Jean-Luc Brylinski, Steven Zucker, An overview of recent advances in Hodge theory, *Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fund. Napr.*, 1991, Volume 69, 48–165

УДК 512.66+512.73+515.17

II. ОБЗОР ПОСЛЕДНИХ ИССЛЕДОВАНИЙ В ТЕОРИИ ХОДЖА[1]

Жан-Люк Брылински, Стевен Цукер

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Цель данной статьи — описать прогресс, достигнутый в теории Ходжа за последние 15 лет. Конечно, первое, что необходимо, — это ответить на вопрос, что понимается под «теорией Ходжа»! Это представляется, безусловно, не очень простым вопросом и ответ на него, по сути, и составляет содержание всей статьи. Конечно, с течением времени предмет претерпевал изменения.

Классической задачей, предшествующей теории Ходжа, была задача о периодах интегралов первого рода по алгебраическим плоским кривым над **C**. В более современной терминологии, изучались когомологии голоморфных 1-форм с коэффициентами в **C** и их изменения в зависимости от параметров, иными словами, вариация структуры Ходжа веса 1. Пионерским достижением в этой области, принадлежащим Пуанкаре и Лефшецу (см. [122]), является обращение так называемых нормальных функций (теорема Абеля с параметром и при наличии вырождения) для характеризации когомологических классов неособой алгебраической поверхности, представимой алгебраическим 1-циклом. Таким было состояние предмета, скажем, 60 лет назад.

Работа самого Ходжа по теории гармонических интегралов [106] привела к широко известной *теореме декомпозиции Ходжа* (см. предложение 3.7): для компактного кэлерова многообразия X когомологические группы допускают естественную декомпозицию

[1] Авторизованный перевод с английского С. В. Вахрамеева

$$H^m(X, \mathbf{C}) = \bigoplus_{p+q=m} H^{p,q}(X) \qquad (0.1)$$

с $\overline{H^{p,q}(X)} = H^{q,p}(X)$. Эта работа привела к знаменитой *гипотезе Ходжа* для проективного алгебраического многообразия X: любой рациональный класс в $H^{p,p}(X)$ представим алгебраическим циклом коразмерности p с коэффициентами в $\mathbf{Q}$. Это — обманчиво простое утверждение — весьма мало, что известно, за исключением случая $p=1$. Если теперь заменить теорию интегральных уравнений, использовавшуюся Ходжем, на L_2-методы (см. [84]), то мы получим состояние теории Ходжа тридцатипятилетней давности.

Можно сказать, что современная теория Ходжа берет свое начало с конца 60-тых годов в работах Гриффитса [89]—[92]. Она представляет собой неоклассический подход, возвращение к работам Пуанкаре и Лефшеца с точки зрения современной комплексной геометрии, обобщающий результаты на случай многообразий высокой размерности и циклы высокой коразмерности. Это достигается с помощью понятий вариации структуры Ходжа и классифицирующих пространств структур Ходжа, промежуточных якобианов (в модификации Вейля) и отображений Абеля — Якоби (см. также [123]). Хотя алгебро-геометрические подходы никогда не были вполне успешными, они оказывали постоянное влияние на современную теорию Ходжа и саму алгебраическую геометрию.

Вскоре после появления работы Гриффитса, в работе Делиня [92] о смешанной теории Ходжа был очерчен круг новых идей и технических средств исследования. Им было введено понятие смешанной структуры Ходжа, которая, грубо говоря, представляет собой итерированное расширение структур Ходжа возрастающих весов. Группы когомологий произвольного комплексного алгебраического многообразия (не обязательно компактного или гладкого) допускают смешанные структуры Ходжа. Они функториальны для морфизмов многообразий и в компактном гладком случае приводят к обычным структурам Ходжа (0.1). Работа была написана под несомненным влиянием теории мотивов Гротендика, в частности, использовалась идея последнего о существовании смешанных мотивов, связанных с группами когомологий общих алгебраических многообразий. Такие смешанные мотивы являются обобщением обычных, или «чистых» мотивов. Ключевым было предположение Делиня о существовании естественной возрастающей весовой фильтрации $W_{\cdot}$ смешанного мотива и, следовательно, ее существование на любой когомологической группе алгебраического многообразия.

