

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. В. А. СТЕКЛОВА
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ
МАТЕМАТИКИ**

Выпуск 9

Издание выходит с 2003 года

Рациональные приближения
постоянной Эйлера и рекуррентные
соотношения

Сборник статей под редакцией
А. И. Аптекарева



Москва
2007

УДК 517.53+511
ББК (В)22.161
С56

Редакционный совет:

*С. И. Адян, Д. В. Аносов, О. В. Бесов,
В. С. Владимиров, А. М. Зубков, А. Д. Изаак,
А. А. Карацуба, В. В. Козлов, С. П. Коновалов,
А. М. Малокостов (ответственный секретарь),
С. П. Новиков, А. Н. Паршин (заместитель главного редактора),
Ю. В. Прохоров, А. Г. Сергеев (главный редактор),
А. А. Славнов, Д. В. Трещёв, Е. М. Чирка*

С56 **Современные проблемы математики** / Математический институт им. В. А. Стеклова РАН (МИАН). – М.: МИАН, 2007. Вып. 9: Рациональные приближения постоянной Эйлера и рекуррентные соотношения / Сборник статей под редакцией А. И. Аптекарева – 84 с.

ISBN 5-98419-021-4

Серия “Современные проблемы математики” – рецензируемое продолжающееся издание Математического института им. В. А. Стеклова РАН. В серии публикуются работы, отражающие научные достижения сотрудников и аспирантов МИАН. Особое внимание уделяется исследованиям, выполненным в рамках научных программ Российской академии наук. Публикация работ осуществляется по решению Редакционного совета, в который входят представители администрации и заведующие отделами МИАН. Издания серии рассылаются по стандартному обязательному списку, в библиотеки математических институтов и ведущих университетов страны.

ISBN 5-98419-021-4

© Математический институт
им. В. А. Стеклова РАН, 2007

Содержание

А. И. Аптекарев. Предисловие	5
Список литературы	10
Д. В. Христофоров. Рекуррентные соотношения для аппроксимаций Эрмита–Паде некоторой системы из четырех функций марковского и стилтьесовского типа	11
1. Введение	11
2. Нахождение многочленов с недиагональными индексами	13
3. Нахождение коэффициентов рекуррентных соотношений	16
Список литературы	26
А. И. Боголюбский. Рекуррентные соотношения с рациональными коэффициентами для некоторых совместно ортогональных полиномов, задаваемых формулой Родрига	27
1. Введение	27
2. Вывод рекуррентных соотношений	30
3. Доказательство теорем 1 и 2	33
4. Одно следствие	34
5. О структуре приложений	34
Список литературы	35
А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков. Четырехчленные рекуррентные соотношения для γ-форм	37
1. Введение	37
2. Связь γ -форм с рекуррентными соотношениями для $Q_n(1)$	38
3. Получение четырёхчленного рекуррентного соотношения для форм	39
4. Доказательство теоремы	40
Список литературы	43
Д. Н. Туляков. О некоторой процедуре нахождения асимптотических разложений для решений разностных уравнений	45
1. Введение	45
2. Доказательство теоремы	46

3. Приложение	51
Список литературы	53
А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов. Асимптотика γ-форм, генерируемых совместно ортогональными много- членами	55
1. Введение	55
2. Доказательство теоремы	56
1. Асимптотика q_n	56
2. Асимптотика f_n	59
Список литературы	62
Приложения (А. И. Боголюбский)	63
Приложение А. Maple-программа с доказательством перво- го 7-членного рекуррентного соотношения, содержащая его коэффициенты	63
Приложение В. Коэффициенты второго 7-членного рекур- рентного соотношения, записанные в нотации Maple	68
Приложение С. Явный вид двух коэффициентов 8-членного рекуррентного соотношения для рациональных прибли- жений постоянной Эйлера	71

Предисловие

А. И. Аптекарев

Диофантовы приближения математических констант – одно из наиболее важных приложений теории рациональных аппроксимаций аналитических функций. Многие из доказательств трансцендентности (иррациональности) знаменитых констант основываются на конструкциях аппроксимаций или интерполяций аналитических функций. Подобные конструкции часто обсуждаются на семинаре “Комплексный анализ” Математического Института им. В. А. Стеклова РАН. Некоторые результаты этих обсуждений (в основном работы молодых математиков и студентов) нашли отражение в этом сборнике статей. Речь пойдет о построении и изучении асимптотических свойств некоторой последовательности рациональных приближений к постоянной Эйлера

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right).$$

Постоянная Эйлера γ – наиболее известный представитель так называемых эйлеровых чисел, включающих в себя значения эйлеровых сумм (значения дзета функции Римана в натуральных точках)

$$\zeta(s) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}.$$

Арифметическая природа постоянной γ и значений $\zeta(s)$ в нечетных точках до сих пор не поддается исследованию (значения $\zeta(s)$ в четных точках были получены еще Эйлером). Пока единственным конкретным результатом в этом направлении является доказательство Р. Апери [1] в 1978 году иррациональности $\zeta(3)$.

ТЕОРЕМА АПЕРИ. Пусть числа u_n и v_n задаются следующим рекуррентным соотношением:

$$(n+1)^3 u_{n+1} = (2n+1)(17n^2 + 17n + 5)u_n - n^3 u_{n-1}$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} v_0 &:= 0, & v_1 &:= 6, \\ u_0 &:= 1, & u_1 &:= 5. \end{aligned}$$

Тогда $u_n, D_n^3 v_n \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{N}$ (здесь D_n обозначает наименьшее общее кратное чисел $\{1, 2, \dots, n\}$), и справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} |u_n|^{1/n} &= (\sqrt{2} + 1)^4 + o(1), \\ |v_n - \zeta(3)u_n|^{1/n} &= (\sqrt{2} - 1)^4 + o(1). \end{aligned}$$

Тем самым рекуррентное соотношение теоремы Апери не только определяет рациональные приближения $\zeta(3)$

$$\frac{v_n}{u_n} \rightarrow \zeta(3),$$

но и (в виду того, что $D_n^{1/n} \rightarrow e$ и $e^3(\sqrt{2} - 1)^4 \approx 0.591 \dots < 1$) доказывает иррациональность $\zeta(3)$. Надо также отметить, что построение с помощью рекуррентных соотношений рациональных приближений к математическим константам имеет самостоятельный интерес и известно всего лишь несколько результатов в этом направлении (см. [2] о других рекуррентных соотношениях для приближений $\zeta(3)$, а также [3] для приближений постоянной Кэталана и [4], [5] для приближений π^4).

В настоящем сборнике собраны статьи, в каждой из которых решается своя самостоятельная задача, и вместе с тем совокупность этих работ составляет доказательство следующего результата.

ТЕОРЕМА. Пусть числа p_n и q_n задаются следующими рекуррентными соотношениями:

$$\begin{aligned} (16n - 15)(n + 1)q_{n+1} &= (128n^3 + 40n^2 - 82n - 45)q_n \\ &\quad - n(256n^3 - 240n^2 + 64n - 7)q_{n-1} + (16n + 1)n(n - 1)q_{n-2} \end{aligned} \quad (1)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} p_0 &:= 0, & p_1 &:= 2, & p_2 &:= \frac{31}{2}, \\ q_0 &:= 1, & q_1 &:= 3, & q_2 &:= 25. \end{aligned}$$

Тогда $q_n, D_n p_n \in \mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{N}$ (здесь D_n обозначает наименьшее общее кратное чисел $\{1, 2, \dots, n\}$), и справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{(2n)!}{n!} \frac{e^{\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}(4e)^{3/8}} + O(n^{-1/2}) \right), \\ p_n - \gamma q_n &= \frac{(2n)!}{n!} \frac{e^{-\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{(4e)^{3/8}} + O(n^{-1/2}) \right), \end{aligned} \quad (2)$$

где γ есть постоянная Эйлера.

Тем самым, рекуррентные соотношения (1) определяют рациональные приближения постоянной Эйлера

$$\frac{p_n}{q_n} - \gamma = 2\pi e^{-2\sqrt{2n}} (1 + O(n^{-1/2})).$$

По-видимому, здесь впервые получены рациональные приближения к постоянной Эйлера, задаваемые рекуррентным соотношением.

Остановимся вкратце на предыстории этого результата и содержании сборника. В работе [6] был рассмотрен пример системы из четырех функций $\{\hat{\mu}_1, \hat{\mu}_2, \hat{s}_1, \hat{s}_2\}$:

$$\hat{\mu}_k(z) := \int_0^1 \frac{w_k(z) dx}{z-x}, \quad \hat{s}_k(z) := \int_1^\infty \frac{w_k(z) dx}{z-x}, \quad (3)$$

где

$$w_k(x) := x^{\alpha_k} (1-x)^\alpha e^{-\beta x}, \quad k = 1, 2, \quad (4)$$

для которой общий знаменатель Q_n совместных рациональных диагональных аппроксимаций Эрмита–Паде представляется в виде обобщенной формулы Родрига

$$Q_n(z) = \frac{1}{(n!)^2} w_2^{-1} \frac{d^n}{dz^n} \left[w_2 z^n w_1^{-1} \frac{d^n}{dz^n} \left[w_1 z^n (1-z)^{2n} \right] \right]. \quad (5)$$

Этот пример был приведен в [6] неслучайно. Нетрудно видеть, что любой многочлен P_n с целыми коэффициентами генерирует γ -форму с целыми коэффициентами

$$\int_0^\infty P_n(x) \ln(x) e^{-x} dx = a_n + \gamma b_n.$$

Оказалось (проводя вычисления с (5), $n \approx 50$), что γ -формы, генерируемые многочленами Q_n , задаваемыми формулой Родрига (5) с весами (4) при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ и $\alpha = -\beta = 1$,

$$p_n - \gamma q_n := \frac{1}{n!} \int_0^\infty Q_n(x) \ln(x) e^{-x} dx, \quad (6)$$

хотя и растут с увеличением n , но приближенно

$$\frac{p_n}{q_n} \approx \gamma. \quad (7)$$

Доказательству этого обстоятельства, а также получению рекуррентных соотношений для быстрого вычисления коэффициентов форм (6) посвящены статьи настоящего сборника.

Открывается сборник статьей [7] Д. В. Христофорова, в которой найдены коэффициенты рекуррентных соотношений, связывающих около-диагональные (так называемые “step-line”) элементы многомерной таблицы Эрмита–Паде для набора четырех функций (3). Существование этих рекуррентных соотношений следует из общей теории аппроксимаций Эрмита–Паде. В случае набора из четырех функций, речь идет о системе из четырех шестичленных рекуррентных соотношений, позволяющих, стартуя с начальных данных, последовательно вычислять все числители и знаменатели рациональных аппроксимаций, принадлежащих многомерному “step-line” таблицы Эрмита–Паде. Препятствие, которое пришлось преодолеть в работе [7], состояло в том что только часть этого многомерного “step-line” содержит аппроксимации, знаменатели которых задаются формулами Родрига из [7], поэтому необходимо было найти выражения для “неродриговых” многочленов.

Многочлены Q , определяемые формулой Родрига (5), имеют целые коэффициенты. “Неродриговы” знаменатели рациональных аппроксимаций из “step-line” таблицы Эрмита–Паде таким свойством не обладают. Поэтому и коэффициенты полученных в [7] шестичленных рекуррентных соотношений не являются рациональными функциями переменной n . Это обстоятельство замедляет вычисление многочленов Q и γ -форм (6) (оптимальное время вычисления γ -форм системой шестичленных рекуррентных соотношений наблюдается при n не превышающих 500).

В следующей статье сборника – статье [8] А. И. Боголюбского, найдены рекуррентные соотношения с рациональными по n и z

коэффициентами, связывающие только “родриговы” многочлены многомерного “step-line”. Специфика этого результата состоит в том, что общая теория аппроксимаций Эрмита–Паде не гарантирует существование таких рекуррентных соотношений. Поэтому в работе [8] искомые рациональные коэффициенты (изначально неизвестной степени) сначала экспериментально подбираются (используя посчитанное с помощью рекуррентных соотношений работы [7] достаточное число многочленов Q_n , $n \simeq 200$), а затем полученные рекуррентные соотношения доказываются, выводя их справедливость (посредством компьютерного доказательства – “computer aided proof”) из справедливости системы четырех шестичленных рекуррентных соотношений работы [7]. Таким образом, в этой работе для многочленов Q_n , определяемых формулой Родрига (5), получены и доказаны система из двух семичленных рекуррентных соотношений и одно восьмичленное рекуррентное соотношение с рациональными по n и z коэффициентами. Отметим, что у семичленных соотношений коэффициенты оказались рациональными функциями по n степени $\simeq 25$, а у восьмичленного соотношения степени по n коэффициентов оказались порядка $\simeq 90(!)$.

Полученные в [8] рекуррентные соотношения с рациональными коэффициентами для полиномов Q_n также позволяют рекуррентным образом вычислять коэффициенты γ -форм (6). Причем, лишенные недостатков шестичленных рекуррентных соотношений, эти семи- и восьмичленные соотношения эффективны даже при n больших чем 5000, демонстрируя в приближении (7) сотни правильных знаков.

Собственно, открывшаяся возможность проведения с γ -формами (6) широкомасштабных экспериментов позволила авторам следующей статьи сборника [9] получить для γ -формы (6) простое(!) четырехчленное рекуррентное соотношение (1) и доказать его с помощью доказанного в [8] восьмичленного соотношения.

Заключительные две статьи [10], [11] сборника посвящены асимптотическим свойствам решений четырехчленного рекуррентного соотношения (1) при $n \rightarrow \infty$. В работе Д.Н. Тулякова [10] предложена эффективная процедура нахождения асимптотического разложения для базиса решений разностного уравнения. Там же эта процедура применена к четырехчленному рекуррентному соотношению (1) с целью выяснить, какие асимптотики могут иметь решения (1).

Наконец, в работе [11] применением метода перевала к интегральному представлению γ -формы (6) получены асимптотические формулы (2), что завершает доказательство сформулированной в предисловии теоремы.

Список литературы

- [1] R. Apéry, “Irrationalite de $\zeta(2)$ et $\zeta(3)$ ”, *Astérisque*, **61**, 1979, 11–13 [Zbl 0401.10049](#).
- [2] Ю. В. Нестеренко, “Некоторые замечания о $\zeta(3)$ ”, *Матем. заметки*, **59:6** (1996), 865–880 [Mi mzm1785](#), [MR 1445472](#), [Zbl 0888.11028](#).
- [3] T. Rivoal, W. Zudilin, “Diophantine properties of numbers related to Catalan’s constant”, *Math. Ann.*, **326:4** (2003), 705–721 [doi 10.1007/s00208-003-0420-2](#), [MR 2003449](#), [Zbl 1028.11046](#).
- [4] W. Zudilin, “Well-poised hypergeometric service for Diophantine problems of zeta values”, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **15:2** (2003), 593–626 [MR 2140869](#), [Zbl 02184613](#).
- [5] В. Н. Сорокин, *Об одном алгоритме быстрого вычисления π^4* , Препринт № 28, Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, 2002.
- [6] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials for classical weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355:10** (2003), 3887–3914 [doi 10.1090/S0002-9947-03-03330-0](#), [MR 1990569](#), [Zbl 1033.33002](#).
- [7] Д. В. Христофоров, “Рекуррентные соотношения для аппроксимаций Эрмита–Паде одной системы из четырех функций марковского и стилтьесовского типа”, *Современные проблемы математики*, вып. 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007, 11–26.
- [8] А. И. Боголюбский, “Рекуррентные соотношения с рациональными коэффициентами для некоторых совместно ортогональных многочленов, задаваемых формулой Родрига”, *Современные проблемы математики*, вып. 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007, 27–35.
- [9] А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков, “Четырехчленные рекуррентные соотношения для γ -форм”, *Современные проблемы математики*, вып. 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007, 37–43.
- [10] Д. Н. Туляков, “О некоторой процедуре нахождения асимптотических разложений для решений разностных уравнений”, *Современные проблемы математики*, вып. 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007, 45–53.
- [11] А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов, “Асимптотика γ -форм генерируемых совместно ортогональными многочленами”, *Современные проблемы математики*, вып. 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2007, 55–62.

Рекуррентные соотношения для аппроксимаций Эрмита–Паде некоторой системы из четырех функций марковского и стилтьесовского типа¹

Д. В. Христофоров

1. Введение

Пусть

$$w_k(x) = x^{\alpha_k}(1-x)^{\alpha}e^{\beta x}, \quad k = 1, 2, \quad \beta < 0, \quad \alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{Z}, \quad (1)$$

– две весовые функции Якоби–Лаггера на $[0, \infty]$, которые определяют систему из четырех функций $\{f_j\}_{j=1}^4$:

$$f_1 = \hat{\mu}_1, \quad f_2 = \hat{\mu}_2, \quad f_3 = \widehat{S}_1, \quad f_4 = \widehat{S}_2, \quad (2)$$

две из которых функции марковского типа:

$$\hat{\mu}_k(x) := \int_0^1 \frac{w_k(x)}{z-x} dx, \quad k = 1, 2,$$

две другие функции стилтьесовского типа:

$$\widehat{S}_k(x) := \int_1^{\infty} \frac{w_k(x)}{z-x} dx, \quad k = 1, 2.$$

Рациональные аппроксимации Эрмита–Паде $\pi_{\vec{n}}$ для системы $\{f_j\}_{j=1}^4$ и векторного индекса $\vec{n} := (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{N}^4$ определя-

¹Работа частично поддержана грантом научных школ НШ-1551.2003.1 и исследовательским грантом РФФИ-05-01-00522.

ются следующим образом (см. [1]):

$$\pi_{\vec{n}} := \left\{ \frac{P_{\vec{n}}^{(j)}}{Q_{\vec{n}}} \right\}_{j=1}^4 : \begin{cases} \deg Q_{\vec{n}} \leq |\vec{n}| := \sum_{j=1}^4 n_j, \\ (f_j Q_{\vec{n}} - P_{\vec{n}}^{(j)})(z) =: R_{\vec{n}}^{(j)}(z) = O\left(\frac{1}{z^{n_j+1}}\right), \quad z \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (3)$$

Известно, что общие знаменатели $Q_{\vec{n}}$ рациональных аппроксимаций (3) удовлетворяют системе из четырех типов соотношений ортогональности:

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q_{\vec{n}}(x) x^\nu w_j(x) dx &= 0, & \nu &= 0, \dots, n_j - 1, & j &= 1, 2, \\ \int_1^\infty Q_{\vec{n}}(x) x^\nu w_j(x) dx &= 0, & \nu &= 0, \dots, n_j - 1, & j &= 1, 2. \end{aligned} \quad (4)$$

Такие многочлены называются совместно (“multiple”) ортогональными.

Совместно ортогональные многочлены (4) относительно весов (1), среди других примеров, были рассмотрены в работе [2]. В частности, в [2] приведена формула Родрига для этих многочленов при $\vec{n} = (n_1, n_1, n_2, n_2) =: [n_1, n_2]$:

$$\begin{aligned} Q_{[n_1, n_2]}(z) &= w_2^{-1}(z) \frac{d^{n_2}}{dz^{n_2}} \left[w_2(z) z^{n_2} w_1^{-1}(z) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{d^{n_1}}{dz^{n_1}} [w_1(z) z^{n_1} (1-z)^{n_1+n_2}] \right]. \end{aligned} \quad (5)$$

Известно (см. [3], [4]), что знаменатели аппроксимаций Эрмита–Паде для системы из p функций удовлетворяют $(p+2)$ -членному рекуррентному соотношению. При $p=4$ рекуррентное соотношение связывает любые шесть соседних многочленов $Q_{(n_1, n_2, n_3, n_4)}$ в четырехмерной таблице вектор-индексов \vec{n} . Нас будут интересовать рекуррентные соотношения, связывающие между собой диагональные и наддиагональные элементы этой таблицы, т.н. “step-line”:

$$\dots, Q_{\vec{n}-\vec{e}_4}, Q_{\vec{n}-\vec{e}_4+\vec{e}_1}, Q_{\vec{n}-\vec{e}_4+\vec{e}_2}, Q_{\vec{n}-\vec{e}_4+\vec{e}_3}, Q_{\vec{n}}, Q_{\vec{n}+\vec{e}_1}, \dots, \quad (6)$$

здесь мы используем обозначения

$$\begin{aligned}\vec{n} &= (n, n, n, n), & \vec{e}_1 &= (1, 0, 0, 0), & \vec{e}_2 &= (1, 1, 0, 0), \\ \vec{e}_3 &= (1, 1, 1, 0), & \vec{e}_4 &= (1, 1, 1, 1).\end{aligned}$$

Таким образом, для последовательного вычисления многочленов (6) нам требуется набор из четырех шестичленных рекуррентных соотношений, связывающих вектор-индексы:

$$\begin{array}{cccccc} \vec{n} - \vec{e}_4 & \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_1 & \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_2 & \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_3 & \vec{n} & \vec{n} + \vec{e}_1 \\ \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_1 & \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_2 & \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_3 & \vec{n} & \vec{n} + \vec{e}_1 & \vec{n} + \vec{e}_2 \\ \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_2 & \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_3 & \vec{n} & \vec{n} + \vec{e}_1 & \vec{n} + \vec{e}_2 & \vec{n} + \vec{e}_3 \\ \vec{n} - \vec{e}_4 + \vec{e}_3 & \vec{n} & \vec{n} + \vec{e}_1 & \vec{n} + \vec{e}_2 & \vec{n} + \vec{e}_3 & \vec{n} + \vec{e}_4 \end{array} \quad (7)$$

Целью настоящей работы является получение явного вида этих четырех рекуррентных соотношений.

2. Нахождение многочленов с недиагональными индексами

Для получения рекуррентных соотношений, связывающих индексы (7), нам необходимо знать явный вид всех многочленов последовательности (6). Многочлены с индексами $[n_1, n_2]$ определяются формулой Родрига (5). Явное выражение для многочленов с индексами $(n_1, n_1 - 1, n_2, n_2)$ и $(n_1, n_1, n_2, n_2 - 1)$ получим с помощью следующего приема (см. [5]), позволяющего обобщить формулу Родрига на случай векторных индексов такого вида. Представим $Q_{(n_1, n_1 - 1, n_2, n_2)}$ как

$$\begin{aligned} Q_{(n_1, n_1 - 1, n_2, n_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta)}(z) &= w_2^{-1}(z) \frac{d^{n_2}}{dz^{n_2}} \left[w_2(z) z^{n_2} w_1^{-1}(z) \right. \\ &\quad \left. \times \frac{d^{n_1}}{dz^{n_1}} [w_1(z) z^{n_1} (1 - z)^{(n_1 + n_2)} (z - t(n_1, n_2))] \right], \end{aligned}$$

где $t(n_1, n_2)$ – неизвестная константа. Из этого соотношения следует, что

$$Q_{(n_1, n_1 - 1, n_2, n_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta)}(z) = z Q_{(n_1 - 1, n_1 - 1, n_2, n_2)}^{(\alpha_1 + 1, \alpha_2 + 1, \alpha, \beta)}(z) - t Q_{(n_1 - 1, n_1 - 1, n_2, n_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta)}(z). \quad (8)$$

Правая часть (8) удовлетворяет $2n_1 + 2n_2 - 2$ соотношениям ортогональности. Тогда $t(n_1, n_2)$ находим из последнего соотношения ортогональности, которому должен удовлетворять многочлен

$Q_{(n_1, n_1-1, n_2, n_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta)}(z)$:

$$\int_0^1 Q_{(n_1, n_1-1, n_2, n_2)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta)}(x) x^{n_1-1} w_1(x) dx = 0.$$

Получаем, что

$$t(n_1, n_2) = \frac{\int_0^1 x^{n_1+\alpha_1} (1-x)^{(n_1+n_2+\alpha-1)} e^{\beta x} dx}{\int_0^1 x^{n_1+\alpha_1-1} (1-x)^{(n_1+n_2+\alpha-1)} e^{\beta x} dx}. \quad (9)$$

Явный вид для $Q_{(n_1, n_1, n_2, n_2-1)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta)}(z)$ следует из соотношения симметрии

$$Q_{(n_1, n_1, n_2, n_2-1)}^{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta)}(z) = Q_{(n_2, n_2-1, n_1, n_1-1)}^{(\alpha_2, \alpha_1, \alpha, \beta)}(z). \quad (10)$$

Нас особенно будет интересовать случай

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha = 1, \quad \beta = -1. \quad (11)$$

Для вычисления отношений интегралов (9) в этом случае мы получим следующие рекуррентные соотношения:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Для $t(n+1, n)$ и $t(n, n)$ в случае (11) справедливо

$$\begin{aligned} t(n+1, n) &= (3n+2) - \frac{2n+1}{-(3n+1) + n[t(n, n)]^{-1}}, \\ t(n, n) &= 3n - \frac{2n}{1 - t(n, n-1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Найдем сначала рекуррентные соотношения для интегралов $J(n, m)$, участвующих в определении (9) констант $t(n_1, n_2)$:

$$J(n, m) := \int_0^1 x^n (1-x)^m e^{-x} dx.$$

Для этого рассмотрим аппроксимации Паде $\frac{P_{n,m}(z)}{Q_{n,m}(z)}$ к функции e^z :

$$Q_{n,m}(z)e^z - P_{n,m}(z) = R_{n,m}(z) = A_{n,m}z^{n+m+1} + \dots$$

Интегральные представления для аппроксимаций Паде получаются из следующего тождества:

$$\begin{aligned} & \left[z^{n+m+1} \int_0^\infty t^n (1-t)^m e^{-zt} dt \right] e^z \\ & \quad - e^z z^{n+m+1} \int_1^\infty t^n (1-t)^m e^{-zt} dt \\ & = e^z z^{n+m+1} \int_0^1 t^n (1-t)^m e^{-zt} dt, \end{aligned}$$

откуда, в частности,

$$\begin{aligned} R_{n,m}(z) &= e^z z^{n+m+1} \int_0^1 t^n (1-t)^m e^{-zt} dt, \\ A_{n,m} &= \int_0^1 t^n (1-t)^m dt. \end{aligned} \tag{13}$$

Тогда

$$J(n, m) = R_{n,m}(1)e^{-1}. \tag{14}$$

Известно (см., например, [6]), что функции $R_{n,m}(z)$ удовлетворяют следующим рекуррентным соотношениям:

$$\begin{aligned} R_{n,m}(z) &= R_{n-1,m}(z) - \frac{A_{n-1,m}}{A_{n-1,m-1}} z R_{n-1,m-1}, \\ R_{n,m}(z) &= R_{n,m-1}(z) - \frac{A_{n,m-1}}{A_{n-1,m-1}} z R_{n-1,m-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

Отсюда, с учетом явного вида (13) констант $A_{n,m}$ и соотношения (14), получаем

$$\begin{aligned} J(n, m) &= -(n+m)J(n, m-1) + nJ(n-1, m-1), \\ J(n, m) &= (n+m)J(n-1, m) - mJ(n-1, m-1). \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$t(n, n) = \frac{J(n, 2n)}{J(n-1, 2n)}, \quad t(n+1, n) = \frac{J(n+1, 2n+1)}{J(n, 2n+1)}$$

и рекуррентные связи (15), получаем искомые уже нелинейные соотношения (12).

