I. M. Gel'fand, M. A. Naimark, Normed rings with involutions and their representations, *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 1948, Volume 12, Issue 5, 445–480

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР
Серия математическая
12 (1948), 445–480

И. М. ГЕЛЬФАНД и М. А. НАЙМАРК

НОРМИРОВАННЫЕ КОЛЬЦА С ИНВОЛЮЦИЕЙ И ИХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ

(Представлено академиком **А. Н. Колмогоровым***)*

В статье рассматриваются (вообще некоммутативные) кольца, в которых аксиоматически введена операция инволюции ($*$-операция). При помощи положительных функционалов изучаются представления таких колец операторами в гильбертовом пространстве. Полученные результаты применяются к теории представлений локально бикомпактных групп.

Теория коммутативных нормированных колец, изложенная в статьях (1) и (5), оказалась удобным аппаратом при решении различных вопросов анализа. Она также с успехом была применена в теории коммутативных топологических групп.

Для применения аналогичных методов к некоммутативным группам оказалось необходимым разработать теорию некоммутативных нормированных колец.

Так как в групповом кольце можно естественным образом ввести операцию инволюции, то в первую очередь возникла задача рассмотрения колец, в которых задана операция инволюции ($*$-операция).

Один класс таких колец (так называемых $*$-колец) был рассмотрен авторами в статье (2). При этом оказалось, что в теории колец с инволюцией важную роль играют положительные функционалы, т. е. функционалы, удовлетворяющие условию $f(x^* x) \geqslant 0$.

Положительные функционалы на групповом кольце и связанные с ними положительно определенные функции на группе были применены И. М. Гельфандом и Д. А. Райковым в (4) при доказательстве существования и полноты системы неприводимых представлений локально бикомпактной группы.

Настоящая статья посвящена общей теории колец с инволюцией и их представлений в связи с теорией положительных функционалов.

Некоторые методы, здесь изложенные, особенно в § 5, являются по существу, перенесением на случай произвольного кольца с инволюцией методов статьи (4)*.

* Д. А. Райкову, прочитавшему статью и сделавшему ряд ценных критических замечаний, мы выражаем здесь свою благодарность.

§ 1. Кольца с инволюцией и их представления

Совокупность R элементов $x, y, \ldots$ называется *нормированным кольцом*, если:

1°. R является кольцом, т. е. введены операции сложения и умножения, удовлетворяющие обычным алгебраическим условиям. Мы предположим также, что в R есть единица e.

2°. R есть линейное векторное пространство с умножением на комлексные числа, перестановочным с операцией умножения элементов в кольце R.

3°. В R введена норма, т. е. каждому элементу $x \in R$ поставлено в соответствие число $|x|$ так, что при этом

$$|x+y| \leqslant |x| + |y|, \quad |xy| \leqslant |x| \cdot |y|,$$
$$|x| \geqslant 0$$

и равно нулю лишь при $x=0$,

$$|\lambda x| = |\lambda|\,|x|, \quad |e| = 1.$$

4°. Кольцо полно, т. е. из

$$\lim_{m,\, n \to \infty} |x_n - x_m| = 0$$

следуют существование x такого, что

$$\lim_{n \to \infty} |x_n - x| = 0.$$

Определение 1. Нормированное кольцо R называется *кольцом с инволюцией*, если в нем введена операция, ставящая в соответствие каждому элементу x элемент x^* так, что при этом выполнены следующие условия:

a) $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*$,

b) $x^{**} = x$,

c) $(xy)^* = y^* x^*$,

d) $|x^*| = |x|$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только кольца с инволюцией и не будем это каждый раз оговаривать.

Элемент x называется *эрмитовским*, если $x^* = x$.

Всякий элемент x можно представить в виде $x = x_1 + i x_2$, где x_1, x_2 — эрмитовские элементы. Действительно, достаточно положить

$$x_1 = \frac{x + x^*}{2}, \quad x_2 = \frac{x - x^*}{2i}.$$

Элемент $x^* x$ всегда эрмитовский, ибо

$$(x^* x)^* = x^* x^{**} = x^* x.$$

В частности, так как $e^* = e^* e$, то $e = e^*$, т. е. e — эрмитовский элемент.

Некоторые результаты этой статьи остаются справедливыми, если оставить лишь алгебраические из перечисленных аксиом, т. е. аксиомы 1°, 2° и a), b), c).

Типичным примером колец с инволюцией является кольцо K всех ограниченных линейных операторов в гильбертовом пространстве. При этом под $*$-операцией мы будем понимать операцию перехода от оператора к эрмитовски-сопряженному.

В связи с этим естественно рассматривать гомоморфные отображения кольца с инволюцией в кольцо K и притом гомоморфизмы, сохраняющие $*$-операцию. Такое отображение мы будем называть представлением кольца. Иными словами, мы вводим следующее

Определение 2. Будем говорить, что *задано представление кольца* R, если каждому элементу $a \in R$ поставлен в соответствие оператор $A \in K$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ (коротко мы это будем обозначать так: $a \to A$, либо $A(a)$) так, что при этом выполнены следующие условия:

1° если $a \to A$, $b \to B$, то $ab \to AB$ и $\lambda a + \mu b \to \lambda A + \mu B$;

2° если $a \to A$, то $a^* \to A^*$;

3° $e \to E$.

Определение 3. Представление называется *циклическим*, если в пространстве существует вектор ξ_0 такой, что векторы $A\xi_0$ (A — операторы, отвечающие элементам из R) всюду плотны в $\mathfrak{H}$. Сам вектор ξ_0 называется *циклическим*.

Пусть заданы два представления, одно из которых ставит в соответствие элементам a операторы $A(a)$ в пространстве $\mathfrak{H}$ и другое, ставящее в соответствие элементам a операторы $A'(a)$ в пространстве $\mathfrak{H}'$.

Будем говорить, что эти *представления эквивалентны*, если между $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ можно установить такое унитарное соответствие, при котором оператору $A(a)$ соответствует оператор $A'(a)$.

Подпространство $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ называется *инвариантным*, если каждый вектор из $\mathfrak{H}_1$ переводится всеми операторами $A(a)$ снова в векторы из $\mathfrak{H}_1$.

Рассматривая все операторы представления только как операторы в $\mathfrak{H}_1$, мы получим представление кольца R в пространстве $\mathfrak{H}_1$. Это представление мы будем называть *частью* исходного представления $\mathfrak{H}$.

Если $\mathfrak{H}_1$ инвариантно, то его ортогональное дополнение также инвариантно. Действительно, пусть ξ ортогонально к $\mathfrak{H}_1$, т. е. $(\xi, \eta) = 0$ для всех $\eta \in \mathfrak{H}_1$. Тогда

$$(A(a)\xi, \eta) = (\xi, A^*(a)\eta) = 0,$$

так как $\mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно операторов, являющихся образами элементов из R, а $A^*(a)$ является образом элемента a^*.

Если нам задано представление кольца R в пространстве $\mathfrak{H}$, то пространство можно разложить в прямую сумму инвариантных подпространств, в каждом из которых представление циклично. Действительно, пусть $\xi_0 \neq 0$ — какой-либо фиксированный вектор из $\mathfrak{H}$. Рас-

смотрим совокупность всех векторов $A(a)\xi_0$, где a пробегает все R. Замыкание этого множества образует инвариантное подпространство $\mathfrak{H}_1$ пространства $\mathfrak{H}$, в котором представление циклично. Ортогональное дополнение этого подпространства также инвариантно. В нем проделаем то же и т. д. Пользуясь трансфинитной индукцией, мы и произведем требуемое разложение.

Определение 4. Представление называется *неприводимым*, если в $\mathfrak{H}$ не существует подпространства, инвариантного относительно всех операторов $A(a)$.

Если представление неприводимо, то ясно, что всякий вектор $\xi \neq 0$ будет циклическим. Очевидно, что обратное предложение также верно.

ТЕОРЕМА 1. *Для того чтобы представление было неприводимым, необходимо и достаточно, чтобы всякий ограниченный оператор B, перестановочный с операторами $A(a)$, был кратным единице.*

Доказательство необходимости. Пусть B перестановочен с $A(a)$. Предположим сначала, что B — эрмитов. Тогда любая функция от B также перестановочна с $A(a)$. В частности, $E(\lambda)$ — проекционные операторы, дающие спектральное разложение B, также перестановочны с $A(a)$. Но это означает, что отвечающие им подпространства инвариантны относительно $A(a)$. Ввиду неприводимости представления, это значит, что каждое из этих подпространств либо нулевое, либо все пространство.

Таким образом, $E(\lambda)$ для каждого λ есть либо 0 либо E. Так как $(E(\lambda), \xi, \xi)$ монотонно растет с увеличением λ, то отсюда следует, что существует такое λ_0, что при $\lambda > \lambda_0$, $E(\lambda) = E$ и при $\lambda < \lambda_0$ $E(\lambda) = 0$. Отсюда следует, что

$$B = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dE(\lambda) = \lambda_0 E.$$

Если B — произвольный ограниченный оператор, то B^* также перестановочен со всеми $A(a)$. Действительно,

$$B^* A(a) = (A^*(a) B)^* = (BA^*(a))^* = A(a) B^* .$$

Поэтому эрмитовы операторы $\frac{B+B^*}{2}$ и $\frac{B-B^*}{2i}$ кратны единице, а следовательно, и B кратен единице.

Доказательство достаточности. Предположим противное, т. е. что представление приводимо. Тогда существует инвариантное подпространство $\mathfrak{H}_1$, отличное от 0 и всего пространства. Обозначим отвечающий этому подпространству проекционный оператор через E_1. Тогда E_1 перестановочен со всеми $A(a)$ (так как $\mathfrak{H}_1$ инвариантно относительно $A(a)$).

E_1 не кратно E, так как $\mathfrak{H}_1$ отлично от нуля и всего пространства. Мы пришли к противоречию, следовательно, теорема доказана.

§ 2. Положительные функционалы и их связь с представлениями колец

Определение 5. *Положительным линейным функционалом* называется функция $f(x)$, ставящая в соответствие каждому $x \in R$ комплексное число $f(x)$ и такая, что:

1° $f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$;

2° $f(x^* x) \geqslant 0$ для любого x.

Функция $f(x)$ называется *вещественным линейным функционалом*, если:

1° $f(\lambda x+\mu y)=\lambda f(x)+\mu f(y)$;

2° $f(x)$ непрерывна;

3° $f(x^*)=\overline{f(x)}$ для всякого x.

Очевидно, что если $f(x)$ положительный функционал, то $f(e) \geqslant 0$, ибо $e^* e=e$.

Всякий непрерывный линейный функционал $f(x)$ можно представить в виде $f=f_1+i f_2$, где f_1 и f_2 — вещественные функционалы. Для этого достаточно положить

$$f_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)+\overline{f(x^*)}] \quad \text{и} \quad f_2(x)=\frac{1}{2i}[f(x)-\overline{f(x^*)}].$$

Легко проверить, что f_1 и f_2 — вещественные линейные функционалы.

Ниже мы покажем, что всякий положительный функционал является вещественным функционалом, а значит, и линейная комбинация положительных функционалов с вещественным коэффициентом есть вещественный линейный функционал. Обратное, вообще говоря, неверно. Позже мы приведем пример этого.

В дальнейшем мы часто будем пользоваться следующим неравенством:

Пусть $f(x)$ — положительный функционал. Тогда для любых x и y имеет место

$$|f(y^* x)|^2 \leqslant f(y^* y) f(x^* x). \tag{1}$$

Доказательство этого неравенства в точности совпадает с обычным доказательством неравенства Шварца.

ТЕОРЕМА 1. *Всякий положительный функционал f есть вещественный функционал, удовлетворяющий неравенству*

$$|f(x)| \leqslant f(e)|x|. \tag{2}$$

Доказательство. Предположим сначала, что $|x|<1$ и что $x^*=x$. Положим

$$y=(e-x)^{\frac{1}{2}}=e-\frac{1}{2} x+\frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} x^2-\ldots;$$

этот ряд сходится, так как $|x|<1$. В силу условия d) на стр. 446, инволюция непрерывна; поэтому $y^*=y$; кроме того,

$$y y^*=y^2=e-x,$$

что легко доказать возведением в квадрат степенного ряда. Поэтому

$$f(e-x)=f(y^* y)\geqslant 0,$$

т. е. $f(x)$ вещественно и, кроме того, $f(x)\leqslant f(e)$.

Аналогично получаем $f(x)\geqslant -f(e)$.

