 1 следует, что условие совместной гамильтоновости пары гамильтоновых операторов, отвечающих формам c_1, c_2 имеет вид $(-1)^{(p(\varphi_1)+h)(p(\varphi_2)+h)} \{c_1(\varphi_1, \dot{c}_2(\varphi_2, \varphi_3) + c_2(\varphi_1, \dot{c}_1(\varphi_2, \varphi_3))\} + (\text{цикл}) = 0$. Для постоянной c_2 $\dot{c}_2 = 0$, и это условие превращается в условие коцикличности формы c_2 по отношению к структуре, порождаемой формой c_1.

3. Более сложным является случай, когда коэффициенты дифференциального выражения (3) зависят и от производных $u_\alpha^{(k)}$. Пусть

$$c(\varphi, \psi) = \sum_{\alpha, \beta} (-1)^{p_\beta p(\psi_\beta)} \left(\frac{1}{2} \varphi_\alpha' g^{\alpha\beta} \psi_\beta - \frac{1}{2} \varphi_\alpha g^{\alpha\beta} \psi_\beta' - \sum_\gamma (-1)^{hp_\gamma} \varphi_\alpha u_\gamma' c_\gamma^{\alpha\beta} \psi_\beta\right)$$

с симметричным $g^{\alpha\beta} = (-1)^{(p_\alpha+h)(p_\beta+h)} g^{\beta\alpha}$ и кососимметричным $c_\gamma^{\alpha\beta}$. Простыми преобразованиями эту форму можно привести к виду

$$c(\varphi, \psi) = \sum_{\alpha, \beta} (-1)^{(p_\alpha+h)p(\psi_\beta)} \left[\varphi_\alpha' \psi_\beta g^{\alpha\beta} + \varphi_\alpha \left(\sum_\gamma (-1)^{hp_\gamma} u_\gamma' b_\gamma^{\alpha\beta}\right) \psi_\beta\right],$$

а условие ее кососимметричности записать в виде

$$(-1)^{hp_\gamma} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} = b_\gamma^{\alpha\beta} + (-1)^{(p_\alpha+h)(p_\beta+h)} b_\gamma^{\beta\alpha}. \tag{8}$$

При этом скобка Схоутена выражается формулой

$$[H, H](\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) = \int \sum_{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3} \Big\{ a^1_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \varphi_{1\alpha_1}' \varphi_{2\alpha_2}' \varphi_{3\alpha_3} T^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} +$$
$$+ a^2_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \varphi_{1\alpha_1}' \varphi_{2\alpha_2} \varphi_{3\alpha_3} \sum_{\beta, \gamma} (-1)^{hp_\gamma} [u_\gamma' S_{\gamma\beta}^{\alpha_2\alpha_3} g^{\alpha_1\beta} + (-1)^{p_{\alpha_3}(p_{\alpha_1}+p_{\alpha_2})+h^2} b_\beta^{\alpha_2\alpha_1} u_\gamma' b_\gamma^{\alpha_3\beta} -$$
$$- (-1)^{p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}} b_\beta^{\alpha_3\alpha_1} u_\gamma' b_\gamma^{\alpha_2\beta}] +$$
$$+ a^3_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} \varphi_{1\alpha_1} \varphi_{2\alpha_2} \varphi_{3\alpha_3} \sum_{\beta, \gamma, \gamma_1} u_\gamma' S_{\gamma\beta}^{\alpha_2\alpha_3} u_{\gamma_1}' b_{\gamma_1}^{\alpha_1\beta} \Big\} dx + (\text{цикл}); \qquad (a^j_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3} = \pm 1),$$

где

$$T^{\alpha_3\alpha_2\alpha_1} = \sum_\beta (b_\beta^{\alpha_3\alpha_2} g^{\alpha\beta} - (-1)^{h^2+p_{\alpha_1}p_{\alpha_2}} b_\beta^{\alpha_3\alpha_1} g^{\alpha_2\beta});$$

$$S_{\gamma\beta}^{\alpha_2\alpha_3} = (-1)^{h(p_\beta+p_\gamma)+p_\beta p_\gamma} \frac{\partial b_\gamma^{\alpha_2\alpha_3}}{\partial u_\beta} - \frac{\partial b_\beta^{\alpha_2\alpha_3}}{\partial u_\gamma}.$$

Если выполнено соотношение $b_\gamma^{\alpha\beta} = \sum_s \Gamma_{\gamma s}^\alpha g^{s\beta}$, то коэффициент Γ может быть истолкован как связность, согласованная в силу (8) с метрическим тензором g, а условия гамильтоновости приводятся к виду

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha + (-1)^{p_\beta p_\gamma} \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha = 0;$$

$$\frac{\partial \Gamma_{\beta s}^\alpha}{\partial u_\gamma} - (-1)^{h(p_\beta+p_\gamma)+p_\beta p_\gamma} \frac{\partial \Gamma_{\gamma s}^\alpha}{\partial u_\beta} + \sum_\sigma [(-1)^{p_\gamma(p_\alpha+p_\beta+p_\sigma)} \Gamma_{\beta\sigma}^\alpha \Gamma_{\gamma s}^\sigma -$$
$$- (-1)^{h(p_\beta+p_\gamma)+p_\beta(p_\alpha+p_\gamma)} \cdot \Gamma_{\gamma\sigma}^\alpha \Gamma_{\beta s}^\sigma] = 0.$$

В четном случае эти условия совпадают с найденными в [10] условиями тривиальности кривизны и кручения рассматриваемой связности. Отметим, что мы не предполагаем ни невырожденности тензора g, ни конечности множества индексов Λ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гельфанд И. М., Далецкий Ю. Л.* Некоторые формальные дифференциальные структуры, связанные с супералгебрами Ли. — Препринт ИПМ, № 85, М., 1984. 2. *Daletsky Yu. L.* Lie superalgebras in a Hamilton operator theory nonlinear and turbulent processes.— New York: Gordon & Breach, 1984. 3. *Далецкий Ю. Л., Цыган Б. Л.*— Функцион. анализ и его прил., 1985, т. 19, вып. 4, с. 82—83. 4. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.*— УМН, 1975, т. 30, вып. 5, с. 67—100. 5. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.*— Функцион. анализ. и его прил., 1975, т. 10, вып. 1, с. 18—25. 6. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.*— Функцион. анализ и его прил., 1979, т. 13, вып. 4, с. 13—30. 7. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.*— Функцион. анализ и его прил., 1980, т. 14, вып. 3, с. 71—74. 8. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.*— Функцион. анализ и его прил., 1981, т. 15, вып. 3, с. 23—40. 9. *Склянин Е. К.*— Функцион. анализ и его прил., 1982, т. 16, вып. 4, с. 27—34. 10. *Дубровин Б. А., Новиков С. П.* ДАН СССР, 1983, т. 270, № 4, с. 781—785. 11. *Лейтес Д. А.* Теория супермногообразий. — Петрозаводск: Изд. Карельск. филиала АН СССР, 1983.

Киевский политехнический институт

Поступило в редакцию 26 ноября 1984 г.