3. Нахождение коэффициентов рекуррентных соотношений

Сначала мы получим коэффициенты рекуррентных соотношений для интересующего нас специального случая (11). Справедлива

ТЕОРЕМА 1'. *Последовательность (6) многочленов Q , определяемых формулами (5), (8)–(10) (при $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$) удовлетворяет следующей системе рекуррентных соотношений*

$$\begin{aligned}
 Q_{(n+1,n,n,n)} &= (z + A_0^1)Q_{(n,n,n,n)} + A_1^1Q_{(n,n,n,n-1)} \\
 &\quad + A_2^1Q_{(n,n,n-1,n-1)} + A_3^1Q_{(n,n-1,n-1,n-1)} \\
 &\quad + A_4^1Q_{(n-1,n-1,n-1,n-1)}, \\
 Q_{(n+1,n+1,n,n)} &= (z + A_0^2)Q_{(n+1,n,n,n)} + A_1^2Q_{(n,n,n,n)} \\
 &\quad + A_2^2Q_{(n,n,n,n-1)} + A_3^2Q_{(n,n,n-1,n-1)} + A_4^2Q_{(n,n-1,n-1,n-1)}, \\
 Q_{(n+1,n+1,n+1,n)} &= (z + A_0^3)Q_{(n+1,n+1,n,n)} + A_1^3Q_{(n+1,n,n,n)} \\
 &\quad + A_2^3Q_{(n,n,n,n)} + A_3^3Q_{(n,n,n,n-1)} + A_4^3Q_{(n,n,n-1,n-1)}, \\
 Q_{(n+1,n+1,n+1,n+1)} &= (z + A_0^4)Q_{(n+1,n+1,n+1,n)} + A_1^4Q_{(n+1,n+1,n,n)} \\
 &\quad + A_2^4Q_{(n+1,n,n,n)} + A_3^4Q_{(n,n,n,n)} + A_4^4Q_{(n,n,n,n-1)}, \quad (16)
 \end{aligned}$$

где для коэффициентов A_j^i справедливо

$$\left\{ \begin{aligned}
 A_0^1 &= -t(n+1, n) - 2n, \\
 A_1^1 &= -2 - 7n, \\
 A_2^1 &= (-7n - 2)t(n, n) - 3n^2 + 2n, \\
 A_3^1 &= -9n^2 - 2n, \\
 A_4^1 &= (-9n^2 - 2n)t(n, n-1) + 3n^2,
 \end{aligned} \right. \quad (17.1)$$

$$\left\{ \begin{aligned}
 A_0^2 &= -5n - 4 + t(n+1, n), \\
 A_1^2 &= t(n+1, n)^2 + (-3n - 4)t(n+1, n) \\
 &\quad - 7n^2 - 3n + 1, \\
 A_2^2 &= (7n^2 + 2n)t(n+1, n) - 24n^3 - 25n^2 - 6n, \\
 A_3^2 &= (-24n^3 - 25n^2 - 6n \\
 &\quad + (7n^2 + 2n)t(n+1, n))t(n, n) \\
 &\quad + (3n^3 - 2n^2)t(n+1, n) - 9n^4 - n^3 + 3n^2, \\
 A_4^2 &= (9n^4 + 2n^3)t(n+1, n) - 27n^5 - 30n^4 - 7n^3,
 \end{aligned} \right. \quad (17.2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0^3 = -t(n+1, n+1) - 2n - 1, \\ A_1^3 = -7n^2 - 9n - 3, \\ A_2^3 = (-7n^2 - 9n - 3)t(n+1, n) - 3n^3 + n^2 + 3n + 1, \\ A_3^3 = -9n^4 - 8n^3 - 2n^2, \\ A_4^3 = (-9n^4 - 8n^3 - 2n^2)t(n, n) + 3n^4 + n^3, \end{array} \right. \quad (17.3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0^4 = t(n+1, n+1) - 5n - 6, \\ A_1^4 = t(n+1, n+1)^2 + (-3n-5)t(n+1, n+1) \\ \quad - 3 - 7n^2 - 10n, \\ A_2^4 = (7n^2 + 9n + 3)t(n+1, n+1) - 24n^3 \\ \quad - 61n^2 - 51n - 14, \\ A_3^4 = ((7n^2e + 9n + 3)t(n+1, n+1) - 24n^3 \\ \quad - 61n^2 - 51n - 14)t(n+1, n) \\ \quad + (3n^3 - n^2 - 3n - 1)t(n+1, n+1) \\ \quad - 9n^4 - 7n^3 + 13n^2 + 15n + 4, \\ A_4^4 = (9n^4 + 8n^3 + 2n^2)t(n+1, n+1) \\ \quad - 27n^5 - 57n^4 - 38n^3 - 8n^2, \end{array} \right. \quad (17.4)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для нахождения коэффициентов A_j^i воспользуемся явным видом многочленов $Q_{[n,m]}(z)$, который получается из формулы Родрига (5) путем последовательного применения формулы Лейбница для дифференцирования произведения функций и бинорма Ньютона:

$$\begin{aligned} Q[n_1, n_2] &= \sum_{\nu=0}^{2(n_1+n_2)} \sum_{k=\max(0, n_1+n_2-\nu)}^{\min(2(n_1+n_2)-\nu, n_1+n_2)} \sum_{j=0}^{\min(n_2, k)} \times \\ &\times \sum_{m=0}^{\min(2(n_1+n_2)-\nu-k, n_1+n_2-k)} (-1)^\nu \binom{n_2}{j} \binom{n_1+n_2-j}{k-j} \times \\ &\times \binom{n_1+n_2-m}{2(n_1+n_2)-\nu-m-k} \binom{n_1+n_2-k}{m} \times \\ &\times (n_1)_{k-j} (n_2)_j (n_1+n_2+1)_m z^\nu. \end{aligned} \quad (17)$$

Отсюда получаем коэффициенты $c_p[n_1, n_2]$ при степенях $z^{2(n_1+n_2)-p}$, $p < n_1 + n_2$, $p < n_2$. При $n_1 = n$, $n_2 = n + k$ имеем

$$c_0[n, n+k] = 1,$$

$$\begin{aligned}
c_1[n, n+k] &= -7n^2 + (-7k-4)n - 2k^2 - 2k, \\
c_2[n, n+k] &= \frac{49}{2}n^4 + (9+49k)n^3 + \frac{1}{2}(-3+77k^2+27k)n^2 \\
&\quad + \left(-3 + \frac{13}{2}k^2 - \frac{3}{2}k + 14k^3\right)n + \frac{1}{2}k(2k^2+4k^3-k-3), \\
c_3[n, n+k] &= -\frac{343}{6}n^6 + \left(-\frac{343}{2}k+35\right)n^5 \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(175k + \frac{11}{3} - 441k^2\right)n^4 \\
&\quad + \left(\frac{11}{3}k + \frac{29}{3} - \frac{931}{6}k^3 + 94k^2\right)n^3 \\
&\quad + \left(-63k^4 + \frac{29}{2}k + \frac{107}{2}k^3 + k^2 - \frac{2}{3}\right)n^2 \\
&\quad + \left(16k^4 - \frac{5}{6}k^3 - \frac{8}{3} + \frac{15}{2}k^2 - \frac{2}{3}k - 14k^5\right)n \\
&\quad - \frac{1}{3}k(k-1)(4k^4 - 2k^3 - k^2 - 5k - 4), \\
c_4[n, n+k] &= \frac{2401}{24}n^8 + \frac{1}{6}(-1421+2401k)n^7 \\
&\quad + \frac{1}{12}(-9947k+2453+8575k^2)n^6 \\
&\quad + \frac{1}{12}(-15393k^2+8918k^3+7359k-1218)n^5 \\
&\quad + \frac{1}{24}(11809k^4-27230k^3-6090k+19387k^2+729)n^4 \\
&\quad + \frac{1}{12}(2548k^5-7421k^4+7122k^3-3296k^2+729k+88)n^3 \\
&\quad + \frac{1}{24}(1400k^6-4980k^5+6121k^4 \\
&\quad \quad - 3798k^3+1229k^2+264k-8)n^2 \\
&\quad + \frac{1}{6}(56k^7-238k^6+363k^5-287k^4 \\
&\quad \quad + 125k^3+29k^2-2k-15)n \\
&\quad + \frac{1}{24}k(k-1)(16k^6-64k^5+84k^4-60k^3+21k^2+35k+30), \\
c_5[n, n+k] &= -\frac{16807}{120}n^{10} + \left(686 - \frac{16807}{24}k\right)n^9
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{4802}{3}k^2 + 3087k - \frac{16681}{12} \right) n^8 \\
& + \frac{1}{12}(-26411k^3 + 75656k^2 - 66724k + 18382)n^7 \\
& + \frac{1}{120}(-241815k^4 + 919240k^3 - 1201715k^2 \\
& \quad + 643370k - 119251)n^6 \\
& + \frac{1}{120}(-154007k^5 + 731640k^4 - 1269805k^3 \\
& \quad + 1004650k^2 - 357753k + 41948)n^5 \\
& + \frac{1}{24}(-13818k^6 + 79072k^5 - 171897k^4 + 180640k^3 \\
& \quad - 94739k^2 + 20974k - 1224)n^4 \\
& + \frac{1}{24}(-4312k^7 + 29000k^6 - 76215k^5 + 100598k^4 \\
& \quad - 70227k^3 + 22988k^2 - 2448k + 228)n^3 \\
& + \frac{1}{24} \left(-896k^8 + 6960k^7 - 21594k^6 + 34594k^5 - 30489k^4 \right. \\
& \quad \left. + 13508k^3 - 2229k^2 + 342k + \frac{48}{5} \right) n^2 \\
& + \frac{1}{120}(-560k^9 + 4960k^8 - 17860k^7 + 33920k^6 - 36503k^5 \\
& \quad + 20870k^4 - 5025k^3 + 1030k^2 + 48k - 288)n \\
& - \frac{1}{60}k(k-1)(k-2)(16k^7 - 112k^6 + 292k^5 - 360k^4 \quad (18) \\
& \quad + 209k^3 + 10k^2 + 57k + 36). \quad (19.1)
\end{aligned}$$

Аналогично для коэффициентов $\tilde{c}_p[n, n+k]$ полиномов $Q[n, n+k]$ из (5) с параметрами $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, $\alpha = -\beta = 1$ имеем

$$\tilde{c}_0[n, n+k] = 1,$$

$$\tilde{c}_1[n, n+k] = -7n^2 + (-6-7k)n - 3k - 2k^2,$$

$$\tilde{c}_2[n, n+k] = \frac{49}{2}n^4 + (49k+23)n^3 + \frac{1}{2}(77k^2+69k-1)n^2$$

$$+ \left(14k^3 + \frac{35}{2}k^2 - \frac{1}{2}k - 5 \right) n + \frac{1}{2}k(-k-5+6k^2+4k^3),$$

$$\tilde{c}_3[n, n+k] = -\frac{343}{6}n^6 + \left(-\frac{343}{2}k - 14 \right) n^5$$

$$\begin{aligned}
& + \left(-\frac{441}{2}k^2 - 35k + \frac{197}{6} \right) n^4 \\
& + \frac{1}{6}(-931k^3 - 192k^2 + 394k + 100)n^3 \\
& + \left(-63k^4 - 13k^3 + \frac{103}{2}k^2 + 25k - \frac{5}{3} \right) n^2 \\
& + \left(-14k^5 - 2k^4 + \frac{56}{3}k^3 + 12k^2 - \frac{5}{3}k - \frac{14}{3} \right) n \\
& - \frac{1}{6}k(k-1)(8k^4 + 8k^3 - 8k^2 - 19k - 14), \\
\tilde{c}_4[n, n+k] &= \frac{2401}{24}n^8 + \frac{1}{6}(2401k - 735)n^7 \\
& + \frac{1}{12}(8575k^2 - 5145k - 445)n^6 \\
& + \frac{1}{12}(8918k^3 - 8043k^2 - 1335k + 586)n^5 \\
& + \frac{1}{24}(11809k^4 - 14490k^3 - 3101k^2 + 2930k + 157)n^4 \\
& + \frac{1}{12}(2548k^5 - 4047k^4 - 876k^3 + 1532k^2 + 157k + 152)n^3 \\
& + \frac{1}{24}(1400k^6 - 2796k^5 - 467k^4 + 1666k^3 + 197k^2 + 456k)n^2 \\
& + \frac{1}{6}(56k^7 - 138k^6 - 9k^5 + 118k^4 + 10k^3 + 55k^2 - 27)n \\
& + \frac{1}{24}k(k-1)(16k^6 - 32k^5 - 28k^4 + 28k^3 + 29k^2 + 63k + 54), \\
\tilde{c}_5[n, n+k] &= -\frac{16807}{120}n^{10} + \frac{1}{24}(-16807k + 11662)n^9 \\
& + \frac{1}{24}(-38416k^2 + 52479k - 12390)n^8 \\
& + \frac{1}{12}(-26411k^3 + 53704k^2 - 24780k + 736)n^7 \\
& + \frac{1}{120}(-241815k^4 + 655130k^3 - 451385k^2 + 25760k + 23389)n^6 \\
& + \frac{1}{120}(-154007k^5 + 524370k^4 - 486855k^3 + 47970k^2 \\
& + 70167k - 16022)n^5 + \frac{1}{24}(-13818k^6 + 57071k^5 \\
& - 67747k^4 + 11105k^3 + 17683k^2 - 8011k + 772)n^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{24}(-4312k^7 + 21104k^6 - 31029k^5 + 7996k^4 + 11977k^3 \\
& - 8432k^2 + 1544k + 532)n^3 \\
& + \frac{1}{120}(-4480k^8 + 25560k^7 - 45550k^6 \\
& + 17325k^5 + 23005k^4 - 23185k^3 + 6395k^2 + 3990k - 272)n^2 \\
& + \frac{1}{120}(-560k^9 + 3680k^8 - 7820k^7 + 4140k^6 + 4757k^5 - 6600k^4 \\
& + 2535k^3 + 1960k^2 - 272k - 528)n \\
& - \frac{1}{120}k(k-1)(k-2)(32k^7 - 144k^6 + 104k^5 + 180k^4 - 82k^3 \\
& + 165k^2 + 259k + 132). \tag{19.2}
\end{aligned}$$

Приравнивая последовательно к нулю коэффициенты при z^{4n} , z^{4n-1} , z^{4n-2} , z^{4n-3} и z^{4n-4} в первом из соотношений (16), получим соответственно

$$\begin{aligned}
c_0[n, n]A_0^1 &= -t(n+1, n)c_0[n, n] - c_1[n, n] + \tilde{c}_1[n, n], \\
\tilde{c}_0[n, n-1]A_1^1 &= -t(n+1, n)c_1[n, n] - c_2[n, n] + \tilde{c}_2[n, n] - A_0^1c_1[n, n], \\
c_0[n, n-1]A_2^1 &= -t(n+1, n)c_2[n, n] - c_3[n, n] + \tilde{c}_3[n, n] - A_0^1c_2[n, n] \\
& + A_1^1t(n, n)c_0[n, n-1] - A_1^1\tilde{c}_1[n, n-1], \\
\tilde{c}_0[n-1, n-1]A_3^1 &= -t(n+1, n)c_3[n, n] - c_4[n, n] \\
& + \tilde{c}_4[n, n] - A_0^1c_3[n, n] + A_1^1t(n, n)c_1[n, n-1] \\
& - A_1^1\tilde{c}_2[n, n-1] - A_2^1c_1[n, n-1], \\
c_0[n, n]A_4^1 &= -t(n+1, n)c_4[n, n] - c_5[n, n] + \tilde{c}_5[n, n] - A_0^1c_4[n, n] \\
& + A_1^1t(n, n)c_2[n, n-1] - A_1^1\tilde{c}_3[n, n-1] - A_2^1c_2[n, n-1] \\
& + A_3^1t(n, n-1)c_0[n-1, n-1] - A_3^1\tilde{c}_1[n-1, n-1].
\end{aligned}$$

Подставляя в полученные выражения явный вид c_p и \tilde{c}_p из (19.1) и (19.2), приходим к формулам (17.1) для коэффициентов первого рекуррентного соотношения из (16). Коэффициенты остальных рекуррентных соотношений системы (16) получаются таким же образом.

Теорема доказана.

Аналогично получаются коэффициенты рекуррентных соотношений и в общем случае (при произвольных значениях параметров $\alpha_1, \alpha_2, \alpha, \beta$).

Справедлива

ТЕОРЕМА 1. Знаменатели аппроксимаций Эрмита–Паде (со старшим коэффициентом 1) для системы функций (2) удовлетворяют системе рекуррентных соотношений (16), где для коэффициентов A_j^i справедливо

$$\beta A_0^1 = -t(n+1, n)\beta + 2n,$$

$$\beta^2 A_1^1 = -n(\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha + 7n),$$

$$\beta^3 A_2^1 = (-7n^2\beta + (-\alpha_1\beta - \alpha_2\beta - 2\alpha\beta)n)t(n, n) + 3n^3 + (4\alpha_1 + \alpha + 3\beta - 3\alpha_2)n^2 + (\alpha_1^2 - \alpha_2\alpha + \alpha_1\beta + \alpha_1\alpha + \alpha_2\beta - \alpha_1\alpha_2)n,$$

$$\beta^4 A_3^1 = 9n^4 + (9\alpha_2 - 6\alpha + 3 - \beta - 15\alpha_1)n^3 + (-7\alpha_1^2 + 6\alpha_2\alpha + 4\alpha_1 - 8\alpha_1\alpha - 3\alpha_2 - 2\alpha_1\beta + \alpha_2\beta + 6\alpha_1\alpha_2 + \alpha - \alpha^2)n^2 + (\alpha_1\alpha + \alpha_1\alpha_2\beta - \alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1^2\alpha - \alpha_1\alpha^2 - \alpha_1^3 + \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_2\alpha^2 - \alpha_1^2\beta + 2\alpha_1\alpha_2\alpha + \alpha_1^2 - \alpha_2\alpha)n,$$

$$\beta^4 A_4^1 = (-9n^4 - (-3 + 15\alpha_1 - 9\alpha_2 + 6\alpha + \beta)n^3 - (-\alpha + \alpha^2 - 4\alpha_1 + 3\alpha_2 - 6\alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\beta + 2\alpha_1\beta + 7\alpha_1^2 - 6\alpha_2\alpha + 8\alpha_1\alpha)n^2 - (\alpha_1\alpha^2 - \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\alpha^2 - \alpha_1\alpha_2\beta - \alpha_1^2 + 2\alpha_1^2\alpha + \alpha_2\alpha + \alpha_1^3 - \alpha_1\alpha - 2\alpha_1\alpha_2\alpha + \alpha_1^2\beta)n)t(n, n-1) + 3n^4 - (-7\alpha_1 - \alpha - \beta + 3\alpha_2)n^3 - (\alpha_2\beta - 5\alpha_1^2 + \alpha_2\alpha - 2\alpha_1\beta + 4\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_1\alpha)n^2 - (-\alpha_1^2\alpha + \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2\alpha + \alpha_1\alpha_2\beta - \alpha_1^3 - \alpha_1^2\beta)n,$$

$$\beta A_0^2 = -\beta + 5n + 2 + \alpha + \alpha_1 + t(n+1, n)\beta,$$

$$\beta^2 A_1^2 = t(n+1, n)^2\beta^2 + (-\beta^2 + 2\beta + 3n\beta + \alpha\beta + \alpha_1\beta)t(n+1, n) - 7n^2 + (-\alpha_1 - \alpha_2 - 2 - 2\alpha - \beta)n - \alpha_1\beta - \beta,$$

$$\beta^3 A_2^2 = (7n^2\beta + (\alpha_1\beta + \alpha_2\beta + 2\alpha\beta)n)t(n+1, n) + 24n^3 + (7\alpha_2 + 7\alpha_1 - 4\beta + 7 + 14\alpha)n^2 + (\alpha_1 + \alpha_2 + 2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha_1^2 + 2\alpha_1\alpha + \alpha_2^2 + 2\alpha_2\alpha - 2\alpha\beta)n,$$

$$\beta^4 A_3^2 = (-3n^3\beta + (-\alpha\beta - 4\alpha_1\beta + 3\alpha_2\beta - 3\beta^2 + 7t(n, n)\beta^2)n^2 + (\alpha_1\alpha_2\beta + t(n, n)\beta^2\alpha_1 + t(n, n)\beta^2\alpha_2 + 2t(n, n)\beta^2\alpha - \alpha_1^2\beta - \beta^2\alpha_2 - \alpha_1\alpha\beta + \alpha_2\alpha\beta - \alpha_1\beta^2)n)t(n+1, n)$$