Легко освободиться от требования $|x|<1$. Мы получим тогда: если $x^*=x$, то $f(x)$ вещественно и

$$|f(x)|\leqslant f(e)\,|x|.$$

Отсюда следует, что для любого x $f(x^*)=\overline{f(x)}$. Действительно,

$$f(x)=f\left(\frac{x+x^*}{2}\right)+if\left(\frac{x-x^*}{2i}\right),$$

$$f(x^*)=f\left(\frac{x+x^*}{2}\right)-if\left(\frac{x-x^*}{2i}\right),$$

$f\left(\frac{x+x^*}{2}\right)$ и $f\left(\frac{x-x^*}{2i}\right)$, в силу доказанного выше, вещественны. Поэтому $f(x^*)=\overline{f(x)}$. Нам осталось показать, что $f(x)$ — непрерывная функция от x. Для этого достаточно доказать неравенство (2) для любого $x\in R$. Это неравенство уже нами доказано для эрмитовских элементов x, в частности, для элементов вида $x^* x$. Таким образом,

$$f(x^* x)\leqslant f(e)\,|x^* x|,$$

следовательно,

$$f(x^* x)\leqslant f(e)\,|x|^2. \tag{3}$$

С другой стороны, полагая в неравенстве (1) $y=e$, получаем

$$|f(x)|^2\leqslant f(e)\,f(x^* x),$$

следовательно, в силу (3),

$$|f(x)|^2\leqslant f(e)^2\,|x|^2.$$

Тем самым неравенство (2) доказано для всех элементов $x\in R$.

Приведем теперь пример кольца и вещественного функционала в нем, не представимого как линейная комбинация положительных функционалов.

Пусть кольцом R является совокупность комплексных функций $x(z)$, аналитических при $|z|<1$ и непрерывных в круге $|z|\leqslant 1$.

Мы положим $|x|=\max\limits_{|z|\leqslant 1}|x(z)|$. Сумму и произведение определим как сумму и произведение функций; x^* определим равенством: $x^*(z)=\overline{x(\bar{z})}$. В § 6 будет показано, что всякий положительный функционал в этом кольце имеет вид

$$f(x)=\int\limits_{-1}^{+1} x(t)\,d\sigma(t),$$

где $\sigma(t)$ — монотонная функция, заданная на отрезке $(-1, +1)$ вещественной оси t.

Рассмотрим теперь следующий вещественный функционал:

$$f_1(x)=\frac{x(z_0)+x(\bar{z}_0)}{2},$$

где z_0 — фиксированное невещественное число такое, что $|z_0| \leqslant 1$. Тогда, как нетрудно убедиться, не существует комплексной функции ограниченной вариации $\sigma_1(t)$ такой, что

$$\frac{x(z_0)+x(\bar{z}_0)}{2} = \int_{-1}^{+1} x(t)\, d\sigma_1(t).$$

В самом деле, предположим, что существует $\sigma_1(t)$ такая, что

$$\int_{-1}^{+1} x(t)\, d\sigma_1(t) = \frac{x(z_0)+x(\bar{z}_0)}{2}$$

для любой функции, аналитической в единичном круге.

Положим $x_n(z) = \frac{e^{inz}}{n}$ и подставим вместо $x(z)$. Тогда при $n \to \infty$ левая часть равенства будет стремиться к нулю, а правая по модулю — к ∞, т. е. мы пришли к противоречию. Это значит, что $f_1(x)$ не представим как линейная комбинация положительных функционалов.

Каждое представление кольца R доставляет нам множество положительных функционалов. В самом деле, пусть ξ_0 — некоторый вектор из пространства $\mathfrak{H}$. Положим

$$f(a) = (A(a)\xi_0, \xi_0). \tag{4}$$

Тогда $f(a)$ — положительный функционал. Действительно,

$$f(a^*a) = (A(a^*a)\xi_0, \xi_0) = (A^*(a)A(a)\xi_0, \xi_0) = (A(a)\xi_0, A(a)\xi_0) \geqslant 0.$$

В частности, $f(e) = |\xi_0|^2$.

ТЕОРЕМА 2. *Всякое представление кольца R с инволюцией непрерывно. Более того, при этом $|A| \leqslant |a|$.*

Доказательство. Применяя неравенство (3) к положительному функционалу $f(a) = (A(a)\xi_0, \xi_0)$, получаем:

$$(A(a^*a)\xi_0, \xi_0) \leqslant (\xi_0, \xi_0)|a|^2,$$

т. е.

$$|A(a)\xi_0|^2 \leqslant |a|^2 |\xi_0|^2.$$

Так как ξ_0 — произвольный вектор, то это неравенство означает, что $|A| \leqslant |a|$.

Наша ближайшая цель — дать описание представления с помощью положительных функционалов. Это лучше всего делать для циклических представлений.

Пусть заданы два циклических представления кольца R: в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$.

Обозначим операторы, отвечающие элементу a, соответственно через $A(a)$ и $A'(a)$.

Пусть ξ_0 и ξ_0' — циклические векторы соответствующих представлений. Положим

$$f(a) = (A(a)\xi_0, \xi_0) \text{ и } f'(a) = (A'(a)\xi_0', \xi_0').$$

Покажем, что если $f(a) \equiv f'(a)$ *для любого* a, то представления эквивалентны.

Соответствие между векторами в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ мы установим следующим образом. Пусть $\xi = A\xi_0$. Поставим ему в соответствие вектор $\xi' = A'\xi_0'$. Мы докажем, что это соответствие изометрично. Отсюда будет следовать его взаимная однозначность. Линейность очевидна. Для того чтобы доказать изометричность, покажем, что скалярные произведения соответствующих векторов совпадают между собой. Пусть

$$\xi_1 = A_1\xi_0, \quad \xi_1' = A_1'\xi_0',$$
$$\xi_2 = A_2\xi_0, \quad \xi_2' = A_2'\xi_0'.$$

Тогда

$$(\xi_1, \xi_2) = (A_1\xi_0, A_2\xi_0) = (A_2^*A_1\xi_0, \xi_0) = f(a_2^*a_1),$$
$$(\xi_1', \xi_2') = (A_1'\xi_0', A_2'\xi_0') = (A_2'^*A_1'\xi_0', \xi_0') = f'(a_2^*a_1).$$

Так как $f(x) \equiv f'(x)$, то мы видим, что $(\xi_1, \xi_2) = (\xi_1', \xi_2')$, т. е. для элементов вида $A\xi_0$ (соответственно $A'\xi_0'$) изометричность доказана.

Так как оба представления цикличны, то множество таких элементов плотно в $\mathfrak{H}$ (соответственно $\mathfrak{H}'$). Мы можем поэтому по непрерывности продолжить это соответствие на все $\mathfrak{H}$ (соответственно $\mathfrak{H}'$).

Мы видим, что циклическое представление с точностью до эквивалентности однозначно определяется положительным функционалом (4). Возникает вопрос, для всякого ли положительного функционала существует представление, при котором этот функционал может быть записан в виде (4)? Мы покажем, что на этот вопрос можно ответить утвердительно.

Пусть нам задан положительный функционал $f(x)$ в R. Введем с его помощью в R скалярное произведение следующим образом. Положим

$$(x, y) = f(y^*x).$$

Будем считать x эквивалентным нулю, если

$$(x, x) = f(x^*x) = 0.$$

Два элемента мы будем называть **эквивалентными**, если их разность эквивалентна нулю.

Совокупность элементов, эквивалентных нулю, образует левый идеал в R. В самом деле, пусть $x \sim 0$ и y — произвольный элемент. Тогда

$$f((yx)^*\, yx) = f(x^*y^*yx) = f(zx),$$

где $z = x^*y^*y$. В силу неравенства (1), имеем

$$|f(zx)| \leqslant \sqrt{f(x^*x)}\,\sqrt{f(zz^*)}$$

и, следовательно, $f(zx) = 0$, т. е. $yx \sim 0$. Если $x_1 \sim 0$ и $x_2 \sim 0$, то $x_1 + x_2 \sim 0$, так как

$$f((x_1 + x_2)^*\,(x_1 + x_2)) = f(x_1^*x) + f(x_2^*x_1) + f(x_1^*x_2) + f(x_2^*x_2).$$

Первое и четвертое слагаемое правой части равны нулю по определению, равенство нулю второго и третьего можно вывести опять-таки из неравенства (1). Проверим, что выполнены аксиомы скалярного произведения.

1°. $(x, y) = \overline{(y, x)}$. Действительно, в силу того, что положительный функционал вещественен, имеем

$$f(y^*x) = \overline{f((y^*x)^*)} = \overline{f(x^*y)}.$$

2°. $(\lambda x + \mu y, z) = \lambda(x, z) + \mu(y, z)$. Очевидно.

3°. $(x, x) \geqslant 0$. Очевидно. То, что $(x, x) = 0$ лишь при $x \sim 0$, следует из определения эквивалентных нулю элементов.

Полученное пространство обозначим через $\tilde{\mathfrak{H}}$. Оно, вообще говоря, не полно. Его пополнение обозначим через $\mathfrak{H}$. Представление будем строить в этом пространстве следующим образом: элементу a поставим в соответствие оператор A в $\mathfrak{H}$ по формуле $Ax = ax$. При этом нужно лишь проверить, что если $x_1 \sim x_2$, то $Ax_1 \sim Ax_2$. Это ясно, так как если $x_1 - x_2 \sim 0$, то $a(x_1 - x_2) \sim 0$ в силу того, что множество эквивалентных нулю элементов образует идеал.

Покажем, что оператор A ограничен и, более того, что

$$|A| \leqslant |a|. \tag{5}$$

По определению, $(Ax, Ax) = f(x^*a^*ax)$. Положим

$$f_1(y) = f(x^*yx),$$

считая x фиксированным; $f_1(y)$ — также положительный функционал. В самом деле,

$$f_1(y^*y) = f(x^*y^*yx) = f((yx)^*yx) \geqslant 0.$$

Поэтому, в силу неравенства (2),

$$f_1(a^*a) \leqslant f_1(e)\,|a^*a| \leqslant |f_1(e)|\,|a|^2,$$

т. е.

$$f(x^*a^*ax) \leqslant f(x^*x)\,|a|^2$$

или

$$(Ax, Ax) \leqslant (x, x)\,|a|^2;$$

таким образом,

$$|A|^2 = \sup_{(x,x)=1} (Ax, Ax) \leqslant |a|^2,$$

т. е. неравенство (5) доказано. Мы доказали, что оператор A, определенный на $\tilde{\mathfrak{H}}$, ограничен, поэтому можно доопределить его на замыкании $\mathfrak{H}$ множества $\tilde{\mathfrak{H}}$. Норма оператора A после его продолжения попрежнему не будет превосходить $|a|$.

Покажем, что отображение $a \to A$ есть представление кольца R. Во-первых, очевидно, что если $a \to A$, $b \to B$, то $\lambda a + \mu b \to \lambda A + \mu B$ и $ab \to AB$.

Покажем, что если $a \to A$, то a^* переходит в A^*, иными словами, что $(ax, y) = (x, a^*y)$. Но это действительно так, ибо $(ax, y) = f(y^*ax)$, а

$$(x, a^*y) = f((a^*y)^*x) = f(y^*ax) = (ax, y).$$

Покажем, что полученное представление циклическое. В качестве вектора ξ_0 возьмем элемент $x = e$. Тогда множество векторов $A\xi_0$ есть

в данном случае множество всех a, т. е. все $\mathfrak{H}$ и, следовательно, плотно в $\mathfrak{H}$. Цикличность доказана.

Далее, очевидно, что при таком выборе ξ_0 мы имеем, по определению скалярного произведения,

$$(A\xi_0, \xi_0) = (a, e) = f(e^* a) = f(a).$$

Таким образом, мы построили представление кольца по наперед заданному положительному линейному функционалу $f(x)$.

Полученные нами результаты соединим в виде теоремы:

ТЕОРЕМА 3. *Каждому циклическому представлению кольца R с циклическим вектором ξ_0 отвечает положительный функционал*

$$f(a) = (A(a)\xi_0, \xi_0), \tag{6}$$

где $A(a)$ — оператор, отвечающий элементу a. Функционалом $f(x)$ представление определяется однозначно с точностью до эквивалентности.

Обратно, всякому положительному функционалу $f(a)$ отвечает циклическое представление такое, что $f(a)$ определяется формулой (6).

Если нам задано представление $a \longrightarrow A$ в пространстве $\mathfrak{H}$, то каждому элементу $\xi \in \mathfrak{H}$ отвечает положительный функционал $f(a) = (A(a)\xi, \xi)$.

Если мы заменим вектор ξ вектором $\lambda\xi$, $|\lambda| = 1$, то $f(a)$ от этого не изменится.

Вообще говоря, непропорциональные векторы могут давать один и тот же функционал $f(a)$. Однако, если представление неприводимо, то имеет место

ТЕОРЕМА 4. *Пусть нам задано неприводимое представление кольца R. Положим $(A\xi_1, \xi_1) = f_1(a)$ и $(A\xi_2, \xi_2) = f_2(a)$.*

Если $f_1(a) \equiv f_2(a)$, то $\xi_1 = \lambda\xi_2$, где $|\lambda| = 1$.

