

# Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Розенберг, Инвариантные алгебры на компактных группах, *Матем. сб.*, 1970, том 81(123), номер 2, 176–184

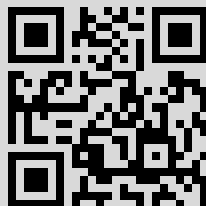
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 95.216.226.236

9 ноября 2019 г., 07:26:57



УДК 519.46

## Инвариантные алгебры на компактных группах

А. Л. Розенберг (Москва)

1. Пусть  $G$  — компактная группа,  $C(G)$  — алгебра всех комплексных непрерывных функций на  $G$ ,  $A$  — замкнутая подалгебра алгебры  $C(G)$ . Обозначим через  $A^\perp$  вещественный аннулятор алгебры  $A$ , т. е. линейное пространство вещественных борелевских мер, ортогональных к алгебре  $A$ . Будем считать, что пространство  $A^\perp$  наделено топологией, индуцированной сильной топологией в пространстве всех борелевских мер на  $G$ .

Алгебра  $A$  называется однородной, если для всякой пары  $(g', g'') \in G \times G$  и для всякой функции  $f(x) \in A$  функция  $f_1(x) = f(g'xg'')$  также принадлежит  $A$ . Нетрудно видеть, что условие однородности равносильно инвариантности  $A$  относительно свертки с функциями из алгебры  $C(G)$  справа и слева. Обозначим через  $\hat{G}$  множество всех характеров неприводимых представлений группы  $G$ .

Пользуясь соотношениями ортогональности для матричных элементов неприводимых унитарных представлений, легко показать (см. п. 2), что алгебра  $A$  — минимальное однородное замкнутое подпространство  $C(G)$ , натянутое на семейство характеров  $A \cap \hat{G}$ . Таким образом, все результаты об однородных алгебрах можно формулировать как теоремы о семействах неприводимых представлений группы  $G$ , подчиненных некоторым условиям (см. лемму 2 в п. 2). В работе [1] Ридер показал, что если на группе  $G$  существует однородная антисимметрическая алгебра такая, что  $A^\perp = \{0\}$ , то группа  $G$  коммутативна и связна.

Главный результат настоящей заметки — описание однородных антисимметрических алгебр на компактной группе Ли (теорема 1 из п. 2). В п. 3 утверждения п. 2 переносятся на произвольные компактные группы.

П. 4 посвящен исследованию аннулятора  $A^\perp$  однородной антисимметрической алгебры  $A$ . Доказано, в частности, следующее обобщение теоремы Ридера: если пространство  $A^\perp$  сепарабельно, то связная компонента единицы группы  $G$  коммутативна. Усилить этот результат нельзя.

В п. 5 исследуются произвольные (т. е. не обязательно антисимметрические) однородные алгебры.

2. Теорема 1 (основная). Пусть  $G$  — компактная группа Ли,  $G_0$  — связная компонента единицы  $e$  группы  $G$ ,  $G_k$  — связная компонента единицы центра группы  $G_0$ .

Однородная алгебра  $A$  на  $G$  антисимметрична тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

а) для всякой функции  $f \in A$  и всякого элемента  $g \in G$

$$\int_{G_0} f(gx) dx = \int_{G_0} f(x) dx, \quad (1)$$

где  $dx$  — мера Хаара на  $G$ ;

б) если  $\chi \in A|_{G_0} \cap \hat{G}_0$  и  $\chi \neq 1$ , то  $\chi|_{G_k} \neq \chi(e)$ ;

в) алгебра  $A|_{G_k}$  антисимметрична.

Для доказательства этой теоремы потребуется несколько лемм.

Лемма 1. Пусть  $\chi \in \hat{G}$ ,  $\chi \neq 1$ , и существует такое целое  $n > 1$ , что

$$\int_G \chi^n(g) dg \neq 0. \quad (2)$$

Тогда, если однородная алгебра  $A$  антисимметрична, то  $\chi \notin A$ .

Доказательство. Соотношение (2) означает, что коэффициент функции  $\chi^{n-1}(g)$  при  $\bar{\chi}(g)$  в разложении по характерам (см. [2]) не равен 0. Из однородности алгебры  $A$  следует, что если  $\chi \in A$ , то и  $\bar{\chi} \in A$ , что противоречит антисимметричности алгебры  $A$ .