$$\begin{aligned}
& -9n^4 + (9\alpha_2 - 8\beta - 3 + 24t(n, n)\beta - 15\alpha_1 - 6\alpha)n^3 \\
& + (-4\alpha_1 + 6\alpha_1\alpha_2 + 6\alpha_2\alpha - 4t(n, n)\beta^2 + 7t(n, n)\beta\alpha_1 \\
& + 14t(n, n)\beta\alpha - \alpha^2 + 7t(n, n)\beta\alpha_2 - 7\alpha_1^2 - 2\alpha\beta \\
& - 8\alpha_1\alpha + 7t(n, n)\beta + 3\alpha_2 - 3\beta - 3\alpha_1\beta - 7\alpha_2\beta - \alpha)n^2 \\
& + (-2\alpha_1^2\alpha - \alpha_1^2 + 2t(n, n)e\beta\alpha^2 - 2t(n, n)\beta^2\alpha \\
& + t(n, n)\beta\alpha_1 + t(n, n)\beta\alpha_2 - \alpha_1\alpha + \alpha_2\alpha - \alpha_1\alpha^2 - \alpha_1^2\beta \\
& + 2t(n, n)\beta\alpha_1\alpha + 2t(n, n)\beta\alpha_2\alpha - \alpha_1\beta + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_2\beta \\
& + t(n, n)\beta\alpha_1^2 + t(n, n)\beta\alpha_2^2 + \alpha_2\alpha^2 - \alpha_1^3 + 2t(n, n)\beta\alpha \\
& - \alpha_2^2\beta + 2\alpha_1\alpha_2\alpha + \alpha_1^2\alpha_2 - 2\alpha_2\alpha\beta)n, \\
\beta^5 A_4^2 = & (9n^4\beta + (-9\alpha_2\beta + \beta^2 + 15\alpha_1\beta - 3\beta + 6\alpha\beta)n^3 \\
& + (7\alpha_1^2\beta - 6\alpha_1\alpha_2\beta + 8\alpha_1\alpha\beta + \alpha^2\beta \\
& - 6\alpha_2\alpha\beta - \alpha\beta + 3\alpha_2\beta - 4\alpha_1\beta + 2\alpha_1\beta^2 - \beta^2\alpha_2)n^2 \\
& + (\alpha_2\alpha\beta - \alpha_1^2\alpha_2\beta + \alpha_1\alpha_2\beta + \alpha_1^3\beta - \alpha_1\beta^2\alpha_2 \\
& - \alpha_1\alpha\beta + \beta^2\alpha_1^2 - \alpha_1^2\beta - \alpha_2\alpha^2\beta + 2\alpha_1^2\alpha\beta \\
& + \alpha_1\alpha^2\beta - 2\alpha_1\alpha_2\alpha\beta)n)t(n+1, n) + 27n^5 \\
& + (54\alpha_1 - 27\alpha_2 + 27\alpha - 3\beta)n^4 + (3\beta - 27\alpha_2\alpha - 27\alpha_1\alpha_2 \\
& + 36\alpha_1^2 + 3\alpha_2\beta - \alpha_1\beta + 9\alpha^2 - 3 + 45\alpha_1\alpha - 4\alpha\beta)n^3 \\
& + (-4\alpha_1 + 3\alpha_2 - \alpha - \alpha^2\beta + 21\alpha_1^2\alpha + \alpha^3 + \alpha\beta - 18\alpha_1\alpha_2\alpha \\
& + 12\alpha_1\alpha^2 + 3\alpha_1^2\beta - 9\alpha_1^2\alpha_2 + 4\alpha_1\beta \\
& - 2\alpha_1\alpha_2\beta + 10\alpha_1^3 + 4\alpha_2\alpha\beta - 4\alpha_1\alpha\beta - 3\alpha_2\beta - 9\alpha_2\alpha^2)n^2 \\
& + (-\alpha_1^2 - 3\alpha_1\alpha_2\alpha^2 - \alpha_2\alpha\beta + \alpha_1\alpha\beta + \alpha_1^4 - \alpha_1\alpha_2\beta \\
& + \alpha_1^2\beta - 3\alpha_1^2\alpha_2\alpha + \alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_1^3\alpha - \alpha_1^3\alpha_2 - \alpha_1\alpha + \alpha_2\alpha \\
& + \alpha_1^3\beta - \alpha_2\alpha^3 + 3\alpha_1^2\alpha^2 - \alpha_1\alpha^2\beta + \alpha_2\alpha^2\beta - \alpha_1^2\alpha_2\beta + \alpha_1\alpha^3)n, \\
\beta A_0^3 = & -t(n+1, n+1)\beta + 2n + 1, \\
\beta^2 A_1^3 = & -(2 + \alpha_1 + \alpha + 7n + 2n\alpha + n\alpha_1 + n\alpha_2 + 7n^2), \\
\beta^3 A_2^3 = & (-7n^2\beta + (-7\beta - \alpha_2\beta - \alpha_1\beta - 2\alpha\beta)n \\
& - \alpha_1\beta - \alpha\beta - 2\beta)t(n+1, n) + 3n^3 \\
& + (3\beta + 4\alpha_2 + 1 + \alpha - 3\alpha_1)n^2 + (\alpha_2\beta - \alpha_1 + \alpha_1\beta + 3\beta + \alpha_2^2 \\
& + \alpha_2 + \alpha_2\alpha - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha)n + \beta + \alpha_1\beta,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta^4 A_3^3 &= -9n^4 + (-3 - 15\alpha_2 - 6\alpha - \beta + 9\alpha_1)n^3 \\
&\quad + (-\alpha + 6\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_1 - 2\alpha_2\beta - 4\alpha_2 - \alpha^2 - 7\alpha_2^2 - 8\alpha_2\alpha \\
&\quad + \alpha_1\beta + 6\alpha_1\alpha)n^2 + (-2\alpha_2^2\alpha - \alpha_2^2\beta + 2\alpha_1\alpha_2\alpha + \alpha_1\alpha_2\beta \\
&\quad - \alpha_2^2 - \alpha_2\alpha + \alpha_1\alpha^2 + \alpha_1\alpha + \alpha_2^2\alpha_1 - \alpha_2\alpha^2 - \alpha_2^3 + \alpha_1\alpha_2)n, \\
\beta^4 A_4^3 &= (-9n^4 + (-3 - 15\alpha_2 - 6\alpha - \beta + 9\alpha_1)n^3 \\
&\quad + (-\alpha + 6\alpha_1\alpha_2 + 3\alpha_1 - 2\alpha_2\beta - 4\alpha_2 - \alpha^2 - 7\alpha_2^2 \\
&\quad - 8\alpha_2\alpha + \alpha_1\beta + 6\alpha_1\alpha)n^2 + (-2\alpha_2^2\alpha - \alpha_2^2\beta + 2\alpha_1\alpha_2\alpha + \alpha_1\alpha_2\beta \\
&\quad - \alpha_2^2 - \alpha_2\alpha + \alpha_1\alpha^2 + \alpha_1\alpha + \alpha_2^2\alpha_1 - \alpha_2\alpha^2 - \alpha_2^3 + \alpha_1\alpha_2)n)t(n, n) \\
&\quad + 3n^4 + (1 + \beta + 7\alpha_2 + \alpha - 3\alpha_1)n^3 \\
&\quad + (2\alpha_2 - \alpha_1\beta + 2\alpha_2\alpha + 2\alpha_2\beta - 4\alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha - \alpha_1 + 5\alpha_2^2)n^2 \\
&\quad + (\alpha_2^2\alpha + \alpha_2^2 + \alpha_2^3 + \alpha_2^2\beta - \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1\alpha_2\beta - \alpha_1\alpha_2\alpha - \alpha_2^2\alpha_1)n, \\
\beta A_0^4 &= -\beta + 5n + 4 + \alpha + \alpha_2 + t(n+1, n+1)\beta, \\
\beta^2 A_1^4 &= t(n+1, n+1)^2\beta^2 \\
&\quad + (3n\beta + \alpha\beta - \beta^2 + 3\beta + \alpha_2\beta)t(n+1, n+1) - 7n^2 \\
&\quad + (-\beta - \alpha_1 - 9 - 2\alpha - \alpha_2)n - \beta - 3 - \alpha_1 - \alpha - \alpha_2\beta, \\
\beta^3 A_2^4 &= (2\beta + (7\beta + \alpha_1\beta + \alpha_2\beta + 2\alpha\beta)n \\
&\quad + \alpha\beta + \alpha_1\beta + 7n^2\beta)t(n+1, n+1) + 2n^3 \\
&\quad + (43 + 7\alpha_2 + 14\alpha + 7\alpha_1 - 4\beta)n^2 - \alpha\beta + (27 + \alpha_2^2 + 4\alpha_2 + 12\alpha_1 \\
&\quad + 16\alpha + 2\alpha_1\alpha + 2\alpha_2\alpha + 2\alpha^2 + \alpha_1^2 - 2\alpha\beta - 4\beta)n - \beta + 6 + 5\alpha_1 \\
&\quad + 5\alpha + 2\alpha_1\alpha + \alpha^2 + \alpha_1^2, \\
\beta^4 A_3^4 &= ((7t(n+1, n)\beta^2 + 3\alpha_1\beta - 3\beta^2 - \alpha\beta - 4\alpha_2\beta - \beta)n^2 \\
&\quad + t(n+1, n)\beta^2\alpha_1 - 3n^3\beta - \beta^2 + t(n+1, n)\beta^2\alpha \\
&\quad + 2t(n+1, n)\beta^2 + (\alpha_1\beta - \alpha_2^2\beta - 3\beta^2 - \alpha_2\alpha\beta - \beta^2\alpha_2 \\
&\quad + \alpha_1\alpha\beta + \alpha_1\alpha_2\beta + 7t(n+1, n)\beta^2 - \alpha_2\beta + 2t(n+1, n)\beta^2\alpha \\
&\quad + t(n+1, n)\beta^2\alpha_1 + t(n+1, n)\beta^2\alpha_2 - \alpha_1\beta^2)n \\
&\quad - \alpha_1\beta^2)t(n+1, n+1) - 9n^4 \\
&\quad + (-9 - 6\alpha - 15\alpha_2 - 8\beta + 9\alpha_1 + 24t(n+1, n)\beta)n^3 \\
&\quad + t(n+1, n)\beta\alpha_1^2 + (-2\alpha\beta - 7\alpha_2^2 - 12\alpha_2 - 8\alpha_2\alpha - 3\alpha \\
&\quad - 4t(n+1, n)\beta^2 + 14t(n+1, n)\beta\alpha - 7\alpha_1\beta + 6\alpha_1\alpha
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 7t(n+1, n)\beta\alpha_2 - 17\beta + 7t(n+1, n)\beta\alpha_1 + 43t(n+1, n)\beta \\
& - \alpha^2 - 2 + 6\alpha_1\alpha_2 + 9\alpha_1 - 3\alpha_2\beta)n^2 - t(n+1, n)\beta^2\alpha \\
& + (2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 12\beta - 2\alpha_2^2\alpha - 3\alpha_2^2 + 2t(n+1, n)\beta\alpha_2\alpha \\
& + 3\alpha_1\alpha - 3\alpha_2\alpha + \alpha_1\alpha^2 + 12t(n+1, n)\beta\alpha_1 + 16t(n+1, n)\beta\alpha \\
& - 3\alpha\beta + 2\alpha_1\alpha_2\alpha - \alpha_1^2\beta + 4t(n+1, n)\beta\alpha_2 + t(n+1, n)\beta\alpha_2^2 \\
& - \alpha_2^2\beta + 27t(n+1, n)\beta - 10\alpha_1\beta + 3\alpha_1\alpha_2 - 2\alpha_2\beta \\
& - \alpha_2\alpha^2 - \alpha_2^3 + \alpha_2^2\alpha_1 + 2t(n+1, n)\beta\alpha_1\alpha - 2\alpha_1\alpha\beta \\
& + t(n+1, n)\beta\alpha_1^2 + 2t(n+1, n)\beta\alpha^2 - 2t(n+1, n)\beta^2\alpha \\
& - 4t(n+1, n)\beta^2)n - \alpha_1\alpha\beta - 3\beta + 5t(n+1, n)\beta\alpha_1 \\
& - 4\alpha_1\beta - \alpha\beta + 6t(n+1, n)\beta + t(n+1, n)\beta\alpha^2 \\
& + 5t(n+1, n)\beta\alpha - \alpha_1^2\beta - t(n+1, n)\beta^2 + 2t(n+1, n)\beta\alpha_1\alpha, \\
\beta^5 A_4^4 = & (9n^4\beta + (\beta^2 + 6\alpha\beta + 15\alpha_2\beta + 3\beta - 9\alpha_1\beta)n^3 \\
& + (2\beta^2\alpha_2 - 3\alpha_1\beta + \alpha\beta - 6\alpha_1\alpha_2\beta + 4\alpha_2\beta - 6\alpha_1\alpha\beta + \alpha^2\beta \\
& + 8\alpha_2\alpha\beta - \alpha_1\beta^2 + 7\alpha_2^2\beta)n^2 + (-\alpha_2^2\alpha_1\beta - \alpha_1\alpha_2\beta - \alpha_1\beta^2\alpha_2 \\
& + \alpha_2^3\beta - \alpha_1\alpha^2\beta - \alpha_1\alpha\beta + 2\alpha_2^2\alpha\beta + \alpha_2\alpha\beta - 2\alpha_1\alpha_2\alpha\beta \\
& + \alpha_2\alpha^2\beta + \alpha_2^2\beta + \beta^2\alpha_2^2)n)t(n+1, n+1) + 27n^5 \\
& + (54\alpha_2 + 27\alpha - 3\beta - 27\alpha_1 + 27)n^4 \\
& + (3\alpha_1\beta - 27\alpha_1\alpha + 45\alpha_2\alpha - 27\alpha_1\alpha_2 - \beta + 45\alpha_2 - 4\alpha\beta \\
& + 6 + 36\alpha_2^2 - 27\alpha_1 + 18\alpha + 9\alpha^2 - \alpha_2\beta)n^3 \\
& + (-6\alpha_1 + 8\alpha_2 + 2\alpha - \alpha^2\beta - 18\alpha_1\alpha_2\alpha + 21\alpha_2^2\alpha + 21\alpha_2^2 \\
& + 3\alpha_2^2\beta - 18\alpha_1\alpha + \alpha_1\beta - 9\alpha_1\alpha^2 + 3\alpha^2 - \alpha\beta + 24\alpha_2\alpha \\
& - 2\alpha_1\alpha_2\beta - 9\alpha_2^2\alpha_1 + \alpha^3 - 4\alpha_2\alpha\beta + 10\alpha_2^3 - 18\alpha_1\alpha_2 \\
& + 12\alpha_2\alpha^2 + 4\alpha_1\alpha\beta)n^2 + (-3\alpha_1\alpha_2\alpha^2 + \alpha_2^4 + 6\alpha_2^2\alpha + 2\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha \\
& + 2\alpha_2\alpha - 3\alpha_1\alpha^2 + \alpha_2^3\beta - \alpha_2^3\alpha_1 + 3\alpha_2^3\alpha - 6\alpha_1\alpha_2\alpha - \alpha_1\alpha_2\beta \\
& + \alpha_2^2\beta - 2\alpha_1\alpha_2 - 3\alpha_2^2\alpha_1\alpha + 3\alpha_2^2\alpha^2 + 3\alpha_2\alpha^2 + 3\alpha_2^3 - 3\alpha_2^2\alpha_1 \\
& - \alpha_1\alpha^3 - \alpha_2^2\alpha_1\beta + \alpha_2\alpha^3 - \alpha_2\alpha\beta + \alpha_1\alpha\beta + \alpha_1\alpha^2\beta - \alpha_2\alpha^2\beta)n.
\end{aligned}$$

Список литературы

- [1] Е. М. Никишин, В. Н. Сорокин, *Рациональные аппроксимации и ортогональность*, Наука, М., 1988 [MR 0953788](#), [Zbl 0718.41002](#).
- [2] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials for classical weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:10 (2003), 3887–3914 [doi 10.1090/S0002-9947-03-03330-0](#), [MR 1990569](#), [Zbl 1033.33002](#).
- [3] В. А. Калягин, “Аппроксимаций Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных операторов”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100 [Mi sm903](#), [MR 1280397](#), [Zbl 0840.47026](#).
- [4] A. Aptekarev, V. Kaliaguine, “Complex rational approximation and difference operators”, *Proceedings of the Third International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory*, vol. I (Acquafredda di Maratea, 1996), *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, **52**, 1998, 3–21 [MR 1644539](#), [Zbl 0917.47028](#).
- [5] V. Kaliaguine, A. Ronveaux, “On a system of “classical” polynomials of simultaneous orthogonality”, *J. Comput. Appl. Math.*, **67**:2 (1996), 207–217 [MR 1390180](#), [Zbl 0857.42012](#).
- [6] Дж. Бейкер (мл.), П. Грейвс-Моррис, *Аппроксимации Паде*, Ч. 1: Основы теории. Ч. 2: Обобщения и приложения, Мир, М., 1986 [MR 0868466](#), [Zbl 0669.30023](#).

Рекуррентные соотношения с рациональными коэффициентами для некоторых совместно ортогональных полиномов, задаваемых формулой Родрига¹

А. И. Боголюбский

1. Введение

В работе [1] рассмотрен пример системы совместно ортогональных полиномов $Q_{\vec{n}}(x)$ (где $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3, n_4) \in \mathbb{N}^4$; $\deg Q_{\vec{n}} = n_1 + n_2 + n_3 + n_4$), определяемых соотношениями ортогональности

$$\begin{aligned} \int_0^1 Q_{\vec{n}}(x) x^\nu w_1(x) dx &= 0, & \nu &= 0, \dots, n_1 - 1, \\ \int_0^1 Q_{\vec{n}}(x) x^\nu w_2(x) dx &= 0, & \nu &= 0, \dots, n_2 - 1, \\ \int_1^\infty Q_{\vec{n}}(x) x^\nu w_1(x) dx &= 0, & \nu &= 0, \dots, n_3 - 1, \\ \int_1^\infty Q_{\vec{n}}(x) x^\nu w_2(x) dx &= 0, & \nu &= 0, \dots, n_4 - 1. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь весовые функции w_k относятся к типу Якоби–Лагерра:

$$w_k(x) = x^{\alpha_k} (1-x)^\alpha e^{\beta x}, \quad k = 1, 2. \tag{2}$$

При $\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \beta \in \mathbb{R}$, $\beta < 0$, $\alpha_1 - \alpha_2 \notin \mathbb{N}$ система (1) определяет полиномы $Q_{\vec{n}}(x)$ с точностью до мультипликативной константы. Также в [1] для этих полиномов при $\vec{n} = [n, m] := (n, n, m, m)$ предъявлена формула Родрига

$$Q_{[n,m]}(x) = w_2^{-1} \frac{d^m}{dx^m} \left[w_2 x^m w_1^{-1} \frac{d^n}{dx^n} \left[w_1 x^n (1-x)^{(n+m)} \right] \right]. \tag{3}$$

¹Работа частично поддержана грантом научных школ НШ-1551.2003.1.

В работе [2] для полиномов $Q_{\vec{n}}$ с диагональными и наддиагональными индексами в четырехмерной таблице \vec{n} (принадлежащих т.н. “step-line”):

$$\begin{aligned} \dots, Q_{(n-1, n-1, n-1, n-1)}, Q_{(n, n-1, n-1, n-1)}, \\ Q_{(n, n, n-1, n-1)}, Q_{(n, n, n, n-1)}, \\ Q_{(n, n, n, n)}, Q_{(n+1, n, n, n)}, \dots, \end{aligned} \quad (4)$$

был получен (в соответствие с общей теорией аппроксимаций Эрмита–Паде, см. [3], [4]) комплект из четырех 6-членных рекуррентных соотношений, позволяющий вычислять последовательно все полиномы из (4) в явном виде.

Отметим, что при формальной подстановке $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ система полиномов $Q_{\vec{n}}$ не может определяться соотношениями ортогональности (1), которые, очевидно, в этом случае не являются независимыми. Тем не менее для определения $Q_{[n, m]}$ всегда может служить остающаяся формально справедливой и при $\alpha_1 - \alpha_2 \in \mathbb{N}$ формула Родрига (3). На ее основе с помощью метода, изложенного в [2], можно определить и остальные полиномы из “step-line” (4). Кроме того, как следует из приведенных в этой работе рассуждений, предъявленные там 6-членные рекуррентные соотношения корректны и при таком определении $Q_{\vec{n}}$.

Далее под $Q_{\vec{n}}(x)$ мы будем понимать определенную только что описанным образом (т.е. при помощи (3)) систему полиномов с параметрами

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha = 1, \quad \beta = -1. \quad (5)$$

Отметим, что в этом случае полиномы $Q_{[n, m]}(x)$ благодаря (3) имеют рациональные коэффициенты, чего нельзя сказать об остальных полиномах из (4). Как следствие, коэффициенты рекуррентных соотношений из [2] также содержат иррациональности, которые имеют вид

$$t(n_1, n_2) = \frac{\int_0^1 z^{n_1} (1-z)^{(n_1+n_2)} e^{-z} dz}{\int_0^1 z^{n_1-1} (1-z)^{(n_1+n_2)} e^{-z} dz}. \quad (6)$$

При этом, хотя $t(n_1, n_2)$ также могут быть в нужном нам случае $n_1 - n_2 \leq 1$ определены рекуррентным образом, наличие иррациональностей осложняет вычисление полиномов $Q_{\vec{n}}(x)$ по 6-членным соотношениям и делает его малоэффективным.

Целью настоящей работы является вывод рекуррентных соотношений с рациональными коэффициентами (по n и x) для полиномов $Q_{\bar{n}}(x)$, определяемых (3), (2) и (5). Далее будут представлены два 7-членных рекуррентных соотношения, связывающих последовательные полиномы из ряда

$$\dots, Q_{[n-1, n-1]}, Q_{[n, n-1]}, Q_{[n, n]}, \dots, \quad (7)$$

а также одно 8-членное, связывающее последовательные полиномы $Q_{(n, n, n, n)}(x)$ с диагональными индексами. При этом практический вывод этих соотношений производится при помощи аналитико-численной техники, основанной на рациональной интерполяции, а обоснование – с использованием компьютерно-алгебраических вычислений.

Сформулируем основные результаты.

ТЕОРЕМА 1. *Для полиномов $Q_{\bar{n}}(x)$ из (7) справедливы соотношения:*

$$\begin{aligned} 1) \quad & Q_{[n, n]} = S_1^1(z, n)Q_{[n, n-1]} + S_2^1(z, n)Q_{[n-1, n-1]} \\ & + S_3^1(z, n)Q_{[n-1, n-2]} + S_4^1(z, n)Q_{[n-2, n-2]} \\ & + S_5^1(z, n)Q_{[n-2, n-3]} + S_6^1(z, n)Q_{[n-3, n-3]}, \\ 2) \quad & Q_{[n+1, n]} = S_1^2(z, n)Q_{[n, n]} + S_2^2(z, n)Q_{[n, n-1]} \\ & + S_3^2(z, n)Q_{[n-1, n-1]} + S_4^2(z, n)Q_{[n-1, n-2]} \\ & + S_5^2(z, n)Q_{[n-2, n-2]} + S_6^2(z, n)Q_{[n-2, n-3]}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$S_j^k(z, n) = \sum_{m=0}^{\lambda_j} d_{j,m}^k(n)z^m,$$

$\lambda_j \leq 2j$, а $d_{j,m}^k(n)$ зависит от n рационально (точный вид см. в приложении).

ТЕОРЕМА 2. *Для полиномов $Q_{\bar{n}}(x)$ с диагональными индексами справедливо соотношение:*

$$Q_{[n, n]} = \sum_{k=1}^7 T_k(z, n)Q_{[n-k, n-k]}. \quad (9)$$

где $T_k(z, n)$ полиномиально зависит от z и рационально от n (о точном виде см. п. 5).

Поскольку логика как эмпирического вывода, так и строгого обоснования справедливости всех соотношений (8), (9) практически одинакова, далее все рассуждения мы будем проводить на примере первого из соотношений (8).

2. Вывод рекуррентных соотношений

Обсудим вначале практический способ получения $d_{j,m}^1(n)$. Одним из возможных подходов является формальное исключение “неродриговых” (т.е. из (4), но не из (7)) полиномов из системы линейных уравнений с неизвестными $Q_{\bar{n}}(x)$ из (7), построенной с использованием 6-членных соотношений. Однако осуществление процесса такой элиминации представляет собой далеко не простую задачу, поскольку оно сопряжено с проведением массивных формальных выкладок. В ходе исключения неизвестных используемые промежуточные символьные значения оказываются настолько громоздкими, что проведение выкладок за разумное время представляет собой непосильную задачу для современных распространенных систем компьютерной алгебры.

Поэтому был предложен и использован достаточно простой, но эффективный подход, позволяющий преодолеть описанную сложность за счет полного отказа от манипуляций с символьными выражениями. По всей видимости, этот подход обладает достаточно большой общностью и может быть эффективно использован в широком классе аналогичных задач. В его основе лежит численный анализ линейно-полиномиальной связи последовательных $Q_{\bar{n}}(x)$ из (7) с конкретными индексами.

Итак, предположим, что соотношение вида (8)-1 существует, а коэффициенты $d_{j,m}^1(n)$ представляются в виде отношения двух полиномов от n (у нас, однако, нет никакой информации, позволяющей нам судить о степенях этих полиномов).

Пусть при фиксированном $n = N$ коэффициент $d_{j,m}^1$ принимает определенное рациональное значение

$$c_{j,m} = d_{j,m}^1(N).$$

Тогда (если $4N > \sum_{j=1}^6 (2j+1) - 1 = 47$) система линейных уравнений

$$\text{coeff}(D(z), z, 4N - p) = 0, \quad p = 0, \dots, 47, \quad (10)$$

где

$$D(z) := Q_{[N,N]} - (S_1^1(z, N)Q_{[N,N-1]} + S_2^1(z, N)Q_{[N-1,N-1]} + S_3^1(z, N)Q_{[N-1,N-2]} + S_4^1(z, N)Q_{[N-2,N-2]} + S_5^1(z, N)Q_{[N-2,N-3]} + S_6^1(z, N)Q_{[N-3,N-3]})$$

и использовано обозначение

$$\text{coeff}(P(z), z, \nu) - \text{коэффициент при } z^\nu \text{ в полиноме } P(z),$$

разрешима относительно набора неизвестных $\{c_{j,m}\}$. При этом, поскольку максимальное значение $\lambda_j = 2j$, обеспечивающее формальную корректность (8)-1, может и не достигаться, свободными неизвестными являются лишь

$$\Lambda = \sum_{j=1}^6 (\lambda_j + 1) \tag{11}$$

из этого набора, а остальные выражаются через них. Число Λ выясняется экспериментально и в силу сделанных предположений не зависит от N . В качестве свободных неизвестных можно выбрать набор из совокупностей $(\lambda_j + 1)$ коэффициентов при последовательных младших степенях полинома $S_j^1(z)$; числа λ_j фиксируются (для всех N) произвольным образом, но так, чтобы удовлетворять (11). Свобода выбора здесь является следствием отсутствия единственности соотношений вида (8). Для приводимого в Приложении А явного вида соотношений выбраны значения

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 4, \quad \lambda_3 = 3, \quad \lambda_4 = 3, \quad \lambda_5 = 2, \quad \lambda_6 = 2.$$

При этом для определения нужных неизвестных, очевидно, достаточно решить систему

$$\text{coeff}(D(z), z, 4N - p) = 0, \quad p = 0, \dots, \Lambda - 1 = 20. \tag{12}$$

Итак, мы предьявили способ нахождения значений $d_{j,m}^1(n)$ при фиксированных n . Теперь для определения явной аналитической структуры $d_{j,m}^1(n)$ можно использовать (для каждого коэффициента) следующую процедуру:

I. С использованием 6-членных соотношений рассчитаем большое, достаточное для проведения последующих шагов, количество полиномов $Q_{\bar{n}}(x)$ из (7), входящих в соотношения (8).