Доказательство. Так как представление неприводимо и $\xi_1 \neq 0$, то множество векторов $A\xi_1$ всюду плотно в $\mathfrak{H}$.

Зададим оператор U следующим образом: если $\xi = A\xi_1$, то положим $U\xi = A\xi_2$. Докажем, что так построенный оператор сохраняет длины векторов. В самом деле,

$$(U\xi, U\xi) = (A\xi_2, A\xi_2) = (A^*A\xi_2, \xi_2) = (A^*A\xi_1, \xi_1) = (A\xi_1, A\xi_1) = (\xi, \xi),$$

откуда следует, что оператор U определен однозначно. Действительно, если $A'\xi_1 = A''\xi_1$, то $\xi = (A' - A'')\xi_1 = 0$ и поэтому $U\xi = 0$, т. е. $A'\xi_2 = A''\xi_2$. Ограниченный оператор U доопределим, по непрерывности, на всем $\mathfrak{H}$.

Покажем, что оператор U перестановочен со всеми операторами A представления. В самом деле, пусть A_0 — оператор представления и пусть вектор ξ имеет вид $\xi = A\xi_1$. Тогда $A_0\xi = A_0 A\xi_1$, т. е., по определению U, имеем $UA_0\xi = A_0 A\xi_2$. Но

$$A_0 U\xi = A_0 U A\xi_1 = A_0 A\xi_2.$$

Таким образом, для векторов вида $\xi = A\xi_1$ имеем $A_0 U\xi = UA_0\xi$. Ввиду того, что эти элементы всюду плотны, получаем $A_0 U = UA$. Таким

образом, U перестановочен со всеми операторами неприводимого представления и, следовательно, в силу теоремы 1 § 1, $U=\lambda E$. Но это означает, что

$$\xi_2 = U\xi_1 = \lambda\xi_1.$$

§ 3. Обобщенная лемма Шура

В теории представлений колец приходится пользоваться некоторыми теоремами, которые являются обобщениями известной леммы Шура о конечномерных представлениях. В дальнейшем всюду в этом параграфе речь будет итти о представлениях одного и того же кольца R.

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $a \to X_a$ и $a \to Y_a$ — представления в пространствах $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ соответственно и пусть существует замкнутый линейный оператор T из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}'$ с областями определения и изменения, плотными в $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}'$ соответственно, такой, что* *

$$Y_a T \subset T X_a \text{ для всех } a \in R. \tag{1}$$

Пусть, кроме того, из $T\xi = 0$ следует $\xi = 0$. Тогда оба эти представления эквивалентны.

Доказательство. Взяв * от обеих частей (1), получим:

$$T^* Y_{a^*} \supset X_{a^*} T^*$$

или, подставляя a вместо a^*,

$$T^* Y_a \supset X_a T^*.$$

Отсюда, умножая обе части (1) слева на T^*, получаем

$$T^*TX_a \supset T^*Y_aT \supset X_aT^*T,$$

так что

$$T^*TX_a \supset X_aT^*T. \tag{2}$$

По известной теореме Неймана ([8]),

$$T = WH,$$

где $H = \sqrt{T^*T}$ — гипермаксимальный оператор; кроме того, из условий, наложенных на T, следует, что W изометрически отображает $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}'$. Соотношение (2) означает, что T^*T перестановочен с X_a, откуда следует, что и $H = \sqrt{T^*T}$ перестановочен с X_a. Подставляя в (1) выражение для T, получим

$$Y_aWH \subset WHX_a. \tag{3}$$

Пусть ξ — элемент из области определения H. Так как H и X_a перестановочны, то $X_a\xi$ также принадлежат области определения H и $HX_a\xi = X_aH\xi$. Поэтому, применяя обе части (3) к ξ, получим

$$Y_aWH\xi = WX_aH\xi,$$

т. е.

$$Y_aW = WX_a \tag{4}$$

* $A \subset B$ для неограниченных операторов означает, что B есть расширение A, т. е. область определения B содержит область определения A и в этой последней A и B совпадают.

на области изменения H. Но, согласно уже цитированной теореме Неймана, замыкание области изменения H совпадает с ортогональным дополнением совокупности всех тех векторов ξ, которые удовлетворяют условию: $T\xi=0$. В силу условия теоремы, эта совокупность состоит только из $\xi=0$, следовательно, замыкание области изменения H есть все $\mathfrak{H}$.

В силу непрерывности обеих частей (4), отсюда следует, что это равенство имеет место во всем $\mathfrak{H}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пусть* $a \to X_a$ *и* $a \to Y_a$ — *неприводимые представления кольца* R *в* $\mathfrak{H}$ *и* $\mathfrak{H}_1$ *соответственно, и пусть замкнутый линейный оператор* T *из* $\mathfrak{H}$ *в* $\mathfrak{H}_1$ *удовлетворяет условию* (1). *Тогда либо* $T\equiv 0$, *либо* X_a *и* Y_a *эквивалентны и* T *имеет вид*: $T=\rho W$, *где* ρ — *скаляр* >0.

Доказательство. Пусть $T\not\equiv 0$, следовательно, в области определения T существует элемент $\xi_0 \neq 0$ такой, что $T\xi_0\neq 0$. Из (1) следует, что $X_a\xi_0$ при любом $a\in R$ есть также элемет области определения T. Так как представление X_a неприводимо, то ξ_0 есть циклический элемент, следовательно, совокупность всех $X_a\xi_0$, $a\in R$, плотна в $\mathfrak{H}$. Таким образом, T имеет область определения, плотную в $\mathfrak{H}$.

Так как $TX_a\xi_0=Y_aT\xi_0$ и представление Y_a неприводимо, то область изменения T также плотна в $\mathfrak{H}_1$. Отсюда следует, что существует T^* и что равенство $T^*\xi=0$ возможно только при $\xi=0$.

Применяя эти рассуждения к T^*, приходим к выводу, что область изменения T^* плотна в $\mathfrak{H}$. Поэтому условие $T\xi=0$ возможно лишь при $\xi=0$.

Таким образом, оператор T удовлетворяет всем условиям теоремы 1; следовательно, X_a и Y_a эквивалентны.

Оператор H перестановочен со всеми операторами X_a неприводимого представления, следовательно, есть оператор умножения на некоторый неотрицательный скаляр ρ. Отсюда $T=\rho W$.

Определение 1. Пусть дана система представлений $a\to X_a^{(\alpha)}$ в $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$ кольца R, зависящих от индекса α. *Прямой суммой* этих представлений назовем представление $a\to X_a$ в $\mathfrak{H}$, которое строится следующим образом: $\mathfrak{H}$ есть совокупность последовательностей $\xi=\{\xi^{(\alpha)}\}$ таких, что

$$\sum_{\alpha} |\xi^{(\alpha)}|^2 < +\infty$$

(следовательно, каждая такая последовательность имеет не более счетного числа членов $\neq 0$) и $X\xi=\{X^{(\alpha)}\xi^{(\alpha)}\}$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть представление* $a\to X_a$ *в* $\mathfrak{H}$ *есть прямая сумма неприводимых и попарно неэквивалентных представлений* $a\to X_a^{(\alpha)}$ *в* $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$. *Тогда всякий ограниченный оператор* A *в* $\mathfrak{H}$, *перестановочный со всеми* X_a, *имеет вид*

$$A\xi=\{\lambda^{(\alpha)}\xi^{(\alpha)}\}, \tag{5}$$

где $\lambda^{(\alpha)}$ — *скаляр*.

Доказательство. Оператор A задается матрицей $\|A_{\alpha,\alpha_1}\|$, где A_{α,α_1} — ограниченный оператор из пространства $\mathfrak{H}^{(\alpha_1)}$ в пространство $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$. Условие перестановочности A с X_a дает

$$X_a^{(\alpha)}A_{\alpha,\alpha_1}=A_{\alpha,\alpha_1}X_a^{(\alpha_1)}. \tag{6}$$

Согласно следствию 1, отсюда следует, что $A_{\alpha,\alpha_1}=0$ при $\alpha\neq\alpha_1$. При $\alpha=\alpha_i$ из (6) следует, что $A_{\alpha,\alpha}$ перестановочен со всеми операторами $X_a^{(\alpha)}$ неприводимого представления, следовательно, есть оператор умножения на скаляр, который обозначим через $\lambda^{(\alpha)}$ (см. теорему 1, § 1). Отсюда следует, что A имеет вид (5) и теорема доказана.

Следствие 2. *Пусть $X_a^{(\alpha)}$, $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$, X_a, $\mathfrak{H}$ — те же, что и в теореме 2. Тогда всякое инвариантное по отношению ко всем X_a подпространство $\mathfrak{M}$ пространства $\mathfrak{H}$ есть совокупность всех ξ, удовлетворяющих условию*

$$\xi^{(\alpha)}=0 \quad \textit{для всех} \quad \alpha\in\mathfrak{A},$$

где $\mathfrak{A}$ — некоторое подмножество множества всех индексов α.

Действительно, пусть P — оператор проектирования $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{M}$—инвариантное подпространство по отношению ко всем X_a, то P перестановочен со всеми X_a, следовательно, $P\xi=\{\lambda^{(\alpha)}\xi^{\alpha}\}$. Далее, $P^2=P$, следовательно, $\lambda^{(\alpha)2}=\lambda^{(\alpha)}$; отсюда либо $\lambda^{(\alpha)}=0$, либо $\lambda^{(\alpha)}=1$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — совокупность тех α, для которых $\lambda^{(\alpha)}=0$. $\mathfrak{M}$ есть совокупность тех и только тех ξ, для которых $P\xi=\xi$, т. е. тех и только тех $\{\xi^{(\alpha)}\}$, для которых $\lambda^{(\alpha)}\xi^{(\alpha)}=\xi^{(\alpha)}$, следовательно, тех $\xi^{(\alpha)}$, для которых $\xi^{(\alpha)}=0$ при $\alpha\in\mathfrak{A}$.

Следствие 3. *Пусть $X_a^{(\alpha)}$, $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$, X_a, $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{M}$ — те же, что и в следствии 2. Пусть, каково бы ни было α_0, подпространство $\mathfrak{M}$ содержит вектор $\xi=\{\xi^{(\alpha)}\}$ такой, что $\xi^{(\alpha_0)}\neq0$; тогда $\mathfrak{M}=\mathfrak{H}$.*

Действительно, в этом случае множество $\mathfrak{A}$ будет, очевидно, пустым.

Следствие 4. *Пусть $X_a^{(0)}$, $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$, X_a, $\mathfrak{H}$ — те же, что и в теореме 2, и пусть множество всех индексов α счетно. Тогда всякий вектор $\xi=\{\xi^{(\alpha)}\}$ такой, что $\xi^{(\alpha)}\neq0$ при любом α, есть циклический вектор представления X_a.*

Действительно, пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутая оболочка всех $X_a\xi$. Тогда $\mathfrak{M}$ — инвариантное подпространство $\mathfrak{H}$. Согласно следствию 3, оно совпадает с $\mathfrak{H}$.

До сих пор мы рассматривали прямые суммы попарно неэквивалентных представлений. Рассмотрим теперь другой крайний случай.

Определение 2. Представление $a\to X_a$ будем называть *кратным неприводимому представлению* $a\to X_a^{(0)}$, если $a\to X_a$ есть прямая сумма представлений $a\to X_a^{(\alpha)}$, эквивалентных одному и тому же представлению $a\to X_a^{(0)}$.

ТЕОРЕМА 3. *Всякая неприводимая часть представления $a \to X_a$, являющегося кратным неприводимому представлению $a \to X_a^{(0)}$, эквивалентна представлению $a \to X_a^{(0)}$.*

Доказательство. Пусть $a \to X'_a$ — неприводимая часть представления $a \to X_a$ и пусть $\mathfrak{M}$ — инвариантное подпространство, в котором рассматривается $a \to X'_a$. Рассмотрим элементы $\xi = \{\xi^{(\alpha)}\} \in \mathfrak{M}$. Пусть α_0 — такое значение α, для которого существует элемент $\xi = \{\xi^{(\alpha)}\} \in \mathfrak{M}$ такой, что $\xi^{(\alpha_0)} \neq 0$. Положим $\xi^{(\alpha_0)} = \eta$ и $\{\xi^{(\alpha)}\}_{\alpha \neq \alpha_0} = \zeta$. Обозначим через $\mathfrak{H}_1$ совокупность всех ζ и введем норму, положив

$$|\zeta|^2 = \sum_{\alpha \neq \alpha_0} |\xi_\alpha|^2.$$

Тогда всякий элемент $\xi \in \mathfrak{H}$ можно рассматривать как пару $\xi = \{\eta, \zeta\}$ и $|\xi|^2 = |\eta|^2 + |\zeta|^2$.