Делиня привел к идее возрастающей фильтрации факт о существовании нетривиальных расширений алгебраических многообразий от тора к острию (в категории алгебраических групп), обобщенных якобианов Розенлихта — и ничто другое.

В случае характеристики $p>0$ эта весовая фильтрация может быть получена с помощью собственных значений автоморфизма Фробениуса l-адических когомологий (на основе гипотезы Вейля, доказанной позже [58]). В случае нулевой характеристики, весовая фильтрация W на любой группе $H^m(X, \mathbf{Q})$ была построена в [56]. Делинь доказал, что любая градуированная часть $\mathrm{Gr}_p{}^W H^m(X, \mathbf{Q})$ является чистой веса p. Совпадение весовой фильтрации для случаев нулевой и положительной характеристик было доказано с помощью сравнения теорий когомологий (см. [15, § 6] и [56]).

Вклад Делиня в программу, намеченную Гриффитсом, ясно изложен в [92]. Первым большим достижением в этой связи явилась работа Шмида о вырождении структур Ходжа. Она изложена в обзорной статье [93], в которой также даны следствия, касающиеся новой теории де Рама для вырождающихся геометрических структур Ходжа, которая к тому времени появилась в [51] и [179].

Появление этой статьи вполне отражает состояние предмета пятнадцатилетней давности — программу Гриффитса. Между прочим, мы вполне отдаем отчет в том, что [93] проложила дорогу к широкому применению идей Гротендика в алгебраической геометрии в формирующейся трансцендентной алгебраической геометрии.

Настоящая статья может быть рассмотрена как доклад о прогрессе в теории Ходжа начиная с 1975 г. Мы рассматриваем теорию Ходжа как вполне самостоятельную и зрелую ветвь современной математики, которая имеет многочисленные связи с другими ее разделами, из которых она черпает, как технические средства, так и вдохновение, и в которые она вносит свой вклад. Теория Ходжа не может больше рассматриваться как подобласть алгебраической геометрии или комплексного анализа. Она стала весьма обширной и запутанной областью, во многих отношениях очень трудной. Прогресс, достигнутый в ней за последние пятнадцать лет, конечно, впечатляет, но ее цветение продолжается и сейчас.

Прежде чем мы опишем содержание этого доклада, упомянем, что ввиду ограниченности времени, места и сил, мы были вынуждены осуществить некоторый отбор материала. Мы отдали предпочтение тем актуальным темам, присущим теории Ходжа, которые основаны на комплексном анализе (поскольку статья помещена в том, посвященный Реммерту). Мы сожалеем, что мы были вынуждены опустить, или не вполне адекватно упомянуть следующие темы: геометрические приложения теории Ходжа (гипотеза Ходжа, проблемы Торелли, ходжевы структуры и модули, см. [188, гл. VIII]; инфинитизимальную вариацию структуры Ходжа (см. [188, гл. VII), теоремы об исчезании; теорию Делиня об абсолютных циклах Ходжа [63], теоретико-

числовые аспекты (специальные значения L-функций [11], [57], группа Таниямы и ее обобщения [6], p-адическая теория Ходжа [60]); автоморфные формы и их представления, многообразия Симура (см. обзорную статью [130]).

В первом параграфе мы напоминаем конструкцию Делиня смешанных структур Ходжа на когомологиях алгебраических многообразий и симплициальных многообразий над **C**, поскольку она задает тон большей части статьи. В упрощенном виде этот материал содержится в [93], по крайней мере, для гладких многообразий и для многообразий с нормальными пересечениями; однако, мы выделяем использование смешанных комплексов Ходжа, когомологий смешанных комплексов Ходжа, введенных в [56], и показавших свою важность во многих последующих работах.

Большая часть § 2 посвящена напоминаниям, а именно, теоремам Шмида [167] о вырождении структур Ходжа в абстрактном смысле, то есть в отсутствии каких-либо предположений, что вариация структуры Ходжа возникает из семейства гладких проективных многообразий. Здесь приводится теорема о нильпотентной орбите и теорема о SL(2)-орбите; до настоящего времени она была доказана лишь для случая одного параметра.