II. Зафиксируем $M \in \mathbb{N}$ и некоторое достаточно большое K (к примеру, $M = 1$, $K = 50$).

III. Вычислим рациональные значения $d_{j,m}^k(n)$ при $n = M, \dots, M + K - 1$, решая системы вида (12).

IV. Вспомним о нашем предположении о рациональности зависимости $d_{j,m}^k(n)$ и попытаемся восстановить точный вид этой функции по значениям в некоторых целых точках, найденных в III пункте. Для этого используем процедуру рациональной интерполяции, являющейся частным случаем процедуры построения многоточечной аппроксимации Паде. Одним из наиболее очевидных способов ее реализации является построение обычных аппроксимаций Паде для построенного по полученным данным интерполяционного многочлена Лагранжа. При этом отметим, что сочетание степеней числителя и знаменателя, используемое для интерполяции, должно находиться либо из сторонних эмпирических соображений, либо перебором. Использование некоторых алгоритмов рациональной интерполяции, однако, частично решает данную проблему. В частности, такой алгоритм заложен в процедуру RationalInterpolation системы Maple (из пакета CurveFitting), которая по K данным рациональным значениям в рациональных точках строит нужную интерполирующую функцию. При этом, если степени как числителя, так и знаменателя исходной функции меньше $K/2$, она восстанавливается точно. В противном же случае для определения степеней все равно необходимо привлекать дополнительные соображения.

V. Для проверки точности полученной методом рациональной интерполяции в пункте IV функции необходимо увеличить K (к примеру, на 1), повторить всю последовательность действий, начиная с пункта III (в его рамках посчитав значения в недостающем количестве точек). Критерием окончания алгоритма является совпадение функций, полученных при разных K , либо очевидная малость суммы степеней числителя и знаменателя по сравнению с K . Если критерий не выполнен, необходимо значительно увеличить K (к примеру, удвоить) и вернуться к пункту III.

Чтобы проиллюстрировать реальную сложность решаемой алгоритмом проблемы, отметим, что степени по n числителей и знаменателей некоторых коэффициентов 8-членного соотношения (9) превышают 90. Естественно, оперирование с рациональ-

ными функциями такого порядка требует нетривиальной организации вычислительного процесса и серьезных затрат машинного времени.

3. Доказательство теорем 1 и 2

Теперь перейдем к обоснованию справедливости полученных с использованием этого алгоритма соотношений (опять же на примере (8)-1). На идейном уровне оно достаточно просто, однако в силу сложности выкладок требует привлечения символьных вычислений в системе компьютерной алгебры. Полный листинг соответствующей программы на Maple см. в приложении А, здесь же изложим лишь суть метода доказательства. Задавшись произвольным $n \geq 0$, возьмем совокупность 5 последовательных полиномов $Q_{\bar{n}}(x)$ из (7) в качестве формального “базиса”:

$$\begin{aligned} B_0 &:= Q_{(n,n,n,n)}, \\ B_1 &:= Q_{(n+1,n,n,n)}, \\ B_2 &:= Q_{(n+1,n+1,n,n)}, \\ B_3 &:= Q_{(n+1,n+1,n+1,n)}, \\ B_4 &:= Q_{(n+1,n+1,n+1,n+1)}. \end{aligned} \tag{13}$$

Также введем формальный параметр

$$\tau := t(n+1, n), \tag{14}$$

через который выражаются все последующие выражения вида (6):

$$t(n+1, n+1), t(n+2, n+1), t(n+2, n+2), \dots$$

Ясно, что по рекуррентным формулам из [2] через τ, B_0, \dots, B_4 могут быть выражены все последующие $Q_{\bar{n}}(x)$ из (7), в частности,

$$\begin{aligned} C_0 &:= Q_{[n+2,n+1]}, \\ C_1 &:= Q_{[n+2,n+2]}, \\ C_2 &:= Q_{[n+3,n+2]}, \\ R &:= Q_{[n+3,n+3]}. \end{aligned}$$

С другой стороны, R можно выразить и при помощи первого из соотношений (8) через $B_0, B_1, B_2, C_0, C_1, C_2$. При этом процедура такого выражения корректна при любом n , поскольку знаменатели коэффициентов $d_{j,m}^1(n)$ не имеют целых положительных

нулей. Подставив вместо последних трех полиномов их выражения через τ , B_0, \dots, B_4 и убедившись в формальном совпадении двух результатов, тем самым мы докажем соотношение (8)-1.

4. Одно следствие

Отметим непосредственное следствие теоремы 2, представляющее интерес с точки зрения исследования числовой природы постоянной Эйлера γ . Оно касается рекуррентной связи нормированных значений

$$\eta_n := \frac{Q_{(n,n,n,n)}(1)}{(n!)^2}. \quad (15)$$

СЛЕДСТВИЕ 1. Для чисел η_n справедливо 8-членное рекуррентное соотношение

$$\eta_n = \sum_{k=1}^7 \frac{a_k(n)}{b(n)} \eta_{n-k} \quad (16)$$

(о точном виде многочленов $a_j(n)$ и $b(n)$ см. следующий пункт).

5. О структуре приложений

В Приложении А (см. стр. 63) приведен код программы на Maple, реализующей логику доказательства формулы (8)-1, описанную в пункте 3. Комментарии к программе приведены на английском языке. Элементы определенного в ней массива $c[j, m]$ представляют собой функции $d_{j,m}^1(n)$, определяющие коэффициенты S_j^1 из (8).

В Приложении В (см. стр. 68) на языке Maple определен массив $d[j, m]$, элементы которого суть функции $d_{j,m}^2(n)$, определяющие коэффициенты S_j^2 из (8).

Коэффициенты 8-членного соотношения (9) имеют слишком громоздкую форму, не позволяющую привести их в печатном виде. Однако, по ссылке <http://www.box.net/public/uu9ddnq7ma> можно найти файл `c8_poly.m`, представляющий собой файл данных Maple. Он содержит массив $c[k, m]$, в котором хранятся коэффициенты полиномов $T_k(z)$ как функции от n :

$$T_k(z, n) = \sum_{m=0}^{\lambda_k} c[k, m](n) z^m.$$

При этом степени полиномов $T_k(z)$ при $k = 1, \dots, 7$ таковы:

$$\lambda_k = 4; 4; 8; 7; 6; 5; 4.$$

В Приложении С (см. стр. 71) приведены явные выражения для коэффициентов $a_1(n)$ и $b(n)$ рекуррентного соотношения (16). Все коэффициенты этого соотношения содержатся в файле `s8_wof.m`, размещенном по адресу <http://www.box.net/public/uu9ddnq7ma>.

Список литературы

- [1] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials for classical weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:10 (2003), 3887–3914 [doi 10.1090/S0002-9947-03-03330-0](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-03-03330-0), [MR 1990569](#), [Zbl 1033.33002](#).
- [2] Д. В. Христофоров, “Рекуррентные соотношения для аппроксимаций Эрмита–Паде одной системы из четырех функций марковско-го и стилтьесовского типа”, *Современные проблемы математики*, вып. 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2006, 11–26.
- [3] В. А. Калягин, “Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных операторов”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100 [Mi sm903](#), [MR 1280397](#), [Zbl 0840.47026](#).
- [4] A. Aptekarev, V. Kaliaguine, “Complex rational approximation and difference operators”, *Proceedings of the Third International Conference on Functional Analysis and Approximation Theory*, vol. I (Acquafredda di Maratea, 1996), *Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl.*, **52**, 1998, 3–21 [MR 1644539](#), [Zbl 0917.47028](#).

Четырёхчленные рекуррентные соотношения для γ -форм¹

А. И. Аптекарев, Д. Н. Туляков

1. Введение

Пусть $Q_n(x)$ – многочлен, задаваемый обобщенной формулой Родрига

$$Q_n(x) = \frac{(1-x)^{-1}e^x}{(n!)^2} \frac{d^n}{dx^n} x^n \frac{d^n}{dx^n} (1-x)^{2n+1} x^n e^{-x}. \quad (1)$$

Рассмотрим две математические константы – постоянную Эйлера γ

$$\gamma := - \int_0^{\infty} \ln x e^{-x} dx,$$

и значение интегральной экспоненты $e \operatorname{Ei}(1, 1)$, где

$$\operatorname{Ei}(n, x) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-xt}}{t^n} dt.$$

Пусть f_n и g_n – последовательности \mathbb{Z} -форм относительно констант γ и $e \operatorname{Ei}(1, 1)$, генерируемые полиномами Q_n по формулам

$$f_n := p_n - \gamma q_n := \int_0^{\infty} Q_n(x) \ln x e^{-x} dx, \quad (2)$$

и

$$g_n := e \operatorname{Ei}(1, 1) q_n - r_n := e \int_1^{\infty} Q_n(x) \ln x e^{-x} dx. \quad (3)$$

Настоящая работа посвящена получению и доказательству следующего результата.

¹Работа частично поддержана грантом научных школ НШ-1551.2003.1, программой № 1 ОМН РАН и грантом ИНТАС 03-51-6637. Работа первого автора частично поддержана исследовательским грантом РФФИ-05-01-00522, работа второго автора частично поддержана исследовательским грантом РФФИ-05-01-00697.

ТЕОРЕМА 1. Целочисленные коэффициенты p_n , q_n , r_n форм (2) и (3) удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$(16n - 15)q_{n+1} = (128n^3 + 40n^2 - 82n - 45)q_n - n^2(256n^3 - 240n^2 + 64n - 7)q_{n-1} + n^2(n-1)^2(16n+1)q_{n-2} \quad (4)$$

с начальными условиями

$$\begin{aligned} p_0 &= 0, & p_1 &= 2, & p_2 &= 31, \\ q_0 &= 1, & q_1 &= 3, & q_2 &= 50, \\ r_0 &= 0, & r_1 &= 1, & r_2 &= 24. \end{aligned}$$

2. Связь γ -форм с рекуррентными соотношениями для $Q_n(1)$

Известно (см. [1]), что многочлены $Q_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}$, $\deg Q_n^{(\alpha_1, \alpha_2)} = 4n$, определяемые формулой Родрига

$$\begin{aligned} Q_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) &= \frac{1}{(n!)^2} (1-x)^{-1} x^{-\alpha_2} e^x \\ &\quad \times \frac{d^n}{dx^n} x^{n+\alpha_2-\alpha_1} \frac{d^n}{dx^n} (1-x)^{2n+1} x^{n+\alpha_1} e^{-x}, \quad (5) \end{aligned}$$

удовлетворяют системе соотношений ортогональности

$$\left\{ \begin{aligned} \int_0^1 Q_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) x^\nu w_1(x) dx &= 0, \\ \int_0^1 Q_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) x^\nu w_2(x) dx &= 0, \\ \int_1^\infty Q_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) x^\nu w_1(x) dx &= 0, \\ \int_1^\infty Q_n^{(\alpha_1, \alpha_2)}(x) x^\nu w_2(x) dx &= 0, \end{aligned} \right. \quad \nu = 0, \dots, n-1, \quad (6)$$

где $w_1(x) := x^{\alpha_1}(1-x)e^{-x}$, $w_2(x) := x^{\alpha_2}(1-x)e^{-x}$. Нетрудно видеть (вычитая соотношения ортогональности в (6) и деля результат на константу), что соотношения ортогональности (6) сохраняют силу и при

$$w_1(x) := x^{\alpha_1}(1-x)e^{-x}, \quad w_2(x) := \frac{x^{\alpha_2} - x^{\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1}(1-x)e^{-x}.$$

Тем самым, устремляя $\alpha_2 \rightarrow \alpha_1$, а затем $\alpha_1 \rightarrow 0$, мы получаем, что многочлены $Q_n := Q_n^{(0,0)}$ (см. (1), (5)) удовлетворяют соотношениям ортогональности (6) с весовыми функциями

$$w_1(x) := (1-x)e^{-x}, \quad w_2(x) := (1-x) \ln x e^{-x}. \quad (7)$$

Рассмотрим следующие функции второго рода, связанные с системой ортогональности (6), (7)

$$R_n(z) = \int_0^\infty \frac{Q_n(x)}{z-x} (1-x) \ln x e^{-x} dx,$$

$$S_n(z) = \int_0^1 \frac{Q_n(x)}{z-x} (1-x) \ln x e^{-x} dx.$$

Также известно (например, см. [2]), что функции второго рода, порождённые $Q_n(x)$, удовлетворяют (вследствие соотношений ортогональности) тем же рекуррентным соотношениям, что и полиномы $Q_n(x)$, т.е. рекуррентным соотношениям теоремы 1' работы [3], и как следствие, рекуррентным соотношениям теорем 1 и 2 работы [4]. Таким образом, интересующие нас формы (2) и (3)

$$f_n = R_n(1), \quad g_n = eS_n(1)$$

удовлетворяют тому же рекуррентному соотношению, что и $Q_n(1)$, например, восьмичленному рекуррентному соотношению следствия теоремы 2 работы [4].

3. Получение четырёхчленного рекуррентного соотношения для форм

Полученные в [4] рекуррентные соотношения позволили вычислять формы (2) и (3) до n порядка нескольких тысяч, что в свою очередь дало богатый материал для экспериментального изучения рациональных приближений к постоянной Эйлера. В частности, исследуя общие множители последовательностей $(ap_n + bp_{n-1} + cp_{n-2})$ и $(aq_n + bq_{n-1} + cq_{n-2})$, был замечен следующий экспериментальный факт:

$$\begin{vmatrix} p_n & q_n & r_n \\ p_{n-1} & q_{n-1} & r_{n-1} \\ p_{n-2} & q_{n-2} & r_{n-2} \end{vmatrix} \stackrel{?}{=} (n-1)!^2 (n-2)!^2 (16n-1), \quad n = 2, 3, \dots, 5000, \quad (8)$$

что в свою очередь привело к гипотезе, что p_n, q_n, r_n являются базисом решений некоторого четырёхчленного рекуррентного соотношения с рациональными по n коэффициентами. То есть верны соотношения

$$\begin{cases} p_{n+1} = K_n^{(0)} p_n + K_n^{(1)} p_{n-1} + K_n^{(2)} p_{n-2}, \\ q_{n+1} = K_n^{(0)} q_n + K_n^{(1)} q_{n-1} + K_n^{(2)} q_{n-2}, \\ r_{n+1} = K_n^{(0)} r_n + K_n^{(1)} r_{n-1} + K_n^{(2)} r_{n-2}, \end{cases}$$

причём коэффициент $K_n^{(2)}$ есть отношение последовательных определителей (8).

Экспериментальная проверка гипотезы и получение явного вида рациональных функций $K_n^{(0)}, K_n^{(1)}$ проводились численной процедурой восстановления рациональной функции по её перепределённому рациональному интерполянту.

4. Доказательство теоремы

Наша цель – строго обосновать соотношение (4), опираясь на восьмичленное рекуррентное соотношение из работы [4] (следствие теоремы 2). Для того, чтобы не возникало впечатления “везения” или “случайности” в этом обосновании, мы приведём общую процедуру проверки одного линейного рекуррентного соотношения при помощи другого.

Итак, мы находимся в следующей ситуации: есть некоторая последовательность $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, есть коэффициенты $a_j(n)$ ($j = \overline{0, \dots, m_1}$) доказанного соотношения $\sum_{j=0}^{m_1} a_j(n) S_{n+j} = 0$, есть коэффициенты $b_j(n)$ ($j = \overline{0, \dots, m_2}$) экспериментального соотношения $\sum_{j=0}^{m_2} b_j(n) S_{n+j} \stackrel{?}{=} 0$, которое требуется проверить и доказать. Нужно узнать, до какого номера n надо проверять экспериментальное соотношение, чтобы быть уверенным в его истинности для всех $n \in \mathbb{N}$. Описанная ниже процедура годится для любых зависимостей коэффициентов a и b от n , для которых выполнено следующее свойство:

- (*) Любое алгебраическое выражение (полином), составленное из подвыражений вида $a_j(n+i), b_j(n+i), k$, где $i, j, k \in \mathbb{Z}$, **либо** обращается в 0 для всех натуральных n , **либо** обращается в 0 на конечном множестве исключительных значений $n \in \mathbb{N}$.

и l_2 на 1), и всё равно подматрица из выделенных столбцов будет вырожденной. Значит, между отмеченными столбцами есть линейное соотношение, и один из них можно исключить – сделать непомеченным. Последние l_2 столбцов линейно независимы, поэтому исключаемый столбец можно выбрать среди остальных столбцов. Теперь мы снова находимся в ситуации, когда в матрице, образованной отмеченными столбцами, число строк на 1 больше числа столбцов. Поэтому мы повторяем процедуру формирования обнуляющей строки V для отмеченных столбцов. Поскольку неотмеченные столбцы линейно зависимы от отмеченных, то V является обнуляющей строкой и для них.

Итак, пусть найдены l_1, l_2 и построена обнуляющая строка V , которая имеет вид $[\varphi_0, \dots, \varphi_{l_1}, f_0, \dots, f_{l_2}]$. По построению $f_{l_2} \neq 0$. Рассмотрим матричное произведение $V MW$, где вектор-столбец $W = [S_n, \dots, S_{n+m_1+l_1}]^T$. Считая его двумя способами, получим тождество:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{l_2} f_i \Sigma_{n+i} &= [\varphi_0, \dots, \varphi_{l_1}, f_0, \dots, f_{l_2}] \cdot [0, \dots, 0, \Sigma_n, \dots, \Sigma_{n+l_2}]^T \\ &= V \cdot MW = VM \cdot W = [0, \dots, 0] \cdot W = 0. \end{aligned}$$

Поскольку $f_{l_2} \neq 0$, то есть значение $n = \tilde{n}$, начиная с которого $f_{l_2}(n) \neq 0$. Поэтому проверку $\Sigma_n \stackrel{?}{=} 0$ достаточно осуществить до номера $n = \tilde{n} + l_2$.

Применим эту процедуру к рекуррентным соотношениям (4) и (16) из работы [4]. Хотя коэффициенты рекуррентного восьмичленного соотношения являются многочленами (по n) очень большой степени (порядка 80–90), тем не менее современные пакеты символьных вычислений (MAPLE) позволяют вычислять определители из (9) с такими входными данными. Для соотношения (4) и восьмичленного соотношения (16) из работы [4] оказалось, что ранг матрицы (9) для $l_1 = m_2 = 3$ и $l_2 = m_1 = 7$ равен $8 = (l_1 + l_2 + 1) - 3$, поэтому этап уменьшения l_1, l_2 будет пройден 3 раза. В итоге $l_1 = 0, l_2 = 4$, отмечать можно последние 5 столбцов, и вычисленная по ним аннулирующая строка V аннулирует и первые 3 столбца. Вычисленный таким образом многочлен $f_4(n)$

(последний элемент V) имеет вид

$$f = f_4(n) = \begin{vmatrix} a_3(n) & a_4(n) & a_5(n) & a_6(n) & a_7(n) \\ b_3(n) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_2(n+1) & b_3(n+1) & 0 & 0 & 0 \\ b_1(n+2) & b_2(n+2) & b_3(n+2) & 0 & 0 \\ b_0(n+3) & b_1(n+3) & b_2(n+3) & b_3(n+3) & 0 \end{vmatrix}.$$

Оценку величины максимального по модулю корня этого полинома делаем через коэффициенты полинома по известной формуле:

$$|\tilde{n}| < 1 + \max_{1 \leq i \leq \deg(f)} \left| \frac{\text{coeff}(f, \deg(f) - i)}{\text{coeff}(f, \deg(f))} \right|^{1/i}.$$

Подставляя сюда явные значения коэффициентов рекуррентных соотношений (4) и (16) из работы [4], получаем

$$|\tilde{n}| < 70.$$

Численная проверка совпадения решений рекуррентных соотношений (4) и (16) из [4] до $n = 70$ завершает доказательство теоремы.

Список литературы

- [1] А. И. Аптекарев, А. Branquinho, W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials for classical weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:10 (2003), 3887–3914 [doi 10.1090/S0002-9947-03-03330-0](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-03-03330-0), [MR 1990569](https://arxiv.org/abs/1990569), [Zbl 1033.33002](https://arxiv.org/abs/1033.33002).
- [2] В. А. Калягин, “Аппроксимации Эрмита–Паде и спектральный анализ несимметричных операторов”, *Матем. сб.*, **185**:6 (1994), 79–100 [Mi sm903](https://arxiv.org/abs/903), [MR 1280397](https://arxiv.org/abs/1280397), [Zbl 0840.47026](https://arxiv.org/abs/0840.47026).
- [3] Д. В. Христофоров, “Рекуррентные соотношения для аппроксимаций Эрмита–Паде одной системы из четырех функций марковско-го и стилтьесовского типа”, *Современные проблемы математики*, вып. 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2006, 11–26.
- [4] А. И. Боголюбовский, “Рекуррентные соотношения с рациональными коэффициентами для некоторых совместно ортогональных многочленов, задаваемых формулой Родрига”, *Современные проблемы математики*, вып. 9, ред. А. И. Аптекарев, МИАН, М., 2006, 27–35.

О некоторой процедуре нахождения асимптотических разложений для решений разностных уравнений¹

Д. Н. Туляков

1. Введение

Из общей теории разностных уравнений известно, что у линейного рекуррентного соотношения с полиномиальными по индексу коэффициентами существует базис решений, имеющих асимптотическое разложение по n специального вида. В работах [1]–[3] доказана теорема существования для разностных уравнений с полиномиальными по аргументу коэффициентами. Её точная формулировка такова:

ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ (G. D. Birkhoff, W. J. Trjitzinsky, 1932). *Любое линейное разностное уравнение n -го порядка*

$$\sum_{i=0}^n a_i(z)q(z+i) = 0 \quad (a_0 \neq 0, \quad a_n \neq 0) \quad (1)$$

с полиномиальными коэффициентами a_i имеет ровно n линейно независимых формальных решений следующего общего вида:

$$q(z) = e^{Q(z)} z^r \sum_{s=0}^{\infty} z^{-\frac{s}{p}} \sum_{k=0}^m C_{s,k} \ln^k z, \quad Q(z) = \mu z \ln z + \sum_{i=1}^p \nu_i z^{\frac{i}{p}},$$

$p \in \mathbb{N}, \quad \mu p \in \mathbb{Z}, \quad m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$

(2)

Если плоскость комплексного переменного z разбить на области кривыми $\operatorname{Re}(Q_i(z)) = \operatorname{Re}(Q_j(z))$, $i, j = 1, \dots, n$, то в каждой такой области, уходящей в бесконечность, существуют n линейно независимых аналитических решений уравнения (1), имеющих найденную асимптотику.

¹Работа частично поддержана грантом научных школ НШ-1551.2003.1, программой № 1 ОМН РАН, исследовательским грантом РФФИ-05-01-00697 и грантом ИНТАС 03-51-6637.

С помощью уравнения любое решение уравнения (1) можно продолжить по вещественному направлению, но при переходе в другую область асимптотика, вообще говоря, меняется.

Общая процедура нахождения таких разложений достаточно сложна, но в большинстве случаев хватает упрощённой процедуры, применение которой будет изложено на примере соотношения (3):

$$\begin{aligned} (n+1)(16n-15)q_{n+1} &= (128n^3 + 40n^2 - 82n - 45)q_n \\ &\quad - n(256n^3 - 240n^2 + 64n - 7)q_{n-1} + (16n+1)n(n-1)q_{n-2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Итак, нашей целью будет доказательство следующей теоремы о поведении решений соотношения (3).

ТЕОРЕМА. *Существует базис из трёх решений разностного уравнения (3) со следующими асимптотиками:*

$$\begin{aligned} q_1(n) &= \left(\frac{4n}{e}\right)^n \frac{e^{\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(1 + \frac{97}{96\sqrt{2n}} - \frac{2207}{36864n} \right. \\ &\quad \left. - \frac{13308187}{53084160n\sqrt{2n}} + O(n^{-2})\right), \\ q_2(n) &= \left(\frac{4n}{e}\right)^n \frac{e^{-\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(1 - \frac{97}{96\sqrt{2n}} - \frac{2207}{36864n} \right. \\ &\quad \left. + \frac{13308187}{53084160n\sqrt{2n}} + O(n^{-2})\right), \\ q_3(n) &= \left(\frac{e}{16n}\right)^n \frac{1}{n\sqrt{n}} \left(1 - \frac{77}{96n} + \frac{9745}{18432n^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{7543057}{26542080n^3} + O(n^{-4})\right). \end{aligned} \quad (4)$$

Асимптотические ряды эффективно продолжаются до членов любого заданного порядка.