Положим, далее,

$$Y_a \eta = Y_a \xi^{(\alpha_0)} = X_a^{(\alpha_0)} \xi^{(\alpha_0)}$$

и

$$Z_a \zeta = \{X_a^{(\alpha)} \xi^{(\alpha)}\}_{\alpha \neq \alpha_0}.$$

Тогда

$$X_a \xi = \{Y_a \eta, Z_a \zeta\},$$

т. е. X_a есть прямая сумма представлений $Y_a = X_a^{(\alpha_0)}$ и Z_a.

Рассмотрим элементы ζ такие, что при некотором η будет $\{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}$. Обозначим замкнутую оболочку всех таких ζ через $\mathfrak{H}'_1$. Она является инвариантным подпространством относительно Z_a в $\mathfrak{H}_1$. Действительно, из $\{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}$ следует, что также $\{Y_a \eta, Z_a \zeta\} \in \mathfrak{M}$. Если $\mathfrak{H}'_1 = (0)$, то $\mathfrak{M}$ есть совокупность всех $\xi = \{\xi^{(\alpha)}\}$ таких, что $\xi^{(\alpha)} = 0$ при $\alpha \neq \alpha_0$, следовательно, X'_a эквивалентно $X_a^{(0)}$. Поэтому нужно рассмотреть тот случай, когда $\mathfrak{H}'_1 \neq (0)$.

Рассмотрим элементы $\mathfrak{M}$ вида $\{\eta, 0\}$. Они образуют в $\mathfrak{M}$ инвариантное подпространство по отношению к $a \to X'_a$. Так как представление $a \to X'_a$ неприводимо, то это подпространство есть либо $\mathfrak{M}$, либо (0). Первая возможность исключается, ибо $\mathfrak{H}'_1 \neq (0)$. Поэтому должно быть $\eta = 0$. Таким образом,

$$\text{из } \{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}, \quad \zeta = 0, \quad \text{следует, что } \eta = 0. \tag{7_1}$$

Аналогично докажем, что

$$\text{из } \{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}, \quad \eta = 0, \quad \text{следует, что } \zeta = 0. \tag{7_2}$$

Согласно выбору α_0, среди элементов $\{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}$ есть хотя бы один $\{\eta_0, \zeta_0\} \in \mathfrak{M}$ такой, что $\eta_0 \neq 0$. Так как также $\{Y_a \eta_0, Z_a \zeta_0\} \in \mathfrak{M}$ и Y_a неприводимо, то совокупность всех η таких, что $\{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}$, образует множество, всюду плотное в $\mathfrak{H}^{(\alpha_0)}$.

Условие (7_2) означает, что $\mathfrak{M}$ можно рассматривать, как график линейного оператора T из $\mathfrak{H}^{(\alpha_0)}$ в $\mathfrak{H}_1'$. Именно, для $\{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}$ мы полагаем

$$\zeta = T\eta.$$

Так как $\mathfrak{M}$ замкнуто, то T замкнут. Далее, из предыдущего следует, что его области определения и изменения плотны в $\mathfrak{H}^{(\alpha_0)}$ и $\mathfrak{H}_1'$ соответственно. Наконец, (7_1) означает, что из $T\eta = 0$ следует $\eta = 0$.

Итак, элементы $\mathfrak{M}$ имеют вид $\{\eta, T\eta\}$. Так как $\mathfrak{M}$ — инвариантное подпространство по отношению к X_a, то и $\{Y_a\eta, Z_aT\eta\} \in \mathfrak{M}$, следовательно, имеет вид $\{Y_a\eta, TY_a\eta\}$, так что

$$TY_a\eta = Z_aT\eta. \tag{8}$$

Другими словами, если η принадлежит области определения T, то и $Y_a\eta$ ей принадлежит и имеет место (8). Это означает, что $Z_aT \subset TY_a$. Итак, оператор T удовлетворяет всем условиям теоремы 1, следовательно, Y_a и Z_a эквивалентны. Более того, $H = \sqrt{T^*T}$ перестановочен со всеми операторами неприводимого представления Y_a, следовательно, есть оператор умножения на скаляр $\rho > 0$. Отсюда $T = \rho W$.

Таким образом, каждый элемент из $\mathfrak{M}$ имеет вид $\xi = \{\eta, \rho W\eta\}$, где η пробегает все $\mathfrak{H}^{(\alpha_0)}$, причем

$$X_a\xi = \{Y_a\eta, \rho WY_a\eta\}.$$

Каждому такому $\xi = \{\eta, \rho W\eta\}$ поставим в соответствие элемент $\eta' = \sqrt{1+\rho^2}\,\eta$. Это соответствие будет, очевидно, изометрическим отображением $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{H}^{(\alpha_0)}$. При этом отображении вектор

$$X_a'\xi = \{Y_a\eta, \rho WY_a\eta\}$$

переходит в

$$\sqrt{1+\rho^2}\,Y_a\eta = Y_a\eta'.$$

Следовательно, оператор X_a переходит в $Y_a = X_a^{(\alpha_0)}$. Другими словами, представления X_a' в $\mathfrak{M}$ и $X_a^{(\alpha_0)}$ эквивалентны. Теорема доказана.

Следствие 5. *Пусть представления $a \to X_a$ в $\mathfrak{H}$ и $a \to Y_a$ в $\mathfrak{H}_1$ являются кратными неприводимым представлениям $a \to X_a^{(0)}$ и $a \to Y_a^{(0)}$ соответственно. Если при этом $a \to X_a$ и $a \to Y_a$ эквивалентны, то $a \to X_a^{(0)}$ и $a \to Y_a^{(0)}$ также эквивалентны.*

Доказательство. Из определения кратного представления следует, что $a \to X_a^{(0)}$ можно рассматривать как часть представления $a \to X_a$ в некотором инвариантном подпространстве $\mathfrak{M}$ пространства $\mathfrak{H}$.

По условию, представления $a \to X_a$ и $a \to Y_a$ эквивалентны, т. е. существует изометрическое отображение $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{H}_1$, при котором X_a переходит в Y_a. При этом отображении $\mathfrak{M}$ перейдет в некоторое подпространство $\mathfrak{N}$ пространства $\mathfrak{H}_1$, инвариантное по отношению ко всем Y_a, а представление $a \to X_a^{(0)}$ — в некоторую часть $a \to Y_a'$ представления $a \to Y_a$. Эта часть, будучи эквивалентной неприводимому представлению

$a \to X_a^{(0)}$, неприводима, следовательно, по теореме 3, эквивалентна представлению $a \to Y_a^{(0)}$.

Другими словами, представления $a \to X_a^{(0)}$ и $a \to Y_a^{(0)}$ эквивалентны, что и требовалось доказать.

§ 4. Включение кольца с инволюцией в кольцо операторов

Пусть нам задано кольцо R с инволюцией. Может оказаться, что кольцо можно упростить, оставив тот же запас положительных функционалов, или, что то же самое, тот же запас представлений.

Например, в § 2 мы упоминали о кольце аналитических функций, заданных в круге. Всякий положительный функционал в этом кольце задается формулой

$$f(x) = \int_{-1}^{+1} x(t)\, d\sigma(t),$$

где $\sigma(t)$ — монотонная функция. Но тот же запас положительных функционалов имеется и в кольце всех непрерывных на сегменте $(-1, +1)$ функций.

Более точно мы поставим вопрос следующим образом.

Заменить норму $|x|$ в кольце R возможно меньшей нормой $|x|_1$, при которой остался бы тот же запас положительных функционалов в R (т. е. то же множество циклических представлений). При этом новая норма должна быть такова, что

$$\left.\begin{aligned} &|e|_1 = 1, \quad |x+y|_1 \leqslant |x|_1 + |y|_1, \quad |\lambda x|_1 = |\lambda|\,|x|_1, \\ &|xy|_1 \leqslant |x|_1\,|y|_1, \quad |x^*|_1 = |x|_1, \quad |x|_1 \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

В новой норме могут оказаться элементы $x \neq 0$, для которых $|x|_1 = 0$. В этом случае мы объявим их эквивалентными нулю и перейдем таким образом к новому кольцу.

Далее, может оказаться, что в новой норме кольцо R не полно. Мы можем его тогда пополнить. Мы увидим также, что после введения новой нормы кольцо R станет изоморфным кольцу операторов в гильбертовом пространстве, а норма перейдет в норму операторов в гильбертовом пространстве.

ЛЕММА 1. *Пусть в R введено множество норм $|x|_\alpha$, каждая из которых удовлетворяет условиям* (1). *Пусть в каждой из этих норм R может быть изоморфно, с сохранением инволюции и нормы, отображено в кольцо операторов в гильбертовом пространстве. Пусть, далее, для каждого x $\sup\limits_\alpha |x|_\alpha < +\infty$. Тогда в норме $|x|_1 = \sup |x|_\alpha$ кольцо R может быть изоморфно, с сохранением нормы и инволюции, отображено в кольцо операторов в гильбертовом пространстве.*

Доказательство. Пусть при норме $|x|_\alpha$ кольцо реализуется как кольцо операторов в пространстве $\mathfrak{H}_\alpha$.

Рассмотрим пространство $\mathfrak{H}$, являющееся ортогональной прямой суммой пространств $\mathfrak{H}_\alpha$. Если через ξ^α обозначать векторы в $\mathfrak{H}_\alpha$, то векторами в $\mathfrak{H}$ будут $\xi = \{\xi^\alpha\}$, где $\{\xi^\alpha\}$ отлично от нуля не более чем для счетного множества значений α и

$$\sum_\alpha |\xi_\alpha|^2 = |\xi|^2 < +\infty.$$

Скалярное произведение определяется формулой

$$(\xi, \eta) = \sum_\alpha (\xi_\alpha, \eta_\alpha).$$

Каждому a отвечает, по условию, в $\mathfrak{H}_\alpha$ оператор $X_a^{(\alpha)}$, причем $|X_a^{(\alpha)}| = |a|_\alpha$.

В пространстве $\mathfrak{H}$ элементу a отвечает оператор X_a, определяемый следующим образом:

$$X_a\{\xi_\alpha\} = \{X_a^{(\alpha)}\xi_\alpha\}.$$

Оператор X_a ограничен. Действительно,

$$|X_a\xi|^2 = \sum_\alpha |X_a^{(\alpha)}\xi_\alpha|^2 \leqslant \sum_\alpha |X_a^{(\alpha)}|^2 |\xi_\alpha|^2 \leqslant \sup_\alpha |X_a^{(\alpha)}|^2 \cdot \sum |\xi_\alpha|^2.$$

Легко видеть, что $\sup\limits_\alpha |X_a^{(\alpha)}| = |X_a| = |a|_1$. Мы реализовали, таким образом, кольцо R с нормой $|a|_1$ в виде кольца операторов в гильбертовом пространстве.

ЛЕММА 2. *Пусть в кольце R введена норма $|x|_0$, удовлетворяющая условиям* (1), *и пусть дано представление $a \to X_a$ кольца R, непрерывное в этой норме *. Тогда $|X_a| \leqslant |a|_0$.*

Доказательство. Так как это представление непрерывно, то мы можем продолжить его на пополнение R_0 кольца R. Мы получим тогда представление полного кольца R_0. Для него, согласно теореме 2 § 2, имеет место неравенство $|X_a| \leqslant |a|_0$. Лемма доказана.

ТЕОРЕМА 1. *В кольце R можно ввести норму $|x|_1$, удовлетворяющую следующим условиям:*

1°. $|x|_1$ *удовлетворяет условиям* (1).

2°. *Всякое представление кольца R есть представление, непрерывное в норме $|x|_1$.*

3°. *Если какая-либо другая норма $|x|_2$ также удовлетворяет условиям* 1° *и* 2°, *то $|x|_1 \leqslant |x|_2$ для всякого x.*

4°. ***Кольцо R с нормой $|x|_1$ можно изоморфно, с сохранением инволюции и нормы, отобразить на кольцо операторов в гильбертовом пространстве.***

---

* Когда мы говорим, что представление $a \to X_a$ непрерывно в норме $|x|_0$, удовлетворяющей условиям (1), то мы требуем также, чтобы из $|a|_0 = 0$ следовало $X_a = 0$, т. е. элементы, эквивалентные нулю в этой норме, переходили бы в 0.

Ясно, что условиями 1°, 2°, 3° норма $|x|_1$ определяется однозначно.

