И. Г. Петровский, О диффузии волн и лакунах для систем гиперболических уравнений, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1944, том 8, выпуск 3, 101–106

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
BULLETIN DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES DE L'URSS
Серия математическая 8 (1944), 101—106 Série mathématique

И. Г. ПЕТРОВСКИЙ

О ДИФФУЗИИ ВОЛН И ЛАКУНАХ ДЛЯ СИСТЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (1) *

Статья представляет обзор исследований, сделанный на сессии физико-математического отделения Академии Наук СССР

Известно, что значение в точке $(t, x_1, \ldots, x_p)$ решения задачи Коши для волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} \right) \tag{1}$$

при нечетном $p > 1$ зависит от начальных данных только на периферии основания характеристического конуса с вершиной в точке $(t, x_1, \ldots, x_p)$. При четном же p, а также при $p=1$ $u(t, x_1, \ldots, x_p)$ зависит от начальных данных на всем основании этого конуса.

Допустим, что начальные значения u и $\frac{\partial u}{\partial t}$, которые мы будем считать заданными при $t=0$, отличаются от нуля только внутри маленькой области G, около некоторой точки $(0, x_1^0, \ldots, x_p^0)$. Будем следить за значениями u в точках $(t, x_1, \ldots, x_p)$ при фиксированных как-нибудь значениях $x_1, \ldots, x_p$ и при увеличивающемся, начиная от нуля, t. При нечетном $p > 1$ величина $u(t, x_1, \ldots, x_p)$ может отличаться от нуля только на небольшом участке рассматриваемой в пространстве $(t, x_1, \ldots, x_p)$ прямой, параллельной оси t—именно на том, где расположены вершины характеристических конусов уравнения (1), периферии оснований которых пересекают область G. Если же p четное или $p=1$, то u обязательно равно нулю только в тех точках этой прямой, где расположены вершины характеристических конусов, *основания* которых не содержат точек области G и которые, очевидно, образуют некоторый отрезок этой прямой, одним из концов которого служит точка $(0, x_1, \ldots, x_p)$. Во всех же других точках этой прямой $u(t, x_1, \ldots, x_p)$, вообще говоря, отлично от нуля.

Следовательно, возмущение, произведенное в начальный момент в некоторой малой окрестности точки $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$ при нечетном $p > 1$ и $t > 0$ отзывается на значениях функции u только в тех точках пространства $(x_1, \ldots, x_p)$, которые лежат около сферы радиуса at с центром в точке $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$. Таким образом, от возмущения, произведенного в началь-

* Цифры в скобках относятся к литературе, помещенной в конце статьи

ный момент в точке $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$, возникает сферическая волна с центром в этой точке, имеющая передний и задний фронт. При четном p и при $p=1$ возмущение, произведенное в начальный момент в окрестности $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$, отзывается, вообще говоря, на всех точках, лежащих внутри сферы радиуса at с центром в $(x_1^0, \ldots, x_p^0)$. Возникает волна, имеющая резкий передний край и размытый задний. Говорят, что в этом случае происходит диффузия (размыв) заднего фронта волны; при нечетном $p>1$ диффузии не бывает.

Еще в начале текущего века Адамар ([2]) показал, что для линейных гиперболических уравнений 2-го порядка с переменными коэффициентами при четном p всегда имеет место диффузия волн. Вопрос о диффузии волн для общих линейных гиперболических уравнений при нечетном p долгое время оставался открытым. Только в 1939 г. появилась статья Mathisson'a ([3]) где доказывается следующее. При $p=3$ единственным классом линейных гиперболических уравнений второго порядка, у которых нет диффузии волн, будут уравнения, получающиеся из (1) в результате следующих трех операций:

1) умножения общих частей уравнения на некоторую функцию от $t, x_1, \ldots, x_p$,

2) линейной замены неизвестной функции,

3) перехода от независимых переменных $t, x_1, \ldots, x_p$ к новым независимым переменным.

Методы, которыми пользовался при этом Mathisson, принципиально применимы и к гиперболическим уравнениям 2-го порядка с любым нечетным $p>1$. Но при $p>3$ вычисления становятся более громоздкими и до конца не доведены.

Автор изучал аналогичные вопросы для общих гиперболических систем. Пусть дана линейная гиперболическая система с достаточно гладкими коэффициентами

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j,\,k} a_{ij}^{(k_0,\,k_1,\,\ldots,\,k_p)}(t, x_1, \ldots, x_p)\,\frac{\partial^{k_0+k_1+\ldots+k_p} u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_p^{k_p}} \tag{2}$$

$$(k_0 < u_j, \qquad k_0+k_1+\ldots+k_p \leqslant n_j, \qquad i, j = 1, \ldots, N).$$