2. Доказательство теоремы

Обозначим $d(z) = q(z+1)/q(z)$. При подстановке в (1) получим соотношение

$$\sum_{i=0}^n a_i(z) \prod_{k=1}^i d(z+k-1) = 0, \quad (5)$$

которое для нашего случая (3) имеет вид

$$\begin{aligned}
 & (16z^2 + 65z + 51)d(z+2)d(z+1)d(z) \\
 & - (128z^3 + 808z^2 + 1614z + 975)d(z+1)d(z) \\
 & + (256z^4 + 1808z^3 + 4768z^2 + 5561z + 2418)d(z) \\
 & - (16z^3 + 81z^2 + 131z + 66) = 0. \tag{5a}
 \end{aligned}$$

Теперь находим асимптотику $d(z)$ в несколько этапов.

1°. Главный член асимптотики $d(z)$ находится из рассмотрения диаграммы Ньютона характеристического уравнения, поскольку он одинаков для $d(z)$, $d(z+1)$ и так далее. Возьмём множество точек $\mathbb{R}^2 \{ (i, \deg(a_i)) \mid i = 1, \dots, n \}$, построим выпуклую оболочку этого множества (это многоугольник) и обозначим через S набор тех его сторон, относительно которых многоугольник находится “снизу”. Формально это значит, что $y \leq bx + c$ – уравнение полуплоскости, содержащей многоугольник, а её граница – прямая, содержащая сторону.

Пусть (m_j, b_j) – соответственно длина горизонтальной проекции j -й стороны и её угловой коэффициент, а через x_j обозначим абсциссы вершин верхней части многоугольника Ньютона (концов сторон из набора S). Тогда

$$\begin{aligned}
 x_1 &= 0, \quad m_j = x_{j+1} - x_j > 0, \\
 b_j &= \frac{\deg(a_{x_{j+1}}) - \deg(a_{x_j})}{x_{j+1} - x_j}, \quad b_{j+1} < b_j.
 \end{aligned}$$

Обозначим

$$P_j(t) = \sum_{k=0}^{m_j} d_k^{(j)} t^k,$$

где

$$d_k^{(j)} = \text{Coeff}(a_{x_j+k}, \deg(a_{x_j}) + kb_j).$$

Если $\lambda_k^{(j)}$ – корни полиномов $P_j(t)$, и $\nu_k^{(j)}$ – соответствующие им кратности, то есть ровно $\nu_k^{(j)}$ асимптотических решений $d(z)$ с главным членом $\lambda_k^{(j)} z^{-b_j}$. Для решений, у которых $\nu = 1$, можно сразу переходить к 3 этапу. В других случаях решения надо разделить на этапе 2. Предложенным способом решения разделяются не всегда, в частности, решение вида (2) с $m \neq 0$ не отделяется, но для уравнения (3) он применим.

Применив эти построения для (5а), последовательно получим: множество $\{(3, 2), (2, 3), (1, 4), (0, 3)\}$; двухзвенную ломаную в качестве верхней части многоугольника Ньютона, и остальные величины:

$$\begin{aligned} x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 3, \quad m_1 = 1, \quad m_2 = 2, \quad b_1 = 1, \quad b_2 = -1, \\ P_1(t) = 256t - 16, \quad P_2(t) = 16t^2 - 128t + 256, \\ \nu_1^{(1)} = 1, \quad \lambda_1^{(1)} = 1/16, \quad \nu_1^{(2)} = 2, \quad \lambda_1^{(2)} = 4. \end{aligned}$$

Поэтому у уравнения (5а) есть одно решение $d(z) \approx (16z)^{-1}$ и два решения $d(z) \approx 4z$.

2°. Уточнение асимптотики и разделение решений. Выберем фиксированный главный член $\lambda_k^{(j)} z^{-b_j}$ из найденных на этапе 1. Сделаем подстановку $d(z) = \lambda_k^{(j)} z^{-b_j} \tilde{d}(z)$ в (5), и будем искать решения $\tilde{d}(z)$ с главным членом 1. Для этого сгруппируем левую часть специальным образом:

$$\sum_{i=0}^n \left(\tilde{a}_i(z) \sum_{s=0}^i (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \prod_{k=1}^s \tilde{d}(z+k-1) \right). \quad (6)$$

Такая группировка соответствует разложению характеристического полинома от \tilde{d} по степеням $(\tilde{d} - 1)$. Коэффициенты $\tilde{a}_i(z)$ определяются единственным образом и являются алгебраическими функциями. Из определения величин b_j , $\lambda_k^{(j)}$ и $\nu = \nu_k^{(j)}$ следует, что наибольший порядок роста по z на бесконечности среди $\tilde{a}_i(z)$ будет для $i = \nu$ (возможно и для некоторых других i), а для всех $i < \nu$ порядок роста $\tilde{a}_i(z)$ по z будет строго меньше. Считаем, что $\nu > 1$.

Вновь строим диаграмму: точки $(i; \text{ord}(\tilde{a}_i))$ для $i = 0, \dots, \nu$ берём в качестве начального множества. Здесь ord понимается как порядок роста и обобщает deg : если при больших $|z|$ $f(z) = O(z^\alpha)$, то $\text{ord}(f) = \alpha$. Проводим опорную прямую к последней точке, и пусть её угловой коэффициент $\tilde{m} < 1$. Строим полином $\tilde{P}(t) = \sum_{k=0}^{\nu} \text{Coeff}(\tilde{a}_k, \text{ord}(\tilde{a}_\nu) + \tilde{m}(k - \nu)) t^k$. Каждый его коэффициент – или коэффициент при главном члене асимптотики, или 0. Тогда каждый простой корень τ полинома $\tilde{P}(t)$ соответствует отделившемуся решению $\tilde{d}(z) \approx 1 + \tau z^{-\tilde{m}}$. Снова приводим выкладки для интересующей нас конкретной ситуации. На этапе 1 мы убедились, что есть только один случай $\nu \neq 1$. Производим подстановку $d(z) = 4z\tilde{d}(z)$ в (5а) и группируем нужным

образом:

$$\begin{aligned}
 & - (1024n^5 + 7232n^4 + 17792n^3 + 18112n^2 + 6528n) \\
 & \quad \times [\tilde{d}(z+2)\tilde{d}(z+1)\tilde{d}(z) - 3\tilde{d}(z+1)\tilde{d}(z) + 3\tilde{d}(z) - 1] \\
 & - (1024n^5 + 6720n^4 + 14624n^3 + 12912n^2 + 3984n) \\
 & \quad \times [\tilde{d}(z+1)\tilde{d}(z) - 2\tilde{d}(z) + 1] \\
 & + (1024n^4 + 5056n^3 + 6268n^2 + 1944n)[\tilde{d}(z) - 1] \\
 & + (512n^4 + 1904n^3 + 1149n^2 - 469n + 66) = 0.
 \end{aligned}$$

Точки $(0; 4)$, $(1; 4)$, $(2; 5)$. Угловой коэффициент $\tilde{m} = 1/2 < 1$. Корни полинома $\tilde{P}(t) = -1024t^2 + 512$ простые и равны $\pm\sqrt{1/2}$. Получаем асимптотику $d(z) \approx 4z(1 \pm \sqrt{1/(2z)})$.

3°. Продолжение асимптотического ряда методом итераций. Используем начало асимптотики отделившегося решения, сделаем подстановку $d(z) = \lambda_k^{(j)} z^{-b_j} (1 + \tau z^{-\tilde{m}}) \tilde{d}(z)$ и повторим преобразование (5) к виду (6). Если этап 2 был пропущен, то τ отсутствует. Поскольку решение отделившееся, то слагаемое $\tilde{a}_1(z)(\tilde{d}(z) - 1)$, соответствующее $i = 1$, является ведущим. Переносим все остальные слагаемые в правую часть, выражаем $\tilde{d}(z)$ из левой части и в результате получаем итерационное соотношение

$$\tilde{d}(z) := 1 - \frac{1}{\tilde{a}_1(z)} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq 1}}^n \left(\tilde{a}_i(z) \sum_{s=0}^i (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \prod_{k=1}^s \tilde{d}(z+k-1) \right). \quad (7)$$

Стартуя с функции $\tilde{d}(z) = 1$, из соотношения (7) будем получать функции, асимптотическое разложение которых (с ростом числа итераций) стабилизируется в силу лемм 2 и 3 из приложения.

4°. Осталось вернуться к $d(z)$ и по асимптотическому ряду $d(z)$ получить асимптотический ряд $q(z)$. Это требует суммирования асимптотических рядов и не представляет трудностей:

$$q(z) = \text{const} \prod_t^{z-1} d(t) = \text{const} \cdot \exp\left(\sum_t^{z-1} \ln d(t)\right).$$

Итак, для соотношения (5a) делаем преобразование к виду (6) после каждой из следующих подстановок:

$$\begin{aligned}
 d(z) &= (4z + 2\sqrt{2z})\tilde{d}(z), & d(z) &= (4z - 2\sqrt{2z})\tilde{d}(z), \\
 d(z) &= \tilde{d}(z)/(16z).
 \end{aligned}$$

Для краткости и наглядности будем проводить преобразования (5а) сразу для всех случаев, записав подстановки в виде $d(z) = d_0(z)\tilde{d}(z)$.

Представим левую часть соотношения (5а) как применение оператора L к функции d , то есть

$$\begin{aligned} L[d](z) &= a_0 + a_1d(z) + a_2d(z)d(z+1) + a_3d(z)d(z+1)d(z+2), \\ a_0 &= -(16z^3 + 81z^2 + 131z + 66), \\ a_2 &= -(128z^3 + 808z^2 + 1614z + 975), \\ a_1 &= (256z^4 + 1808z^3 + 4768z^2 + 5561z + 2418), \\ a_3 &= 16z^2 + 65z + 51. \end{aligned}$$

Применим подстановку,

$$\begin{aligned} L[d](z) &= A_0 + A_1\tilde{d}(z) + A_2\tilde{d}(z)\tilde{d}(z+1) + A_3\tilde{d}(z)\tilde{d}(z+1)\tilde{d}(z+2), \\ A_0 &= a_0, & A_1 &= a_1d_0(z), \\ A_2 &= a_2d_0(z)d_0(z+1), & A_3 &= a_3d_0(z)d_0(z+1)d_0(z+2). \end{aligned}$$

Преобразуем к виду (6),

$$\begin{aligned} L[d](z) &= \sum_{i=0}^3 \left(B_i \sum_{s=0}^i (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \prod_{k=1}^s \tilde{d}(z+k-1) \right), \\ B_3 &= A_3, & B_2 &= A_2 + 3A_3, \\ B_1 &= A_1 + 2A_2 + 3A_3, & B_0 &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3. \end{aligned}$$

Запишем равенство (7) для нашего случая, используя $L[d]$:

$$\begin{aligned} \tilde{d}(z) &= 1 - \frac{1}{B_1} \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq 1}}^3 \left(B_i \sum_{s=0}^i (-1)^{i-s} \binom{i}{s} \prod_{k=1}^s \tilde{d}(z+k-1) \right) \\ &= \tilde{d}(z) - \frac{L[d](z)}{B_1}. \end{aligned}$$

Возвращаясь к функции d , мы видим, что итерационное соотношение можно записать в виде

$$\begin{aligned} d(z) &= d(z) - \frac{d_0(z)L[d](z)}{B_1} \\ &= d(z) - \frac{L[d](z)}{a_1 + 2a_2d_0(z+1) + 3a_3d_0(z+1)d_0(z+2)}. \end{aligned}$$

3. Приложение

В данном разделе будут доказаны леммы о асимптотическом поведении некоторых характерных для основного раздела величин (леммы 2 и 3), которые доказываются на основе одного технического результата (лемма 1).

ЛЕММА 1. Пусть $w(z)$ – аналитическая функция в секторе $\text{Arg}(z) \in [-\alpha; \alpha]$, $\alpha < \pi$, с ограниченным модулем. Если для граничных значений $w(z)$ выполняется неравенство $|w(z)| < |z|_+^a \varphi(|z|)$, где $|z|_+ = \max(1, |z|)$, $a < 0$, φ есть функция медленного роста в \mathbb{R}_+ с условиями: $|t|_+ \varphi(t)$ не убывает, $\frac{\varphi(t)}{|t|_+}$ не возрастает, то для произвольного $\varepsilon > 0$ в секторе $|\text{Arg}(z)| \leq \alpha - \varepsilon$ $w'(z) = O\left(\frac{\varphi(|z|)}{|z|}\right)$.

С помощью возведения в степень задачи с различными α сводятся друг к другу, поэтому достаточно доказать неравенство для случая $\alpha = \pi/2$. Для тех z из сектора, у которых $|z| \leq 1$, модуль производной ограничен некоторой константой, поэтому считаем, что $|z| > 1$. Напишем формулу Коши для производной, взяв контур из отрезка мнимой оси и правой полуокружности, построенной на нём, как на диаметре. Преобразуем и начнём неограниченно расширять контур. Получим

$$\begin{aligned} w'(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{w(s) ds}{(s-z)^2} \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{w(Re^{it}) Re^{it} dt}{(Re^{it} - z)^2} - \frac{1}{2\pi} \int_{-R}^R \frac{w(it) dt}{(it - z)^2} \right) \\ &= 0 - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{w(it) dt}{(it - z)^2}, \\ |w'(z)| &< \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|w(it)| dt}{(it - z)(-it - \bar{z})}. \end{aligned}$$

Учитываем условия $|z| > 1$, $|\text{Arg}(z)| < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ и свойства φ . Получим

$$\begin{aligned} |w'(z)| &< \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|t|_+^a \varphi(|t|) dt}{t^2 - 2\text{Im}(z)t + |z|^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{|t|_+^a \varphi(t) dt \cdot (t^2 + |z|^2)}{(t^2 + |z|^2)^2 - 4\text{Im}^2(z)t^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &< \frac{1}{\pi \sin^2 \varepsilon} \int_0^\infty \frac{|t|_+^a \varphi(t) dt}{t^2 + |z|^2} \\
 &< \frac{1}{\pi \sin^2 \varepsilon} \left(\int_0^{|z|} \frac{|t|_+^a \varphi(t) dt}{|z|^2} + \int_{|z|}^\infty \frac{|t|_+^a \varphi(t) dt}{t^2} \right) \\
 &< \frac{\varphi(|z|)|z|^{-1}}{\pi \sin^2 \varepsilon} \left(\int_0^{|z|} |t|_+^{a-1} dt + \int_{|z|}^\infty |t|_+^{a-1} dt \right) \\
 &= \frac{1-a}{-a\pi \sin^2 \varepsilon} \frac{\varphi(|z|)}{|z|}.
 \end{aligned}$$

При выполнении обратного преобразования изменится только константа.

ЛЕММА 2. Пусть функция $d(z)$ аналитическая в некотором секторе, содержащем положительное направление, и имеет там представление $d(z) = 1 + z^a \varphi(z)(1 + \bar{\partial}(1))$, где $a < 0$ и $\ln |\varphi(z)| = \bar{\partial}(\ln |z|)$ при $|z| \rightarrow \infty$. Рассмотрим величины

$$f_n(z) = \sum_{s=0}^n (-1)^{n-s} \binom{n}{s} \prod_{k=1}^s d(z+k-1).$$

Тогда для натуральных n в любом более узком секторе верно представление

$$f_n(z) = \begin{cases} z^{na} \varphi^n(z)(1 + \bar{\partial}(1)), & \text{если } a > -1, \\ O(z^{-n} \varphi(z) |\varphi(z)|_+^{n-1}), & \text{если } a = -1, \\ O(z^{a+1-n} \varphi(z)), & \text{если } a < -1. \end{cases}$$

Будем использовать обозначение Δ для оператора разности: $\Delta h(z) = h(z+1) - h(z)$. Поскольку $\Delta h(z) = \int_0^1 h'(z+t) dt$, то для оценки разности можно применять лемму 1. Легко установить, что величины удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$f_{n+1}(z) = f_n(z+1)d(z) - f_n(z) = \Delta f_n(z) + f_n(z+1)(d(z) - 1) \quad (8)$$

и начальному условию $f_0 = 1$. Следовательно, $f_1(z) = d(z) - 1$, и база индукции верна. Индуктивный переход легко делается для каждого из трёх случаев сравнения a с -1 . На каждом шаге индукции мы сужаем сектор. Поскольку величина сужения может быть выбрана сколь угодно малой, то на фиксированном шаге действительно можно получить любой меньший сектор.

ЛЕММА 3. Пусть для функции $d(z)$ выполнены условия предыдущей леммы, при этом $a \in (-1; 0)$. Тогда результат леммы 2 дополняется оценкой изменения величин $f_n(z)$ при изменении $d(z)$. Пусть $d(z)$ изменяется на $\delta d(z) = z^b \psi(z)(1 + \bar{\delta}(1))$, где $b < a$, $\ln |\psi(z)| = \bar{\delta}(\ln |z|)$ при $|z| \rightarrow \infty$. Тогда изменение $\delta f_n(z)$ величины $f_n(z)$ имеет оценку

$$\delta f_n(z) = nz^{(n-1)a+b} \varphi^{n-1}(z) \psi(z) (1 + \bar{\delta}(1)).$$

Подставим в (8) $d(z) + \delta d(z)$ вместо $d(z)$, $f_n(z) + \delta f_n(z)$ вместо $f_n(z)$, вычтем исходное соотношение (8) и преобразуем. Получим

$$\delta f_{n+1}(z) = \Delta \delta f_n(z) + f_n(z+1) \delta d(z) + \delta f_n(z+1) (d(z) + \delta d(z) - 1).$$

Используя предыдущую лемму и начальное условие $\delta f_1(z) = \delta(d(z) - 1) = \delta d(z)$, по индукции получим нужный результат.

Список литературы

- [1] D. G. Birkhoff, W. J. Trjitzinsky, "Analytic theory of singular difference equations", *Acta Math.*, **60**:1 (1933), 1–89 [doi 10.1007/BF02398269](#), [MR 1555364](#), [Zbl 59.0450.03](#).
- [2] D. G. Birkhoff, "Formal theory of irregular linear difference equations", *Acta Math.*, **54**:1 (1930), 205–246 [doi 10.1007/BF02547522](#), [MR 1555307](#), [Zbl 56.0402.01](#).
- [3] D. G. Birkhoff, "General theory of linear difference equations", *Trans. Amer. Math. Soc.*, **12**:2 (1911), 243–284 [doi 10.2307/1988577](#), [MR 1500888](#), [Zbl 42.0359.02](#).

Асимптотика γ -форм, генерируемых совместно ортогональными многочленами¹

А. И. Аптекарев, В. Г. Лысов

1. Введение

Рассмотрим постоянную Эйлера γ

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right) = - \int_0^{\infty} \ln x e^{-x} dx.$$

Интегрирование полиномиальных последовательностей $\{Q_n\}$ генерирует γ -формы

$$f_n = p_n - \gamma q_n = \int_0^{\infty} Q_n(x) \ln x e^{-x} dx, \quad (1)$$

причем коэффициент при γ в форме (1) равен

$$q_n = \int_0^{\infty} Q_n(x) e^{-x} dx. \quad (2)$$

Настоящая работа посвящена получению асимптотики γ -форм генерируемых последовательностью многочленов

$$Q_n(x) = \frac{1}{(n!)^2} \frac{e^x}{x-1} \left(\frac{d}{dx} \right)^n x^n \left(\frac{d}{dx} \right)^n (x-1)^{2n+1} x^n e^{-x} \quad (3)$$

Эти многочлены, впервые, появились в работе [1]. Они являются общими знаменателями рациональных аппроксимаций Эрмита–Паде для системы из четырех функций

$$\hat{\mu}_k(x) := \int_0^1 \frac{w_k(x)}{z-x} dx, \quad \hat{S}_k(x) := \int_1^{\infty} \frac{w_k(x)}{z-x} dx, \quad k = 1, 2,$$

¹Работа частично поддержана грантом научных школ НШ-1551.2003.1, программой № 1 ОМН РАН, грантами РФФИ-05-01-00522 и ИНТАС-03-51-6637.

задаваемых весами

$$w_1(x) = (1-x)e^{-x}, \quad w_2(x) = (1-x)\ln(x)e^{-x}.$$

Результатом работы является

ТЕОРЕМА. Пусть q_n и f_n определены подстановкой (3) в (2) и в (1) соответственно. Тогда справедливы асимптотические формулы

$$\begin{aligned} q_n &= (2n)! \frac{e^{\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}(4e)^{3/8}} + \mathcal{O}(n^{-1/2}) \right), \\ f_n &= p_n - \gamma q_n = (2n)! \frac{e^{-\sqrt{2n}}}{\sqrt[4]{n}} \left(\frac{2\sqrt{\pi}}{(4e)^{3/8}} + \mathcal{O}(n^{-1/2}) \right). \end{aligned} \quad (4)$$

2. Доказательство теоремы

Идея доказательства состоит в получении контурных интегральных представлений для q_n и f_n , с последующим применением метода перевала. Напомним основное соотношение метода перевала

$$\int \psi(t)e^{n\varphi(t)} dt = \sqrt{\frac{2\pi}{-n\varphi''(t_0)}} \psi(t_0)e^{n\varphi(t_0)} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})), \quad (5)$$

где контур интегрирования в левой части (5) и точка t_0 в правой части выбирается так, чтобы

$$\varphi'(t_0) = 0, \quad \varphi''(t_0)(t - t_0)^2 < 0.$$

1. Асимптотика q_n . Вначале получим интегральное представление для последовательности q_n . Подставим выражение (3) в (2) и применим формулу интегрирования по частям $2n$ раз. Заметив, что все внеинтегральные члены равны нулю, получим

$$q_n = \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^\infty (x-1)^{2n+1} x^n e^{-x} \left(\frac{d}{dx} \right)^n \frac{x^n}{(x-1)^{n+1}} dx.$$

Производную в последнем интеграле запишем в виде контурного интеграла по формуле Коши, имеем

$$q_n = \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_0^\infty (x-1)^{2n+1} x^n e^{-x} dx \int_{\gamma_x} \frac{s^n ds}{(s-1)^{n+1}(s-x)^{n+1}}, \quad (6)$$

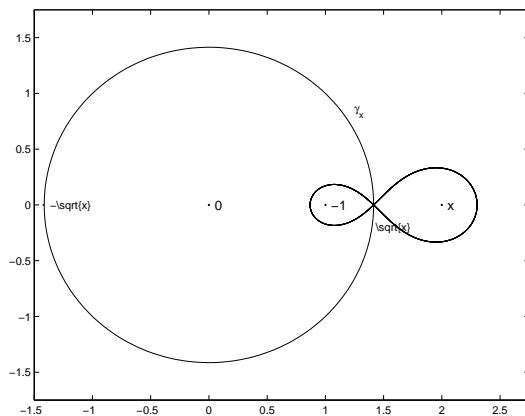


Рис. 6.1. Линии уровня и перевальный контур функции Φ_1 .

где γ_x – контур, обходящий точку x против часовой стрелки.

