Math-Net.Ru
All Russian mathematical portal

A. B. Givental', Global properties of the Maslov index and Morse theory, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1988, Volume 22, Issue 2, 69–70

Use of the all-Russian mathematical portal Math-Net.Ru implies that you have read and agreed to these terms of use
http://www.mathnet.ru/eng/agreement

Download details:
IP: 54.87.11.154
August 30, 2015, 02:28:41

*Функциональный анализ и его приложения,*
1988, т. 22, вып. 2, 69—70

УДК 513.83

# ГЛОБАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ИНДЕКСА МАСЛОВА И ТЕОРИЯ МОРСА

А. Б. Гивенталь

На лагранжевом подмногообразии в $T^*\mathbf{R}^n$, лагранжево изотопном нулевому сечению, определена целозначная функция, сопоставляющая точке общего положения индекс Маслова пути из этой точки на бесконечность. В работе доказано существование точки индекса нуль в каждом слое расслоения $T^*\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ (рис. 1, *а*). Я благодарен В. И. Арнольду, сообщившему мне эту гипотезу, принадлежащую В. П. Колокольцову. Доказательство опирается на одну теорему Сикорава (лемма 4) — один из глубоких результатов современной симплектической топологии.

**1. Основной результат.** Пусть $M$ — связное гладкое многообразие без края, $L \subset T^*M$ — лагранжево подмногообразие, изотопное нулевому сечению в классе лагранжевых подмногообразий, совпадающих с ним вне компакта. Индексом регулярной точки проекции $L \to M$ назовем индекс Маслова [1; 2] ориентированного пути на $L$, соединяющего эту точку с отмеченной. В рассматриваемой ситуации индекс корректно

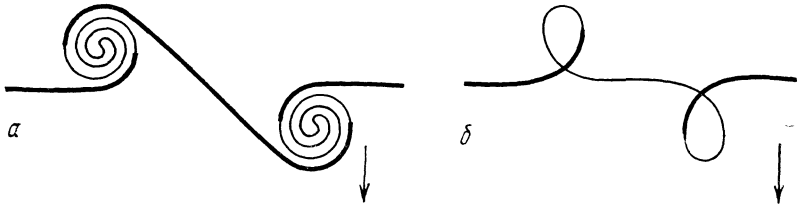


Рис. 1. Лагранжевы кривые в $T^*\mathbf{R}$. Выделены точки индекса нуль. Стрелка — направление проекции $T^*\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

определен (не зависит от пути) с точностью до общего для всех точек слагаемого, определяемого выбором отмеченной точки.

Теорема 1. *При подходящем выборе отмеченной точки прообраз каждого регулярного значения проекции $L \to M$ содержит точку индекса нуль.*

**2. Производящие семейства.** Производящим семейством лагранжевой иммерсии $i: L \to T^*M$ называется гладкая функция $S$: $\mathbf{R}^N \times M \to \mathbf{R}$: $(x, q) \mapsto S(x, q)$ со свойствами:

1) $S_x$: $\mathbf{R}^N \times M \to \mathbf{R}^N$ трансверсально к $\{0\} \subset \mathbf{R}^N$;

2) $i(L) = \{(p, q)\} \in T^*M \mid \exists x \in \mathbf{R}^N$: $S_x(x, q) = 0,\ p = S_q(x, q)\}$.

Говорят, что производящее семейство квадратично на бесконечности, если выполнено

3) $\forall q \in M$ функция $S(\cdot, q): \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ совпадает вне некоторого шара с невырожденной квадратичной формой.

Теорема 2. *Если лагранжева иммерсия $L \to T^*M$ связного многообразия $L$ задается производящим семейством, квадратичным на бесконечности, то при подходящем выборе отмеченной точки прообраз каждого регулярного значения проекции $L \to M$ содержит точку индекса нуль.*

Замечания. 1) Функция $S$ со свойствами 1, 2) производит лагранжеву иммерсию в $T^*M$ многообразия $L \subset \mathbf{R}^N \times M$ критических точек семейства функций $S(\cdot, q)$ (см. [3]). Индекс Маслова замкнутого пути на $L$ равен нулю (см. лемму 1 ниже). Поэтому индексы регулярных точек корректно определены, если $L$ связно.

2) Для произвольных лагранжевых иммерсий $\mathbf{R}^n \to T^*\mathbf{R}^n$ теорема 2 не верна (рис. 1б).

