И. М. Гельфанд, Д. А. Райков, Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп, *Матем. сб.*, 1943, том 13(55), номер 2-3, 301–316

1943 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ СБОРНИК Т. 13 (55), N. 2—3
RECUEIL MATHÉMATIQUE

Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп

И. М. Гельфанд и **Д. А. Райков** (Москва)

Линейным (конечномерным) представлением топологической группы G, как известно, называют гомоморфное отображение этой группы в топологическую группу матриц над телом комплексных чисел. Представление называют унитарным, если матрицы, образующие представление, унитарны. Представление матрицами n-го порядка называют неприводимым, если в n-мерном комплексном пространстве не существует собственного подпространства, инвариантного относительно всех матриц, образующих представление. Говорят, что линейные представления группы G составляют полную систему, если для каждого элемента группы, отличного от единицы, существует представление, переводящее его в матрицу, отличную от единичной.

Для компактных групп Ли существование полной системы конечномерных неприводимых унитарных представлений было доказано Петером и Вейлем [9]*. В их методе, кроме компактности рассматриваемых групп, использовалось лишь существование на этих группах инвариантной меры. Построив инвариантную меру на любой локально компактной группе со второй аксиомой счетности, Хаар [3] автоматически распространил результаты Петера и Вейля на произвольные компактные группы, удовлетворяющие второй аксиоме счетности. Для коммутативных локально компактных групп со второй аксиомой счетности существование полной системы неприводимых унитарных представлений (являющихся здесь одномерными) было доказано Дж. Нейманом [7] **). Но существование полной системы конечномерных неприводимых унитарных представлений для произвольной локально компактной группы, удовлетворяющей второй аксиоме счетности, не могло быть доказано, ибо существуют группы этого вида, не допускающие вообще ни одного такого представления, отличного от тривиального представления единичной матрицей. Возник вопрос о бесконечномерных представлениях локально бикомпактных групп.

---

* Цифры в квадратных скобках относятся к списку литературы, приложенному в конце статьи.

** См. также работу авторов [2], где этот результат получен с помощью теории коммутативных нормированных колец.

Естественным обобщением представлений унитарными матрицами являются представления унитарными операторами в гильбертовом пространстве. **Унитарным представлением** топологической группы G мы будем называть гомоморфное отображение этой группы в топологическую группу унитарных операторов в комплексном гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$; более точно: функцию U_g, отображающую группу G в совокупность унитарных операторов, действующих в $\mathfrak{H}$, и обладающую следующими двумя свойствами: 1° $U_{gh}=U_gU_h$ для всех g, $h\in G$, и 2° U_g есть сильно непрерывная функция от g, т. е. $\|U_{g'}\eta-U_g\eta\|\to 0$ при $g'\to g$ для любого $\eta\in\mathfrak{H}$.

В настоящей работе будет доказано существование полной системы неприводимых унитарных представлений для произвольной локально бикомпактной группы.

Доказательство будет основываться на тесной связи унитарных представлений с положительно определенными функциями.

1. Функция $\varphi(g)$, заданная на группе G, называется **положительно определенной**, если $\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}\varphi(g_l^{-1}g_k)\lambda_k\bar{\lambda}_l\geqslant 0$ для всех конечных систем элементов $g_1,\ldots,g_n\in G$ и комплексных чисел $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$.

Каждая непрерывная положительно определенная функция $\varphi(g)$, заданная на топологической группе G, порождает представление этой группы унитарными операторами в некотором гильбертовом пространстве.

Это пространство строится следующим образом. В совокупности всех комплексных функций $\lambda(h)$ $(h\in G)$, каждая из которых отлична от нуля лишь в конечном числе точек, определяем скалярное произведение

$$(\lambda,\ \mu)=\sum_{h}\sum_{h'}\varphi(h'^{-1}h)\,\lambda(h)\,\overline{\mu(h')},\tag{1}$$

где суммы формально распространяются на все элементы группы G (но лишь конечное число суммируемых членов отлично от нуля). Отождествляя те функции λ и μ, для которых $(\lambda-\mu,\ \lambda-\mu)=0$, и замыкая получающуюся линейную систему по норме $|\lambda|=\sqrt{(\lambda,\lambda)}$, получаем гильбертово пространство; обозначим его через $\mathfrak{L}_2(\varphi)$.

Каждый элемент $g\in G$ порождает оператор левого сдвига T_g, определенный для функций $\lambda(h)$ формулой $T_g\lambda(h)=\lambda(g^{-1}h)$. Оператор T_g унитарен. Действительно,

$$(T_g\lambda,\ T_g\mu)=\sum_{h}\sum_{h'}\varphi(h'^{-1}h)\,\lambda(g^{-1}h)\,\overline{\mu(g^{-1}h')},$$

откуда при помощи подстановки $h\to gh$, $h'\to gh$ получаем

$$(T_g\lambda,\ T_g\mu)=\sum_{h}\sum_{h'}\varphi(h'^{-1}g^{-1}gh)\,\lambda(h)\,\overline{\mu(h')}=(\lambda,\ \mu).$$

Так как функции $\lambda(h)$ расположены всюду плотно в $\mathfrak{L}_2(\varphi)$, то T_g может быть доопределен, однозначно и с сохранением унитарности, на всем $\mathfrak{L}_2(\varphi)$. T_g есть сильно непрерывная функция от g: $|T_{g'}\eta - T_g\eta| \to 0$ при $g' \to g$ для всех $\eta \in \mathfrak{L}_2(\varphi)$. Действительно, так как

$$|T_{g'}\eta - T_g\eta|^2 = |T_{g^{-1}g'}\eta - \eta|^2 = 2[(\eta, \eta) - \Re(T_{g^{-1}g'}\eta, \eta)],$$

то достаточно доказать, что $(T_g\eta, \eta) \to (\eta, \eta)$ при $g \to e$, где e — единица группы G. Но для $\eta = \lambda(h)$, в силу (1) и непрерывности $\varphi(g)$, имеем

$$(T_g\lambda, \lambda) = \sum_h \sum_{h'} \varphi(h'^{-1}gh)\lambda(h)\overline{\lambda(h')} \to$$

$$\to \sum_h \sum_{h'} \varphi(h'^{-1}h)\lambda(h)\overline{\lambda(h')} = (\lambda, \lambda) \text{ при } g \to e.$$