Найдем асимптотику внутреннего интеграла

$$\int_{\gamma_x} \frac{s^n ds}{(s-1)^{n+1}(s-x)^{n+1}}.$$

Обозначим,

$$\Phi_1(s) = \frac{s}{(s-1)(s-x)}, \quad \psi_1(s) = \frac{1}{(s-1)(s-x)},$$

при $x > 0$. Функция $\Phi_1(s)$ имеет две седловые точки: $s = \pm\sqrt{x}$, в которых принимает значения: $\Phi_1(\pm\sqrt{x}) = \frac{-1}{(\pm\sqrt{x}-1)^2}$. Контур γ_x можно деформировать в линию уровня аргумента $\Phi_1(s)$ – окружность $|s| = \sqrt{x}$. На этой окружности функция $\Phi_1(s)$ принимает наибольшее по модулю значение в точке \sqrt{x} , а наименьшее в точке $-\sqrt{x}$. Значение второй производной $\ln \Phi_1$ в точке \sqrt{x} равно

$$\frac{\partial^2 \ln \Phi_1}{\partial s^2}(\sqrt{x}) = \frac{2}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)^2}.$$

По формуле (5)

$$\int_{\gamma_x} \psi_1(s) \Phi_1^n(s) ds = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} i}{\sqrt{n}(\sqrt{x}-1)^{2n+1} x^{1/4}} (1 + \mathcal{O}(n^{-1})).$$

Полученная асимптотическая формула справедлива равномерно по x на компактных подмножествах из $\mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$. Однако, подставив ее в (6), убеждаемся, что точка перевала подынтегральной функции растет со скоростью порядка n . Чтобы проверить, что старший член асимптотики не изменится при сжатии $x = ny$, выпишем остаточный член. Сделаем замену переменной $e^{-z^2} = \left(\frac{\Phi_1(s)}{\Phi_1(\sqrt{x})}\right)^n$, тогда

$$\begin{aligned} & \int_{\gamma_x} \frac{s^n ds}{(s-1)^{n+1}(s-x)^{n+1}} \\ &= \frac{(-1)^n i}{\sqrt{n}(\sqrt{x}-1)^{2n+1}x^{1/4}} \int_{-z_*}^{z_*} e^{-z^2} R^{-1/2}(z, x, n) dz, \end{aligned} \quad (7)$$

где функция R имеет вид

$$\begin{aligned} R(z, x, n) &= \frac{e^{z^2/n}(\sqrt{x}-1)^2 - 2(x+1) + e^{-z^2/n}(\sqrt{x}+1)^2}{-4\sqrt{x}e^{-z^2/n}z^2/n} \\ &= e^{z^2/n} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{4k}}{(2k+1)!n^{2k}} - \frac{x+1}{2\sqrt{x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{4k+2}}{(2k+2)!n^{2k+1}} \right), \end{aligned} \quad (8)$$

а $z_* > 0$ определяется из уравнения

$$e^{-z_*^2} = \left(\frac{\Phi_1(-\sqrt{x})}{\Phi_1(\sqrt{x})} \right)^n = \left(\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right)^{2n}. \quad (9)$$

Подставим (7) в выражение (6) для q_n :

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{(-1)^n n^{-1/2}}{2\pi} \int_0^{\infty} (\sqrt{x}+1)^{2n+1} x^{n-1/4} e^{-x} dx \\ &\quad \times \int_{-z_*}^{z_*} e^{-z^2} R^{-1/2}(z, x, n) dz. \end{aligned}$$

Теперь сделаем замену $x = ny$:

$$\begin{aligned} q_n &= \frac{n^{2n+3/4}}{2\pi} \int_0^{\infty} (\sqrt{y}+1/\sqrt{n})^{2n+1} y^{n-1/4} e^{-ny} dy \\ &\quad \times \int_{-z_*}^{z_*} e^{-z^2} R^{-1/2}(z, ny, n) dz. \end{aligned}$$

Из разложения (8) видно, что $R(z, ny, n) = 1 + \mathcal{O}(n^{-1/2})$. Кроме того, из определения (9) z_* следует, что $z_* \approx 2(n/y)^{1/4}$, поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{-z_*}^{z_*} e^{-z^2} R^{-1/2}(z, ny, n) dz \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} R^{-1/2}(z, ny, n) dz (1 + \mathcal{O}(e^{-(n/y)^{1/2}})). \end{aligned}$$

Итак, имеем

$$q_n = \frac{n^{2n+3/4}}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} (\sqrt{y} + 1/\sqrt{n})^{2n+1} y^{n-1/4} e^{-ny} dy (1 + \mathcal{O}(n^{-1/2})).$$

Асимптотику этого интеграла также найдем методом перевала. Пусть

$$\varphi_2(y) = 2 \ln(\sqrt{y} + 1/\sqrt{n}) + \ln y - y, \quad \psi_2(y) = (\sqrt{y} + 1/\sqrt{n})y^{-1/4}.$$

Функция φ_2 достигает глобального максимума на полуоси в точке $y_0 = 2 - 1/\sqrt{2n} + 3/(8n) + \mathcal{O}(n^{-3/2})$. Имеем

$$\begin{aligned} \varphi_2(y_0) &= -2 + 2 \ln 2 + \sqrt{\frac{2}{n}} - \frac{3}{8n} + \mathcal{O}(n^{-3/2}), \\ \varphi_2''(y_0) &= -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(n^{-1/2}), \\ \psi_2(y_0) &= 2^{1/4} + \mathcal{O}(n^{-1/2}). \end{aligned}$$

Таким образом, асимптотическая формула для q_n имеет вид

$$\begin{aligned} q_n &= (2n)^{2n+1/4} e^{-2n+\sqrt{2n}-3/8} (1 + \mathcal{O}(n^{-1/2})) \\ &= \pi^{-1/2} (2n)! (8n)^{-1/4} e^{\sqrt{2n}-3/8} (1 + \mathcal{O}(n^{-1/2})). \end{aligned}$$

Первая формула в (4) получена.

2. Асимптотика f_n . Аналогично предыдущему пункту, получаем интегральное выражение для f_n :

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_0^{\infty} (x-1)^{2n+1} x^n e^{-x} dx \\ &\quad \times \int_{\gamma_x} \frac{s^n ds}{(s-x)^{n+1}} \int_{\gamma_s} \frac{\ln t dt}{(t-1)(t-s)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (10)$$

Преобразуем интеграл по γ_s . Контур γ_s может быть деформирован в два берега отрицательной полуоси. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_s} \frac{\ln t dt}{(t-1)(t-s)^{n+1}} &= 2\pi i \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(t-1)(t-s)^{n+1}} \\ &= (-1)^n 2\pi i \int_0^{\infty} \frac{dt}{(t+1)(t+s)^{n+1}}. \end{aligned}$$

По теореме Фубини, поменяем порядок интегрирования в (10):

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{(-1)^n}{2\pi i} \int_0^{\infty} (x-1)^{2n+1} x^n e^{-x} dx \\ &\quad \times \int_0^{\infty} \frac{dt}{t+1} \int_{\gamma_x} \frac{s^n ds}{(t+s)^{n+1}(s-x)^{n+1}}. \end{aligned} \quad (11)$$

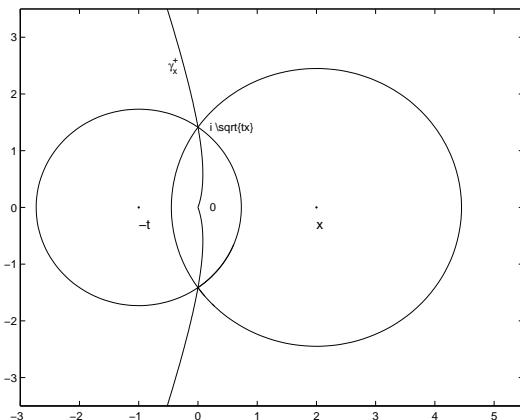


Рис. 6.2. Линии уровня и перевальный контур функции Φ_3 .

Найдем асимптотику внутреннего интеграла. Положим,

$$\Phi_3(s) = \frac{s}{(s-x)(t+s)}.$$

Функция $\Phi_3(s)$ имеет две точки перевала $s_0^\pm = \pm i\sqrt{tx}$, в которых принимает значения равные по модулю. Деформируем контур γ_x так, чтобы он проходил через перевальные точки в направлениях наискорейшего спуска. Тогда

$$\int_{\gamma_x} \frac{s^n ds}{(t+s)^{n+1}(s-x)^{n+1}} = (I - \bar{I}), \quad (12)$$

где

$$I = \int_{\gamma_x^+} \frac{s^n ds}{(t+s)^{n+1}(s-x)^{n+1}}.$$

Сделаем замену переменной:

$$e^{-z^2} = \left(\frac{\Phi_3(s)}{\Phi_3(i\sqrt{tx})} \right)^n,$$

После некоторых преобразований получим:

$$I = \frac{(-1)^n n^{-1/2} e^{\pi i/4}}{(1-i\sqrt{t/x})^{2n+1} x^{n+3/4} t^{1/4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} R^{-1/2}(z, -t/x, n) dz, \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} R(z, -t/x, n) &= \\ &= \frac{e^{z^2/n} (1 - i\sqrt{t/x})^2 - 2(1 - t/x) + e^{-z^2/n} (1 + i\sqrt{t/x})^2}{-4i\sqrt{t/x} e^{-z^2/n} z^2/n} \\ &= e^{z^2/n} \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{4k}}{(2k+1)! n^{2k}} - \frac{1-t/x}{2i\sqrt{t/x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{4k+2}}{(2k+2)! n^{2k+1}} \right). \end{aligned}$$

Обозначим,

$$g(t) = \frac{e^{\pi i/4}}{(1-i\sqrt{t/x})^{2n+1} t^{1/4}} R^{-1/2}(z, -t/x, n) \quad (14)$$

Будем считать, что ветви радикалов, входящих в определение $g(t)$, голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и положительны при подходе к \mathbb{R}_+ сверху. Таким образом, $g(t) = g_+(t)$ при $t > 0$. Легко видеть, что при таком определении ветвей $\bar{g}(t) = g_-(t)$ при $t > 0$. Функция $g(t)$ аналитична в $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Кроме того, $g(t) \rightarrow 0$ при $|t| \rightarrow \infty$. Поэтому для проведения в (11) интегрирования по t , имеем

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{(g(t) - \bar{g}(t)) dt}{t+1} &= \left(\int_{(0, -\infty)_+} - \int_{(0, -\infty)_-} \right) \frac{g(t) dt}{t+1} \\ &= 2\pi i \operatorname{Res}_{t=-1} g(t) = \frac{2\pi i}{(1+1/\sqrt{x})^{2n+1}} R^{-1/2}(z, 1/x, n). \end{aligned}$$

Подставляем найденное (см. (12)), (13), (14) в выражение (11) для f_n :

$$f_n = \frac{n^{-1/2}}{2\pi} \int_0^\infty (\sqrt{x} + 1)^{2n+1} x^{n-1/4} e^{-x} dx \\ \times \int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} R^{-1/2}(z, 1/x, n) dz. \quad (15)$$

Теперь делаем замену $x = ny$ и замечаем, что

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-z^2} R^{-1/2}(z, 1/ny, n) dz = \sqrt{\pi} + \mathcal{O}(n^{-1/2}).$$

Имеем в (15)

$$f_n = n^{2n+3/4} \sqrt{\pi} \int_0^\infty (\sqrt{y} - 1/\sqrt{n})^{2n+1} y^{n-1/4} e^{-ny} dy (1 + \mathcal{O}(n^{-1/2})).$$

Асимптотику этого интеграла также найдем методом перевала. Пусть

$$\varphi_4(y) = 2 \ln(\sqrt{y} - 1/\sqrt{n}) + \ln y - y, \quad \psi_4(y) = (\sqrt{y} + 1/\sqrt{n}) y^{-1/4}$$

Функция φ_4 достигает глобального максимума на полуоси в точке $y_0 = 2 + 1/\sqrt{2n} + 3/(8n) + \mathcal{O}(n^{-3/2})$,

$$\varphi_4(y_0) = -2 + 2 \ln 2 - \sqrt{\frac{2}{n}} - \frac{3}{8n} + \mathcal{O}(n^{-3/2}), \\ \varphi_4''(y_0) = -\frac{1}{2} + \mathcal{O}(n^{-1/2}), \\ \psi_4(y_0) = 2^{1/4} + \mathcal{O}(n^{-1/2}).$$

Таким образом, асимптотическая формула для f_n имеет вид

$$f_n = 2\pi(2n)^{2n+1/4} e^{-2n-\sqrt{2n}-3/8} (1 + \mathcal{O}(n^{-1/2})) \\ = 2\pi^{1/2} (2n)! (8n)^{-1/4} e^{-\sqrt{2n}-3/8} (1 + \mathcal{O}(n^{-1/2})).$$

Теорема доказана.

Список литературы

- [1] A. I. Aptekarev, A. Branquinho, W. Van Assche, “Multiple orthogonal polynomials for classical weights”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **355**:10 (2003), 3887–3914 doi 10.1090/S0002-9947-03-03330-0, MR 1990569, Zbl 1033.33002.

Приложения (А. И. Боголюбский)

Приложение А

Maple-программа с доказательством первого 7-членного рекуррентного соотношения, содержащая его коэффициенты

```
> restart;
> # *****
> # This worksheet contains computational proof
> # of one of the 7-term RRs. Correctness of this
> # RR is derived from the correctness of 4 6-term
> # stepline RRs
> # *****
> # First of all, let us introduce known 6-term stepline RR
> # *****
> RR6_from:=proc(ind1, ind2, ind3, ind4)
> # *****
> # returns 6-term stepline recurrence relation formula notation,
> # starting from the Q[ind1, ..., ind4]
> # (must belong to the stepline!)
> # Output format: (RESULT) = 0
> # *****
> local j,d1, d2, d3, A, n, t1, t2, t3, res;
> d1:=ind1-ind2;
> d2:=ind1-ind3;
> d3:=ind1-ind4;
> t1 := t_0[n+1, n];
> t2 := t_0[n, n];
> if [d1, d2, d3] = [0, 0, 0] then
> t3 := t_0[n, n-1];
> n:=ind1+1;
> A[0] := -t1-2*n;
> A[1] := -2*n-7*n^2;
> A[2] := -2*t2*n-3*n^3+2*n^2-7*t2*n^2;
> A[3] := -2*n^3-9*n^4;
> A[4] := -2*t3*n^3-9*t3*n^4+3*n^4;
> res:=A[4]*Q[n-1, n-1, n-1, n-1] + A[3]*Q[n, n-1, n-1, n-1]+
> A[2]*Q[n, n, n-1, n-1] + A[1]*Q[n, n, n, n-1] +
> (z+A[0])*Q[n, n, n, n] - Q[n+1, n, n, n]
> elif [d1, d2, d3] = [1, 1, 1] then
> t3 := t_0[n, n-1];
> n:=ind1;
> A[0] := -5*n-4+t1;
> A[1] := 1-3*n-4*t1-7*n^2+t1^2-3*t1*n;
> A[2] := -24*n^3-6*n+2*t1*n-25*n^2+7*t1*n^2;
> A[3] := -25*t2*n^2-6*t2*n+3*n^2+7*t2*t1*n^2-n^3-9*n^4-
> 2*t1*n^2+2*t2*t1*n+3*t1*n^3-24*t2*n^3;
> A[4] := -27*n^5-7*n^3-30*n^4+9*t1*n^4+2*t1*n^3;
> res:=A[4]*Q[n, n-1, n-1, n-1] + A[3]*Q[n, n, n-1, n-1] +
> A[2]*Q[n, n, n, n-1] + A[1]*Q[n, n, n, n] +
> (z+A[0])*Q[n+1, n, n, n] - Q[n+1, n+1, n, n]
> elif [d1, d2, d3] = [0, 1, 1] then
> t1 := t_0[n+1, n+1];
> t2 := t_0[n+1, n];
> t3 := t_0[n, n];
> n:=ind1;
> A[0] := -t1-2*n-1;
> A[1] := -3-9*n-7*n^2;
> A[2] := 1-3*n^3-7*t2*n^2+3*n-9*t2*n+n^2-3*t2;
> A[3] := -8*n^3-9*n^4-2*n^2;
```

```

> A[4] := n^3+3*n^4-8*t3*n^3-9*t3*n^4-2*t3*n^2;
> res:=A[4]*Q[n, n, n-1, n-1] + A[3]*Q[n, n, n, n-1] +
> A[2]*Q[n, n, n, n] + A[1]*Q[n+1, n, n, n] +
> (z+A[0])*Q[n+1, n+1, n, n] - Q[n+1, n+1, n+1, n]
> elif [d1, d2, d3] = [0, 0, 1] then
> t1 := t_0[n+1, n+1];
> t2 := t_0[n+1, n];
> n:=ind1;
> A[0] := -5*n-6+t1;
> A[1] := -3-5*t1-10*n-3*t1*n+t1^2-7*n^2;
> A[2] := -14-24*n^3+3*t1-51*n+7*t1*n^2+9*t1*n-61*n^2;
> A[3] := 4+13*n^2+7*t2*t1*n^2+15*n-t1*n^2-7*n^3-9*n^4-
> t1+3*t2*t1-3*t1*n-14*t2-61*t2*n^2-
> 51*t2*n+3*t1*n^3+9*t2*t1*n-24*t2*n^3;
> A[4] := -27*n^5+8*t1*n^3-38*n^3-57*n^4+
> 9*t1*n^4-8*n^2+2*t1*n^2;
> res:=A[4]*Q[n, n, n, n-1] + A[3]*Q[n, n, n, n] +
> A[2]*Q[n+1, n, n, n] + A[1]*Q[n+1, n+1, n, n] +
> (z+A[0])*Q[n+1, n+1, n+1, n] - Q[n+1, n+1, n+1, n+1]
> else
> error "multi-index [ind1, ind2, ind3, ind4]
> must belong to the stepline"
> end if;
> return res
> end proc:
> # *****
> # internal service routine
> # *****
> next_on_SL:=proc(ind)
> # *****
> # returns multi-index following after 'ind' on the stepline
> # *****
> local d1, d2, d3, res;
> d1:=ind[1]-ind[2];
> d2:=ind[1]-ind[3];
> d3:=ind[1]-ind[4];
> if [d1, d2, d3] = [0, 0, 0] then
> res:=[ind[1]+1, op(2..4, ind)]
> elif [d1, d2, d3] = [1, 1, 1] then
> res:=[ind[1], ind[2]+1, ind[3], ind[4]]
> elif [d1, d2, d3] = [0, 1, 1] then
> res:=[ind[1], ind[2], ind[3]+1, ind[4]]
> elif [d1, d2, d3] = [0, 0, 1] then
> res:=[op(1..3, ind), ind[4]+1]
> else
> error "multi-index ind must belong to the stepline"
> end if;
> return res
> end proc:

> # *****
> # The method we are using to prove 7-term RR is quite simple:
> # let us fix index n, and take 5 consequent "basis"
> # polynomials
> # Q[n, n, n, n], ... Q[n+1, n+1, n+1, n+1] on the stepline.
> # Further, we express the polynomial far enough from the
> # first ones (Q[n+3, n+3, n+3, n+3]) using the 6-term RRs,
> # and using 7-term RR. The results coincide, q.e.d.
> # *****
> Q[n, n, n, n] := B[0]:
> Q[n+1, n, n, n] := B[1]:
> Q[n+1, n+1, n, n] := B[2]:
> Q[n+1, n+1, n+1, n] := B[3]:
> Q[n+1, n+1, n+1, n+1] := B[4]:
> # *****
> # We will need also some parameter "tau" to recurrently express
> # Hermite-kind integrals t_0[n, m] in terms of this parameter.
> # tau equals first of these integrals we need.
> # Eventually, all entries of this free parameter
> # will be eliminated.
> # *****

```



```

> t_0[n+1, n] := tau:
> t_0[n+1, n+1] := 3*(n+1)-2*(n+1)/(1-tau):
> for j from 1 to 15 do
> t_0[n+1+j, n+j] := simplify(3*(n+j)+2-(2*(n+j)+1)/((n+j)/t_0[n+j,
> n+j]-3*(n+j)-1));
> t_0[n+1+j, n+1+j] := simplify(3*(n+j+1)-2*(n+j+1)/(1-t_0[n+j+1,
> n+j]));
> end do:

> # *****
> # now let's compute all stepline polynomials up to
> # Q[n+3, n+3, n+3] using 6-term RRs
> # *****
> ind:=n, n, n, n]:
> for j from 0 to 7 do
> q, q_tmp:=selectremove(has, RR6_from(op(ind)), Q);
> q:=-q;
> q_val:=0;
> for k from 0 to 4 do
> q_tmp:=collect(q_tmp, B[k]);
> c_tmp:=collect(expand(coeff(q_tmp, B[k], 1)), z);
> q_val:=q_val+B[k]*add(simplify(coeff(c_tmp, z, m))*z^m,
> m=0..degree(c_tmp, z));
> end do;
> q_val:=q_tmp;
> assign(q, q_val);
> ind:=next_on_SL(ind)
> end do:

> # *****
> # Coefficients of 7-term RR to be proved
> # *****
> c[1, 0]:=n->(-18954729*n^18+475501914*n^17-5709165687*n^16+43469502120*n^15-234259692624*n^14+944456549994*n^13-2937964703173*n^12+17176308978564*n^11-13890421859022*n^10+21370392419763*n^9-26076164020818*n^8+25046173010216*n^7-18674801819127*n^6+1056580680505*n^5-4372106280552*n^4+1243289225536*n^3-215462345952*n^2+16617615360*n+145350656)/(14348907*n^16-343310886*n^15+3865111344*n^14-27164606715*n^13+133273490211*n^12-483394474458*n^11+1338882534729*n^10-2883934215407*n^9+4873725220860*n^8-6471794720620*n^7+6717713652503*n^6-5383037747882*n^5+3257932526066*n^4-1436585539036*n^3+434220694224*n^2-80158442496*n+6785478656):

> c[1, 1]:=n->(-99910908*n^17+2390953059*n^16-26876526327*n^15+188301448683*n^14-919734939135*n^13+3317992743213*n^12-9135792953726*n^11+19562041333401*n^10-32882771920698*n^9+43489611452724*n^8-45065918180973*n^7+36190756581710*n^6-22093565620386*n^5+9940109169458*n^4-3135406639075*n^3+636656118220*n^2-70436375424*n+2743290880)/(14348907*n^16-343310886*n^15+3865111344*n^14-27164606715*n^13+133273490211*n^12-483394474458*n^11+1338882534729*n^10-2883934215407*n^9+4873725220860*n^8-6471794720620*n^7+6717713652503*n^6-5383037747882*n^5+3257932526066*n^4-1436585539036*n^3+434220694224*n^2-80158442496*n+6785478656):

> c[2, 0]:=n->(96367968*n^20-2467854540*n^19+29673703701*n^18-222555831417*n^17+1166637592872*n^16-4539415419945*n^15+13592887153064*n^14-32055365793031*n^13+60444564255786*n^12-92040735609636*n^11+113863820736404*n^10-114748140791904*n^9+94108174672917*n^8-62410517834634*n^7+32947587600913*n^6-13394009637132*n^5+3906926236023*n^4-680068630201*n^3+16386420552*n^2+19507817968*n-2985148672)/(14348907*n^16-343310886*n^15+3865111344*n^14-27164606715*n^13+133273490211*n^12-483394474458*n^11+1338882534729*n^10-2883934215407*n^9+4873725220860*n^8-6471794720620*n^7+6717713652503*n^6-5383037747882*n^5+3257932526066*n^4-1436585539036*n^3+434220694224*n^2-80158442496*n+6785478656):

> c[2, 1]:=n->(-116208432*n^19+2829490299*n^18-32899261887*n^17+242435970756*n^16-1266194200743*n^15+4965181473861*n^14-15117067716648*n^13+36494015528582*n^12-7084424055732*n^11+111729068408057*n^10-144340261309323*n^9+153829958045159*n^8-135965120868836*n^7+99758691959182*n^6-60286613748588*n^5+29306515812564*n^4-10987118024327*n^3+2955456001056*n^2-502534308944*n+40196961024)/(14348907*n^16-343310886*n^15+3865111344*n^14-27164606715*n^13+133273490211*n^12-483394474458*n^11+1338882534729*n^10-2883934215407*n^9+4873725220860*n^8-6471794720620*n^7+6717713652503*n^6-5383037747882*n^5+3257932526066*n^4-1436585539036*n^3+434220694224*n^2-80158442496*n+6785478656):

```

```

> c[2,2]:=n->(-92116440*n^18+2427760269*n^17-29871360387*n^16+2288073840
39*n^15-12268388592611*n^14+4905746910000*n^13-15204990302515*n^12+3743
5682041482*n^11-74327694947011*n^10+119938192805795*n^9-15753046073594
2*n^8+16768583309645*n^7-143186751928495*n^6+96428445145175*n^5-49910
137290547*n^4+19088828912285*n^3-5062487795588*n^2+828020172416*n-6265
9052544)/(14348907*n^16-343310886*n^15+3865111344*n^14-27164606715*n^13
+133273490211*n^12-483394474458*n^11+1338882534729*n^10-2883934215407
*n^9+4873725220860*n^8-6471794720620*n^7+6717713652503*n^6-53830377478
82*n^5+3257932526066*n^4-1436585539036*n^3+434220694224*n^2-80158442429
6*n+6785478656);

> c[2,3]:=n->(-100973790*n^17+2458446066*n^16-28264965147*n^15+203598379
359*n^14-1027587743964*n^13+3849350369832*n^12-11058745955854*n^11+248
29685286484*n^10-44001183817563*n^9+61736690298536*n^8-68397457115929*n
n^7+59324912846147*n^6-39666602988184*n^5+19945885955244*n^4-725343969
7169*n^3+178224159396*n^2-265035653248*n+17613145088)/(14348907*n^16-
343310886*n^15+3865111344*n^14-27164606715*n^13+133273490211*n^12-4833
94474458*n^11+1338882534729*n^10-2883934215407*n^9+4873725220860*n^8-6
471794720620*n^7+6717713652503*n^6-5383037747882*n^5+3257932526066*n^4
-1436585539036*n^3+434220694224*n^2-80158442496*n+6785478656);

> c[2,4]:=n->1:

> c[3,0]:=n->(153763596*n^21-4456152468*n^20+60987467133*n^19-5239769303
52*n^18-3168821941038*n^17-14337138780270*n^16+50350491204344*n^15-14+248
544935648387*n^14+316697796237678*n^13-581810722917003*n^12+8762200956
42443*n^11-1083617155084929*n^10+1098176916145396*n^9-906267047435990*n
n^8+601862533213417*n^7-315340711591972*n^6+126081367233980*n^5-362201
60743277*n^4+6544086870063*n^3-434391193080*n^2-76482115088*n+13928873
728)/(14348907*n^15-328961979*n^14+3536149365*n^13-23628457350*n^12+10
9645032861*n^11-373749441597*n^10+965133093132*n^9-1918801122275*n^8+2
954924098585*n^7-3516870622035*n^6+3200843030468*n^5-2182194717414*n^4
+1075737808652*n^3-360847730384*n^2+73372963840*n-6785478656);

> c[3,1]:=n->(652609548*n^20-17104605732*n^19+210456658998*n^18-16166352
71907*n^17+8694515899503*n^16-34785878911065*n^15+107320943729644*n^14
-260959431955821*n^13+506249847337872*n^12-786784644873939*n^11+975256
526882674*n^10-948376667616910*n^9+695179857178206*n^8-344807354418272
*n^7+66611471119219*n^6+58585081968537*n^5-66417169901508*n^4+34760450
734413*n^3-10932298914500*n^2+1989825045696*n-162442694656)/(14348907*
n^15-328961979*n^14+3536149365*n^13-23628457350*n^12+109645032861*n^11
-373749441597*n^10+965133093132*n^9-1918801122275*n^8+2954924098585*n^7
-3516870622035*n^6+3200843030468*n^5-2182194717414*n^4+1075737808652*
n^3-360847730384*n^2+73372963840*n-6785478656);

> c[3,2]:=n->(-43046721*n^19+1775544381*n^18-29334244122*n^17+2827748550
33*n^16-1850869255158*n^15+8909469811665*n^14-33060366015984*n^13+9731
7597294468*n^12-231114771120998*n^11+446658770496236*n^10-704312595434
902*n^9+904149363586348*n^8-938811884327290*n^7+779818764165276*n^6-50
9623095649246*n^5+255621465604557*n^4-947577977076833*n^3+2440148285041
2*n^2-3888929128896*n+288221722624)/(14348907*n^15-328961979*n^14+3536
149365*n^13-23628457350*n^12+109645032861*n^11-373749441597*n^10+96513
3093132*n^9-1918801122275*n^8+2954924098585*n^7-3516870622035*n^6+3200
843030468*n^5-2182194717414*n^4+1075737808652*n^3-360847730384*n^2+733
72963840*n-6785478656);

> c[3,3]:=n->(-2187*n^7+20817*n^6-83601*n^5+183668*n^4-238475*n^3+183071
*n^2-76977*n+13684)/(81*n^4-558*n^3+1438*n^2-1644*n+704);

> c[4,0]:=n->(-461290788*n^22+13533440310*n^21-188384398677*n^20+1654885
694871*n^19-10293200763273*n^18+48205239484158*n^17-176451482383562*n^16
+517205251201253*n^15-1233639407112140*n^14+2419625368109545*n^13-39
2681555258201*n^12+5287408171925733*n^11-5903004833308976*n^10+544240
5694188302*n^9-4110928363252788*n^8+251101412616075*n^7-1215263562692
671*n^6+45111215380207*n^5-121461708908436*n^4+21153343139018*n^3-163
9514947632*n^2-117889173472*n+26518086144)/(14348907*n^15-328961979*n^14
+3536149365*n^13-23628457350*n^12+109645032861*n^11-373749441597*n^10
+965133093132*n^9-1918801122275*n^8+2954924098585*n^7-3516870622035*n^6
+3200843030468*n^5-2182194717414*n^4+1075737808652*n^3-360847730384*
n^2+73372963840*n-6785478656);