Доказательство. Рассмотрим множество всех циклических представлений данного кольца * и обозначим каждое циклическое представление значком α. Пусть элементу a при этом представлении отвечает оператор $X_a^{(\alpha)}$. В силу теоремы 2 § 2, $|X_a^{(\alpha)}|\leqslant|a|$. Положим

$$|a|_\alpha=|X_a^{(\alpha)}|;$$

$|a|_\alpha$ будет нормой, удовлетворяющей условиям (1) этого параграфа. Положим, теперь, $|a|_1=\sup\limits_\alpha|a|$. При этом мы будем иметь $|a|_1\leqslant|a|$, так как $|a|_1\leqslant|a|$.

Согласно лемме 1, кольцо R с нормой $|a|_1$ удовлетворяет условиям (1) и может быть реализовано как кольцо операторов в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$.

Всякое циклическое представление кольца R непрерывно в норме $|a|_1$. Действительно, пусть дано циклическое представление $a\longrightarrow X_a^{(\alpha)}$. Тогда

$$|X_a^{(\alpha)}|=|a|_\alpha\leqslant\sup_\alpha|a|_\alpha=|a|_1.$$

Всякое представление разлагается в прямую сумму циклических и поэтому также непрерывно в этой норме.

Таким образом, показано, что $|a|_1$ удовлетворяет условиям 1°, 2° и 4°. Покажем, что выполнено также и условие 3°. Пусть дана норма $|x|_2$, удовлетворяющая условиям (1) и в которой все представления R непрерывны. Тогда, в силу леммы 2, имеем

$$|X_a^{(\alpha)}|\leqslant|a|_2,$$

т. е. $|a|_\alpha\leqslant|a|_2$. Следовательно, и

$$|a|_1=\sup_\alpha|a|_\alpha\leqslant|a|_2.$$

Теорема полностью доказана.

ТЕОРЕМА 2. *Имеет место равенство*

$$|x|_1=\sup\sqrt{f(x^*x)}, \tag{2}$$

где sup *распространяется по всем положительным функционалам* f, *для которых* $f(e)=1$.

Доказательство. Каждое циклическое представление описывается (§ 2) некоторым положительным функционалом f. Найдем норму оператора X_a, отвечающего элементу a в этом представлении. Мы имеем

$$(X_ax,\, X_ax)=f((ax)^*\,ax)=f(x^*a^*ax), \quad (x,\, x)=f(x^*x).$$

Введем функционал $f_x(y)=f(x^*yx)$, считая x фиксированным. $f_x(y)$ — положительный функционал, причем

$$f_x(e)=f(x^*x), \quad |X_a|^2=\sup(X_ax,\, X_ax),$$

* Мы берем лишь циклические представления, так как каждое разлагается на циклические.

где sup распространяется по всем x, для которых $(x, x) = 1$; таким образом,

$$|X_a|^2 = \sup f_x(a^*a),$$

где sup распространяется по всем x при условии $f_x(e) = 1$.

Следовательно, $|X_a|^2 \leqslant \sup f(a^*a)$, где sup распространяется по всем положительным функционалам f при условии $f(e) = 1$.

Если обозначить это представление индексом α, то

$$|a|_\alpha^2 \leqslant \sup f(a^*a)$$

при условии: $f(e) = 1$ и f — положительный функционал. Следовательно,

$$|a|_1^2 \leqslant \sup_\alpha |a|_\alpha^2 \leqslant \sup_{f(e)=1} f(a^*a).$$

С другой стороны,

$$f(a^*a) = (X_a e, X_a e).$$

Поэтому, если $f(e) = 1$, то

$$f(a^*a) \leqslant |X_a|^2 = |a|_\alpha^2 \leqslant \sup_\alpha |a|_\alpha^2 = |a|_1^2.$$

Следовательно,

$$\sup_{f(e)=1} f(a^*a) \leqslant |a|_1^2.$$

Теорема доказана.

Замечание I. Все рассуждения этого параграфа остаются в силе, если в исходном кольце вовсе не было нормы, т. е. если оно определялось лишь аксиомами 1°, 2° и a), b), c), d). При этом нужно лишь дополнительно требовать следующего: для всякого x

$$\sup f(x^*x) < +\infty,$$

где sup распространяется по всем положительным f, для которых $f(e) = 1$.

Замечание II. Совокупность I элементов, для которых $|x|_1 = 0$ (мы называем их эквивалентными нулю), образует двусторонний идеал. Эти элементы x характеризуются тем, что при любом представлении они переходят в 0 или иначе, что любой положительный функционал обращается на них в 0.

Докажем, что I действительно идеал.

Пусть $|x|_1 = 0$, y — произвольный элемент. Тогда

$$|xy|_1 \leqslant |x|_1 |y|_1 = 0,$$

аналогично $|yx|_1 = 0$. Далее, если $|x|_1 = 0$ и $|y|_1 = 0$, то

$$|\lambda x + \mu y|_1 \leqslant |\lambda| |x|_1 + |\mu| |y|_1 = 0.$$

Мы доказали, что I — идеал. При изучении представлений либо положительных функционалов мы можем заменить R кольцом вычетов по этому идеалу. Обозначим это кольцо вычетов через R'. Мы будем называть его *приведенным кольцом*.

Замечание III. Всякое представление кольца R непрерывно в норме $|x|_1$ и поэтому является непрерывным представлением кольца R'. Но непрерывное представление R' может быть расширено до представления пополнения R'. Пополнение R' мы обозначим через $\overline{R}$.

Итак, *всякое представление кольца R есть также представление кольца $\overline{R}$ и обратно.*

Аналогично, *всякий положительный функционал на R может быть перенесен на $\overline{R}$ и обратно.*

§ 5. Неразложимые функционалы и неприводимые представления

В конечномерном случае всякое представление разлагается на неприводимые. В общем случае a priori неясно существование таких представлений. Мы, не касаясь вопроса о разложении представлений на неприводимые, докажем в этом параграфе существование неприводимых представлений. Очень удобно это сделать в терминах положительных функционалов.

Определение 1. Будем говорить, что положительный функционал f_1 *подчинен функционалу* f ($f_1 \ll f$), если существует такое λ, что $\lambda f - f_1$ — положительный функционал.

Построим циклическое представление $a \longrightarrow X_a$ (X_a — операторы в пространстве $\mathfrak{H}$), отвечающее функционалу f:

$$f(a) = (X_a\xi_0, \xi_0),$$

где ξ_0 — циклический вектор. Пусть B — ограниченный положительно определенный оператор в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, перестановочный со всеми операторами представления. Положим

$$f_1(a) = (X_a B\xi_0, \xi_0).$$

В частности, оператору $B = E$ отвечает сам функционал f. Мы утверждаем, что $f_1(a)$ — *положительный функционал и подчинен функционалу* $f(a)$.

В самом деле, $f_1(a)$ положителен. Действительно,

$$f_1(a^*a) = (X_a^*X_a B\xi_0, \xi_0) = (X_a B\xi_0, X_a\xi_0) = (BX_a\xi_0, X_a\xi_0) \geqslant 0,$$

так как B — положительно определенный оператор. Далее, f_1 подчинен f. Действительно, B ограничен. Следовательно, существует λ такое, что $(B\xi, \xi) \leqslant \lambda(\xi, \xi)$, т. е.

$$\lambda(\xi, \xi) - (B\xi, \xi) \geqslant 0.$$

Полагая $\xi = X_a\xi_0$, получаем

$$\lambda(X_a^*X_a\xi_0, \xi_0) - (X_a^*X_a B\xi_0, \xi_0) \geqslant 0,$$

т. е. $\lambda f - f_1$ — положительный функционал. Это же означает, что f_1 подчинен f.

Обратно, пусть f_1 — положительный функционал, подчиненный функционалу f. По функционалу f построим циклическое представление (§ 2). *Тогда функционалу f_1 отвечает положительно определенный оператор B, перестановочный со всеми операторами представления.*

Докажем это. Мы знаем, что пространство $\mathfrak{H}$ получается пополнением пространства $\tilde{\mathfrak{H}}$, составленного из элементов R, причем скалярное произведение в $\tilde{\mathfrak{H}}$ задается формулой

$$(x, y) = f(y^*x).$$

Элементы же x, для которых $(x, x)=0$, т. е. $f(x^*x)=0$, мы будем считать эквивалентными нулю.

Рассмотрим в пространстве $\tilde{\mathfrak{H}}$ эрмитовскую форму $f_1(y^*x)$. Мы докажем, что f_1 есть однозначно определенная, непрерывная в $\tilde{\mathfrak{H}}$ эрмитовская билинейная форма. f_1 подчинено f. Это значит, что существует такое λ, что $\lambda f - f_1$ — положительный функционал. Таким образом, имеем

$$\lambda f(x^*x) - f_1(x^*x) \geqslant 0,$$

следовательно,

$$0 \leqslant f_1(x^*x) \leqslant \lambda f(x^*x).$$

Это доказывает, что равенство $f(x^*x)=0$ влечет $f_1(x^*x)=0$, а значит, например, в силу неравенства

$$|f_1(y^*x)|^2 \leqslant f_1(x^*x) f_1(y^*y),$$

и равенство нулю выражения $f_1(y^*x)$.

Мы показали, что $f_1(y^*x)$ однозначно определена, т. е. для $x \sim 0$ $f_1(y^*x)=0$. f_1 — ограниченная билинейная форма. Действительно,

$$0 \leqslant f_1(x^*x) \leqslant \lambda f(x^*x).$$

Следовательно,

$$|f_1(y^*x)|^2 \leqslant f_1(x^*x) f_1(y^*y) \leqslant \lambda^2 f(x^*x) f(y^*y) = \lambda^2 (x, x)(y, y).$$

В силу ее ограниченности, мы можем продолжить эту билинейную форму на пополнение $\tilde{\mathfrak{H}}$, т. е. на пространство $\mathfrak{H}$. Но ограниченной билинейной форме в $\mathfrak{H}$ отвечает ограниченный оператор B. Следовательно, существует оператор B такой, что

$$f_1(y^*x) = (Bx, y).$$

Докажем, что оператор B перестановочен со всеми операторами X_a представления. Для этого достаточно доказать, что

$$(BX_a x, y) = (Bx, X_a^* y).$$

Но это действительно так, ибо

$$(BX_a x, y) = (Bax, y) = f_1(y^*ax),$$

а

$$(Bx, X_a^* y) = (Bx, a^*y) = f_1((a^*y)^* x) = f_1(y^*ax).$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 1. *Пусть $f(x)$ — положительный функционал, $a \to X_a$ — отвечающее ему циклическое представление, ξ_0 — соответствующий циклический вектор, т. е.*

$$f(a) = (X_a\xi_0, \xi_0).$$

Тогда каждому положительному функционалу f_1, подчиненному функционалу f, отвечает положительно определенный оператор B, перестановочный со всеми X_a, причем

$$f_1(a) = (X_a B\xi_0, \xi_0).$$

Обратно, каждому ограниченному положительно определенному оператору B, перестановочному со всеми операторами X_a, отвечает положительный функционал, подчиненный функционалу f.

В частности, самому $f(x)$ отвечает единичный оператор. Рассмотрим теперь линейные комбинации положительных функционалов, подчиненных функционалу $f(x)$. Мы назовем их функционалами, подчиненными положительному функционалу $f(x)$. Им отвечают произвольные ограниченные операторы, перестановочные с операторами X_a представления.

Действительно, любой оператор, перестановочный с операторами X_a, можно представить как линейную комбинацию положительных. Таким образом,

В совокупность функционалов, подчиненных положительному функционалу f, мы можем ввести операцию умножения так, что она станет изоморфной кольцу операторов, перестановочных с операторами X_a представления, порожденного функционалом $f(x)$. Сам f играет при этом роль единицы кольца.

Мы превратили совокупность C_f функционалов, подчиненных функционалу f, в кольцо с инволюцией. При этом:

1°. Функционалу f отвечает единица кольца.

2°. Операция $*$ определена так: $f^* = \bar{f}$, причем под функционалом $\bar{f}(x)$ понимается функционал $\overline{f(x^*)}$.

3°. Умножение связано с $*$ обычным требованием:

$$(f_1 f_2)^* = f_2^* f_1^*.$$

Определение 2. Положительный функционал f называется *неразложимым*, если всякий подчиненный ему функционал f_1 кратен ему, т. е. $f_1(x) = \lambda f(x)$.

ТЕОРЕМА 2. *Пусть f — положительный функционал. Для того чтобы отвечающее ему представление было неприводимым, необходимо и достаточно, чтобы f был неразложимым.*

Доказательство. Всякому функционалу f_1, подчиненному функционалу f, отвечает оператор, перестановочный со всеми операторами X_a представления. При этом самому функционалу f отвечает единичный оператор. Неприводимость представления эквивалентна тому, что всякий оператор B, перестановочный с операторами представления, кратен единице (теорема 1, § 1), т. е. тому, что всякий функционал f_1, подчиненный функционалу f, является кратным f.