Одним из последних достижений было ее обобщение на случай нескольких переменных [41] (см. теорему 2.16), основанное на работе Каттани и Каплана [39] о специальных свойствах коммутирующих нильпотентных логарифмов монодромии. Одним из следствий (одномерной) теоремы о SL(2)-орбите является существование «предельных смешанных структур Ходжа». В § 2 мы также даем краткое их описание в геометрическом случае с помощью методов теории де Рама, принадлежащих Стинбринку [179] и Клеменсу [51] (это также обсуждалось в [188, гл. VII]). Это описание дает также естественный повод для введения пучков «исчезающих циклов» и «почти циклов» (п. 2.21), которые играют фундаментальную роль в работе М. Саито, которая обсуждается в § 4. Затем мы даем обобщение, полученное Наварро Азнаром (теорема 2.25). Параграф завершается обсуждением связи с асимптотикой интегралов в изолированной особенности, работы А. Н. Варченко и др., которая, между прочим, близка и к классической области и к исходной точке зрения Гриффитса.

§ 3 посвящен L_2-когомологиям. Составляя сердцевину доказательства теоремы Ходжа (с помощью методов гильбертова пространства), они представляют собой интегральную часть предмета. Важность этой темы выяснилась в течении последних пятнадцати лет после работ Чигера [43] и Цукера [192], [194]. Существует общая связь между L_2-когомологиями и гармоническими формами (см. формулу (3.5) и предложение 3.5), которая и мотивирует их введение, она дает наиболее известный

путь доказательства обычной декомпозиции Ходжа. Следующие два вопроса представляются очень интересными:

(i) Для заданного риманова многообразия M существует ли его компактификация $\overline{M}$, для которой L_2-когомологии — известные топологические инварианты?

(ii) Для заданного проективного многообразия X существует ли кэлерова метрика на его регулярной части X^0, для которой L_2-когомологии — извращенные когомологии пересечения [88]?

Согласно гипотезе Чигера, Горецки и Макферсона (см. п. 3.20), для (ii) годится сужение метрики Фубини—Штуди для проективного пространства, однако проверка этого очень трудна по многим причинам. С другой стороны, гипотеза Цукера, сформулированная приблизительно три года назад [125], [164] относится к вопросу (i).

Легко обобщить определение L_2-когомологий на случай коэффициентов в любой метризуемой локальной системе $\mathbf{V}$ на многообразии M. Когда локальная система содержит вариацию структуры Ходжа над гладким многообразием X, метризованным метрикой Ходжа, получается, с одной стороны, естественная биградуировка декомпозиции Ходжа (см. п. 3.7), данная Делинем, а с другой, — как следствие теоремы об SL(2)-орбите, — асимптотика метрики Ходжа (см. теорему 2.18). Если теперь на X задана метрика Пуанкаре относительно хорошей компактификации $\overline{X}$, то L_2-когомологии X с коэффициентами в $\mathbf{V}$ удовлетворяют нужным локальным условиям для когомологий пересечения на $\overline{X}$ с теми же коэффициентами (теоремы 3.12 и 3.15); этот результат относится к вопросу типа (i).

Достойно иронии, что ходжевы структуры для групп гомологий пересечения сингулярных проективных многообразий окончательно были получены не с помощью L_2-когомологий. Вместо этого они были получены в работах по алгебраическому анализу ($\mathbf{D}$-модулям), предмету, который также получил развитие в течении последних пятнадцати лет; его мы опишем в § 4. Исходной точкой является так называемое *соответствие Римана—Гильберта* [115], [128], утверждающее, что комплекс де Рама дает эквивалентность категорий голономных модулей с регулярными особенностями и извращенных пучков (и, аналогично, их приведенных категорий). Идея состоит в наделении таких $\mathbf{D}$-модулей фильтрацией Ходжа и весовой фильтрацией, так, что они индуцируют (смешанные) структуры Ходжа на гипергомологиях.