Боковая поверхность характеристического конуса с вершиной в точке $(t^*, x_1^*, \ldots, x_p^*)$ разбивает основание его на плоскости $t=t_0$, вообще говоря, на несколько областей. Одну из этих областей G_{t_0} будем называть *лакуной*, если при любых изменениях начальных данных (лишь бы они оставались достаточно гладкими) только внутри G_{t_0} решение задачи Коши для уравнения (2) не изменяется в точке $(t^*, x_1^*, \ldots, x_q^*)$. Для определенности будем считать $t_0 < t^*$. Если t_0 достаточно близко к t^*, то каждой из областей $G_{t_0}^*$, на которые поверхность характеристического конуса с вершиной в точке $(t^*, x_1^*, \ldots, x_p^*)$, построенного для системы уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial^{n_i} u_i}{\partial t^{n_i}} = \sum_{j,\,k} a_{ij}^{(k_0,\,k_1,\,\ldots,\,k_p)}(t^*, x_1^*, \ldots, x_p^*)\,\frac{\partial^{n_j} u_j}{\partial t^{k_0}\partial x_1^{k_1}\ldots\partial x_1^{k_p}} \tag{3}$$

$$(k_0 < n_j, \qquad k_0+k_1+\ldots+k_p = n_j, \qquad i, j = 1, \ldots, N),$$

разбивает его основание на плоскости $t=0$, будет соответствовать единственная область G_{t_0} близкая $G^*_{t_0}$, построенная для системы (2).

ТЕОРЕМА I. *Если при всех t_0, достаточно близких к t^*, область G_{t_0}, соответствующая области $G^*_{t_0}$, будет лакуной для системы* (2), *то область $G^*_{t_0}$ будет лакуной для системы* (3).

Очевидным следствием этой теоремы является приведенная выше теорема Адамара о диффузии волн для всех линейных гиперболических уравнений 2-го порядка с четным числом пространственных координат, так как для всех линейных гиперболических уравнений 2-го порядка с постоянными коэффициентами, которые линейным преобразованием в пространстве $(t, x_1, \ldots, x_p)$ всегда приводятся к уравнению вида (1), всегда имеет место диффузия волн.

Все дальнейшее будет относиться к изучению лакун у линейных гиперболических систем типа (3) с постоянными коэффициентами. Необходимым и достаточным условием отсутствия диффузии волн у таких систем, очевидно, будет наличие лакуны, которую пересекает проходящая через вершину характеристического конуса прямая, параллельная оси t. Лакуны, не разрушающиеся при любых достаточно малых изменениях коэффициентов, назовем у с т о й ч и в ы м и.

Будем рассматривать операции $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x_k}$ как символичное умножение, а систему уравнений (3) как систему линейных алгебраических уравнений относительно $u_1, \ldots, u_N$. Составим детерминант из коэффициентов этой системы. В раскрытом виде его можно переписать так

$$\frac{\partial^n}{\partial t^n} + \sum_{(k)} a^{(k_0,\, k_1,\, \ldots,\, k_p)} \frac{\partial^n}{\partial t^{k_0} \partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_p^{k_p}},$$

где суммирование распространяется по всем целым $k_1, \ldots, k_p$, сумма которых равна n, а $n = n_1 + \ldots + n_N$. Уравнение

$$1 + \sum_{(k)} a^{(k_0,\, k_1,\, \ldots,\, k_p)} z_1^{k_1} \ldots z_p^{k_p} = 0 \tag{4}$$

называется х а р а к т е р и с т и ч е с к и м для системы (3). Его можно рассматривать как тангенциальное уравнение поверхности, представляющей собою пересечение боковой поверхности характеристического конуса K с вершиной в точке $(t, 0, \ldots, 0)$, построенного для системы (3), с основанием $t_0 = 0$, если уравнения плоскостей в пространстве $(x_1, \ldots, x_p)$ написать в виде

$$-t + x_1 z_1 + \ldots + x_p z_p = 0. \tag{5}$$

По закону двойственности каждой точке $(x_1, \ldots, x_p)$ в этом пространстве будет соответствовать плоскость в пространстве $(z_1, \ldots, z_p)$. Чтобы решить вопрос о том, принадлежит ли какая-нибудь точка $(x_1, \ldots, x_p)$ устойчивой лакуне в основании конуса K, возьмем в плоскости (5) пространства $(z_1, \ldots, z_p)$ какую-нибудь точку A. Проведем из нее всевозмож-

ные прямые с действительными коэффициентами, лежащие в этой плоскости, и рассмотрим их точки пересечения с поверхностью (4). Действительные (равно как и комплексные) точки пересечения образуют некоторые $(p-2)$-мерные циклы, которые мы будем обозначать через C_{reel} и соответственно C_{imag}. Цикл C_{reel}, очевидно, не зависит от выбора точки A. Цикл C_{imag} заменяется ему гомологическим в комплексном пересечении (4) и (5) при изменении A.

Считая, что поверхность (4) не имеет особых точек, можно сформулировать следующие теоремы.

ТЕОРЕМА II. *Если все* $n_i < p+1$, *то необходимым и достаточным условием существования устойчивой лакуны у системы* (3) *является условие, чтобы соответствующие ее точкам циклы* C_{reel} *в случае нечетного* p (*соответственно, циклы* C_{imag} *в случае четного* p) *были гомологичны нулю в комплексном пересечении* (4) *и* (5).

Имеются примеры таких лакун.