Перейдем теперь к доказательству существования неприводимых представлений. В силу только что доказанной теоремы, для этого достаточно показать существование неразложимых положительных функционалов.

Совокупность положительных функционалов $f(x)$ таких, что $f(e) \leqslant 1$, образует выпуклое множество. В самом деле, если $f_1(x)$ и $f_2(x)$ положительны и $f_1(e) \leqslant 1$, $f_2(e) \leqslant 1$, то

$$f(x) = \alpha f_1(x) + \beta f_2(x), \quad (\alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0, \quad \alpha + \beta = 1)$$

удовлетворяет тем же условиям. Поэтому существование неразложимых положительных функционалов непосредственно следует из теоремы

М. Крейна и Д. Мильмана [6]. Более того, пусть x — элемент кольца такой, что $|x|_1 \neq 0$. Тогда существует положительный функционал f такой, что

$$f(x^*x) \neq 0, \quad f(e) = 1.$$

С другой стороны, по той же теореме М. Крейна и Д. Мильмана, совокупность всех положительных функционалов f, удовлетворяющих условию $f(e) \leqslant 1$, есть наименьшее регулярно замкнутое выпуклое множество, содержащее все неразложимые положительные функционалы, удовлетворяющие условию $f(e) \leqslant 1$. Поэтому существует также неразложимый функционал f_0, удовлетворяющий условиям

$$f_0(e) \leqslant 1, \quad f_0(x^*x) \neq 0.$$

Таким образом, доказана

ТЕОРЕМА 3. *Пусть x — элемент кольца $\overline{R}$ такой, что $|x|_1 \neq 0$. Тогда существует неразложимый положительный функционал f_0, удовлетворяющий условиям*

$$f_0(e) \leqslant 1, \quad f_0(x^*x) \neq 0. \tag{1}$$

Согласно теореме 2 этого параграфа и теореме 3 § 2, эту теорему можно сформулировать следующим образом:

ТЕОРЕМА 4. *Пусть x_0 — элемент кольца $\overline{R}$ такой, что $|x_0|_1 \neq 0$. Тогда существует неприводимое представление $a \to X_a$ кольца $\overline{R}$ такое, что оператор X_{x_0} в этом представлении, соответствующий элементу x_0, отличен от нуля.*

Действительно, условия (1) можно переписать в виде

$$|\xi_0|^2 \leqslant 1, \quad |X_{x_0}\xi_0|^2 \neq 0.$$

Последнее неравенство означает, что $X_{x_0} \neq 0$.

§ 6. Случай коммутативных колец

Вся картина становится особенно простой в том случае, когда R — коммутативное кольцо.

ЛЕММА 1. *Если R коммутативно, то кольцо $\overline{R}$ изоморфно кольцу всех непрерывных функций $x(M)$ на некотором бикомпактном пространстве; при этом $x^*(M) = \overline{x(M)}$.*

Доказательство. Кольцо $\overline{R}$ есть $*$-кольцо, т. е.

$$|x^*x|_1 = |x|_1 |x^*|_1. \tag{1}$$

В самом деле, $|x|_1 = \sup\limits_f \sqrt{f(x^*x)}$, где f — положительный функционал и $f(e) = 1$.

Согласно неравенству (2) § 2, мы имеем

$$\sup_f \sqrt{f(x^*x)} \leqslant \sqrt{|xx^*|_1};$$

итак, $|x|_1^2 \leqslant |xx^*|_1$. С другой стороны, всегда

$$|xx^*|_1 \leqslant |x|_1 |x^*|_1 = |x|_1^2, \quad \text{т. е.} \quad |xx^*| = |x|^2 = |x|\,|x^*|.$$

Согласно лемме 1 в ([2]), коммутативное кольцо, в которое введена инволюция и норма, удовлетворяющая (1), изоморфно кольцу всех непрерывных функций на бикомпактном множестве $\mathfrak{M}_1$. Это множество $\mathfrak{M}_1$ есть множество максимальных идеалов кольца $\overline{R}$.

Определение. Максимальный идеал M кольца R называется *симметричным*, если для любого $x \in R$ имеет место $x^*(M) = \overline{x(M)}$. Если M — максимальный идеал, то через M^* мы обозначим максимальный идеал такой, что $x^*(M^*) = \overline{x(M)}$. Легко показать, что для всякого M существует M^*. Симметричный максимальный идеал — такой, для которого $M^* = M$.

Можно доказать, что множество симметричных максимальных идеалов кольца R образует замкнутое подмножество в множестве всех максимальных идеалов кольца R.

ТЕОРЕМА 1. *$\overline{R}$ изоморфно кольцу всех непрерывных функций на множестве $\mathfrak{M}_1$ симметричных максимальных идеалов кольца R.*

Доказательство. Для того чтобы доказать теорему, достаточно доказать, в силу леммы 1, что множество максимальных идеалов кольца $\overline{R}$ гомеоморфно множеству симметричных максимальных идеалов кольца R.

Каждому максимальному идеалу кольца $\overline{R}$ отвечает симметричный максимальный идеал кольца R.

Действительно, пусть нам задан гомоморфизм кольца $\overline{R}$ в тело комплексных чисел. Этот гомоморфизм есть одновременно гомоморфизм кольца R', являющегося частью $\overline{R}$. Но R' есть кольцо вычетов кольца R. Поэтому этот гомоморфизм есть одновременно гомоморфизм самого R в тело комплексных чисел.

Таким образом, этим определен максимальный идеал кольца R. Этот максимальный идеал симметричен, так как все максимальные идеалы кольца $\overline{R}$ симметричны. Непрерывность соответствия между идеалами вытекает непосредственно из определения топологии в множество максимальных идеалов [см. ([1]) § 7].

Обратно, пусть M — симметричный максимальный идеал кольца R. Рассмотрим функционал

$$f(x) = x(M).$$

Этот функционал положителен. Действительно,

$$f(x^*x) = x^*(M)\,x(M) = |x(M)|^2 \geqslant 0, \quad f(e) = e(M) = 1.$$

Поэтому этот функционал равен нулю для элементов, для которых $|x|_1 = 0$. Кроме того, этот функционал непрерывен по норме $|x|_1$ и может быть перенесен поэтому на $\overline{R}$.

Таким образом, между симметричными максимальными идеалами M кольца R и максимальными идеалами $\overline{M}$ кольца $\overline{R}$ можно установить взаимно однозначное и непрерывное соответствие. При этом, если обозна-

чать одной и той же буквой x элемент из R и отвечающий ему элемент из $\overline{R}$, то имеет место

ТЕОРЕМА 2. *Всякий положительный линейный функционал $f(x)$ на коммутативном кольце R может быть представлен, и притом единственным образом, в виде*

$$f(x)=\int x(M)\,d\sigma(\Delta), \tag{2}$$

где $\sigma(\Delta)$ — положительная вполне аддитивная функция множеств на множестве $\mathfrak{M}_1$ симметричных максимальных идеалов кольца R.

Доказательство. Всякий положительный функционал на R можно распространить на $\overline{R}$ (замечание III в § 4). Он превращается тогда в положительный функционал на совокупности непрерывных функций на бикомпактном множестве $\mathfrak{M}_1$. Такой функционал записывается формулой (2), гда $\sigma(\Delta)$ — неотрицательная, вполне аддитивная функция множеств. Функция множеств $\sigma(\Delta)$ при этом определяется однозначно.

Обратно, если $\sigma(\Delta)$ — неотрицательная функция множеств на множестве симметричных максимальных идеалов, то $f(x)$, задаваемый формулой (1), будет положительный функционал. Действительно,

$$f(x^*x)=\int x^*(M)\,x(M)\,d\sigma(\Delta)=\int |\,x(M)\,|^2\,d\sigma(\Delta)\geqslant 0.$$

Теорема доказана.

Из формул (1) следует, что всякий неразложимый положительный функционал имеет вид $f(x)=x(M_0)$, где M_0 — фиксированный симметричный максимальный идеал.

Доказанная нами теорема означает, собственно говоря, что каждый функционал разлагается, и притом однозначно, на положительные, неразложимые далее функционалы. При этом от R мы потребовали коммутативности. Это условие является существенным, как это видно из следующей теоремы.

ТЕОРЕМА 3. *Пусть всякий положительный функционал, заданный на кольце R, разлагается единственным образом по неразложимым далее положительным функционалам. Тогда приведенное кольцо $\overline{R}$ коммутативно (т. е. $xy-yx$ есть элемент, эквивалентный нулю в R).*

Доказательство. Рассмотрим какое-либо неприводимое представление $a\longrightarrow X_a$, где X_a — оператор в пространстве $\mathfrak{H}$. Докажем, что $\mathfrak{H}$ одномерно. Предположим противное. Тогда в $\mathfrak{H}$ существуют по крайней мере два линейно независимых вектора ξ_1 и ξ_2. Положим

$$f_1(a)=(X_a\xi_1,\,\xi_1),\qquad f_2(a)=(X_a\xi_2,\,\xi_2),$$
$$f_1'(a)=\frac{1}{2}(X_a(\xi_1+\xi_2),\,\xi_1+\xi_2),\qquad f_2'(a)=\frac{1}{2}(X_a(\xi_1-\xi_2),\,\xi_1-\xi_2)$$

и пусть

$$\varphi(a)=f_1(a)+f_2(a)=f_1'(a)+f_2'(a).$$

$\varphi(a)$ — положительный функционал.

По теореме 2 § 5 функционалы $f_1(a)$, $f_2(a)$, $f_1'(a)$, $f_2'(a)$ неразложимы. Поэтому $f(a)$ разлагается двумя способами на неразложимые функционалы. Эти способы различны. Действительно, векторы ξ_1, ξ_2, $\xi_1+\xi_2$, $\xi_1-\xi_2$ непропорциональны.

С другой стороны, согласно теореме 4 § 2, в случае неприводимого представления функционалом вида $(X_a\xi, \xi)$ вектор ξ определяется с точностью до множителя однозначно.

Итак, всякое неприводимое представление R одномерно, т. е. коммутативно. Так как всякий элемент, переходящий при всех неприводимых представлениях в нуль, эквивалентен нулю, то $xy-yx$ эквивалентен нулю, т. е. приведенное кольцо коммутативно.

Пример. Обозначим через R_0' совокупность функций, заданных на полупрямой $0 \leqslant u < \infty$, таких, что

$$\|f\| = \int_0^\infty |f(u)| \operatorname{sh} 2u \, du < +\infty.$$

Определим в R_0' умножение $f = f_1 \times f_2$, где $f(u)$ определяется формулой

$$f(u) = \int_0^\infty \int_{|u-t|}^{u+t} f_1(s) f_2(t) \, ds \, dt.$$

Обозначим, далее, через R_0 совокупность всех элементов вида $\lambda e + f$, где e — формально присоединенная единица, а $f \in R_0'$.

Можно проверить, что R_0 превращается при этом в нормированное кольцо.

Определим операцию $*$, положив

$$f^*(u) = \overline{f(u)}, \qquad (\lambda e + f)^* = \bar{\lambda} e + f^*.$$

Легко проверить, что мы получили при этом коммутативное кольцо с инволюцией. Найдем максимальные идеалы этого кольца. Рассуждения при этом совершенно аналогичны тем, которые проводятся в ([5]).

Так же, как и там, мы приходим к тому, что максимальные идеалы определяются гомоморфизмом

$$f \rightarrow \int_0^\infty f(s) \psi(s) \, ds,$$

где $\psi(s)$ определяется из соотношения

$$\psi(s)\psi(t) = \int_{|t-s|}^{t+s} \psi(u) \, du.$$

Решениями этого уравнения служат функции

$$\psi(s) = \frac{2 \sin \rho s}{\rho},$$

где ρ — произвольное комплексное число. Для того чтобы гомоморфизм был определен для всех элементов из R_0, необходимо и достаточно, чтобы $\rho = \rho_1 + i\rho_2$, где $|\rho_2| \leqslant 2$.

Итак, каждый максимальный идеал кольца определяется числом $\rho=\rho_1+i\rho_2$, где $|\rho_2|\leqslant 2$. При этом ρ и $-\rho$ определяют один и тот же максимальный идеал.

Пусть M — максимальный идеал, определяемый числом ρ. Тогда максимальный идеал M^* определяется числом $\bar{\rho}$. Следовально, симметричные максимальные идеалы определяются из условия $\rho=\bar{\rho}$, либо $\rho=-\bar{\rho}$; таким образом, симметричные максимальные идеалы будут либо при ρ вещественном, либо при чисто мнимом. Соответствующие гомоморфизмы задаются формулами:

$$f \to \int_0^\infty f(s)\,\frac{2\sin\rho s}{\rho}\,d\rho,$$

где ρ вещественно, и

$$f \to \int_0^\infty f(s)\,\frac{2\,\mathrm{sh}\,\rho s}{\rho}\,d\rho,$$

где $0\leqslant\rho\leqslant 2$.