Для произвольного же $\eta \in \mathfrak{L}_2(\varphi)$ и каждого $\varepsilon > 0$ существует $\lambda(h)$ такая, что $|\eta - \lambda| < \frac{\varepsilon}{3}$. Выбирая окрестность V единицы так, чтобы $T_g\lambda - \lambda| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $g \in V$, получаем для этих g:

$$|T_g\eta - \eta| \leqslant |T_g\eta - T_g\lambda| + |T_g\lambda - \lambda| + |\lambda - \eta| = 2|\lambda - \eta| + |T_g\lambda - \lambda| < \varepsilon;$$

Очевидно, $T_{gh} = T_g T_h$. Таким образом, операторы T_g образуют унитарное представление группы G. Функция

$$\xi_0(h) = \begin{cases} 1 \text{ при } h = e, \\ 0 \text{ при } h \neq e \end{cases}$$

будет производящим вектором в $\mathfrak{L}_2(\varphi)$, в том смысле, что векторы $T_h\xi_0$ порождают пространство $\mathfrak{L}_2(\varphi)$. Действительно, функции $\lambda(h)$ расположены всюду плотно в $\mathfrak{L}_2(\varphi)$, а каждая из них есть линейная комбинация векторов $T_h\xi_0$: $\lambda = \sum_h \lambda(h) T_h\xi_0$. В силу (1)

$$\varphi(g) = (T_g\xi_0, \xi_0). \tag{2}$$

Обратно, *каждое унитарное представление топологической группы G порождает непрерывные положительно определенные функции*. Действительно, если U_g — унитарные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, образующие представление группы G, то $\varphi(g) = (U_g\xi, \xi)$ будет непрерывной положительно определенной функцией для любого вектора $\xi \in \mathfrak{H}$, причем $\varphi(g) \not\equiv 0$, когда $\xi \neq 0$. Если в $\mathfrak{H}$ существует производящий вектор ξ_0, т. е. векторы $U_g\xi_0$ порождают пространство $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{H}$ изоморфно пространству $\mathfrak{L}_2(\varphi)$, порожденному функцией $\varphi_0(g) = (U_g\xi_0, \xi_0)$. Изоморфизм устанавливается соответствием $\sum_h \lambda(h) U_h\xi_0 \leftrightarrow \lambda(h)$. Операторам U_g в $\mathfrak{H}$ соответствуют операторы сдвига T_g в $\mathfrak{L}_2(\varphi)$.

2. Пусть $\varphi(g)$ и $\psi(g)$ — положительно определенные функции. Мы будем писать $\psi(g) \ll \varphi(g)$, если $\varphi(g) - \psi(g)$ также есть положительно определенная функция. Если $\varphi(g)$ непрерывна и $\psi(g) \ll \varphi(g)$, то $\psi(g)$ также непрерывна. Действительно, как указал М. Г. Крейн [5], всякая положительно определенная функция $\varphi(g)$ удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(g) - \varphi(h)|^2 \leqslant 2\varphi(e)[\varphi(e) - \Re\varphi(h^{-1}g)] \text{ для всех } g, h \in G. \tag{3}$$

Но если $\psi(g) \ll \varphi(g)$, то $\varphi(e) - \psi(e) \geqslant 0$ и $\varphi(e) - \psi(e) - \Re[\varphi(h^{-1}g) - \psi(h^{-1}g)] \geqslant 0$, следовательно,

$$|\psi(g) - \psi(h)|^2 \leqslant 2\psi(e)[\psi(e) - \Re\psi(h^{-1}g)] \leqslant 2\varphi(e)[\varphi(e) - \Re\varphi(h^{-1}g)].$$

Таким образом, из непрерывности $\varphi(g)$ в точке e следует непрерывность $\psi(g)$ для всех g.

Будем называть непрерывную положительно определенную функцию $\varphi(g)$ *элементарной*, если из $\psi(g) \ll \varphi(g)$ следует, что $\psi(g) = \alpha\varphi(g)$. Тривиальными примерами элементарных положительно определенных функций служат функции $\varphi(g) \equiv c$, где c — неотрицательная постоянная.

Теорема 1. *Унитарное представление группы G, порождаемое элементарной непрерывной положительно определенной функцией $\varphi(g)$, неприводимо.*

Доказательство. Пусть P — проекционный оператор в $\mathfrak{L}_2(\varphi)$, перестановочный со всеми T_g. Тогда $\psi(g) = (T_g P\xi_0, \xi_0)$ будет положительно определенной функцией, причем $\psi(g) \ll \varphi(g)$. В самом деле, для произвольной функции $\lambda(g)$, отличной от нуля лишь в конечном числе точек $g_1, \ldots, g_n \in G$,

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \psi(g_l^{-1}g_k)\lambda(g_k)\overline{\lambda(g_l)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} (\lambda(g_k)T_{g_k}P\xi_0, \lambda(g_l)T_{g_l}\xi_0) =$$

$$= \left(P\sum_{k=1}^{n}\lambda(g_k)T_{g_k}\xi_0, \sum_{l=1}^{n}\lambda(g_l)T_{g_l}\xi_0\right) = (P\lambda, \lambda)$$

и

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{u} \varphi(g_l^{-1}g_k)\lambda(g_k)\overline{\lambda(g_l)} = (\lambda, \lambda).$$

Но $0 \leqslant (P\lambda, \lambda) \leqslant (\lambda, \lambda)$. Эти неравенства означают, таким образом, соответственно, положительную определенность функций $\psi(g)$ и $\varphi(g) - \psi(g)$. Так как, согласно предположению, $\varphi(g)$ элементарна, то $\psi(g) = \alpha\varphi(g)$. Следовательно, $(P\lambda, \lambda) = \alpha(\lambda, \lambda)$ для всех $\lambda(g)$, отличных от нуля лишь в конечном числе точек. Так как эти $\lambda(g)$ расположены всюду плотно в $\mathfrak{L}_2(\varphi)$, то $P = \alpha E$. Таким образом, мы доказали, что единственными проекционными операторами в $\mathfrak{L}_2(g)$, перестановочными со всеми T_g,

будут $P=0$ и $P=E$. Но это и означает неприводимость представления T_g, ибо, если бы операторы T_g приводили подпространство в $\mathfrak{L}_2(\varphi)$, то они были бы перестановочны с оператором проектирования на это подпространство.