В развитой им теории поляризованных модулей Ходжа [159] и смешанных модулей Ходжа [155] Морихико Саито индуктивно определил категории фильтрованных $\mathbf{D}$-модулей, обладающих этим свойством, используя условия исчезания и почти цикличности пучков, ассоциированных с локально голоморфными функциями, и совместимость с так называемой V-фильтрацией

Касивары—Мальгранжа. Поскольку зачастую эти объекты очень трудно описать явным образом, основная часть теории состояла в доказательстве существования нетривиальных объектов в этих категориях! К счастью, М. Саито удалось доказать, что фильтрованные **D**-модули, ассоциированные с вариациями поляризованной структуры Ходжа и, более общо, допустимые вариации смешанной структуры Ходжа (см. п. 7.2) принадлежат этим категориям, так что, как и ожидалось, была получена теория Ходжа для когомологий пересечений и смешанные структуры Ходжа на когомологиях с коэффициентами в допустимой вариации смешанной структуры Ходжа. Смешанные модули Ходжа возникают весьма неожиданным образом и дают теорию «пучков Ходжа», которую надеялся получить Гротендик.

§ 5 посвящен когомологиям Делиня и их обобщением, принадлежащим А. А. Бейлинсону, на некомпактные многообразия. Эта теория, была развита Делинем приблизительно в 1970 г., она имеет дело с целочисленными когомологиями и усеченными когомологиями де Рама, объединяя ходжевы когомологические группы с промежуточными якобианами Гриффитса (см. [19] или [77]). В 1976—1977 гг. Блохом было найдено интересное приложение когомологий Делиня к классам Чженя унитарных локальных систем на алгебраических многообразиях. В частности, им было найдено регуляторное отображение (регулятор) из $K_2(X)$ в $H^1(X, \mathbf{C}^*)$ в случае, когда X — кривая. Это регуляторное отображение, как показали Блох, А. А. Бейлинсон и Делинь, допускает замечательную интерпретацию в терминах произведений когомологий Делиня (см. теорему 5.9). А. А. Бейлинсон [11], [12] обобщил когомологии Делиня на случай некомпактных многообразий и построил регуляторные отображения из $K_m(X)$ в когомологии Делиня (см. п. 5.19). Им были сформулированы несколько гипотез, некоторые из которых — геометрические, которые мы обсудим в пп. 5.21 и 5.22, другие — теоретико-числового характера (специальные значения (L-функций), которые здесь обсуждаться не будут. А. А. Бейлинсон [12] дал замечательную интерпретацию когомологий Делиня в терминах расширений приведенной категории смешанных структур Ходжа. Она связана с работами Карлсона и Хейна [37]. Эти вопросы обсуждаются в пп. 5.22—5.25. Соответствующие идеи связаны с недавним развитием теории мотивов Гротендика [17], [100]; мы прокомментируем его вкратце в конце § 5.

В § 6 обсуждаются несколько подходов, использовавшихся для определения смешанных структур Ходжа на гомотопических группах алгебраических многообразий. Метод Моргана [131] основан на теории Сулливана минимальных моделей для дифференциальных градуированных алгебр [185]. Он состоит в определении фильтрации на минимальной модели. В односвязном случае Моргтан получил смешанные структуры Ходжа на гомо-

топических группах (теорема 6.13). В проективном случае Делинь, Гриффитс, Морган и Сулливан доказали, что минимальная модель является «формальной», т. е. рациональные гомотопические группы есть формальное следствие когомологических колец [62] (теорема 6.14). В неодносвязном случае Морганом были также получены интересные результаты, но построенная им фильтрация Ходжа корректно определена лишь с точностью до внутреннего сопряжения.

Метод Хейна [98] основан на методе итерированных интегралов Чена, задающем отображение комплексов из барьерного комплекса в алгебру дифференциальных форм на пространстве свободных петель или пространстве кривых. Это — очень часто используемое средство изучения расслоения кривых. Хейн показал, что барьерная конструкция сохраняет смешанный комплекс Ходжа. Следовательно, поскольку на пространстве петель в точке рациональные гомотопии являются примитивной частью рациональных гомологий, Хейн получил смешанные структуры Ходжа на дополнении групповой алгебры фундаментальной группы относительно ее аугментирующего идеала (теорема 6.23). Геометрические приложения обсуждаются в п. 6.25. Альтернативный подход Деліня и Наварро Азнара [135] к смешанной теории Ходжа на гомотопических группах только кратко упоминается.