Лемма 2. Замкнутое подпространство  $L \subset C(G)$ , инвариантное относительно сдвигов справа и слева, — однородная алгебра тогда и только тогда, когда для любых двух характеров  $\chi, \chi' \in L \cap \hat{G}$  имеем  $\chi \cdot \chi' \in L$ .

Доказательство. Нужно показать, что можно перемножить произвольные два матричных элемента из  $L$ . Пусть  $t_{ik}(x), t'_{jl}(x)$  — некоторые матричные элементы соответственно представлений  $T$  и  $T'$ . Тогда  $t_{ik} \cdot t'_{jl}$  — матричный элемент тензорного произведения  $T \otimes T'$ . Заметим, что если  $\chi(x) = \text{Sp } T(x)$  и  $\chi'(x) = \text{Sp } T'(x)$ , то  $(\chi \cdot \chi')(x) = \text{Sp } (T \otimes T')(x)$ , т. е.  $L$  вместе с  $\chi$  и  $\chi'$  содержит (см. п. 1) все матричные элементы представления  $T \otimes T'$ . Лемма доказана.

Пусть  $H$  — замкнутая инвариантная подгруппа произвольной компактной группы  $G$ ,  $\rho: G \rightarrow G/H$  — канонический гомоморфизм. Обозначим через  $P_H$  эпиморфизм пространства  $C(G)$  на пространство  $C(G/H)$ , задаваемый формулой

$$P_H(f)(\rho(x)) = \int_H f(xh) dh, \quad (3)$$

где  $dh$  — мера Хаара на  $H$  такая, что  $\int_H dh = 1$ .

Лемма 3. 1) Если  $A$  — однородная алгебра на  $G$ , то  $P_H(A) = \{P_H(f) | f \in A\}$  — однородная алгебра на  $G/H$ ;

2) Если исходная алгебра  $A$  антисимметрична, то  $P_H(A)$  также антисимметрична.

Доказательство. Заметим, что в силу однородности алгебры  $A$   $P_H(A)$  можно рассматривать как подпространство  $A$ , отождествив  $f \in P_H(A)$  с  $f \circ \rho \in A$ . Очевидно, что подпространство  $P_H(A)$  инвариантно относительно сдвигов справа и слева и замкнуто. Отсюда следует, что  $P_H(A)$  натянуто

на те и только те  $\chi \in A \cap \hat{G}$ , для которых  $\chi(h) = \chi(e)$  для всех  $h \in H$ . Ясно, что  $P_H(A)$  удовлетворяет условиям леммы 2.

Второе утверждение леммы получается само собой.

Лемма 4. Пусть  $G$  — компактная полупростая связная группа Ли;  $\chi \in \hat{G}$ . Тогда найдется такое целое  $n > 1$ , что

$$\int_G \chi^n(g) dg \neq 0. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть  $T$  — представление, соответствующее характеру  $\chi$ . Как уже было замечено,  $\chi^n(g) = \text{Sp } T^{(n)}(g)$ , где  $T^{(n)}$  —  $n$ -я тензорная степень представления  $T$ . Неравенство (2) в точности означает, что в разложении  $T^{(n)}$  на неприводимые компоненты содержится единичное представление. Если  $V$  — пространство представления  $T$ , то  $n$ -ю тензорную степень  $V$  можно понимать как пространство всех  $n$ -линейных форм  $\omega$  на  $V$ , в котором представление  $T^{(n)}$  действует по правилу:

$$(T^{(n)}(g)\omega)(v_1, \dots, v_n) = \omega(T(g)v_1, \dots, T(g)v_n). \quad (4)$$

Наличие единичного представления в разложении  $T^{(n)}$  на неприводимые представления означает, что существует  $n$ -линейная форма  $\omega_0 \neq 0$  такая, что  $T^{(n)}(g)\omega_0 = \omega_0$  для всех  $g \in G$ . Далее,  $\chi(g) = \det(T(g))$  — одномерный характер группы  $G$ . Так как группа  $G$  связна и полупроста, она совпадает с замыканием своего коммутанта, и, следовательно, на  $G$  нет нетривиальных одномерных характеров. Итак,  $\det(T(g)) \equiv 1$ , т. е.  $T^{(n)}$  оставляет на месте любую кососимметричную  $n$ -линейную форму при  $n = \dim T$ .