Теорема 2. *Положительно определенные функции, порождаемые неприводимым унитарным представлением группы G, являются элементарными.*

Доказательство. Пусть U_g — унитарные операторы в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, образующие неприводимое представление группы G. Тогда каждый вектор $\xi \in \mathfrak{H}$, отличный от нуля, будет производящим. Пусть $\varphi(g)=(U_g\xi, \xi)$, $\psi(g)$ — положительно определенная функция и $\psi(g) \ll \varphi(g)$. Для любых двух векторов $\lambda=\sum\lambda(h)U_h\xi$ и $\mu=\sum\mu(h)U_h\xi$, где функции $\lambda(h)$ и $\mu(h)$ отличны от нуля каждая лишь в конечном числе точек, положим

$$(B\lambda, \mu)=\sum_h\sum_{h'}\psi(h'^{-1}h)\lambda(h)\overline{\mu(h')},$$

B — самосопряженный оператор и

$$0 \leqslant (B\lambda, \lambda) \leqslant (\lambda, \lambda)=\sum_h\sum_{h'}\varphi(h'^{-1}h)\lambda(h)\overline{\lambda(h')}.$$

Так как векторы λ рассматриваемого вида расположены всюду плотно в $\mathfrak{H}$, то B можно доопределить, однозначно и с сохранением самосопряженности, на всем $\mathfrak{H}$. B перестановочен со всеми U_g. Действительно, для всех $g, h \in G$

$$(U_gBU_h\xi, U_h\xi)=(BU_h\xi, U_{g^{-1}h}\xi)=\psi(h^{-1}gh)=(BU_gU_h\xi, U_h\xi),$$

и так как векторы $U_h\xi$ составляют базис $\mathfrak{H}$, то

$$(U_gB\eta, \eta)=(BU_g\eta, \eta) \text{ для всех } \eta \in \mathfrak{H};$$

следовательно, $U_gB=BU_g$. Но самосопряженный оператор B может быть перестановочен с операторами U_g, образующими неприводимую систему, лишь при $B=\alpha E$. Действительно, U_g, будучи перестановочны с B, перестановочны с его спектральной функцией $E(\Delta)$. Но в таком случае проекционный оператор $E(\Delta)$, как мы видели, равен 0 или E. Таким образом, весь спектр оператора B сосредоточен в некоторой точке α, и $B=\alpha E$. Отсюда следует, что

$$(BU_g\xi, \xi)=\alpha(U_g\xi, \xi), \text{ т. е. } \psi(g)=\alpha\varphi(g),$$

что и требовалось доказать.

Топологическая группа G обладает полной системой неприводимых унитарных представлений, если для каждого ее элемента $g_0 \neq e$

существует неприводимое унитарное представление U_g в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_0$ такое, что $U_{g_0} \neq E$. Мы будем говорить, что на группе G существует *полная система элементарных непрерывных положительно определенных функций*, если для каждого элемента $g_0 \neq e$ существует элементарная непрерывная положительно определенная функция $\varphi_0(g)$ такая, что $\varphi_0(g_0) \neq \varphi_0(e)$. Из предшествующих результатов непосредственно следует

Теорема 3. *Для того чтобы топологическая группа G обладала полной системой неприводимых унитарных представлений, необходимо и достаточно, чтобы на ней существовала полная система элементарных непрерывных положительно определенных функций.*

Действительно, если $\varphi_0(g_0) \neq \varphi_0(e)$, то для представления T_g, порождаемого функцией $\varphi_0(g)$, в силу равенства (2) имеем $T_{g_0}\xi_0 \neq \xi_0$, следовательно, $T_{g_0} \neq E$. Обратно, если $U_{g_0} \neq E$, то существует вектор ξ_0 такой, что $(U_{g_0}\xi_0, \xi_0) \neq (\xi_0, \xi_0)$; тогда для $\varphi_0(g) = (U_g\xi_0, \xi_0)$ имеем $\varphi_0(g_0) \neq \varphi_0(e)$.

Мы покажем, что полученное необходимое и достаточное условие полноты системы неприводимых унитарных представлений выполняется на всякой локально бикомпактной группе.

3. Как известно, А. Хаар [3] показал, что на всякой локально компактной группе, удовлетворяющей второй аксиоме счетности, существует лево-инвариантная мера m, т. е. неотрицательная функция множеств (могущая, вообще говоря, принимать и бесконечное значение), вполне аддитивная на теле (B) всех борелевских множеств и инвариантная относительно «левых сдвигов»:

$$m(gE) = m(E) \text{ для всех } E \in (B) \text{ и всех } g \in G.$$

Как впоследствии отмечалось рядом авторов, конструкция Хаара, в форме, приданной ей Банахом [1], применима к любой локально бикомпактной группе. При этом, как и в случае, рассмотренном Хааром, всякое открытое множество с бикомпактным замыканием имеет конечную положительную меру, и мера каждого множества равна нижней грани мер содержащих его счетных сумм открытых множеств с бикомпактным замыканием.

В дальнейшем мы везде будем предполагать, что G — локально бикомпактная группа. Пусть m — определенная на ней л е в о-и н в а р и а н т н а я м е р а Х а а р а*.

* Мы нигде не будем опираться непосредственно на локальную бикомпактность группы G. Все наши выводы будут базироваться лишь на свойствах меры Хаара. Поэтому можно было бы, не налагая на группу никаких специально топологических ограничений, прямо потребовать, чтобы на ней существовала мера, обладающая основными свойствами лево-инвариантной меры Хаара, описанными чисто аксиоматическим путем (при этом пришлось бы несколько ограничить область определения меры) [10]. Однако, это не дало бы существенного усиления наших результатов, ибо,

$m(Eh)$ при любом фиксироварном $h \in G$ также есть лево-инвариантная мера Хаара. По теореме единственности [8, 4, 11], $m(Eh) = l_h m(E)$, где l_h — число, не зависящее от E. Отсюда непосредственно следует, что $l_{gh} = l_g l_h$ [8]. Можно показать, что l_h — непрерывная функция от h.