Понятие вариации смешанной структуры Ходжа является естественным обобщением соответствующего понятия вариации структуры Ходжа. Идея, естественно, состоит в том, что вариация смешанной структуры Ходжа на X должна, по крайней мере, давать фильтрованную локальную систему $(\mathbf{V}, W)$ на X, и что градуированные локальные системы $\mathrm{Gr}_k^W\mathbf{V}$ должны быть чистыми поляризованными вариациями структуры Ходжа. Тонкая задача состоит в таком определении, которое давало бы объект, обозримый на расширениях в некомпактном случае. В § 7 приводится такое понятие — понятие допустимых вариаций смешанной структуры Ходжа. Это определение принадлежит Стинбринку и Цукеру [184] для случая кривых и Касиваре [114] — в общем случае (с проверкой для случая кривых), мы приводим его в п. 7.2. В случае, когда базовое многообразие — диск, мы сталкиваемся с двумя ограничениями: во-первых, фильтрация Ходжа должна допускать корректно определенный предел, во-вторых, должна существовать относительная весовая фильтрация Деліня у монодромии.

Существуют два довода в пользу этого понятия. Во-первых, произвольная геометрическая вариация допустима (теорема 7.3). Доказательство этого утверждения является естественным обобщением техники Стинбринка [179] обсуждавшейся в § 2. Во-вторых, если базовое многообразие квазипроективно, группы когомологий с коэффициентами в вариации смешанной структуры Ходжа приобретают функториальную смешанную

структуру Ходжа (теорема 7.12). В конце § 7 мы приводим результаты Хейна и Цукера [101], [102] об унипотентных вариациях смешанных структур Ходжа (см. определение 7.16), которые являются естественным приложением гомотопической смешанной теории Ходжа, развитой Хейном.

§ 8 посвящен вопросу об определении тех локальных систем на данном квазипроективном многообразии, которые содержат вариацию структуры Ходжа. В основном, обсуждается недавняя работа Симпсона, которая, с нашей точки зрения, окажет большое влияние на теорию Ходжа. Им были использованы методы нелинейных уравнений с частными производными из дифференциальной геометрии для получения соответствия между неприводимыми векторными расслоениями над компактным кэлеровым многообразием и стабильными расслоениями Хиггса с исчезающими полными классами Чженя (см. теорему 8.9). *Расслоение Хиггса* — это векторное расслоение $\mathscr{E}$, заданное вместе с оператор-значной 1-формой θ на $\mathscr{E}$, квадрат которой равен нулю. $\mathbf{C}^*$ действует на расслоении Хиггса очевидным образом, с помощью дилатации θ.

Замечательным является тот факт, что неподвижные точки $\mathbf{C}^*$-действия в точности соответствуют комплексным вариациям структуры Ходжа (предложение 8.12). Некоторые впечатляющие приложения приводятся в пп. 8.15 и 8.16. В настоящее время Симпсон занимается некомпактным случаем; его последние результаты (известные ко времени написания этой статьи) кратко обсуждаются в конце § 8.

Вероятно, ясно, что все восемь параграфов статьи не являются независимыми друг от друга. Это — в точности случай, когда $p<q$, § p не использует результатов из § q, однако в нем может быть ссылка на факты, объяснённые позднее. В большинстве параграфов, в интересах экономии места, даются избранные доказательства или даже только их наброски. Часть параграфов содержит больше технических деталей, чем другие, мы надеемся, что в каждом случае читатель без особых страданий воспримет основные идеи.

Нам приятно поблагодарить многочисленных коллег, помогавших при подготовке этого доклада. Мы выражаем признательность Пьеру Делиню за множество существенных замечаний. Мы благодарим Пьера Делиня, Филиппа Гриффитса, Николу Каца за обсуждения, касающиеся истории предмета. Мы хотим выразить благодарность Карлосу Симпсону, терпеливо объяснившему нам свою работу. Мы благодарим многих людей, приславших нам свои статьи и препринты. Мы очень благодарны Пьеру Делиню, Фуаду Эл Зейну, Ричарду Хейну, Морихико Саито, Вилфриду Шмиду и Джозефу Стинбринку за прочтение большей части первоначальной версии этого доклада, за указание ошибок и за предложения, улучшившие его содержание. Мы хотим также выразить глубокое уважение Рагхавану Нарасимхану за его поддержку.