Известно, что всякая компактная связная группа Ли локально изоморфна прямому произведению своей связной полупростой подгруппы  $G_s$  и связной компоненты единицы центра  $G_k$ , т. е.  $G = G_k \cdot G_s$  и  $G_k \cap G_s$  — конечная подгруппа.

Лемма 5. Если  $G$  — связная компактная группа Ли,  $\chi \in \hat{G}$ , то  $\chi = \frac{1}{\chi(e)} \chi|_{G_k} \in \hat{G}_k$ ,  $\chi|_{G_s} \in \hat{G}_s$  и  $\chi(th) = \chi(t)\chi(h)$  для всякой пары  $(t, h) \in G_k \times G_s$ .

Доказательство. Пусть далее  $dg, dt, dh$  — меры Хаара соответственно на  $G, G_k, G_s$  такие, что  $\int_G dg = \int_{G_k} dt = \int_{G_s} dh = 1$ . Заметим, что для любой непрерывной функции  $f$

$$\int_G f(g) dg = \int_{G_k} \int_{G_s} f(th) dh dt. \quad (5)$$

Воспользуемся теперь функциональным уравнением для характеров из  $\hat{G}$ :

$$\int_G \chi(gg_1g^{-1}g_2) dg = \frac{1}{\chi(e)} \chi(g_1)\chi(g_2). \quad (6)$$

Если  $g_1$  принадлежит центру группы  $G$ , из (6) получаем

$$\chi(g_1g_2) = \frac{1}{\chi(e)} \chi(g_1)\chi(g_2).$$

Далее, ввиду (5) для всякой пары  $(h_1, h_2) \in G_s \times G_s$

$$\begin{aligned} \int_{G_s} \chi(hh_1h^{-1}h_2) dh &= \int_{G_k} \int_{G_s} \chi((th)h_1(th)^{-1}h_2) dh dt = \\ &= \int_G \chi(gh_1g^{-1}h_2) dg = \frac{1}{\chi(e)} \chi(h_1) \chi(h_2). \end{aligned}$$

Лемма 6. Пусть  $G$  — компактная связная группа Ли,  $\chi \in \hat{G}$  и  $\chi|_{G_k} \equiv \chi(e)$ . Тогда найдется такое целое  $n > 1$ , что

$$\int_G \chi^n(g) dg \neq 0.$$

Доказательство. Так как  $\chi(t) = \chi(e)$  для всех  $t \in G_k$ , из формулы (5) получаем

$$\int_G \chi^n(g) dg = \int_{G_s} \chi^n(h) dh.$$

Остается только применить лемму 4.

Лемма 7. Пусть  $G$  — произвольная компактная группа,  $\chi \in \hat{G}$ ,  $n > 0$  и  $m > 0$  — такие целые числа, что  $\int_G \chi^n(g^m) dg \neq 0$ . Тогда  $\int_G \chi^{n+m}(g) dg \neq 0$ .

Доказательство. Заметим, что  $\chi^n(g^m)$  — сумма некоторых матричных элементов представления  $T^{(n+m)}$ , где  $T$  — представление, соответствующее характеру  $\chi$ . Далее, при замене представления на эквивалентное интегралы матричных элементов по группе не меняют своих значений. Они могут быть либо нулями, либо единицами. Таким образом, можно считать, что  $T^{(n+m)}$  разложено на неприводимые компоненты.

Если интеграл от какого-нибудь матричного элемента неприводимого представления не равен нулю, то это представление — единичное. Итак, доказано неравенство

$$\int_G \chi^n(g^m) dg \leq \int_G \chi^{n+m}(g) dg.$$

Лемма 8. Пусть  $\Gamma$  — конечная группа. Всякая однородная антисимметричная алгебра  $A$  на  $\Gamma$  состоит из одних констант.

Доказательство. Пусть  $\chi \in \hat{\Gamma}$  и  $r$  — порядок группы  $\Gamma$ . Тогда  $\chi(\gamma^r) = \chi(e)$  для любого элемента  $\gamma \in \Gamma$ , и доказательство следует из леммы 7.

Докажем теперь необходимость условий а), б) и в) теоремы.