§ 7. Групповые кольца

Как частный случай изучавшихся ранее колец, мы рассмотрим так называемые групповые кольца. Это дает нам возможность получить некоторые результаты, относящиеся к представлениям групп.

Пусть G — локально бикомпактная группа. Для простоты изложения мы будем предполагать, что правая и левая инвариантные меры на G совпадают между собой.

Рассмотрим кольцо R', элементами которого служат суммируемые функции $x(g)$ на группе.

Умножение задается формулой

$$x_1\times x_2=\int x_1(gg_1^{-1})\,x_2(g_1)\,dg_1.$$

$*$ определим равенством:

$$x^*(g)=\overline{x(g^{-1})}.$$

Норма $|x|$ элемента x полагается равной

$$|x|=\int |x(g)|\,dg.$$

К этому кольцу добавим формально единицу (если группа не дискретна) так, что окончательно элементы кольца изображаются символом $\lambda e+x$, где e — формально присоединенная единица. При этом умножение, естественно, задается формулой

$$(\lambda_1 e_1+x_1)(\lambda_2 e_2+x_2)=\lambda_1\lambda_2 e+(\lambda_1 x_2+\lambda_2 x_1+\lambda_1\lambda_2 x_1 x_2),$$

а $*$ и норма распространяются так: мы полагаем

$$|\lambda e+x|=|\lambda|+|x|,\qquad (\lambda e+x)^*=\bar{\lambda}e+x^*.$$

Полученное кольцо обозначим через R и назовем *групповым кольцом группы G*.

ТЕОРЕМА. 1. *Каждому представлению* $a+\lambda e \longrightarrow X_a+\lambda E$ *группового кольца отвечает непрерывное унитарное представление* $g\longrightarrow T_g$ *группы. Обратно, каждому измеримому представлению группы отвечает представлвние* $a\longrightarrow X_a$ *группового кольца. Эти представления связаны между собой формулами*

$$X_a=\int a(g)\,T_g\,dg.$$

Докажем теорему для циклического представления. Такое представление, как мы знаем (§ 2), может быть реализовано следующим образом: пространство $\mathfrak{H}$ получается пополнением пространства $\tilde{\mathfrak{H}}$, векторами в котором служат элементы $x, y, \ldots$ из R. Скалярное произведение задается формулой

$$f(y^*x)=(x, y),$$

где f — некоторый положительный функционал. Элементу a отвечает оператор X_a:$X_a x=ax$. Мы доказали, что при этом $|X_a|\leqslant|a|$. Элементу g_0 мы ставим в соответствие оператор $T_{g_0}x=y$, где функция $y(g)=x(g_0^{-1}g)$.

Докажем, что этот оператор унитарный. Заметим, что имеет место следующее равенство для элементов из R:

$$(T_{g_0}y)^*\,T_{g_0}x=y^*x.$$

Действительно,

$$y^*x=\int \overline{y(g_1g^{-1})}\,x(g_1)\,dg.$$

Поэтому скалярные произведения при применении T_{g_0} не меняются. Так как, сверх того, оператор T_g отображает наше множество функций на себя, то ясно, что продолженный на все $\mathfrak{H}$ оператор T_{g_0} будет унитарным. Покажем, что представление непрерывно. Заметим для этого, что функционал f непрерывен (как и всякий положительный функционал); с другой стороны,

$$|T_{g_0}x-x|=\int|T_{g_0}x-x|\,dg\longrightarrow 0 \text{ при } g_0\longrightarrow e,$$

следовательно,

$$f\,[(T_{g_0}x-x)^*\,(T_gx-x)]\longrightarrow 0 \quad \text{при } g_0\longrightarrow e.$$

Это означает, что

$$(T_{g_0}x-x,\ T_{g_0}x-x)\longrightarrow 0 \text{ при } g_0\longrightarrow e.$$

Этим доказана непрерывность в единице группы, а следовательно, и в любой другой точке.

Нам осталось показать, что порожденное представлением $g\longrightarrow T_g$ представление кольца будет тем, из которого мы исходили.

Пусть $a(g)$ — суммируемая функция. При представлении кольца R ей отвечает оператор $Ax=a\times x$. Наша цель — доказать, что

$$Ax=\int a(g)\,T_g\,x\,dg,$$

или, в скалярных произведениях:

$$(Ax, y) = \int a(g)(T_g x, y)\, dg,$$

т. е.

$$f(y^* ax) = \int a(g) f(y^* T_g x)\, dg.$$

Ввиду непрерывности функционала и операции T_g, мы можем правую часть равенства переписать так:

$$f\left(y^* \int a(g) T_g x\, dg\right) = f(y^* ax).$$

Наше утверждение доказано.

Мы доказали, что всякому представлению группового кольца отвечает представление группы. Легко показать обратное. В самом деле, пусть дано унитарное представление группы: $g \to T_g$.

Предположим, что функция T_g слабо непрерывна, т. е. для всяких ξ и η (T_g, ξ, η) — непрерывная функция. Положим

$$A = \int a(g)\, T_g\, dg.$$

Этот оператор существует, если только функция $a(g)$ суммируема. Мы получаем представление группового кольца. Легко видеть, что ему обратно отвечает представление T_g, если только представление циклично *.

Сделаем еще одно замечание по поводу доказательства теоремы. При построении T_g мы не использовали представления расширенного кольца R, а лишь представление исходного кольца R' без присоединенной единицы. Поэтому, так как пространство $\mathfrak{H}$ строилось пополнением пространства $\tilde{\mathfrak{H}}$, составленного из элементов кольца R, то нужно показать, что кольцо R' нерасширенное приведет нас к тому же самому пространству $\mathfrak{H}$. Для этого докажем, что элемент e есть предел, в смысле введенного скалярного произведения, элементов x кольца R'

Отнесем каждой окрестности V единицы группы G функцию $e_v(g)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$e_v(g) \geqslant 0, \quad e_v(g) = 0, \text{ если } g \in V,$$
$$e_v(g^{-1}) = e_v(g), \quad \int e_v(g)\, dg = 1.$$

Такую систему функций назовем *единичной системой*. Легко показать, что единичная система обладает следующим свойством:

$$|x \times e_v - x| \to 0 \text{ при } v \to e$$

(предел понимается по частично упорядоченной системе окрестностей, заданных в смысле их естественного упорядочивания). Имеем

---

* В случае сепарабельного пространства $\mathfrak{H}$ этот результат можно усилить. Именно, из предыдущих рассуждений следует, что если функция $(T_g \xi, \eta)$ измерима для всех $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$, то почти всюду на G представление $g \to T_g$ совпадает с некоторым непрерывным представлением.

$$f(e_v x) \to f(x) \text{ для любого } x \in R,$$

т. е. $(e_v, x) \to (e, x)$ для любого x.

Так как, кроме того,

$$(e_v, e_v) = f(e_v^* e_v) \leqslant f(e) \, | e_v^* e_v | = f(e),$$

т. е. длины векторов e_v ограничены, то e_v слабо сходятся. Обозначим этот слабый предел через ξ_0. Мы будем иметь

$$(\xi_0, x) = (e, x) \text{ для любого } x.$$

В частности,

$$(e_v, \xi_0) = (e_v, e) = f(e_v)$$

и поэтому $f(e_v)$ имеет предел. Таким образом, отщепляется вектор $\xi_0 - e$, ортогональный ко всем элементам x. Он для представления не существенен, т. е. в этом одномерном пространстве каждый элемент x дает нам нулевой оператор. Отбрасывая это одномерное пространство, мы получаем требуемый результат. Для того чтобы не было этого «паразитического» одномерного подпространства, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{v \to e} f(e_v) = f(e).$$

Применяя теорему 4 § 5 к групповому кольцу R и пользуясь только что доказанной теоремой 1, мы получим основной результат И. М. Гельфанда и Д. А. Райкова в ([4]) о полноте системы неприводимых представлений локально бикомпактной группы.

Пользуясь выражением (6) § 2 для положительного функционала и теоремой 1 этого параграфа, получаем, что всякий положительный функционал в групповом кольце R определяется формулой

$$f(\lambda e + a) = \lambda C + \int a(g) (T_g \xi, \xi) \, dg,$$

где $g \to T_g$ — непрерывное унитарное представление группы G, а функция $\varphi(g) = (T_g \xi, \xi)$ является непрерывной положительно определенной функцией на группе G [см. ([4])].

Обратно, всякой ограниченной измеримой положительно определенной функции $\varphi(g)$ отвечает положительный функционал в групповом кольце, определенный формулой

$$f(a) = \int a(g) \varphi(g) \, dg.$$

Отсюда, в частности, следует, что всякая ограниченная измеримая положительно определенная функция почти всюду на G совпадает с некоторой непрерывной положительно определенной функцией [см. ([4])].

Положительно определенные функции послужили отправным пунктом в ([4]) при построении унитарных представлений локально бикомпактной группы.

§ 8. Пример несимметричного группового кольца

Как известно, групповое кольцо компактной или коммутативной группы симметрично [см. ([7])]. Оказывается, однако, что для локально компактной группы это, вообще говоря, уже неверно.

Приведем пример локально компактной группы, групповое кольцо которой несимметрично.

Пусть G — группа комплексных матриц второго порядка с детерминантом единица. Обозначим через $\mathfrak{H}$ ее подгруппу, состоящую из унитарных матриц.

Двусторонним классом смежности G по $\mathfrak{H}$ называется, как известно, совокупность элементов вида $h_1 g h_2$, где g фиксирован, а h_1 и h_2 пробегают все $\mathfrak{H}$. Так как подгруппа $\mathfrak{H}$ компактна, то множество элементов вида $h_1 g h_2$ имеет конечную меру, если только множество элементов g имеет конечную меру.

Рассмотрим совокупность R_0' функций $f(g)$, суммируемых и постоянных на двусторонних классах смежности G по $\mathfrak{H}$. Совокупность R_0 элементов вида $\lambda e + f$, $f \in R_0'$, образует подкольцо группового кольца R. Действительно, пусть $f_1(g)$ и $f_2(g)$ принадлежат R_0'. Надо доказать, что функция $f = f_1 \times f_2$ также принадлежит R, т. е. постоянна на двусторонних классах смежности G по $\mathfrak{H}$. Но

$$f(gh) = \int f_1(ghg_1^{-1}) f_2(g_1)\, dg_1 =$$
$$= \int f_1(gg_2^{-1}) f_2(g_2 h)\, dg_2 = \int f_1(gg_2^{-1}) f_2(g_2)\, dg_2 = f(g)$$

и аналогично $f(hg) = f(g)$.

Кольцо R_0 коммутативно.

Для того чтобы доказать, что групповое кольцо несимметрично, докажем сначала, что R_0 несимметрично.

Займемся поэтому более детально кольцом R_0. Каждая матрица g может быть представлена в виде $g = ha$, где h — унитарная, а a — положительно определенная эрмитова матрица. Всякая эрмитова матрица может быть записана в виде $a = h_1 \delta h_1^{-1}$, где h_1 — унитарная, а δ — диагональная матрица. Ввиду унимодулярности группы, δ имеет вид:

$$\delta = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \quad \lambda > 0.$$

Таким образом, в каждом классе G по $\mathfrak{H}$ имеется диагональная матрица $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, причем легко видеть, что в каждом классе вместе с матрицей $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$ имеется также матрица $\begin{pmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ и сверх этого никаких других диагональных матриц нет.

Итак, каждый двусторонний класс характеризуется числом λ, причем λ и λ^{-1} определяют один и тот же класс. Нам удобнее вместо λ рассматривать $t = \ln \lambda$. Тогда t и $-t$ определяют один и тот же класс.

Таким образом, функции из R_0, т. е. постоянные на двусторонних классах, мы можем рассматривать как четные функции от t.

Найдем теперь закон умножения и норму в R_0. Для этого заметим, что пространство левых классов смежности G по $\mathfrak{H}$ есть совокупность положительно определенных матриц с детерминантом единица. Преобразования левых классов сводятся при этом к преобразованию соответствующих квадратичных форм.

Можно показать, далее, что эта группа преобразования есть группа преобразований трехмерного пространства Лобачевского; при этом точкам пространства Лобачевского взаимно однозначно соответствуют левые классы смежности. Двусторонний класс смежности есть совокупность левых классов; поэтому ему отвечает множество точек в пространстве Лобачевского. Для того чтобы найти это множество, заметим следующее: элементы нашей группы мы можем рассматривать как преобразования левых классов смежности, состоящие в умножении каждого из классов справа на данный элемент g группы. При этом элементы из $\mathfrak{H}$, и только они, оставляют единичный класс инвариантным.