Будем обозначать через $\mathfrak{L}_1$ пространство всех измеримых абсолютно интегрируемых комплексных функций $x(g)$, с нормой *

$$\|x\| = \int |x(h)|\,dh.$$

Каждому $g \in G$ соответствует в $\mathfrak{L}_1$ оператор левого сдвига T_g: $T_g x(h) = x(g^{-1}h)$, и оператор правого сдвига T_g': $T_g' x(h) = x(hg^{-1})$. Операторы T_g унитарны. Из основных свойств меры Хаара следует, что для любой функции $x(h) \in \mathfrak{L}_1$ при $g \to g_0$ имеют место соотношения

$$\int |x(g^{-1}h) - x(g_0^{-1}h)|\,dh \to 0 \text{ и } \int |x(hg^{-1}) - x(hg_0^{-1})|\,dh \to 0$$

Таким образом, операторы T_g и $T_{g'}$ оказываются сильно непрерывными функциями от g.

Пусть $x, y \in \mathfrak{L}_1$. Тогда

$$x * y = \int x(h^{-1}g)\, y(h)\, dh$$

существует почти для всех g и $\in \mathfrak{L}_1$, причем $\|x * y\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$. Введем обозначение

$$x^*(g) = l_g^{-1}\overline{x(g^{-1})}.$$

Так как [8]

$$\int x(g)\,dg = \int x(g^{-1})\, l_g^{-1}\,dg,$$

то при $x \in \mathfrak{L}_1$ также $x^* \in \mathfrak{L}_1$, причем $\|x^*\| = \|x\|$. Легко проверить, что $x^{**} = x$ и $(x * y)^* = y^* * x^*$.

Линейный функционал L, определенный на $\mathfrak{L}_1$, мы будем называть **позитивным**, если $L(x * x^*) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathfrak{L}_1$. Пусть $\varphi(g)$ — существенно ограниченная интегрально положительно определенная функция, т. е.

$$\sup \operatorname{ess} |\varphi(g)| < \infty, \int\int \varphi(h^{-1}g)\, x(g)\, \overline{x(h)}\, dg\, dh \geqslant 0 \text{ для всех } x \in \mathfrak{L}_1.$$

как показал А. Вейль [12], всякая группа с мерой Хаара может быть пополнена до локально бикомпактной группы, а тогда полнота системы всех неприводимых унитарных представлений группы с мерой Хаара будет вытекать как непосредственное следствие из полноты системы неприводимых унитарных представлений пополненной локально бикомпактной группы.

* Всюду, где не указана область интеграции, предполагается, что интеграция производится по всей группе.

Тогда, как легко проверить, функционал $L_{\varphi}(x)=\int\varphi(g)x(g)\,dg$ позитивен.

Теорема 4. *Каждый позитивный линейный функционал L порождается некоторой непрерывной положительно определенной функцией* $\varphi(g)$:

$$L(x)=L_{\varphi}(x)=\int\varphi(g)x(g)\,dg \text{ для всех } x\in\mathfrak{L}_1.$$

Доказательство. Билинейный функционал

$$(x, y)=L(x*y^*)$$

обладает всеми свойствами скалярного произведения. Действительно, свойства $(x_1+x_2, y)=(x_1, y)+(x_2, y)$ и $(\lambda x, y)=\lambda(x, y)$ очевидны, свойство же $(y, x)=\overline{(x, y)}$ следует из вещественности левой части и крайних членов правой части равенства

$$L((x+\lambda y)*(x+\lambda y)^*)=L(x*x^*)+\lambda L(y*x^*)+\bar{\lambda}L(x*y^*)+\bar{\lambda}\lambda L(y*y^*).$$

Обозначим через $\mathfrak{L}_2(L)$ гильбертово пространство, получающееся из $\mathfrak{L}_1$ отождествлением тех x и y, для которых $(x-y, x-y)=0$, и замыканием по норме

$$|x|=\sqrt{(x, x)}.$$

Для $x\in\mathfrak{L}_1$ имеем: $|x|^2=L(x*x^*)\leqslant|L|\,\|x\|\,\|x^*\|=|L|\,\|x\|^2$, откуда

$$|x|=\sqrt{|L|}\,\|x\|.$$

Идея доказательства теоремы заключается в том, что пространство $\mathfrak{L}_2(L)$, построенное по позитивному линейному функционалу L, есть лишь иначе определенное пространство $\mathfrak{L}_2(\varphi)$, построенное по некоторой непрерывной положительно определенной функции $\varphi(g)$, получающейся следующим образом. Замыкание $\mathfrak{L}_1$ в $\mathfrak{L}_2(L)$ содержит «функцию» $\xi_0=\xi_0(h)$, вся «масса» которой сосредоточена в точке $h=e$. «Функции» $T_g\xi_0$ порождают пространство $\mathfrak{L}_2(L)$, и $\mathfrak{L}_2(L)$ есть $\mathfrak{L}_2(\varphi)$, построенное по положительно определенной функции $\varphi(g)=(T_g\xi_0, \xi_0)$. Эта функция и порождает функционал L. Вектор ξ_0 естественно строить как предел функций $x\in\mathfrak{L}_1$ с «массой», стягивающейся к точке e.

Пусть $\{V\}$ — естественно упорядоченная система всех окрестностей единицы e группы G. Будем обозначать через $e_V(g)$ и называть **единичной** всякую функцию из $\mathfrak{L}_1$, удовлетворяющую условиям

$$e_V(g)\geqslant 0,\ e_V(g)=0 \text{ вне } V,\ e_V(g^{-1})=e_V(g),\ \|e_V\|=1.$$

Для любой $x \in \mathfrak{L}_1$ имеем

$$\|x * e_V^* - x\| = \|x * e_V - x\| = \int \left| \int [T_h x(g) - x(g)] e_V(h)\, dh \right| dg \leqslant$$
$$\leqslant \int \left(\int |T_h x(g) - x(g)|\, dg \right) e_V(h)\, dh \leqslant \sup_{h \in V} \|T_h x - x\|$$

и, значит, в силу первого из соотношений (4),

$$\|x * e_V^* - x\| \to 0 \text{ при } V \to e.$$

Отсюда следует, что

$$(x, e_V) = L(x * e_V^*) \to L(x) \text{ при } V \to e \text{ для любой } x \in \mathfrak{L}_1.$$