а) Пусть  $\Gamma = G/G_0$ . Отсбражение  $P_{G_0}$  переводит алгебру  $A$  в антисимметричную однородную алгебру  $P_{G_0}(A)$ , на  $\Gamma$  (по лемме 8)  $P_{G_0}(A)$  состоит из одних констант. Из определения  $P_{G_0}$  следует, что это и есть утверждение а).

б) Для любых двух функций  $f_1, f_2 \in C(G)$  положим  $\langle f_1, f_2 \rangle_0 = \int_{G_0} f_1(x) \bar{f}_2(x) dx$ .

Лемма 9. Пусть  $\chi_0 \in A|_{G_0} \cap \hat{G}_0$ . Тогда найдется  $\chi \in A \cap \hat{G}$  такой, что  $\langle \chi_0, \chi \rangle_0 \neq 0$ .

Доказательство. Пусть  $f \in A$  и  $\psi$  — такая непрерывная функция на  $G$ , что  $\psi(x) = 0$ , если  $x \notin G_0$ . Тогда  $(f * \psi)|_{G_0} = f|_{G_0} * \psi|_{G_0}$ . Положим

$$\psi(x) = \begin{cases} \chi_0(x) & \text{для } x \in G_0, \\ 0 & \text{для } x \notin G_0. \end{cases}$$

Пусть  $\chi \in A \cap \hat{G}$  и  $(\chi * \psi)(t) = \int_{G_0} \chi(x^{-1}t) \psi(x) dx = 0$  для всех  $t \in G_0$ . Это означает, что сужение на  $G_0$  представления  $T$ , соответствующего  $\chi$ , не содержит представления  $T_0$ , соответствующего  $\chi_0$ , т. е. матричные элементы  $T|_{G_0}$  и  $T_0$  ортогональны. Так как  $\chi(x^{-1}t) = \sum_{i,k} \overline{t_{ki}(x)} t_{ki}(t)$ , то  $(\chi * \psi)(t) = 0$  для всех  $t \in G$ . Пусть  $f \in A$  — такая функция, что  $f|_{G_0} = \chi_0$ . Имеем  $(f * \psi) * \chi \equiv f * (\psi * \chi) \equiv 0$ . Если  $\chi \in \hat{G}$  и  $\langle \chi, \chi_0 \rangle_0 = 0$ , то  $\chi * \psi|_{G_0} = 0$ . Если  $(f * \psi) * \chi = 0$  для всех  $\chi \in A \cap \hat{G}$ , то  $f * \psi \equiv 0$ , но  $f * \psi|_{G_0} = \chi_0$ . Лемма [доказана].

Пусть теперь  $\chi_0 \in A|_{G_0} \cap \hat{G}_0$  и  $\chi_0|_{G_k} = \chi(e)$ . Возьмем  $\chi \in A \cap \hat{G}$  такой, что  $\langle \chi, \chi_0 \rangle_0 \neq 0$ . По лемме 6 найдется такое целое  $n > 1$ , что  $\int_{G_0} \chi_0^n(x) dx \neq 0$ . Ясно, что тогда  $\int_G \chi^n(x) dx \neq 0$ . Так как  $\chi \in A$ , то из (1) следует, что

$$\int_G \chi^n(x) dx = \sum_{i=1}^r \int_{G_0} \chi^n(g_i x) dx = r \int_{G_0} \chi^n(x) dx.$$

Здесь  $r$  — порядок группы  $\Gamma = G/G_0$ ,  $g_1, \dots, g_r$  — представители различных классов смежности  $G$  по  $G_0$ .

в) Алгебра  $A|_{G_k}$  порождается характерами  $\chi = \frac{1}{\chi(e)} \chi|_{G_k}$ , где  $\chi \in A|_{G_0} \cap \hat{G}_0$ .