```

```

> c[4, 1] := n -> (1037904273*n^21 - 27787987008*n^20 + 351868326129*n^19 - 2803065
602499*n^18 + 15759796628880*n^17 - 66481920156942*n^16 + 218301370746255*n^
15 - 571063052077548*n^14 + 1207445917188416*n^13 - 2080138330461733*n^12 + 29
27274794677710*n^11 - 3355075410481656*n^10 + 3101981844351364*n^9 - 22686643
375301211*n^8 + 1262502936793094*n^7 - 488558100768913*n^6 + 93279580378635*
n^5 + 22974275794032*n^4 - 24291203246892*n^3 + 8691334987318*n^2 - 1611215415
864*n + 128703724160) / (14348907*n^14 - 300264165*n^13 + 2935621035*n^12 - 1775
7215280*n^11 + 74130602301*n^10 - 225488236995*n^9 + 514156619142*n^8 - 890487
883991*n^7 + 1173948330603*n^6 - 1168973960829*n^5 + 862895108810*n^4 - 456404
499794*n^3 + 162928809064*n^2 - 34990112256*n + 3392739328) :
> c[4, 2] := n -> (14348907*n^21 + 258280326*n^20 - 11981337345*n^19 + 173262540267
*n^18 - 1488805415694*n^17 + 8949215460609*n^16 - 40557249615834*n^15 + 144414
869705190*n^14 - 413945758755329*n^13 + 968775156630274*n^12 - 1865380131959
762*n^11 + 2964013288530208*n^10 - 3884049740097972*n^9 + 4181059969988315*n
^8 - 3670392908061999*n^7 + 2597918402060285*n^6 - 1457895289770538*n^5 + 6327
54432080718*n^4 - 204504358682130*n^3 + 46261323977200*n^2 - 6525190006304*n
+ 431220100608) / (14348907*n^15 - 328961979*n^14 + 3536149365*n^13 - 236284573
50*n^12 + 109645032861*n^11 - 373749441597*n^10 + 965133093132*n^9 - 191880112
2275*n^8 + 2954924098585*n^7 - 3516870622035*n^6 + 3200843030468*n^5 - 2182194
717414*n^4 + 1075737808652*n^3 - 360847730384*n^2 + 73372963840*n - 6785478656
):
> c[4, 3] := n -> (-243*n^6 + 1647*n^5 - 4599*n^4 + 6778*n^3 - 5565*n^2 + 2415*n - 433) / (
9*n - 16) :
> c[5, 0] := n -> (461290788*n^22 - 13520095236*n^21 + 187985765439*n^20 - 16495330
13829*n^19 + 1024995725385*n^18 - 47969051502600*n^17 + 175526906951476*n^16 -
6154532881705099*n^15 + 1227887211907954*n^14 - 2410562127613909*n^13 + 391
7182256222305*n^12 - 5282720388743863*n^11 + 5908501754841568*n^10 - 5458642
147577112*n^9 + 413311131399432*n^8 - 2532577386991599*n^7 + 12317105006757
49*n^6 - 461347451340637*n^5 + 126624159099024*n^4 - 23174875998820*n^3 + 2207
950591776*n^2 + 17282784704*n - 18190672896) / (14348907*n^14 - 300264165*n^13
+ 2935621035*n^12 - 17757215280*n^11 + 74130602301*n^10 - 225488236995*n^9 + 51
4156619142*n^8 - 890487883991*n^7 + 1173948330603*n^6 - 1168973960829*n^5 + 86
2895108810*n^4 - 456404499794*n^3 + 162928809064*n^2 - 34990112256*n + 3392739
328) :
> c[5, 1] := n -> (6377292*n^21 + 34012224*n^20 - 3141702045*n^19 + 48585663729*n^18
- 425371270365*n^17 + 2574471996090*n^16 - 11730569031780*n^15 + 42130389606
084*n^14 - 122455242411388*n^13 + 292339415580064*n^12 - 577394750058759*n^11
+ 1945442337820588*n^10 - 1281206119784018*n^9 + 1429804082135676*n^8 - 13033
35297962398*n^7 + 958799622118557*n^6 - 559473567470863*n^5 + 25251194186119
6*n^4 - 84856129435388*n^3 + 19952850899632*n^2 - 2924255852288*n + 2007069081
60) / (14348907*n^14 - 300264165*n^13 + 2935621035*n^12 - 17757215280*n^11 + 74
30602301*n^10 - 225488236995*n^9 + 514156619142*n^8 - 890487883991*n^7 + 11739
48330603*n^6 - 1168973960829*n^5 + 862895108810*n^4 - 456404499794*n^3 + 16292
8809064*n^2 - 34990112256*n + 3392739328) :
> c[5, 2] := n -> (-972*n^9 + 12204*n^8 - 67575*n^7 + 216572*n^6 - 442638*n^5 + 598016*
n^4 - 533667*n^3 + 3030332*n^2 - 99228*n + 14256) / (81*n^3 - 396*n^2 + 246*n - 352) :
> c[6, 0] := n -> (-153763596*n^23 + 4807730214*n^22 - 71462215170*n^21 + 671913668
718*n^20 - 4485475391508*n^19 + 22618599651036*n^18 - 89481520202794*n^17 + 28
4693080763928*n^16 - 740721483723038*n^15 + 1593806412832250*n^14 - 2856329
09446034*n^13 + 4279786367498300*n^12 - 5366061507674396*n^11 + 561904726276
8480*n^10 - 4889955978554470*n^9 + 35071288372387328*n^8 - 2046848193714394*n^
7 + 954060740141764*n^6 - 345379808086344*n^5 + 92949080837904*n^4 - 17236618
997568*n^3 + 1872392384256*n^2 - 63051122688*n - 5232623616) / (14348907*n^14 -
300264165*n^13 + 2935621035*n^12 - 17757215280*n^11 + 74130602301*n^10 - 22548
8236995*n^9 + 514156619142*n^8 - 890487883991*n^7 + 1173948330603*n^6 - 116897
3960829*n^5 + 862895108810*n^4 - 456404499794*n^3 + 162928809064*n^2 - 3499011
2256*n + 3392739328) :
> c[6, 1] := n -> (-2125764*n^22 - 7440174*n^21 + 1069928514*n^20 - 18147899502*n^19
+ 171678305412*n^18 - 1117963522476*n^17 + 5472471286640*n^16 - 211157525126
84*n^15 + 66042187045232*n^14 - 170199475334270*n^13 + 364665896037520*n^12 -
652038169089716*n^11 + 972989596669408*n^10 - 120815737557840*n^9 + 1241226
243203058*n^8 - 104599288914758*n^7 + 7141130315769460*n^6 - 388127358738036
*n^5 + 163722623961544*n^4 - 51591199102640*n^3 + 11412231112352*n^2 - 1578569
515904*n + 102596634624) / (14348907*n^14 - 300264165*n^13 + 2935621035*n^12 -
17757215280*n^11 + 74130602301*n^10 - 225488236995*n^9 + 514156619142*n^8 - 890
487883991*n^7 + 1173948330603*n^6 - 1168973960829*n^5 + 862895108810*n^4 - 456
404499794*n^3 + 162928809064*n^2 - 34990112256*n + 3392739328) :
> c[6, 2] := n -> (36*n^8 - 406*n^7 + 1968*n^6 - 5352*n^5 + 8928*n^4 - 49354*n^3 + 6012*n^
2 - 2168*n + 336) / (9*n - 16) :

```

```

> # *****
> # Now let us compute Q[n+3, n+3, n+3, n+3]
> # using 7-term RR and call it "p".
> # *****
> N:=n+3;
> p:=expand(
> (c[1,0](N)+c[1,1](N)*z )*Q[N, N, N-1, N-1]+
> (c[2,0](N)+c[2,1](N)*z+c[2,2](N)*z^2+c[2,3](N)*z^3+
> c[2,4](N)*z^4)*Q[N-1, N-1, N-1, N-1]+
> (c[3,0](N)+c[3,1](N)*z+c[3,2](N)*z^2+
> c[3,3](N)*z^3)*Q[N-1, N-1, N-2, N-2]+
> (c[4,0](N)+c[4,1](N)*z+c[4,2](N)*z^2+
> c[4,3](N)*z^3)*Q[N-2, N-2, N-2, N-2]+
> (c[5,0](N)+c[5,1](N)*z+c[5,2](N)*z^2)*Q[N-2, N-2, N-3, N-3]+
> (c[6,0](N)+c[6,1](N)*z+c[6,2](N)*z^2)*Q[N-3, N-3, N-3, N-3]):
> p_tmp:=p;
> p:=0;
> for k from 0 to 4 do
> p_tmp:=collect(p_tmp, B[k]);
> c_tmp:=collect(expand(coeff(p_tmp, B[k], 1)), z);
> p:=p+B[k]*add(simplify(coeff(c_tmp, z, m))*z^m, m=0..degree(c_tmp,
> z));
> end do:

> # *****
> # Final step:
> # comparing results of 6-term and 7-term evaluation
> # *****
> simplify(Q[N, N, N, N]-p);
> # *****
> # Q.E.D. !
> # *****

```

0

Приложение В

Коэффициенты второго 7-членного рекуррентного соотношения, записанные в нотации Maple

```

> d[1,0]:=n->(-31414068*n^19+533776716*n^18-4307719320*n^17+22003996275
> *n^16-79919232282*n^15+219548926782*n^14-473087607120*n^13+81716606378
> 2*n^12-1144973497172*n^11+1307258282295*n^10-1214406110533*n^9+911616140
> 60246*n^8-546098809275*n^7+255973075886*n^6-90984800226*n^5+2320405429
> 0*n^4-3759776116*n^3+242197824*n^2+29891056*n-5359200)/(2834352*n^17-5
> 2514244*n^16+456415965*n^15-2473942662*n^14+9375575796*n^13-2638634303
> 7*n^12+57153737889*n^11-97397095341*n^10+132305140912*n^9-144201150257
> *n^8+126212496700*n^7-88287128337*n^6+48795110398*n^5-20874637258*n^4+
> 6677161572*n^3-1504358176*n^2+212925328*n-14229600):

> d[1,1]:=n->(80542836*n^18-1282550841*n^17+9487872306*n^16-43242669153*
> n^15+135729184950*n^14-310597605783*n^13+535173759603*n^12-70795180165
> 1*n^11+729498834964*n^10-597326990599*n^9+405986152776*n^8-24939077735
> 9*n^7+151092365907*n^6-88631680738*n^5+44648114258*n^4-17133499300*n^3
> +4539092736*n^2-732491152*n+54146400)/(2834352*n^17-52514244*n^16+4564
> 15965*n^15-2473942662*n^14+9375575796*n^13-26386343037*n^12+5715373788
> 9*n^11-97397095341*n^10+132305140912*n^9-144201150257*n^8+126212496700
> *n^7-88287128337*n^6+48795110398*n^5-20874637258*n^4+6677161572*n^3-15
> 04358176*n^2+212925328*n-14229600):

```

```

> d[2, 0] := -> (91644048*n^20 - 1579101480*n^19 + 12864426804*n^18 - 6601708623
6*n^17 + 239901481215*n^16 - 657954491508*n^15 + 1417200494904*n^14 - 24621094
74703*n^13 + 3512859748772*n^12 - 41263478276059*n^11 + 4122453186578*n^10 - 34
11593811328*n^9 + 2350238493962*n^8 - 1337731312956*n^7 + 62294949917*n^6 - 2
34575499578*n^5 + 70375573248*n^4 - 16422937272*n^3 + 2839055632*n^2 - 3255888
00*n + 18480000) * n / (2834352*n^17 - 52514244*n^16 + 456415965*n^15 - 2473942662
*n^14 + 9375575796*n^13 - 26386343037*n^12 + 57153737889*n^11 - 97397095341*n^10
+ 132305140912*n^9 - 144201150257*n^8 + 126212496700*n^7 - 88287128337*n^6 + 48795
110398*n^5 - 20874637258*n^4 + 6677161572*n^3 - 1504358176*n^2 + 212925328
8*n - 14229600) ;

> d[2, 1] := -> (184469076*n^20 - 3538819692*n^19 + 31415866443*n^18 - 1716443758
08*n^17 + 646975500336*n^16 - 1785912658371*n^15 + 3737321993925*n^14 - 6049999
9844965*n^13 + 7655682195910*n^12 - 7592423483560*n^11 + 5869979119593*n^10 - 10
3480798190249*n^9 + 1523244179866*n^8 - 441185991759*n^7 + 44898941671*n^6 + 3
0570814044*n^5 - 20180814036*n^4 + 6596184520*n^3 - 1334189280*n^2 + 157232416
*n - 8131200) / (2834352*n^17 - 52514244*n^16 + 456415965*n^15 - 2473942662*n^14
+ 9375575796*n^13 - 26386343037*n^12 + 57153737889*n^11 - 97397095341*n^10 + 13
2305140912*n^9 - 144201150257*n^8 + 126212496700*n^7 - 88287128337*n^6 + 48795
110398*n^5 - 20874637258*n^4 + 6677161572*n^3 - 1504358176*n^2 + 212925328*n - 1
4229600) ;

> d[2, 2] := -> (711422352*n^19 - 11559845583*n^18 + 87490018647*n^17 - 409194424
539*n^16 + 1322429840109*n^15 - 3126201984666*n^14 + 5576936909625*n^13 - 7625
034939390*n^12 + 8015129853806*n^11 - 6408107067940*n^10 + 3763273844244*n^9 -
1463058235419*n^8 + 211508651773*n^7 + 161451244433*n^6 - 143871464460*n^5 +
63112380816*n^4 - 8075050368*n^3 + 3429545824*n^2 - 3902868784*n + 19588800) /
(2834352*n^17 - 52514244*n^16 + 456415965*n^15 - 2473942662*n^14 + 9375575796*n^13
- 26386343037*n^12 + 57153737889*n^11 - 97397095341*n^10 + 132305140912*n^9 - 144
201150257*n^8 + 126212496700*n^7 - 88287128337*n^6 + 48795110398*n^5 - 20874637
258*n^4 + 6677161572*n^3 - 1504358176*n^2 + 212925328*n - 14229600) ;

> d[2, 3] := -> (-120223764*n^18 + 2006412849*n^17 - 15667638840*n^16 - 760522025
61*n^15 - 257091475446*n^14 + 642504105117*n^13 - 1229780717901*n^12 + 1842896
184869*n^11 - 2192182426368*n^10 + 2086922530549*n^9 - 1596156505548*n^8 + 8980
560587277*n^7 - 481075398131*n^6 + 185696160758*n^5 - 54629827234*n^4 + 114858
67476*n^3 - 1502614624*n^2 + 80004240*n + 2772000) / (2834352*n^17 - 52514244*n^16
+ 456415965*n^15 - 2473942662*n^14 + 9375575796*n^13 - 26386343037*n^12 + 571
53737889*n^11 - 97397095341*n^10 + 132305140912*n^9 - 144201150257*n^8 + 12621
2496700*n^7 - 88287128337*n^6 + 48795110398*n^5 - 20874637258*n^4 + 6677161572
*n^3 - 1504358176*n^2 + 212925328*n - 14229600) ;

> d[2, 4] := -> 1;

> d[3, 0] := -> (-80306640*n^23 + 1569811104*n^22 - 14181009552*n^21 + 7868535858
0*n^20 - 300161605662*n^19 + 833240490309*n^18 - 181732705456482*n^17 + 27230469
95431*n^16 - 3185645929505*n^15 + 2593110862815*n^14 - 1071192764082*n^13 - 57
7414818623*n^12 + 1520421855190*n^11 - 1536168886265*n^10 + 10102366890156*n^9
- 460204686744*n^8 + 132282940739*n^7 - 11669424675*n^6 - 9518406642*n^5 + 563
1019460*n^4 - 1718799136*n^3 + 350091696*n^2 - 47547552*n + 3326400) / (2834352*
n^17 - 52514244*n^16 + 456415965*n^15 - 2473942662*n^14 + 9375575796*n^13 - 2638
6343037*n^12 + 57153737889*n^11 - 97397095341*n^10 + 132305140912*n^9 - 144201
150257*n^8 + 126212496700*n^7 - 88287128337*n^6 + 48795110398*n^5 - 2087463725
8*n^4 + 6677161572*n^3 - 1504358176*n^2 + 212925328*n - 14229600) ;

> d[3, 1] := -> (-217064124*n^22 + 1524304008*n^21 + 8481898233*n^20 - 1660294042
11*n^19 + 1102057865649*n^18 - 4514120209215*n^17 + 13100261875839*n^16 - 2862
8044281185*n^15 + 48686796057702*n^14 - 65664227126584*n^13 + 70941494227255
*n^12 - 6158893479000*n^11 + 42809056110177*n^10 - 23518514212296*n^9 + 99135
20374428*n^8 - 2978572912391*n^7 + 483668526029*n^6 + 62636432476*n^5 - 710092
39044*n^4 + 25158513216*n^3 - 5366261872*n^2 + 693586720*n - 4250400) / (283435
2*n^17 - 52514244*n^16 + 456415965*n^15 - 2473942662*n^14 + 9375575796*n^13 - 26
386343037*n^12 + 57153737889*n^11 - 97397095341*n^10 + 132305140912*n^9 - 1442
01150257*n^8 + 126212496700*n^7 - 88287128337*n^6 + 48795110398*n^5 - 20874637
258*n^4 + 6677161572*n^3 - 1504358176*n^2 + 212925328*n - 14229600) ;

> d[3, 2] := -> (2699011692*n^21 - 47479509747*n^20 + 392809077666*n^19 - 2031077
640114*n^18 + 7354923416190*n^17 - 19801983882978*n^16 + 41054403799962*n^15 -
66944349680505*n^14 + 86872862802585*n^13 - 90085232869834*n^12 + 743462442
66733*n^11 - 48049004131880*n^10 + 23321474078143*n^9 - 7492700303636*n^8 + 864
6492671367*n^7 + 936770564865*n^6 - 694951224690*n^5 + 282882887876*n^4 - 7769
7498592*n^3 + 14511019888*n^2 - 1690362784*n + 93508800) / (2834352*n^17 - 52514
244*n^16 + 456415965*n^15 - 2473942662*n^14 + 9375575796*n^13 - 26386343037*n^12
+ 57153737889*n^11 - 97397095341*n^10 + 132305140912*n^9 - 144201150257*n^8
+ 126212496700*n^7 - 88287128337*n^6 + 48795110398*n^5 - 20874637258*n^4 + 6677
161572*n^3 - 1504358176*n^2 + 212925328*n - 14229600) ;

```

```

> d[3,3]:=n->(-2187*n^6+11340*n^5-23229*n^4+24320*n^3-14133*n^2+4424*n-5
> 88)/(81*n^3-315*n^2+394*n-154);

> d[4,0]:=n->(240919920*n^23-4253260104*n^22+34620271236*n^21-1708911924
> 48*n^20+562257790146*n^19-1254560447826*n^18+1734626042091*n^17-602134
> 039591*n^16-3758936055891*n^15+11401207373963*n^14-19614621714485*n^13
> +24266192795939*n^12-22987882122158*n^11+17019622793908*n^10-985200422
> 2566*n^9+4382804377482*n^8-1430763336619*n^7+299737244737*n^6-15384778
> 234*n^5-15149180316*n^4+6587305536*n^3-1513856912*n^2+211706592*n-1441
> 4400)/(2834352*n^16-49679892*n^15+406736073*n^14-2067206589*n^13+73083
> 69207*n^12-19077973830*n^11+38075764059*n^10-59321331282*n^9+729838096
> 30*n^8-71217340627*n^7+54995156073*n^6-33291972264*n^5+15503138134*n^4
> -5371499124*n^3+1305662448*n^2-198695728*n+14229600);

> d[4,1]:=n->(-542069820*n^23+7716523320*n^22-42391198368*n^21+619048392
> 75*n^20+582971936481*n^19-4659368547744*n^18+18837859899726*n^17-52430
> 210080146*n^16+109698123235920*n^15-179444877132188*n^14+2341447220877
> 34*n^13-246055672356605*n^12+208695266189506*n^11-142147832531347*n^10
> +76623100052044*n^9-31633135767570*n^8+9209817124795*n^7-1348963614055
> *n^6-279800213602*n^5+251364539844*n^4-85878456480*n^3+17963811312*n^2-
> 2277654432*n+136382400)/(2834352*n^16-49679892*n^15+406736073*n^14-20
> 67206589*n^13+7308369207*n^12-19077973830*n^11+38075764059*n^10-593213
> 31282*n^9+72983809630*n^8-71217340627*n^7+54995156073*n^6-33291972264*
> n^5+15503138134*n^4-5371499124*n^3+1305662448*n^2-198695728*n+14229600
> );

> d[4,2]:=n->(2710349100*n^22-52310977659*n^21+477449822412*n^20-2739429
> 866448*n^19+11076606326169*n^18-33525879803379*n^17+78730533326542*n^16
> -146659948893504*n^15+219586727593080*n^14-265910746039214*n^13+26033
> 5400186667*n^12-204280115967309*n^11+125565653285000*n^10-570953504376
> 46*n^9+15834793546167*n^8+640242939249*n^7-3539092652901*n^6+221521240
> 5206*n^5-852654141004*n^4+227257081568*n^3-41562215824*n^2+4758223328*
> n-259089600)/(2834352*n^16-49679892*n^15+406736073*n^14-2067206589*n^13
> +7308369207*n^12-19077973830*n^11+38075764059*n^10-59321331282*n^9+72
> 983809630*n^8-71217340627*n^7+54995156073*n^6-33291972264*n^5+15503138
> 134*n^4-5371499124*n^3+1305662448*n^2-198695728*n+14229600);

> d[4,3]:=n->(-243*n^7+1728*n^6-5193*n^5+8557*n^4-8360*n^3+4851*n^2-1552
> *n+212)/(9*n^2-28*n+22);

> d[5,0]:=n->(-240919920*n^24+4458120768*n^23-37991706696*n^22+195467374
> 584*n^21-661926941766*n^20+1463035536252*n^19-1677847397508*n^18-14316
> 39315106*n^17+11761028025152*n^16-31020057302782*n^15+54853050088604*n
> ^14-73252085727196*n^13+76967588449004*n^12-64631247260184*n^11+1434769
> 31571482*n^10-23232907082710*n^9+9642458487906*n^8-2951879371774*n^7+5
> 73335443590*n^6-17355374796*n^5-32871933800*n^4+13245038144*n^3-290806
> 4096*n^2+384656448*n-24393600)/(2834352*n^16-49679892*n^15+406736073*n
> ^14-2067206589*n^13+7308369207*n^12-19077973830*n^11+38075764059*n^10-
> 59321331282*n^9+72983809630*n^8-71217340627*n^7+54995156073*n^6-332919
> 72264*n^5+15503138134*n^4-5371499124*n^3+1305662448*n^2-198695728*n+14
> 229600);

> d[5,1]:=n->(1204599600*n^23-25673639148*n^22+258828720624*n^21-1641599
> 067474*n^20+7347618520830*n^19-24672992190102*n^18+644494596815164*n^17
> -134368301582208*n^16+226542557708264*n^15-311972294203610*n^14+352506
> 886056536*n^13-326853094880018*n^12+247477822319576*n^11-1511659567075
> 68*n^10+72614763242264*n^9-25857525541096*n^8+5629534604510*n^7+157093
> 918648*n^6-745871190344*n^5+357764076448*n^4-102570467232*n^3+19328356
> 032*n^2-2242176896*n+122707200)/(2834352*n^16-49679892*n^15+406736073*
> n^14-2067206589*n^13+7308369207*n^12-19077973830*n^11+38075764059*n^10
> -59321331282*n^9+72983809630*n^8-71217340627*n^7+54995156073*n^6-33291
> 972264*n^5+15503138134*n^4-5371499124*n^3+1305662448*n^2-198695728*n+1
> 4229600);

> d[5,2]:=n->(-972*n^9+9612*n^8-41286*n^7+101120*n^6-155718*n^5+156494*n
> ^4-102784*n^3+42630*n^2-10160*n+1064)/(81*n^3-315*n^2+394*n-154);