Так как e_V равномерно ограничены в $\mathfrak{L}_2(L)$: $|e_V| \leqslant \sqrt{|L|}$, а $x \in \mathfrak{L}_1$ всюду плотны в $\mathfrak{L}_2(L)$, то из полученного соотношения вытекает, что $\lim\limits_{V \to e}(\eta, e_V)$ существует для любого $\eta \in \mathfrak{L}_2(L)$. Действительно, задав $\varepsilon > 0$, выберем $x \in \mathfrak{L}_1$ так, чтобы $|\eta - x| < \frac{\varepsilon}{3\sqrt{|L|}}$, и для этого x выберем окрестность V единицы так, чтобы $|(x, e_{V_1}) - (x, e_{V_2})| < \frac{\varepsilon}{3}$ для любых V_1, $V_2 \subset V$. Тогда, для любых таких V_1 и V_2 будем иметь

$$|(\eta, e_{V_1}) - (\eta, e_{V_2})| \leqslant |(\eta, e_{V_1}) - (x, e_{V_1})| + |(x, e_{V_1}) - (x, e_{V_2})| +$$
$$+ |(x, e_{V_2}) - (\eta, e_{V_2})| \leqslant |\eta - x|\,|e_{V_1}| + \frac{\varepsilon}{3} + |\eta - x|\,|e_{V_2}| < \varepsilon.$$

Таким образом, e_V при $V \to e$ слабо сходятся к некоторому $\xi_0 \in \mathfrak{L}_2(L)$, причем

$$(x, \xi_0) = L(x).$$

Беря здесь $x = e_V$ и переходя к пределу по $V \to e$, получаем $(\xi_0, \xi_0) = \lim\limits_{V \to e} L(e_V)$. Но $e_V * e_v^* = e_V * e_V$, в свою очередь, будет некоторой функцией $e_{V^{-1}V}$. Поэтому $(e_V, e_V) = L(e_{V^{-1}V}) \to (\xi_0, \xi_0)$. Следовательно,

$$|e_V - \xi_0|^2 = (e_V, e_V) - (\xi_0, e_V) - (e_V, \xi_0) + (\xi_0, \xi_0) \to 0,$$

т. е. e_V также сильно сходятся к ξ_0 при $V \to e$.

Легко проверить, что

$$T_g x * (T_h y)^* = x * y^*.$$

Отсюда следует, что операторы T_g унитарны в $\mathfrak{L}_2(L)$, $(T_g x, T_g x) = (x, x)$ для любого $x \in \mathfrak{L}_1$ и так как $\mathfrak{L}_1$ плотно в $\mathfrak{L}_2(L)$, то T_g можно, однозначно и с сохранением унитарности, доопределить на всем $\mathfrak{L}_2(L)$. Так как, для любого $x \in \mathfrak{L}_1$,

$$|T_{g'} x - T_g x| \leqslant \sqrt{|L|}\, \|T_{g'} x - T_g x\| \to 0 \text{ при } g' \to g,$$

то T_g и в $\mathfrak{L}_2(L)$ будет сильно непрерывной функцией от g. Действительно, пусть $\eta \in \mathfrak{L}_2(L)$. Выберем $x \in \mathfrak{L}_1$ так, чтобы $|x-\eta| < \frac{\varepsilon}{3}$, и затем выберем окрестность V элемента g так, чтобы $|T_{g'}x - T_g x| < \frac{\varepsilon}{3}$ при $g' \in V$. Тогда

$$|T_{g'}\eta - T_g\eta| \leqslant |T_{g'}\eta - T_{g'}x| + |T_{g'}x - T_g x| + |T_g x - T_g\eta| = \\ = 2|\eta - x| + |T_{g'}x - T_g x| < \varepsilon.$$

Наконец, очевидно, $T_{gh} = T_g T_h$. Таким образом, T_g образуют унитарное представление группы G. Отсюда, в частности, следует, что

$$\varphi(g) = (T_g\xi_0, \xi_0)$$

есть непрерывная положительно определенная функция.

Покажем, что функционал L порождается этой функцией $\varphi(g)$, т. е. что

$$L(x) = \int (T_g\xi_0, \xi_0)\, x(g)\, dg \text{ для всех } x \in \mathfrak{L}_1.$$

Действительно, так как e_V сильно сходятся к ξ_0, то $L(T_g e_V) = (T_g e_V, \xi_0)$ равномерно сходятся к $(T_g\xi_0, \xi_0)$, и потому

$$\int (T_g\xi_0, \xi_0)\, x(g)\, dg = \lim_{V \to e} \int L(T_g e_V)\, x(g)\, dg. \tag{5}$$

Но

$$\int L(T_g e_V)\, x(g)\, dg = L\left(\int T_g e_V x(g)\, dg\right). \tag{6}$$

В самом деле, пусть E — произвольное измеримое множество. Положим $m_L(E) = L(f_E)$, где $f_E(g)$ — характеристическая функция множества E. Легко проверить, что $m_L(E)$ вполне аддитивная (вообще говоря, комплексная) мера и

$$L(y) = \int y(h)\, dm_L(h)$$

для любой функции $y \in \mathfrak{L}_1$. Применяя теорему Фубини, получаем

$$\int L(T_g e_V)\, x(g)\, dg = \int \left(\int e_V(g^{-1}h)\, dm_L(h)\right) x(g)\, dg = \\ = \int \left(\int e_V(g^{-1}h)\, x(g)\, dg\right) dm_L(h) = L\left(\int T_g e_V x(g)\, dg\right),$$

т. е. равенство (6). Из равенств (5) и (6) вытекает

$$\int (T_g\xi_0, \xi_0)\, x(g)\, dg = \lim_{V \to e} L\left(\int T_g e_V x(g)\, dg\right) = \lim_{V \to e} L\left(\int e_V(g^{-1}h)\, x(g)\, dg\right) = \\ = \lim_{V \to e} L\left(\int e_V(g^{-1})\, x(hg)\, dg\right) = \lim_{V \to e} L\left(\int e_V(g)\, x(hg) dg\right);$$

Но, в силу второго из соотношений (4),

$$\left\| \int e_V(g)\, x(hg)\, dg - x(h) \right\| =$$
$$\int \left| \int [x(hg) - x(h)]\, e_V(g)\, dg \right| dh \leqslant \int \left(\int |x(hg) - x(h)|\, dh \right) e_V(g)\, dg \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{g \in V} \int |x(hg) - x(h)|\, dh \to 0 \text{ при } V \to e.$$

Следовательно,

$$\lim_{V \to e} L\left(\int e_V(g)\, x(hg)\, dg \right) = L(x),$$

и теорема доказана.