Пусть  $\chi_1, \chi_2 \in A|_{G_0} \cap \hat{G}_0$  и  $\frac{1}{\chi_1(e)} \chi_1|_{G_k} = \frac{1}{\chi_2(e)} \chi_2|_{G_k}$ . Тогда  $\chi_1 \cdot \chi_2$  — след некоего представления группы  $G_0$ . Ясно, что все характеры из  $\hat{G}_0$ , встречающиеся в разложении  $\chi_1 \cdot \chi_2$ , тривиальны на  $G_k$ , и, следовательно, (см. п. б) теоремы) тривиальны на  $G_0$ . (Считается очевидным, что  $A|_{G_0}$  содержит все характеры из  $\hat{G}_0$ , которые входят в разложения функций из  $A|_{G_0}$ .) Легко показать, что тогда  $\chi_1 = \chi_2 = 1$ . Нужно только соответствующие  $\chi_1$  и  $\chi_2$  представления  $T_1$  и  $T_2$  привести в каждой точке к диагональному виду и вспомнить, что  $(\chi_1 \cdot \chi_2)(x) = \text{Sp}(T_1 \otimes T_2)(x)$ . Из подсчета следа и получается доказываемое равенство.

Пусть теперь  $\chi', \chi'' \in A \cap \hat{G}$ ,  $\langle \chi', \chi_1 \rangle_0 \neq 0$  и  $\langle \chi'', \chi_2 \rangle_0 \neq 0$ . Тогда  $\int_G \chi'(x) \chi''(x) dx = r \int_{G_0} \chi'(x) \chi''(x) dx \neq 0$  (см. п. а) теоремы). Следовательно,  $\chi' = \overline{\chi''}$ , т. е.  $\chi' = \chi'' = 1$ .

Достаточность. Пусть выполняются условия а), б), в). Предположим, что найдется такой нетривиальный характер  $\chi \in A \cap \hat{G}$ , что  $\overline{\chi} \in A$ . Ввиду а)

в разложении  $\chi|_{G_0}$  все характеры нетривиальны. Итак, существует нетривиальный характер  $\chi_0 \in A|_{G_0} \cap \hat{G}_0$  такой, что  $\bar{\chi}_0 \in A$ . Тогда, согласно в),  $\chi_0|_{G_k} = \chi(e)$ , но этот случай предусмотрен условием б).

Доказательство теоремы закончено.

**Теорема 2.** Пусть  $A$  — однородная антисимметричная алгебра на компактной группе Ли  $G$ . Тогда  $A|_{G_0}$  и  $A|_{G_k}$  — однородные антисимметричные алгебры на  $G_0$  и  $G_k$  соответственно.

**Доказательство.** Антисимметричность алгебр  $A|_{G_0}$  и  $A|_{G_k}$  следует из пунктов б) и в) теоремы 1. Нужно доказать замкнутость этих алгебр.

Обозначим через  $\tilde{A}$  алгебру, полученную из  $A$  путем присоединения всех функций, постоянных на классах смежности  $G$  по  $G_0$ .  $G_0$  — максимальное множество антисимметрии алгебры  $\tilde{A}$ . По теореме Шилова — Бишоп (см. [3]),  $\tilde{A}|_{G_0}$  — замкнутая подалгебра  $C(G_0)$ , но  $\tilde{A}|_{G_0} = A|_{G_0}$ . Замкнутость  $A|_{G_k}$  доказывается аналогично.

**3.** Пусть группа  $G$  — проективный предел семейства компактных групп  $\{G_i\}_{i \in I}$ ,  $\varphi_i: G \rightarrow G_i$  — соответствующие эпиморфизмы.

**Лемма 10.** Всякая однородная алгебра  $A$  на  $G$  есть индуктивный предел алгебр  $A_i = \{f \in C(G_i) \mid f \circ \varphi_i \in A\}$  на  $G_i$  (см. п. 2). Алгебра  $A$  антисимметрична тогда и только тогда, когда все  $A_i$  антисимметричны.

**Доказательство.** В качестве мономорфизмов  $A_i$  в  $A$  берутся отображения  $\varphi_i^*: f \rightarrow f \circ \varphi_i$ . Проверка свойств индуктивного предела не представляет никакого труда.

Лемма 10 позволяет применить результаты п. 2 к алгебрам на произвольных компактных группах, так как всякая компактная группа есть проективный предел семейства компактных групп Ли.