```

```

> d[6, 0] := n -> (80306640*n^25 - 1683027720*n^24 + 16274493432*n^23 - 95400436284
> *n^22 + 371414606526*n^21 - 966623745114*n^20 + 1455370603362*n^19 + 184747568
> 458*n^18 - 8100624784104*n^17 + 26625888635266*n^16 - 55585428179988*n^15 + 86
> 702597536386*n^14 - 106443225579726*n^13 + 105051126305300*n^12 - 8394828839
> 8650*n^11 + 54208223589784*n^10 - 27968242720536*n^9 + 11243032482500*n^8 - 33
> 28779690316*n^7 + 612423812864*n^6 - 4509209536*n^5 - 41092487712*n^4 + 156632
> 75840*n^3 - 3350469888*n^2 + 432124416*n - 26611200) / (2834352*n^16 - 49679892*
> n^15 + 406736073*n^14 - 2067206589*n^13 + 308369207*n^12 - 19077973830*n^11 + 3
> 8075764059*n^10 - 59321331282*n^9 + 72983809630*n^8 - 71217340627*n^7 + 549951
> 56073*n^6 - 33291972264*n^5 + 15503138134*n^4 - 5371499124*n^3 + 1305662448*n^
> 2 - 198695728*n + 14229600) :
>
> d[6, 1] := n -> (-401533200*n^24 + 9561712716*n^23 - 107803477530*n^22 + 76557151
> 0206*n^21 - 3842795691558*n^20 + 14500535643198*n^19 - 42703852450608*n^18 + 1
> 00562463144686*n^17 - 192424170567540*n^16 + 302292046286728*n^15 - 39219853
> 6682928*n^14 + 421098001054694*n^13 - 373438808007878*n^12 + 271664000521444
> *n^11 - 159775746261714*n^10 + 73746351818698*n^9 - 24892470143532*n^8 + 47596
> 20512446*n^7 + 565365754904*n^6 - 876733083312*n^5 + 387128173008*n^4 - 106835
> 995232*n^3 + 19616424576*n^2 - 2228412672*n + 119750400) / (2834352*n^16 - 49679
> 892*n^15 + 406736073*n^14 - 2067206589*n^13 + 7308369207*n^12 - 19077973830*n^
> 11 + 38075764059*n^10 - 59321331282*n^9 + 72983809630*n^8 - 71217340627*n^7 + 54
> 995156073*n^6 - 33291972264*n^5 + 15503138134*n^4 - 5371499124*n^3 + 130566244
> 8*n^2 - 198695728*n + 14229600) :
>
> d[6, 2] := n -> (36*n^9 - 418*n^8 + 2106*n^7 - 6036*n^6 + 10836*n^5 - 12630*n^4 + 9558*
> n^3 - 4532*n^2 + 1224*n - 144) / (9*n^2 - 28*n + 22) :

```

Приложение С

Явный вид двух коэффициентов 8-членного рекуррентного соотношения для рациональных приближений постоянной Эйлера

$$\begin{aligned}
 a_1(n) = & -38118941416341000848473455153125019514338017280n^{85} \\
 & + 10463211834436750048985097922324846177783638392832n^{84} \\
 & - 1392356979939130039834763952330505582880161085521 \\
 & \quad 920n^{83} \\
 & + 119082316680577231219528874090951430123193672049688 \\
 & \quad 576n^{82} \\
 & - 7298089239254394189821468582514386430877752808874606 \\
 & \quad 592n^{81} \\
 & + 3366591638975739360490676967641511398634135301267859 \\
 & \quad 86560n^{80} \\
 & - 1181659685896782628344219701712224019082555628240248 \\
 & \quad 8852480n^{79}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 3018095698413999503678032483575917250476967119393768 \\ &\quad 69216256n^{78} \\ &- 4312998266968994608993555454957900255477290548120000 \\ &\quad 859994112n^{77} \\ &- 5997575504930474587277875753063131562958029111628859 \\ &\quad 4977429504n^{76} \\ &+ 6861914244433912950757425594073475961259441091732597 \\ &\quad 054189184000n^{75} \\ &- 2943059323330534851431254783065552044671858108135662 \\ &\quad 75075094510848n^{74} \\ &+ 9256540579063718942689916284372478240446195394512111 \\ &\quad 090613790920832n^{73} \\ &- 2402981832023762685593951238836474841999133356723757 \\ &\quad 68621877379820480n^{72} \\ &+ 5390947154546194863501991462988607459420565893790858 \\ &\quad 325673574715673312n^{71} \\ &- 1070589020020927794223571108675800584909983292758272 \\ &\quad 50947122474062014544n^{70} \\ &+ 1910077983395542968085350497268480017258166060430355 \\ &\quad 092583535305257701432n^{69} \\ &- 3092741578947598332359737249042450933221439686228929 \\ &\quad 7681274391681641772472n^{68} \\ &+ 4578447978426925718495473372814040768577022514912322 \\ &\quad 68660553884362428853748n^{67} \\ &- 6232266797555843027884977736337141324323643293842070 \\ &\quad 993487018492593551099216n^{66} \\ &+ 7835877738550739508217693606059228014632674959809881 \\ &\quad 9456655869239150208728538n^{65} \\ &- 9133441341195026292085085232257794910772949392192165 \\ &\quad 50207450174441749814005650n^{64} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 9899126274046741861350454019399204135022588996158240 \\ &\quad 551792368655026878914598460n^{63} \\ &- 1000143886927034122093058098810834319415531554337305 \\ &\quad 13160667412774807122287934907n^{62} \\ &+ 9439192169141705158495816853935384199969461629044764 \\ &\quad 48951637661077404083832804659n^{61} \\ &- 8336030967922143657689150067762342153806594441691179 \\ &\quad 648616766085054263830518435331n^{60} \\ &+ 6898265023022168649563515651751481344788309782613665 \\ &\quad 7495297110195241912343325722525n^{59} \\ &- 5354857751988914028788009191063779766347343319592931 \\ &\quad 58489499490211031729727583471264n^{58} \\ &+ 3902335484641426227787803018892916414860673662406058 \\ &\quad 855038192973286076553471567768176n^{57} \\ &- 2671009461239368527341668401798593987829318700802263 \\ &\quad 9744007444987848076640415268052069n^{56} \\ &+ 1717340155306353875285915385717848843276036950923404 \\ &\quad 91894447151137023043066668401168071n^{55} \\ &- 1036924672487756892512893924551068061882784894098296 \\ &\quad 544819121070550473949441036515644814n^{54} \\ &+ 5874989133351634918108297086954838732471198396619241 \\ &\quad 163080143702454255794797003147013278n^{53} \\ &- 3118880461526195862415248085635147274281967737510378 \\ &\quad 1913817860438984888095677701808164539n^{52} \\ &+ 1547605712203451444493233188624659672339961078702811 \\ &\quad 52926123473314416771188453282460549541n^{51} \\ &- 7149503790279437406582047867861210221688818882790272 \\ &\quad 29014241152724422700096203365941866684n^{50} \\ &+ 3055187129913863703514301054638987440205193433282728 \\ &\quad 860718761986642511603118397966314823844n^{49} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 1194342936457443541212475394796226242423131887351755 \\
& \quad 0502112110775534572529301488127646365983n^{48} \\
& + 4183300290366308537966052608147687758167946800328005 \\
& \quad 5286584905232593934423427525874695854675n^{47} \\
& - 1254420755555354773774619469402689859138207600501172 \\
& \quad 41851581581740180142187058177964818498684n^{46} \\
& + 2814496864443277425952335159687791482490074990030661 \\
& \quad 28485198962419774380435425354311136541352n^{45} \\
& - 1574518394481512168967066897991059301248105456813728 \\
& \quad 10590237182387130867226435561008806971551n^{44} \\
& - 3030129912403242819953559785732803446800418515423739 \\
& \quad 921651203153287256462398786603652025140153n^{43} \\
& + 2392619767591540193045602772746400263521884942035337 \\
& \quad 0822872140112211437862281100141692682672906n^{42} \\
& - 1264708235509689690554431642393498636540760470295789 \\
& \quad 77234605269900615878067619711622435311315602n^{41} \\
& + 5571659683364069289155791554006483183196981072199189 \\
& \quad 35900359880844462203301076882628672522491707n^{40} \\
& - 2177314817867384778807762711390117440194358933987252 \\
& \quad 092193688675513411905984406379571205778666647n^{39} \\
& + 7750494058373643126656044609773811401745889332462433 \\
& \quad 777358700486222173245807923550478391101273351n^{38} \\
& - 2547793310571784513245150158215939949129288722132066 \\
& \quad 0416134376830957147919519314545114117023247759n^{37} \\
& + 7795920960734071515434413452253793374606934610707867 \\
& \quad 0326398142418152230935177949468678695943032572n^{36} \\
& - 2231367524074560161254664868628215196005233794968522 \\
& \quad 73635558330282293525886276718674212735656833084n^{35} \\
& + 5993086254923890534417920625658814454670559207080652 \\
& \quad 63910511839895629031913334745179114872341899887n^{34}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 151358709178844332691271990974086910291495785178d6080 \\
& \quad 574381201427199544551420472264579060361184664827n^{33} \\
& + 35993730029431021538464713083818583083777695211193431 \\
& \quad 58925114687361172515220211285302194794470909163n^{32} \\
& - 80662108874038299444841110087855091842084565724802429 \\
& \quad 53762745267273576351861916719758156908483166023n^{31} \\
& + 17042316806406208979804777269538112507548222863374523 \\
& \quad 641824079489601975289013747649301969223382816537n^{30} \\
& - 33952000047022899691711300732485761896870627407317491 \\
& \quad 372968154147169130873748814477733598375762026693n^{29} \\
& + 63772353356877072361787552328050795991464412743093954 \\
& \quad 274253663687298353930610045704985909713738345888n^{28} \\
& - 11289865192220749864634176344553615512137455388312814 \\
& \quad 4456392734384745865673958472883566928068345464498n^{27} \\
& + 18828190059417034060777104179702361955570717383514052 \\
& \quad 1148047229037272601221635173409691165230842810600n^{26} \\
& - 29558795579987978404575023043458936222476039545328509 \\
& \quad 0797693931057883237885175251940925444352365051204n^{25} \\
& + 43645627457576595254610182250218489236043316199956892 \\
& \quad 2063154291642023203919992893845967053262156649318n^{24} \\
& - 60549472486903217098018943925093257142772810002894850 \\
& \quad 9976622020114770918808342795069140057524573959312n^{23} \\
& + 78823376035173706713731023876958793181814504109082104 \\
& \quad 9041923101940208438536657304151910325019723582221n^{22} \\
& - 96149967212908743005812814470065181602491837167394754 \\
& \quad 6645040454958628686035620282666483169538771240989n^{21} \\
& + 10971732384184454503480767370252965177772906797506021 \\
& \quad 31288234189249775012407790330939496198167878299169n^{20} \\
& - 11690004545298325645618677135637786180966795819348880 \\
& \quad 05995187153299096302453166463740022702422403174407n^{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 11604757416003564981569944902197205033893409705301666 \\ &\quad 16900314336436170065623458631283056492619678253195n^{18} \\ &- 10707295956689358530424391236676847477354851587205654 \\ &\quad 29761595795377070277650817672439867346281792056301n^{17} \\ &+ 91567037341191919841235253826196731481251136799700716 \\ &\quad 8215541147127449373154221271104137939333822228610n^{16} \\ &- 72349577768434967798932981739172132929729991630265821 \\ &\quad 3040956965074615124217545178993111696558929979408n^{15} \\ &+ 52624737437593844414028688349863034137392369667284742 \\ &\quad 2931924131768848295092056011249063915098903943080n^{14} \\ &- 35089619501792811438735008244740352399801721941974951 \\ &\quad 2843350159354321190805031556239981268513322285424n^{13} \\ &+ 21344506369245075027079196591186883496810201000140644 \\ &\quad 2311519883074329156954300884984520603972681745568n^{12} \\ &- 11776980871160806899019171173573766942870394586260612 \\ &\quad 1524119332208253718669579244640431705281067772352n^{11} \\ &+ 58544871181545092990311631512492354854268206011795919 \\ &\quad 242761724951252275841529814685059798468756772992n^{10} \\ &- 26009622736787223295798003283351264357866293282368312 \\ &\quad 172487255282686266759338461601798596411194016256n^9 \\ &+ 10225552413000563763320175546199037928201460576221689 \\ &\quad 104984064130587212591832559021930508329123207168n^8 \\ &- 35142199113089679238182030923731689699006308036035359 \\ &\quad 25975061366357382094633427944071808332444216320n^7 \\ &+ 10394252674191250015831064601416460971071494314550803 \\ &\quad 80592373920999041110504414036611559799936323584n^6 \\ &- 25923446163734302117706318911275267746157885071474448 \\ &\quad 7772481077514261352997154036520804304879894528n^5 \\ &+ 53009871195332225675209850501516217756330394565744307 \\ &\quad 422635487223070939800801825187105748523876352n^4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 85333013883176601656748232639855904720222811532537511 \\
& \quad 76928656629624981002819414625096020330479616n^3 \\
& + 10139182772527756352931945850974723145142312016564308 \\
& \quad 74722154379364773067546238757681173331705856n^2 \\
& - 79052951094894651100001760675375421464584022011736577 \\
& \quad 363437257216444267435861179799214184464384n \\
& + 3033748079458899454666296800053073083415180036827573 \\
& \quad 300082121698680433170908843226665918136320, \\
b(n) = & 1774502445243460384325488429542026770495045632n^{83} \\
& - 715553206991481857876959618495211025359485403136n^{82} \\
& + 134863715773407329880090090804409485658943669796864n^{81} \\
& - 161339230150888086886250284965163837410024527 \\
& \quad 62214400n^{80} \\
& + 1392349859110775168029297995700697278478759450315833 \\
& \quad 344n^{79} \\
& - 9303394385891854974563137582451146472947303945035324 \\
& \quad 2112n^{78} \\
& + 5033810979409154750223220389851437693221727722894760 \\
& \quad 796160n^{77} \\
& - 22747749373989818860738317036369731111865652808703120 \\
& \quad 8801280n^{76} \\
& + 8781249962128984198353309600076947821682913246287001 \\
& \quad 113833472n^{75} \\
& - 2945714287905574689664009327797282898869421453114448 \\
& \quad 79153630720n^{74} \\
& + 8703109185313305576907492317476415046866700848430895 \\
& \quad 924872797696n^{73} \\
& - 2289256407219655796846783025004112550571873292411593 \\
& \quad 61297520250944n^{72} \\
& + 5408675742859919317436033245569905578604872703290101 \\
& \quad 256994317225152n^{71}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - 1156276747402735760336781798073234291363875764784683 \\ & \quad 51013556657656528n^{70} \\ & + 2250637891156888200879967373246003488724387442062092 \\ & \quad 932259769909544672n^{69} \\ & - 4009825486504116401291754897413228272961268504048829 \\ & \quad 5450584127870905148n^{68} \\ & + 6569092838299783263420188177618684578967084324444714 \\ & \quad 46259393575532856136n^{67} \\ & - 99350136210988069369281509765372056889248050653763370 \\ & \quad 77074170630112074686n^{66} \\ & + 1391942479158538557806630676930674569649261896368236 \\ & \quad 81487229288621051375356n^{65} \\ & - 1812127962378316957480583627359029163413533820570333 \\ & \quad 108706263032780785735791n^{64} \\ & + 2198073175757351970499091418250393405258853990823718 \\ & \quad 9273008262308457274155335n^{63} \\ & - 2490119436064481865414882035071191635724937279614326 \\ & \quad 33885869719228454740579663n^{62} \\ & + 2640267834780874407226616533563234069695811406111291 \\ & \quad 820770731837157878462281205n^{61} \\ & - 2625132577607923592845350658764111110938491410451318 \\ & \quad 3567889864758970408536600720n^{60} \\ & + 2451705813124347774876652774392599290838173208500926 \\ & \quad 55631201482850574072375079332n^{59} \\ & - 21540734926377393954774535323382815124362522016776714 \\ & \quad 23449774687783751098760668773n^{58} \\ & + 17828716579469758091901897869146875513827905474484284 \\ & \quad 942182165047229517761929982567n^{57} \\ & - 13918026087735310719006096856078672715480221076096770 \\ & \quad 1763871530275881228567077557130n^{56} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 10259070273263406923099083665459560365739227715268633 \\ &\quad 96563574992902209965750887930870n^{55} \\ &- 71471879125363393518209460786476576551739904605215699 \\ &\quad 92991815329639087431284559641791n^{54} \\ &+ 47101726133599206792583407786189058795457113527694635 \\ &\quad 386787455942824224451933461715037n^{53} \\ &- 29386486127542013650072684809100543083354398370225311 \\ &\quad 7131559906731648948453367972624872n^{52} \\ &+ 17368519508086956538844561416064079828681483953427245 \\ &\quad 07079619681019259110696500637033844n^{51} \\ &- 97306149749027493340509549140829936055918065455935543 \\ &\quad 47074446993959016857265187249891635n^{50} \\ &+ 51701523566461903670610673940553637106693926171922782 \\ &\quad 889242574341915264779348508377616359n^{49} \\ &- 26064070202671508721960382144789707437083894763027004 \\ &\quad 7002483294381611005268346913372538768n^{48} \\ &+ 12471419104388038878042229769746060418169090148645743 \\ &\quad 12795050861426612348857391712070166836n^{47} \\ &- 56656932076773194003425820668753225774680735795151544 \\ &\quad 48110317187065517799911962417981583999n^{46} \\ &+ 24442943468166428311461494345721572131868842731967660 \\ &\quad 951445551203249259287083898250951511435n^{45} \\ &- 10015869549396484294858785302551106253047031768445862 \\ &\quad 7546137131920049686799624197057156983806n^{44} \\ &+ 38985421761094597414701078801941071759694809731564208 \\ &\quad 0208972885144485659519139048472970998532n^{43} \\ &- 14414865018753929591357112614689503323017206908286583 \\ &\quad 08193725499544889056783594155814875599977n^{42} \\ &+ 50629403576633510185837729253582390806896286434267737 \\ &\quad 37185708518492430451408358873910750561785n^{41} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 16890432838219464110002587745483704220981994990293472 \\
& \quad 864784581042253419479939826782074073281873n^{40} \\
& + 53512938531208556102357141881353110241984276985726452 \\
& \quad 987718732602478236422810827365267239014615n^{39} \\
& - 16097676467920284715264230663065909813282600203922843 \\
& \quad 0483895428364482400718583881362426495668568n^{38} \\
& + 45965459618233747447661085158500093519446212906790636 \\
& \quad 8396252317361830209793425689085526415719316n^{37} \\
& - 12454092627217469813045607651206548923087259782285832 \\
& \quad 46982224544417068045552608883003208460228353n^{36} \\
& + 32005303729074870550992521393066736184400840552946771 \\
& \quad 69292350859163075428788506406864594246633627n^{35} \\
& - 77973371966387489591050575689258469470545646691371493 \\
& \quad 59212124422177058265276806681425037937820293n^{34} \\
& + 17998503174572432485720716816549762362705335779889715 \\
& \quad 255484388375088111378355404537246191419624137n^{33} \\
& - 39337557810448049308040710556127590842371145545063442 \\
& \quad 766122424532710554072606434065970350742662343n^{32} \\
& + 81345981836093547791183229791070593055938289375506655 \\
& \quad 376483267964305856128730378902074025679363835n^{31} \\
& - 15902226895391379719042819445359396103967008735972849 \\
& \quad 9659855375454204001870198668554949956052468828n^{30} \\
& + 29360508058715850544209049321205973516227617779928804 \\
& \quad 4825852004813062934605616524293416294068318582n^{29} \\
& - 51144015058453836954007756680310401989191582684869884 \\
& \quad 3045793197543587524484555482128011046672190920n^{28} \\
& + 83953732668579879163281523289377018273291950643858889 \\
& \quad 0513904952350734483287252501449195925230869586n^{27} \\
& - 12969651013506751528496670828855138129424423830539057 \\
& \quad 15015191011170165300756637281528726205495585590n^{26}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ 18828815899641053621658410410341993591346152430458848 \\ &\quad 28199042668227316137938212809580945581628673828n^{25} \\ &- 25645655037985137147325921293700231799030294758916311 \\ &\quad 60872231306982374412016345593254279588212402775n^{24} \\ &+ 32711998707988618763877771761357609131643320291331132 \\ &\quad 99898718582194490434055997607646297537791362085n^{23} \\ &- 38995514947554042763398758957016848519642005630319229 \\ &\quad 25993856349509545866033814549986004084215081399n^{22} \\ &+ 43345080843021350298879679382537592901296277341941231 \\ &\quad 78746458397009575281650762455976539087579543489n^{21} \\ &- 44808489673722012855820080722347558685237867466055061 \\ &\quad 10523701854156680034335173072947392011039028453n^{20} \\ &+ 42954363041265358940848951088086984173464075776742435 \\ &\quad 93413062883631057778262432979539781238254377615n^{19} \\ &- 38057384588996958742748278587912362714477924253600818 \\ &\quad 17739124954240229134185874013788515478169220014n^{18} \\ &+ 31046098415018211113825892630607975483780840469035632 \\ &\quad 08417530362085215702987981464954469510678393016n^{17} \\ &- 23217410920882242653554488227499619990402780770225743 \\ &\quad 84625292672361894526344847776013861774526839880n^{16} \\ &+ 15836363304054924858345124002891415412033686716872378 \\ &\quad 15790779416384491452380291895887447446258075832n^{15} \\ &- 97937002574070122157478507422811114008295150437488137 \\ &\quad 1560079702150405162879445198817552403513371536n^{14} \\ &+ 54527783034098235399628382137953126788416912910434167 \\ &\quad 5293905701091464330277575549282365788302310928n^{13} \\ &- 27099943597245272697022752896350738086486002197222546 \\ &\quad 2586698129499467783011880718770637214136083872n^{12} \\ &+ 11897520830343297004013928558067810449618719428682002 \\ &\quad 5233133428439628844202195505258382363548000704n^{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - 45538338895228311467572912371847989602740333636447558 \\ & \quad 018545963829385315401367821159099286815691520n^{10} \\ & + 14939950566186193539693050454154355295366112858382749 \\ & \quad 315203448875737751343503850915745941040764928n^9 \\ & - 41061564983424638696633263319257863823328554801393457 \\ & \quad 77519816949819477602257475866607056012032512n^8 \\ & + 91515016435862451431428506373785234082456627132048806 \\ & \quad 5352897435616233476492437821732531177047040n^7 \\ & - 15726148043154985128631739712842393254765815616913856 \\ & \quad 8899526065422542443981151156469095419777024n^6 \\ & + 19044215871508992062142486326386009148977065069829099 \\ & \quad 889026999269615049172716044237323611541504n^5 \\ & - 13109906768228023907511883094421678119231061824166799 \\ & \quad 83029257424584554670584914850491112824832n^4 \\ & + 89067170955507413408266926637458009099338439553285964 \\ & \quad 35832724162778948146749777467043217408n^3 \\ & + 41039968564638175643969243334636565691128803746478137 \\ & \quad 14114240068455283879083498129895456768n^2. \end{aligned}$$

Научное издание

Современные проблемы математики

Выпуск 9

**Рациональные приближения постоянной Эйлера и
рекуррентные соотношения**

Сборник статей под редакцией А. И. Аптекарева

Компьютерная верстка: *А. М. Малокостов*

Сдано в набор 15.03.2007. Подписано в печать 08.06.2007.

Формат 60×90/16. Усл. печ. л. 5.25. Тираж 200 экз.

Отпечатано в Математическом институте им. В. А. Стеклова РАН
Москва, 119991, ул. Губкина, 8.

<http://www.mi.ras.ru/spm/> e-mail: spm@mi.ras.ru