Из теоремы 4 и предшествующего ей замечания вытекает, что *всякая существенно ограниченная интегрально положительно определенная функция почти всюду совпадает с некоторой непрерывной положительно определенной функцией*. Действительно, если $\psi(g)$ — существенно ограниченная интегрально положительно определенная функция и $\varphi(g)$ — непрерывная положительно определенная функция, порождающая позитивный функционал $L_\psi\{x\} = \int \psi(g)\, x(g)\, dg$, то

$$\int \psi(g)\, x(g)\, dg = \int \varphi(g)\, x(g)\, dg \text{ для всех } x \in \mathfrak{L}_1,$$

а это возможно лишь, если $\psi(g)$ почти всюду совпадает с $\varphi(g)$.

4. Положительно определенную функцию $\varphi(g)$, для которой $\varphi(e) = 1$, мы будем называть **нормированной**. Совокупность $\mathfrak{P}$ всех непрерывных положительно определенных функций $\varphi(g)$, для которых $\varphi(e) \leqslant 1$, очевидно, выпукла, иными словами, содержит вместе с каждыми двумя функциями $\varphi(g)$ и $\psi(g)$ также весь соединяющий их «отрезок», т. е. все функции $\lambda\varphi(g) + (1 - \lambda)\psi(g)$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. **Экстремальной точкой** выпуклого множества называют точку этого множества, которая не является внутренней ни для какого содержащегося в нем отрезка. Очевидно, функция $\varphi(g) \equiv 0$, есть экстремальная точка множества $\mathfrak{P}$. *Всякая другая экстремальная точка множества $\mathfrak{P}$ является нормированной элементарной положительно определенной функцией*. Действительно, пусть $\varphi(g) \not\equiv 0$ — экстремальная точка множества $\mathfrak{P}$ и пусть $\psi(g) \ll \varphi(g)$, $\psi(g) \not\equiv 0$, $\psi(g) \not\equiv \varphi(g)$, т. е. $\varphi(g) - \psi(g)$ — положительно определенная функция, отличная от нуля и от $\varphi(g)$. Так как положительно определенная функция достигает по абсолютной величине максимума при $g = e$, то $\varphi(e) > \psi(e) > 0$. Далее, очевидно, $\varphi(e) = 1$, ибо иначе $\varphi(g)$ была бы внутренней точкой отрезка $\left[0, \frac{\varphi(g)}{\varphi(e)}\right]$. Поэтому

$$\varphi(g) = \psi(e)\frac{\psi(g)}{\psi(e)} + [1 - \psi(e)]\frac{\varphi(g) - \psi(g)}{1 - \psi(e)},$$

откуда, в силу экстремальности функции $\varphi(g)$, следует, что $\frac{\psi(g)}{\psi(e)}=\frac{\varphi(g)-\psi(g)}{1-\psi(e)}$ или $\psi(g)=\psi(e)\varphi(g)$; таким образом, $\varphi(g)$ есть элементарная функция. Обратно, *всякая нормированная элементарна непрерывная положительно определенная функция есть экстремальная точка множества* $\mathfrak{P}$. Действительно, пусть $\varphi(g)$ — элементарная положительно определенная функция, $\varphi(e)=1$ и $\varphi(g)=\lambda\psi(g)+ +(1-\lambda)\chi(g)$, где $\psi, \chi\in\mathfrak{P}$. Тогда, очевидно, $\psi(e)=\chi(e)=1$, и так как $\lambda\psi(g)\ll\varphi(g)$, то $\lambda\psi(g)=\alpha\varphi(g)$. Полагая $g=e$, получаем: $\alpha=\lambda$, т. е. $\psi(g)=\varphi(g)$, следовательно, и $\chi(g)=\varphi(g)$; таким образом, $\varphi(g)$ есть экстремальная точка множества $\mathfrak{P}$.

Итак, *нормированные элементарные непрерывные положительно определенные функции можно определить как отличные от нуля экстремальные точки выпуклого множества $\mathfrak{P}$ всех непрерывных положительно определенных функций $\varphi(g)$ с $\varphi(e)\leqslant 1$.*

Основываясь на связи непрерывных положительно определенных функций с позитивными функционалами, установленной теоремой 4, мы покажем, что этих экстремальных точек имеется достаточно много.

Введем в совокупность всех непрерывных положительно определенных функций «слабую топологию», отождествляя их с порожденными ими линейными функционалами в $\mathfrak{L}_1$. Именно, окрестности непрерывной положительно определенной функции $\varphi_0(g)$ определим с помощью произвольных конечных совокупностей функций $x_1, \ldots, x_n\in\mathfrak{L}_1$ и произвольных $\varepsilon>0$ как множества всех непрерывных положительно определенных функций $\varphi(g)$, для которых

$$\left|\int\varphi_0(g)x_k(g)\,dg-\int\varphi(g)x_k(g)\,dg\right|<\varepsilon\quad(k=1, \ldots, n). \tag{7}$$

Теорема 5. *Совокупность всех непрерывных положительно определенных функций $\varphi(g)$, для которых $\varphi(e)\leqslant 1$, есть наименьшее слабо замкнутое выпуклое множество, содержащее все нормированные элементарные непрерывные положительно определенные функции и функцию $\varphi(g)\equiv 0$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{R}\mathfrak{L}_1$ замкнутую линейную вещественную оболочку, построенную на совокупности всех функций $x\in\mathfrak{L}_1$, для которых $x^*=x$. Если L — позитивный линейный функционал в $\mathfrak{L}_1$, то $L(x^*)=\overline{L(x)}$ для всех $x\in L_1$. Действительно, как мы выше видели,

$$L(y*x^*)=\overline{L(x*y^*)}.$$

Взяв здесь $y=e_V$ и $V\to e$, в пределе получим утверждаемое соотношение $L(x^*)=\overline{L(x)}$. Поэтому заданные на $\mathfrak{L}_1$ позитивные линейные функционалы можно рассматривать как вещественные линейные функ-