**Теорема 3.** Пусть  $G$  — компактная группа. Однородная алгебра  $A$  на  $G$  антисимметрична тогда и только тогда, когда 1) среди нетривиальных одномерных характеров, принадлежащих  $A$ , нет сопряженных, 2) для всякого  $\chi \in A \cap \hat{G}$ ,  $\chi \neq 1$ , и для всех целых  $n > 0$

$$\int_G \chi^n(g) dg = 0.$$

**Доказательство. Достаточность.** Предположим сначала, что  $G$  — группа Ли.

Если  $A$  не антисимметрична, то найдется нетривиальный характер  $\chi \in A \cap \hat{G}$  такой, что  $\bar{\chi} \in A$ .

Возможны два случая:

1.  $|\chi|_{G_0} = \text{const}$ . Тогда все  $\chi_j \in \hat{G}$  в разложении  $|\chi|^2 = \chi_1 + \dots + \chi_k$  могут рассматриваться как характеры группы  $\Gamma = G/G_0$ , так как  $\chi_j|_{G_0} = \chi_j(e)$ ,  $j = 1, \dots, k$ . Следовательно,  $\int_G \chi_j^r(x) dx \neq 0$  для  $j = 1, \dots, k$ ; здесь  $r$  — порядок группы  $\Gamma$ .

Если все  $\chi_j$  тривиальны, то  $|\chi| \equiv \chi(e)$ , а отсюда нетрудно вывести, что  $\dim \chi = 1$ .

2.  $|\chi|_{G_0} \neq \text{const}$ . Тогда в разложении  $|\chi^2|_{G_0} = \chi'_1 + \dots + \chi'_l$  найдется хотя бы один нетривиальный характер. Пусть это будет  $\chi'_1$ . Ясно, что  $\chi'_1 \in A|_{G_0}$ . В разложении  $|\chi'_1|^2 = \chi''_1 + \dots + \chi''_m$  найдется хотя бы один нетривиальный характер, например  $\chi''_1$ .

По лемме 6 найдется такое целое  $n > 1$ , что  $\int_{G_0} \chi''_1^n(x) dx \neq 0$ . Согласно лемме 9 найдется характер  $\chi_1 \in A \cap \hat{G}$  такой, что в разложение  $\chi_1|_{G_0}$  по неприводимым характерам входит  $\chi''_1$ . Из леммы 7 тогда следует, что если  $r$  — порядок группы  $\Gamma = G/G_0$ , то  $\int_G \chi^{n+r}(g) dg \neq 0$ .

Пусть теперь  $G$  — произвольная компактная группа, представленная в виде проективного предела семейства компактных групп Ли  $\{G_i\}_{i \in I}$ . Нужно проверить (см. лемму 10), что все алгебры  $A_i$  антисимметричны. Но если условия 1) и 2) выполняются для  $A$ , то они, как легко видеть, выполняются для всех  $A_i$ .

*Необходимость.* Утверждение 1) теоремы очевидно, утверждение 2) совпадает с леммой 1.

4. Пусть  $G, G_1$  — компактные группы,  $\varphi \in \text{Hom}(G, G_1)$ .

Обозначим через  $\varphi^*$  гомоморфизм  $C^*(G) \rightarrow C^*(G_1)$ , определенный формулой  $\varphi_*(F)(f) = F(f \circ \varphi)$  для всяких функции  $f \in C(G_1)$  и функционала  $F \in C^*(G)$ .

Лемма 11. Пусть  $G$  — компактная группа,  $A$  — однородная алгебра на  $G$ ,  $\varphi: G \rightarrow G_1$  — эпиморфизм. Тогда  $\varphi_*|_{A^\perp}$  — эпиморфизм  $A^\perp$  на  $A_\varphi^\perp$ , где  $A_\varphi = \{f \in C(G_1) | f \circ \varphi \in A\}$ .

Доказательство. Ясно, что  $\varphi_*(A^\perp) \subset A_\varphi^\perp$ . Далее, если  $F \in A_\varphi^\perp$ , то  $F_\varphi \in A^\perp$ , где функционал  $F_\varphi$  определен формулой  $F_\varphi(f(g)) = F\left(\int_{\text{Ker}(\varphi)} f(gh) dh\right)$  для всех  $f \in C(G)$ .

Следствие. Пусть  $G$  — проективный предел семейства компактных групп  $\{G_i\}_{i \in I}$ ,  $\varphi_i: G \rightarrow G_i$  — соответствующие эпиморфизмы,  $A$  — однородная алгебра на  $G$ . Тогда  $A^\perp$  есть проективный предел семейства аннуляторов  $\{A_{\varphi_i}^\perp\}_{i \in I}$ .