**3. Доказательство теоремы 2.**

Лемма 1. *Индекс Маслова ориентированного пути на $L$ равен разности индексов Морса критических точек функций из производящего семейства, отвечающих концам пути.*

По существу, это одно из определений индекса Маслова (см. [3]). Для лагранжевой иммерсии $L \to T^*M$ и пути на $L$ общего положения индекс Маслова определяется как число точек складки проекции $L \to M$ на этом пути, взятых с учетом знаков. Пусть $F$: $(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}$ — росток производящего семейства ростка $(\mathbf{R}^n, 0) \to (T^*\mathbf{R}^n, 0)$ лагранжевой иммерсии в точке складки. Тогда функция $F(\cdot, 0)$ имеет в нуле вырожденную

критическую точку с одномерным ядром второго дифференциала. Индекс Морса (т. е. число отрицательных квадратов второго дифференциала) критической точки функции $F(\cdot, q)$ изменяется на единицу при переходе через складку. Знак этого изменения и определяет вклад точки складки в индекс Маслова.

Теорема 2 вытекает теперь из следующего утверждения теории Морса.

Лемма 2. *Пусть $S : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ — функция Морса, совпадающая с невырожденной квадратичной формой $S_\infty$ вне некоторого шара. Тогда $S$ имеет критическую точку, индекс Морса которой равен индексу этой квадратичной формы.*

Действительно, группы относительных гомологий $H_*(\mathbf{R}^N, \{S \ll 0\})$ равны гомологиям комплекса $(C_*, \partial)$, базисные $i$-мерные цепи которого биективно соответствуют критическим точкам индекса $i$ функции Морса $S$ (см. [4]). С другой стороны, $\mathbf{R}^N/\{\mathbf{S} \ll 0\} \simeq \simeq \mathbf{S}^k$, где $k$ — индекс $S_\infty$. Поэтому $\widetilde{H}_k(\mathbf{S}^k) = \mathbf{Z}$ влечет $C_k \neq 0$.

**4. Теорема 2 $\Rightarrow$ теорема 1.**

Лемма 3. *Лагранжево подмногообразие $L \subset T^*M$, лагранжево изотопное нулевому сечению, гамильтоново изотопно лагранжеву сечению.*

Под лагранжевой понимается изотопия в классе лагранжевых подмногообразий, совпадающих с нулевым сечением вне компакта. Гамильтонова изотопия задается семейством симплектоморфизмов, определяемых глобальным неавтономным гамильтонианом с компактным носителем. $C^1$-близкое к $L$ лагранжево подмногообразие можно рассматривать как лагранжево сечение расслоения $T^*L$. Это сечение гамильтоново изотопно $L$, если соответствующая ему 1-форма на $L$ точна. Пусть $i_t : M \to T^*M$ — лагранжева изотопия $L$ в нулевое сечение: $i_0 M = L$, $i_1 M = M \subset T^*M$. Пусть $\alpha_t = i_t^* \alpha$, где $\alpha$ — каноническая 1-форма на $T^*M$, $s_t$ — соответствующее $\alpha_t$ лагранжево сечение $T^*M$. Композиция $i_t$ с послойным сдвигом в $T^*M$ на векторы сечения $s_0 - s_t$ дает такую лагранжеву изотопию $L$ в $s_0$, при которой интегралы канонической 1-формы $\alpha$ по циклам на $L$ сохраняются. Поэтому $L$ гамильтоново изотопно лагранжеву сечению $s_0$.

Мы можем принять это лагранжево сечение за нулевое. Поэтому теорема 1 вытекает из теоремы 2 и следующей замечательной теоремы Сикорава.

Лемма 4 [5]. *Лагранжево подмногообразие $L \subset T^*M$, совпадающее с нулевым сечением вне компакта и гамильтоново изотопное ему, можно задать производящим семейством, квадратичным на бесконечности.*

Из теоремы Сикорава следует, в частности, гипотеза Арнольда о лагранжевых пересечениях [2]. Подобно ряду других новейших достижений симплектической топологии, эта теорема доказывается конечномерной аппроксимацией «производящего семейства» функций, определенных на пространстве путей с помощью функционала действия.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маслов В. П.* Теория возмущений и асимптотические методы.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965. 2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974. 3. *Арнольд В. И., Гивенталь А. Б.* // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 5—139. 4. *Фоменко А. Т.* Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 5. *Sikorav J.-C.* // C. R. Acad. Sci. Ser. 1.— 1986. V. 302, № 3.— P. 119—122.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
23 июня 1986 г.