Таким образом, подгруппа $\mathfrak{H}$ состоит из движений пространства Лобачевского, оставляющих на месте фиксированную точку пространства.

Так как двусторонний класс смежности получается из левого умножения справа на все элементы из $\mathfrak{H}$, то в пространстве Лобачевского ему соответствует сфера с центром в фиксированной точке.

Таким образом, функции на группе, постоянной на двусторонних классах, отвечает функция в пространстве Лобачевского, постоянная на сферах с фиксированным центром. При этом интеграл функции по группе лишь постоянным множителем отличается от интеграла функции, ей соответствующей в пространстве Лобачевского. Следовательно, норма такой функции равна $\int |f(\overline{g})|\, d\overline{g}$, где $d\overline{g}$ — элемент объема в пространстве Лобачевского. Если обозначить через t радиус сферы, то норма такой функции равна $\int\limits_0^\infty |f(t)|\,\varphi(t)\,dt$, где $\varphi(t)$ — площадь поверхности сферы.

Перейдем теперь к вычислению закона умножения функций $f(t)$, отвечающего свертке функции на группе. Для того чтобы не вычислять произведения непосредственно, воспользуемся следующими соображениями.

Максимальные идеалы коммутативного кольца R_0 задаются гомоморфизмами

$$f \longrightarrow \int\limits_0^\infty f(t)\,\alpha_\rho(t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где $\alpha_\rho(t)$ — так называемые сферические функции данной группы. В работе ([3]) эти функции вычислены. Они равны $\frac{2\sin\rho t}{\rho\,\mathrm{sh}\,2t}$. При этом каждому ρ отвечает свой гомоморфизм, т. е. свой максимальный идеал.

При гомоморфизме произведение функций переходит в произведение чисел. Поэтому, если $f=f_1\times f_2$, то

$$\int f(u)\,\alpha_\rho(u)\,\varphi(u)\,du=\int f_1(u)\,\alpha_\rho(u)\,\varphi(u)\,du\cdot\int f_2(u)\,\alpha_\rho(u)\,\varphi(u)\,du.$$

Для того чтобы выразить f через f_1 и f_2, положим

$$\tilde f_1(u)=f_1(u)\frac{\varphi(u)}{\operatorname{sh}2u},\qquad \tilde f_2(u)=f_2(u)\frac{\varphi(u)}{\operatorname{sh}2u},\qquad \tilde f(u)=f(u)\frac{\varphi(u)}{\operatorname{sh}2u}. \tag{1}$$

Тогда гомоморфизм задается формулой

$$f\longrightarrow\int_0^\infty \tilde f(u)\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du.$$

Мы сумеем удовлетворить условию (1), если положим

$$\tilde f(u)=\int_0^\infty\int_{|t-u|}^{t+u}\tilde f_1(s)\,\tilde f_2(t)\,ds\,dt.$$

Действительно,

$$\int_0^\infty \tilde f(u)\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du=\int_0^\infty\int_0^\infty\int_{|t-u|}^{t+u}\tilde f_1(s)\,f_2(t)\,ds\,dt\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du=$$

$$=\int_0^\infty\int_0^\infty\tilde f_1(s)\,\tilde f_2(t)\int_{|s-t|}^{s+t}\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du\,ds\,dt=\int_0^\infty\int_0^\infty\tilde f_1(s)\,\tilde f_2(t)\,\frac{4\sin\rho s\sin\rho t}{\rho^2}\,ds\,dt=$$

$$=\int_0^\infty\tilde f_1(s)\,\frac{2\sin\rho s}{\rho}\,ds\int_0^\infty\tilde f_2(t)\,\frac{2\sin\rho t}{\rho}\,dt.$$

Отсюда следует, что

$$\tilde f(u)=\int_0^\infty\int_{|t-u|}^{t+u}\tilde f_1(s)\,\tilde f_2(t)\,ds\,dt.$$

Действительно, обозначим

$$\int_0^\infty\int_{|t-u|}^{t+u}\tilde f_1(s)\,\tilde f_2(f)\,ds\,dt$$

через $g(u)$. Надо доказать, что $g(u)=\tilde f(u)$. Но

$$\int_0^\infty g(u)\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du=\int_0^\infty\tilde f(u)\,\frac{2\sin\rho u}{\rho}\,du.$$

В силу полноты системы функций $\sin\rho u$, отсюда следует, что $\tilde f(u)=g(u)$. Найдем теперь все максимальные идеалы нашего кольца. Будем для этого в дальнейшем элементы кольца отмечать функциями $\tilde f(u)$. Через функцию $\tilde f$ норма выражается формулой

$$\int_0^\infty|\tilde f(u)|\operatorname{sh}2u\,du,$$

так как

$$\int_0^\infty |f(u)|\,\varphi(u)\,du = \int_0^\infty \frac{|f(u)|}{\operatorname{sh} 2u}\,\varphi(u)\cdot \operatorname{sh} 2u\,du = \int_0^\infty |\tilde f(u)|\operatorname{sh} 2u\,du.$$

Поэтому введенное здесь кольцо изоморфно кольцу, рассмотренному в § 6. В этом же параграфе были рассмотрены максимальные идеалы кольца R_0. Они задавались формулой

$$\int_0^\infty \tilde f(u)\,\frac{2\sin \rho u}{\rho}\,du,$$

где ρ — комплексное, число $\rho=\rho_1+i\rho_2$, причем $|\rho_2|\leqslant 2$.

Примечание. Отсюда следует, между прочим, что остальные сферические функции, отвечающие данной группе, задаются формулой $\frac{2\operatorname{sh}\rho u}{\rho\operatorname{sh} 2u}$, $0\leqslant\rho\leqslant 2$.

Так как переходу от элемента f к f^* отвечает замена $\tilde f(u)$ на $\overline{\tilde f}(u)$, то ясно, что в кольце есть несимметричные максимальные идеалы и, следовательно, кольцо несимметрично.

Покажем теперь, что и групповое кольцо R_0 несимметрично.

Для этого заметим, что если элемент $f+\lambda e$ принадлежит подкольцу R_0 и имеет обратный, то этот обратный также принадлежит R_0.

Действительно, пусть элемент $\varphi+e$ кольца R есть обратный элемента $f+e\in R_0$. Докажем, что $\varphi+e\in R_0$, т. е. что функция $\varphi(g)$ постоянна на двусторонних классах смежности по $\mathfrak{H}$. Мы имеем

$$(f+e)\times(\varphi+e)=e.$$

Отсюда

$$\varphi=-f-f\times\varphi,$$

т. е.

$$\varphi(g)=-f(g)-\int f(gg_1^{-1})\,\varphi(g_1)\,dg_1.$$

Но тогда при $h\in\mathfrak{H}$

$$\begin{aligned}\varphi(hg)&=-f(hg)-\int f(hgg_1^{-1})\,\varphi(g_1)\,dg_1=\\&=-f(g)-\int f(gg_1^{-1})\,\varphi(g_1)\,dg_1=\varphi(g),\end{aligned}$$

ибо $f\in R_0'$. Таким образом, функция $\varphi(g)$ инвариантна при левом сдвиге на $h\in\mathfrak{H}$. Аналогично, пользуясь равенством

$$(\varphi+e)\times(f+e)=e,$$

докажем ее инвариантность при правом сдвиге. Следовательно,

$$\varphi\in R_0',\quad \varphi+e\in R_0.$$

Пусть теперь $x\in R_0$ и $(e+x^*x)^{-1}$ не существует в R_0'. Такой элемент x найдется, так как R_0 несимметрично. Но тогда $(e+x^*x)^{-1}$ не существует также и в R. Несимметричность группового кольца R доказана.

В работе [9] показано, что в коммутативных локально бикомпактных группах имеет место теорема Бёрлинга. Приведенный выше пример показывает, что в некоммутативных локально бикомпактных группах эта теорема, вообще говоря, не имеет места.

Пусть R — нормированное кольцо с инволюцией. Будем говорить, что в R имеет место обобщенная теорема Бёрлинга, если для всякого линейного функционала $f(x)$ в кольце R существует неразложимый положительный функционал, который является слабой предельной точкой функционалов $f(xa)$, $a \in R$.

ТЕОРЕМА. *Для того чтобы в кольце R имела место обобщенная теорема Бёрлинга, необходимо и достаточно, чтобы R было симметричным кольцом.*

Доказательство необходимости. Пусть R — несимметричное кольцо. Тогда существует элемент x_0 такой, что $(e+x_0^*x_0)^{-1}$ не существует. Следовательно, $e+x_0^*x_0$ принадлежит хотя бы одному максимальному правому идеалу I_r кольца R. Так как $e \bar{\in} I_r$, то существует линейный функционал $f(x)$ такой, что $f(e)=1$, $f(x)=0$ для всех $x \in I_r$. Так как при $x \in I_r$, $a \in R$ также $xa \in I_r$, то $f(xa)=0$ для всех $x \in I_r$. Поэтому и всякая слабая предельная точка $f_0(x)$ функционалов $f_0(x)=f(xa)$ обращается в нуль на I_r.

По предположению, теорема Бёрлинга имеет место, т. е. среди этих предельных точек есть положительный нормированный неразложимый функционал $f_0(x)$. Следовательно, и этот функционал обращается в нуль на I_r. В частности,

$$f_0(e+x_0^*x_0)=0$$

т. е.

$$1+f(x_0^*x_0)=0,$$

что невозможно, ибо $f(x_0^*x_0) \geqslant 0$.

Доказательство достаточности. Пусть $f(x)$ — некоторый линейный функционал. Обозначим через I_r совокупность всех элементов $x \in R$ таких, что $f(xa)=0$ для всех $a \in R$. Очевидно, I_r — правый идеал в кольце R; согласно [7] (см. также [2]), существует положительный функционал $f_1(x)$ такой, что

$$f_1(e)=1, \quad f_1(xx^*)=0 \quad \text{для} \quad x \in I_r. \tag{2}$$

Совокупность всех функционалов, удовлетворяющих этому условию, есть слабо замкнутое ограниченное выпуклое множество в сопряженном к R пространстве. Согласно теореме Крейна-Мильмана [6], это выпуклое множество содержит хотя бы одну крайнюю точку f_0; f_0 есть неразложимый положительный функционал, удовлетворяющий условиям (2). Отсюда следует, что $f_0(x)=0$ для всех $x \in I_r$, т. е. $f_0(x)$ есть слабая предельная точка функционалов $f_0(xa)$.

Нетрудно показать, что если теорема Бёрлинга в формулировке [9] имеет место в группе, то в групповом кольце имеет место обобщенная теорема Бёрлинга. Интересно выяснить, имеет ли место обратное.

Из сказанного выше следует, что *в унимодулярной группе второго порядка теорема Бёрлинга не имеет места.* Рассуждения, аналогичные рассуждениям этого параграфа, показывают, что в *любой комплексной полупростой группе Ли теорема Бёрлинга также не имеет места.* Это связано с наличием так называемой дополнительной серии представлений этих групп. (Ср. примечание на стр. 478.)

Примечание при корректуре. После того, как эта работа была сдана в печать, появилась статья J. E. Segal'a в Bull. Amer. Math. Soc., 53 (1947), 73—88, в которой содержатся некоторые из результатов этой работы.

Поступило
7. VI. 1947

ЛИТЕРАТУРА

[1] Gelfand I., Normierte Ringe, Матем. сб., 9 (51):1 (1941), 3—66.

[2] Gelfand I. and Neumark M., On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space, Матем. сб., 12 (54):2 (1943), 197—217.

[3] Гельфанд И. М. и Наймарк М. А., Унитарные представления группы Лоренца, Известия Ак. Наук СССР, сер. матем., 11 (1947), 411—504.

[4] Гельфанд И. М. и Райков Д. А., Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп, Матем. сб., 13 (55): 2—3 (1943), 301—316.

[5] Гельфанд И. М., Райков Д. А. и Шилов Г. Е., Коммутативные нормированные кольца, Успехи матем. наук, т. 1, вып. 2 (12) (1946), 48—146.

[6] Krein M. and Milman D., On extreme points of regular convex sets, Studia mathematica, IX (I) (1940), 133—138.

[7] Райков Д. А., К теории нормированных колец с инволюцией, Доклады Ак. Наук СССР, 54, 5 (1946), 391—394.

[8] Neumann J., Über abjungierte Funktionaloperatoren, Annals of Math., 33 (1932), 294—310.

[9] Godement, Extension à un groupe abélien quelconque des théorèmes taubériens N. Wiener et d'un théorème de A. Beurling, C. R. Acad. Sc. Paris (1946), 16—18.