Теорема 4. Пусть  $A$  — однородная антисимметричная алгебра на компактной группе Ли  $G$ ,  $r$  — порядок группы  $\Gamma = G/G_0$ . Тогда  $\dim A^\perp \geq r - 1$ .

Доказательство. Пусть  $g_1, \dots, g_r$  — представители различных классов смежности  $G$  по  $G_0$ . Для всякого набора  $c = (c_1, \dots, c_r)$  вещественных чисел таких, что  $\sum_{i=1}^r c_i = 0$ , и произвольной функции  $f \in C(G)$  положим

$$F_c(f) = \sum_{i=1}^r c_i \int_{G_0} f(g_i x) dx.$$

Множество таких наборов  $c$  образует  $(r-1)$ -мерное вещественное пространство; отображение  $c \rightarrow F_c$  — мономорфизм этого пространства в  $A^\perp$  (см. п. а) теоремы 1).



**Теорема 5.** Пусть  $G$  — компактная группа Ли,  $A$  — однородная антисимметричная алгебра на  $G$ . Если  $G_0$  некоммутативна, то  $A^\perp$  — несепарабельное пространство.

**Доказательство.** Обозначим для всякого  $g \in G$  через  $\delta_g$  меру, действующую по формуле  $\int_G f d\delta_g = f(g)$  для любой функции  $f \in C(G)$ .

Положим для  $g \in G_s$

$$F_g(f) = \int_{G_k} \int_{G_s} f(th) d\delta_g(h) dt - \int_{G_0} f(x) dx,$$

где  $dt$  и  $dx$  — такие меры Хаара на  $G_k$  и  $G_0$  соответственно, что  $\int_{G_k} dt = \int_{G_0} dx = 1$ . Далее,  $F_g \in A^\perp$  для любого  $g \in G_s$ . По теореме 2  $A|_{G_0}$  — однородная алгебра на  $G_0$ , так что можно считать, что  $G$  связна. Пусть  $t_{ij} \in A$  — матричный элемент неприводимого представления  $T$ . Тогда  $t_{ij}(th) = \kappa(t) t_{ij}(h)$ , где  $t \in G_k$ ,  $h \in G_s$ ,  $\kappa \in \hat{G}_k$  (см. лемму 5). Если  $t_{ij} \neq 1$ , то  $\kappa \neq 1$  (лемма 6). Итак, если  $t_{ij} \neq 1$ , то  $\int_{G_0} t_{ij}(x) dx = 0$  и  $\int_{G_k} t_{ij}(t) dt = \int_{G_k} \kappa(t) dt = 0$ .

Очевидно, что  $F_g(1) = 0$ . Ясно, что множество различных функционалов  $F_g$  независимо в топологии  $A^\perp$  и что это множество находится во взаимно однозначном соответствии с множеством элементов группы  $G_s/G_s \cap G_k$ , т. е. множество различных функционалов  $F_g$  — континуум, поскольку  $G_s \cap G_k$  — конечная группа.

**Следствие 1.** Пусть  $G$  — произвольная компактная группа,  $A$  — однородная антисимметричная алгебра на  $G$ . Тогда

- 1) если порядок группы  $\Gamma = G/G_0$  не меньше  $r$ , то  $\dim A^\perp \geq r - 1$ ;
- 2) если  $G_0$  — некоммутативная группа, то  $A^\perp$  — несепарабельное пространство.

**Доказательство.** Представляя  $G$  в виде проективного предела компактных групп Ли, можно легко показать, что 1) существует эпиморфизм  $\varphi$  группы  $G$  на компактную группу Ли  $G'$  такую, что порядок группы  $\Gamma' = G'/G'_0$  не меньше  $r$ ; 2) существует эпиморфизм  $\tau$  группы  $G$  на компактную группу Ли  $G'$  такую, что  $G'_0$  некоммутативна. Осталось только применить лемму 11 и теоремы 4, 5 к алгебрам  $A_\varphi$  и  $A_\tau$ .

**Следствие 2.** Если [на компактной группе  $G$  имеется однородная антисимметричная алгебра  $A$  такая, что  $A^\perp = \{0\}$ ], то группа  $G$  коммутативна и связна.