Для решения вопроса о существовании лакун в том случае, когда некоторые $n_i \geqslant p+1$, надо построить циклы $C_{\text{reel}}(\tau)$ в случае нечетного p (соответственно циклы $C_{\text{imag}}(\tau)$ в случае четного p) для каждой из плоскостей

$$-\tau + x_1 z_1 + \ldots + x_p z_p = 0 \quad (0 \leqslant \tau \leqslant t). \tag{6}$$

Поверхность, образованную этими циклами, обозначим через S.

ТЕОРЕМА III. *Необходимым условием существования устойчивой лакуны у уравнения* (3) *в случае, когда некоторые* $n_i \geqslant p+1$, *является условие, чтобы соответствующие ее точкам циклы* $C_{\text{reel}}(t)$ *при нечетном* p (*соответственно циклы* $C_{\text{imag}}(t)$ *при четном* p) *были гомологичны нулю в комплексных пересечениях* (4) *и* (5).

Допустим, что это условие выполнено. Натянем пленки на циклы $C_{\text{reel}}(\tau)$ (соответственно $C_{\text{imag}}(\tau)$) в комплексных сечениях поверхности (4) с плоскостями (6) при $\tau = t$ и $\tau = 0$. Последнее всегда возможно в силу гиперболичности системы (3). Это легко доказать, заметив, что в силу гиперболичности действительная поверхность (4) состоит при четном n из $\frac{n}{2}$ овалов, последовательно вложенных друг в друга; при нечетном n к этим овалам присоединяется еще так называемый «непарный кусок», гомологичный в действительном проективном пространстве $(x_1, \ldots, x_p)$ плоскости. Указанное натяжение пленок на циклы $C_{\text{reel}}(\tau)$ или $C_{\text{imag}}(\tau)$ при $\tau = 0$ и $\tau = t$ можно делать по-разному.

Все циклы Σ, образованные при этом поверхностями S и такими пленками, гомологичны между собою в комплексной поверхности (4) при четном p, так как можно показать, что при четном p все $(p-1)$-мерные циклы у общей алгебраической поверхности $(p-2)$-го комплексного измерения P, являющейся комплексными пересечениями плоскости (6) при $\tau = 0$ или $\tau = t$ с поверхностью (4), гомологичны нулю в этих сечениях. Если же p нечетное, то при различных способах натягивания пленок могут получиться негомологичные между собою в комплексной поверхности (4) циклы Σ, так как у общей алгебраической поверхности P при нечетном p имеется один $(p-1)$-мерный

линейно независимый негомологичный нулю цикл, именно алгебраический цикл.

ТЕОРЕМА IV. *При выполнении условия теоремы* III *необходимым и достаточным условием существования устойчивой лакуны у системы* (3), *когда некоторые* $n \geqslant p+1$, *является условие, чтобы соответствующие ее точкам циклы* Σ *были гомологичны нулю в комплексной поверхности* (4) *при четном* p *или же были алгебраическими при нечетном* p.

Заметим, что при выполнении этого условия всегда можно так натянуть пленки на циклы C_{reel} (τ) при $\tau=0$ и $\tau=t$, чтобы цикл Σ был гомологичен нулю в комплексной поверхности (4).

Среди уравнений, имеющих большое значение в математической физике, кроме указанного волнового уравнения, имеются лакуны у системы уравнений упругости и у системы уравнений кристаллооптики в трехмерном пространстве. Каждая из этих систем состоит из уравнений 2-го порядка, а их действительные характеристические поверхности состоят из конечных овалов, последовательно вложенных друг в друга. Действительным плоскостям, пересекающим все эти овалы, соответствуют внешности характеристических конусов.

Как нами уже указано было несколько раньше, циклы C_{reel}, соответствующие этим плоскостям, гомологичны нулю. Плоскостям же, совсем не пересекающим этих овалов, соответствуют лакуны, так как циклы C_{reel} получаются в этом случае пустыми. Вопреки предположению, сделанному в этой работе, что характеристические поверхности не имеют особых точек, здесь такие точки имеются. Поэтому об устойчивости лакун у системы уравнений упругости или у системы уравений кристаллооптики можно говорить только условно, допуская такие изменения этих систем, которые не нарушают их гиперболичности.

Институт математики при Московском гос. университете

Поступило 26. XI. 1943

ЛИТЕРАТУРА

[1] Петровский И. Г., Докл. Акад. Наук СССР, XXXVIII (1943), No. 5—6, 163—165.

[2] Hadamard J., Le problème de Cauchy, Paris, 1932, p. 238—241.

[3] Mathisson M., Acta mathematica, 71 (1939), No. 3—4, 249—282.

I. PETROWSKY. SUR LA DIFFUSION DES ONDES ET LES LACUNES POUR LES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS HYPERBOLIQUES

RÉSUMÉ

Cet article présente l'exposé d'une conférence faite par l'auteur dans une séance de la Section physico-mathématique de l'Académie des Sciences de l'URSS. La conférence avait pour objet un aperçu des problèmes concernant la liaison entre la solution du problème de Cauchy et les données initiales pour le cas des équations hyperboliques.