§ 1. Обзор теории Ходжа—Делиня

Мы приведем основные результаты теории Ходжа в версии Делиня не только потому, что им получены теоремы например, существование функториальной смешанной структуры Ходжа на когомологиях произвольного комплексного алгебраического многообразия), но и потому, что понятия и методы введённые им, существенны для последующего развития теорий Ходжа.

Начнём с понятий структур Ходжа и смешанных структур Ходжа. Пусть V — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{R}$. *Структурой Ходжа веса m на V* называется убывающая фильтрация

$$\ldots \subset F^p(V_{\mathbf{C}}) \subset F^{p-1}(V_{\mathbf{C}}) \subset \ldots$$

комплексифицированного векторного пространства $V_{\mathbf{C}} = V \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C}$ такая, что для комплексно-сопряженной фильтрации $\bar{F}^{\cdot}$ и для $V^{p,q} := F^p \cap \bar{F}^q$ имеет место *разложение Ходжа*

$$V_{\mathbf{C}} = \bigoplus_{p+q=m} V^{p,q}.$$

В терминологии [56, § 2], фильтрации $F^{\cdot}$ и $\bar{F}^{\cdot}$ называются *m-противоположными*.

Знаменитая *теорема Ходжа* [106] утверждает, что если X — компактное кэлерово многообразие, то группа $H^m(X, \mathbf{R})$ допускает структуру Ходжа веса m. Комплексное векторное пространство $V^{p,q}$ может быть отождествлено с пространством гармонических дифференциальных форм типа (p, q). Фильтрация Ходжа допускает следующее комплексно-аналитическое описание. Комплексные когомологии X равны гипергомологиям комплекса де Рама $\Omega_X^{\cdot}$. Пусть $F^p\Omega_X^{\cdot}$ — *усечение* («tronque bête» в терминологии Делиня)

$$F^p\Omega_X^{\cdot} : 0 \to \ldots \to \Omega_X^p \xrightarrow{d} \Omega_X^{p+1} \to \ldots \to \Omega_X^n. \qquad (1.1$$

Оно задает убывающую фильтрацию на $\Omega_X^{\cdot}$. Соответствующая спектральная последовательность в гипергомологиях вырождается в члене E_1 и индуцированная фильтрация на $H^m(X, \mathbf{C})$ есть фильтрация Ходжа.

Допуская взятие прямых сумм для структур Ходжа различных весов, получаем алгебраическую группу S над $\mathbf{R}$, определенную как $S = R_{\mathbf{C}/\mathbf{R}}\mathbf{G}_m$ — ограничение поля скаляров в духе Вейля с $\mathbf{C}$ до $\mathbf{R}$ для мультипликативной группы $\mathbf{G}_m$, или, иными словами, $G = \mathbf{C}^*$ рассматривается как алгебраическая группа над $\mathbf{R}$. Делинь определил структуру Ходжа как вещественное представление $\rho : S \to \mathrm{GL}(V)$. Поскольку $S(\mathbf{C}) = \mathbf{C}^* \times \mathbf{C}^*$, то комплексное представление S на комплексном вект орном про

странстве $V_{\mathbf{C}}$ приводит к биградуировке $V_{\mathbf{C}}=\bigoplus_{p,q} V^{p,q}$, где $V^{p,q}=\{v\in V_{\mathbf{C}} \mid (z_1, z_2)v=z_1^p z_2^q v\}$. Так как комплексное сопряжение действует на $\mathbf{C}^*\times\mathbf{C}^*$ как $(z_1, z_2)\mapsto(\bar{z}_2, \bar{z}_1)$, когда $V_{\mathbf{C}}$ имеет вещественную структуру, представление S, как и выше, определено над $\mathbf{R}$, в том и только том случае, если $\overline{V^{p,q}}=V^{q,p}$.