Это — основной результат работы [1].

**5.** Пусть  $A$  — произвольная однородная алгебра на компактной группе  $G$ ; обозначим [через  $H$  максимальное множество антисимметрии алгебры  $A$ , содержащее единицу группы  $G$ . Очевидно, что  $H$  — инвариантная замкнутая подгруппа  $G$  и что максимальные множества антисимметрии алгебры  $A$  — это множества вида  $g \cdot H$  при всех  $g \in G$  и только они.

Теорема 6. Пусть  $A^\perp$ ,  $G$ , и  $H$  — то же, что и выше. Тогда

- 1) если  $A^\perp = \{0\}$ , то  $H$  — связная подгруппа центра группы  $G_0$ ;
- 2) если  $\dim A^\perp > 0$  и  $A^\perp$  сепарабелен, то  $G_0$  — коммутативная подгруппа и число элементов группы  $G/G_0$  не более чем счетно.

Доказательство.

Лемма 12. Пусть  $X$  — компакт,  $A$  — замкнутая подалгебра  $C(X)$ ,  $B$  — единичный шар в  $C^*(X)$ . Тогда носители крайних точек множества  $A^\perp \cap B$  суть множества антисимметрии.

Это — факт известный и легко доказываемый. Из него можно сделать полезный вывод:

$$\dim A^\perp = \dim (A|_H) \times (\text{число элементов группы } G/H). \quad (7)$$

Лемма 13. Пусть  $G$  — пресективный предел семейства компактных групп  $\{G_i\}_{i \in I}$ ,  $\varphi_i: G \rightarrow G_i$  — соответствующие эпиморфизмы,  $A$  — однородная алгебра на  $G$ ,  $H_i$  — максимальные множества антисимметрии алгебр  $A_i$  такие, что  $e \in H_i$ . Тогда  $H$  — проективный предел семейства  $\{H_i\}_{i \in I}$  и  $A_i|_{H_i} = \{f \in C(H_i) \mid f \circ \varphi_i|_H \in A|_H\}$ .

Доказательство этой леммы не представляет никакого труда.

1) Если  $A^\perp = \{0\}$ , то из (7) и из следствия 2 п. 5 видно, что  $H$  — связная коммутативная подгруппа. Представим  $G$  в виде пресективного предела компактных групп Ли  $\{G_i\}_{i \in I}$ . Все  $H_i$  коммутативны и связны.

Лемма 14. Если  $G$  — компактная связная группа Ли и  $H$  — инвариантная абелева подгруппа  $G$ , то  $H$  лежит в центре группы  $G$ .

Действительно,  $H \cap G_s$  — инвариантная абелева подгруппа  $G_s$ . Значит,  $H \cap G_s$  дискретна. Нетрудно видеть, что всякая дискретная инвариантная подгруппа связной топологической группы лежит в центре этой группы.

2) Из (7) видно, что  $\dim A^\perp > 0$  тогда и только тогда, когда  $\dim (A|_H)^\perp > 0$ .

Если  $H \not\supset G_0$ , то найдется такое  $i \in I$ , что  $H_i \not\supset (G_i)_0$  и  $\dim A_i^\perp > 0$ . Тогда  $G_i/H_i$  — многообразие положительной размерности. Отсюда и из (7) следует, что  $A^\perp$  несепарабелен (см. лемму 11).

Итак,  $G_0 \subseteq H$ . Если  $G_0$  некоммутативна, то, по следствию 1 п. 5,  $A^\perp$  несепарабелен.

Если число элементов группы  $G/G_0$  несчетно, то из очевидного уточнения следствия 1 п. 4 и (7) получаем, что  $A^\perp$  несепарабелен.

Автор благодарит В. Я. Лина и Е. А. Горина за внимание к этой работе и ценные советы.

(Поступила в редакцию 26/VIII 1968 г.)

#### Литература

1. D. Rider, Translation invariant Dirichlet algebras on compact groups, Proc. Amer. Math. Soc., **17**, № 5 (1966), 977—983.
2. А. Вейль, Интегрирование в топологических группах и его применения, Москва, ИЛ, 1950.
3. E. Bishop, A generalization of the Stone-Weierstrass theorem, Pacific. J. Math., **10**, № 3 (1961), 777—783.