ционалы, определенные на $\Re\mathfrak{L}_1$ и позитивные в прежнем смысле. При этом каждый вещественный линейный функционал, заданный на $\Re\mathfrak{L}_1$, очевидно, однозначно продолжается до линейного функционала на $\mathfrak{L}_1$ с помощью формулы

$$L(x) = L(\Re x) + iL(\Im x), \quad \text{где} \quad \Re x = \frac{x + x^*}{2}, \quad \Im x = \frac{x - x^*}{2i}.$$

Поэтому позитивные линейные функционалы, различные на $\mathfrak{L}_1$, различны и на $\Re\mathfrak{L}_1$. Легко проверить, что нормировка и слабая топология в пространстве позитивных линейных функционалов не зависит от того, рассматривать ли эти функционалы на $\mathfrak{L}_1$ или же на $\Re\mathfrak{L}_1$.

Для произвольного позитивного линейного функционала $L = L_\varphi$ имеем

$$|L_\varphi| = \sup\operatorname{ess}|\varphi(g)| \varphi(e). \tag{8}$$

Таким образом, выпуклое множество $\mathfrak{P}$ всех непрерывных положительно определенных функций $\varphi(g)$, для которых $\varphi(e) \leqslant 1$, мы можем, основываясь на теореме 4 и принимая во внимание равенство (8), рассматривать и как выпуклое множество $\mathfrak{P}'$ всех позитивных линейных функционалов L, определенных на $\Re L_1$ и содержащихся в сфере $|L| \leqslant 1$. Но легко проверить, что $\mathfrak{P}'$ слабо замкнуто в пространстве всех вещественных линейных функционалов, определенных на $\Re\mathfrak{L}_1$. Следовательно, в силу теоремы Крейна и Мильмана [6], $\mathfrak{P}'$, а значит, и $\mathfrak{P}$ совпадает с наименьшей слабо замкнутой выпуклой оболочкой, построенной на всех его экстремальных точках. Тем самым, в силу установленной выше связи между экстремальными точками совокупности $\mathfrak{P}$ и нормированными элементарными непрерывными положительно определенными функциями, теорема 5 доказана.

Можно показать, что *если группа G не дискретна, то функция $\varphi(g) \equiv 0$ принадлежит слабому замыканию совокупности всех нормированных элементарных непрерывных положительно определенных функций*.

5. Для локально бикомпактных групп, в силу существования на них меры Хаара, имеется простой, хорошо известный способ конструкции непрерывных положительно определенных функций. Обозначим через $\mathfrak{L}_2$ гильбертово пространство, образованное всеми измеримыми функциями, квадрат которых абсолютно интегрируем, со скалярным произведением

$$(x, y) = \int x(h) y(h) \, dh.$$

Операторы $U_g x(h) = x(g^{-1}h)$, очевидно, образуют унитарное представление группы G в $\mathfrak{L}_2$.

Отсюда следует, что, для любой функции $x(h) \in \mathfrak{L}_2$,

$$(U_g x, x) = \int x(g^{-1}h)\overline{x(h)}\,dh$$

— непрерывная положительно определенная функция.

Наличие этой конструкции сразу показывает, что *на локально бикомпактной группе G для каждого элемента $g_0 \neq e$ существует непрерывная положительно определенная функция $\varphi_0(g)$ такая, что $\varphi_0(g) \neq \varphi_0(e)$; более того, для каждой окрестности V единицы e существует нормированная непрерывная положительно определенная функция, равная нулю вне V.*

Действительно, выберем какую-нибудь окрестность W, удовлетворяющую условию $WW^{-1} \subset V$, и затем — любую функцию $x_W(h) \in \mathfrak{L}_2$ такую, что $(x_W, x_W) = 1$ и $x_W(h) = 0$ вне W. Функция $\varphi(g) = (U_g x_W, x_W)$ и будет обладать требуемыми свойствами.

Теорема 6. *На локально бикомпактной группе G существует полная система элементарных непрерывных положительно определенных функций.*

Доказательство. Пусть, вопреки утверждению теоремы, существует элемент $g_0 \neq e$ такой, что $\zeta(g_0) = 1$ для всех нормированных элементарных непрерывных положительно определенных функций $\zeta(g)$. Выберем какую-нибудь вещественную нормированную непрерывную положительно определенную функцию $\varphi_0(g)$, для которой $\varphi_0(g_0) \neq 1$; как показано выше, это возможно для любого $g_0 \neq e$. Пусть V — окрестность единицы такая, что

$$1 - \varphi_0(g) < \varepsilon \text{ и } |\varphi_0(g_0) - \varphi_0(g_0 g)| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad g \in V, \tag{9}$$

где ε — фиксированное положительное число. Пусть $f_V(g)$ — характеристическая функция множества V. Рассмотрим окрестность (7) функции $\varphi_0(g)$, определенную функциями $x_1(g) = \frac{1}{m(V)} f_V(g)$, $x_2(g) = \frac{1}{m(V)} f_V(g_0^{-1}g)$ и выбранным числом ε. В силу теоремы 5, в этой окрестности содержится хотя бы одна функция вида

$$\varphi(g) = \lambda_1 \zeta_1(g) + \ldots + \lambda_k \zeta_k(g),$$

где $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ — нормированные элементарные непрерывные положительно определенные функции и $\lambda_1 \geqslant 0, \ldots, \lambda_k \geqslant 0, \lambda_1 + \ldots + \lambda_k \leqslant 1$. Тогда в той же окрестности будет содержаться и вещественная часть $\psi(g) = \Re\varphi(g)$, являющаяся, одновременно с $\varphi(g)$, положительно определенной функцией. Согласно предположению, $\psi(g_0) = \psi(e) \leqslant 1$. Так как, по условию,

$$\left| \int [\varphi_0(g) - \psi(g)]\, x_1(g)\, dg \right| = \left| \frac{1}{m(V)} \int_V [\varphi_0(g) - \psi(g)]\, dg \right| < \varepsilon,$$

то, принимая во внимание первое из неравенств (9), находим:

$$1-\psi(e)=\frac{1}{m(V)}\int\limits_V [1-\psi(e)]\,dg \leqslant \frac{1}{m(V)}\int\limits_V [1-\psi(g)]\,dg \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{m(V)}\int\limits_V [1-\varphi_0(g)]\,dg+\left|\frac{1}{m(V)}\int\limits_V [\varphi_0(g)-\psi(g)]\,dg\right|<2\varepsilon. \qquad (10)$$

Далее, так как $\varphi_0(g_0g)-\psi(g_0g)=[\varphi_0(g_0)-\psi(g_0)]-[\varphi_0(g_0)-\varphi_0(g_0g)]+$ $+[\psi(g_0)-\psi(g_0g)]$, то

$$\left|\frac{1}{m(V)}\int\limits_V [\varphi_0(g_0g)-\psi(g_0g)]\,dg\right| \geqslant |\varphi_0(g_0)-\psi(g_0)|-$$
$$-\left|\frac{1}{m(V)}\int\limits_V [\varphi_0(g_0)-\varphi_0(g_0g)]\,dg\right|-\left|\frac{1}{m(V)}\int\limits_V [\psi(g_0)-\psi(g_0g)]\,dg\right|.$$

Но, применяя последовательно неравенство Шварца, неравенство (3) М. Г. Крейна и неравенство (10), получаем:

$$\left|\frac{1}{m(V)}\int\limits_V [\psi(g_0)-\psi(g_0g)]\,dg\right|^2 \leqslant \frac{1}{m(V)}\int\limits_V |\psi(g_0)-\psi(g_0g)|^2\,dg \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2}{m(V)}\int\limits_V [\psi(e)-\psi(g)]\,dg \leqslant \frac{2}{m(V)}\int [1-\psi(g)]\,dg<4\varepsilon.$$

Кроме того, в силу второго из неравенств (9),

$$\left|\frac{1}{m(V)}\int\limits_V [\varphi_0(g_0)-\varphi_0(g_0g)]\,dg\right|<\varepsilon.$$

Таким образом, принимая еще во внимание содержащееся в (10) неравенство $1-\psi(e)<2\varepsilon$, находим:

$$\left|\frac{1}{m(V)}\int\limits_V [\varphi_0(g_0g)-\psi(g_0g)]\,dg\right|>$$
$$>|\varphi_0(g_0)-\psi(g_0)|-\varepsilon-2\sqrt{\varepsilon}=|\varphi_0(g_0)-\psi(e)|-\varepsilon-2\sqrt{\varepsilon}>$$
$$>[1-\varphi_0(g_0)]-[1-\psi(e)]-\varepsilon-2\sqrt{\varepsilon}>1-\varphi_0(g_0)-3\varepsilon-2\sqrt{\varepsilon}. \qquad (11)$$

С другой стороны, по условию,

$$\left|\int [\varphi_0(g)-\psi(g)]\,x_2(g)\,dg\right|=\left|\frac{1}{m(V)}\int\limits_V [\varphi_0(g_0g)-\psi(g_0g)]\,dg\right|<\varepsilon. \qquad (12)$$

Соединяя (11) и (12), получаем

$$1-\varphi_0(g_0)<4\varepsilon+2\sqrt{\varepsilon}.$$

Но это невозможно при достаточно малом ε, ибо $1-\varphi_0(g_0)$, по предположению, есть (постоянное) положительное число. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Из теорем 3 и 6 непосредственно следует основной наш результат:

Теорема 7. *Всякая локально бикомпактная группа обладает полной системой неприводимых унитарных представлений.*

Литература

1. S. Banach, Sur la mesure de Haar (S. Saks, Théorie de l'intégrale, Appendix 1; Warszawa, 1933) (русский перевод имеется в «Успехах математических наук», вып. II, стр. 161—167).
2. И. М. Гельфанд и Д. А. Райков, К теории характеров коммутативных топологических групп, Доклады АН СССР, XXVIII : 3 (1940), 195—198.
3. A. Haar, Der Massbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Ann. of Math. (2), 34 (1933), 147—169.
4. Sh. Kakutani, On the uniqueness of Haar's measure, Proc. Imp. Acad. Tokyo, XIV (1938), 27—31.
5. М. Г. Крейн, Об одном кольце функций на топологической группе, Доклады АН СССР, XXXII : 2 (1939).
6. M. Krein and D. Milman, On extreme points of regular convex sets, Studia Mathematica, IX (I) (1940), 133—137.
7. J. von Neumann, Almost periodic functions in a group, Trans. Amer. Math. Soc., 36 (1934), 445—492.
8. J. von Neumann, On the uniqueness of Haar's mesure, Rec. math., 1 (43) (1936), 721—734.
9. F. Peter and H. Weyl, Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann., 97 (1927), 737—755 (русский перевод имеется в «Успехах математических наук», вып. II, стр. 144—160).
10. Д. А. Райков, Гармонический анализ на коммутативных группах с мерой Хаара и теория характеров. Труды Матем. инст. АН СССР, XII.
11. Д. А. Райков, A new proof of the uniqueness of Haar's measure, C. R. (Doklady) Acad. Sci. URSS, XXXVI : 8 (1942), 211—212.
12. A. Weil, Sur les groupes topologiques et les groupes mesurés, C. R. Ac. Sci. Paris, 202 (1936), 1147—1149.

(Поступило в редакцию 9/VIII 1943 г.)

Irreducible unitary representations of locally bicompact groups

I. Gelfand and **D. Raikov** (Moscow)

(Résumé)

In the present paper the authors establish the existence of a complete system of irreducible unitary representations for an arbitrary locally bicompact group.

By a unitary representation of a topological group G we mean the function U_g that maps G into the set of unitary operators defined in the complex Hilbert space $\mathfrak{H}$ under the following conditions:

1° $U_{gh}=U_gU_h$ for all $g, h \in G$;

2° $\|U_{g'}\eta - U_g\eta\| \to 0$ at $g' \to g$ for any $\eta \in \mathfrak{H}$.

The irreducibility and the completeness are to be understood in the usual sense.

The main steps of the proof are briefly outlined in a note of the authors in C. R. (Doklady) de l'Acad. Sci. URSS, vol. XLII:5 (1944).