Алгебраический тор $\mathbf{G}_m$ есть подгруппа S. Вещественное представление V группы S допускает декомпозицию $V=\Sigma_m V_m$, где V_m — подпространство V, на котором $a\in\mathbf{G}_m$ действует как a^m. Биградуировка на $(V_m)_{\mathbf{C}}$ определяет на этом пространстве чистую структуру Ходжа веса m. Следовательно, ходжевы структуры веса m соответствуют тем представлениям S, для которых $a\in\mathbf{G}_m$ действует как a^m. Язык S-представлений используется в разных контекстах в частности, с точки зрения группы Мамфорда—Тэйта [63, I. 3]. Автоморфизм пространства $V_{\mathbf{C}}$, индуцированный $i\in S(\mathbf{R})=\mathbf{C}^*$ обозначается через C.

Для подкольца A в $\mathbf{R}$ *A-структура Ходжа веса m* есть A-модуль V_A конечного типа, заданный вместе с ходжевой структурой веса m на $V_{\mathbf{R}}:=V_A\otimes_A\mathbf{R}$. *Ходжева структура Тэйта* $\mathbf{Z}(1)$ есть единственная $\mathbf{Z}$-структура Ходжа веса -2 с $\mathbf{Z}(1):=2\pi i\mathbf{Z}\subset\mathbf{C}$ и действием S: (z_1, z_2) действует на $\mathbf{C}(1)=\mathbf{C}$ умножением на $z_1^{-1}z_2^{-1}$. Для $n\in\mathbf{Z}$ *ходжева структура* $\mathbf{Z}(n)$ определяется как тензорная степень $\mathbf{Z}(n)=\mathbf{Z}(1)^{\otimes n}$.

Поляризацией структуры Ходжа V веса m называется гомоморфизм $(\ ,\ ): V\otimes V\to\mathbf{Z}(-m)$ структур Ходжа, такой, что он $(-1)^m$-симметричен и

$$\langle x, y\rangle=(2\pi i)^m(x, Cy)$$

— положительно определённая симметричная билинейная форма на V.

Для гладкого проективного алгебраического многообразия X над $\mathbf{C}$ размерности n пусть $L\in H^2(X, \mathbf{Z}(1))$ — класс гиперплоского сечения. Для $0\leqslant j\leqslant n$, *примитивная часть* $P^j(X)$ группы $H^j(X)$ есть ядро гомоморфизма $L^{n-j+1}: H^j(X, \mathbf{Z})\to\to H^{2n+2-j}(X, \mathbf{Z}(n-j+1))$. Морфизм структур Ходжа

$$H^j(X, \mathbf{Z})\otimes H^j(X, \mathbf{Z})\to\mathbf{Z}(-j),\quad (\alpha, \beta)\mapsto(\alpha\smile\beta\smile L^{n-j}, [X])$$

для ориентирующего класса $[X]\in H^{2n}(X, \mathbf{Z}(n))$ есть поляризация структуры Ходжа $P^j(X)$ веса j.

Определение 1.1. Пусть A — подкольцо $\mathbf{R}$. *A-смешанная структура Ходжа* определяется заданием следующих объектов:

(1) A-модуля V_A конечного типа;

(2) возрастающей фильтрацией $\ldots\subset W_n\subset W_{n+1}\subset\ldots$ $A\otimes\mathbf{Q}$-модуля $V_{A\otimes\mathbf{Q}}:=V_A\otimes\mathbf{Q}$;

(3) убывающей фильтрацией F^p на $V_{\mathbf{C}} := V_A \otimes_A \mathbf{C}$.

При этом, должно быть выполнено условие: для любого $j \geqslant 0$ фильтрации, индуцированные F и $\overline{F}$ на $\mathrm{Gr}_j^W(V_{\mathbf{C}})$ j-противоположны (следовательно, определена A-структура Ходжа на $\mathrm{Gr}_j^W(V_A)$ веса j).

Морфизм $f: V_A \to V'_A$ *смешанных структур Ходжа* есть A-линейное отображение f: $V_A \to V'_A$ совместимое с фильтрациями W и F.

Теорема 1.2 (Делинь [56, теорема 2.3.5]). (1) Категория A-смешанных структур Ходжа абелева; ядра и коядра морфизмов смешанных структур Ходжа снабжены индуцированными фильтрациями;

(2) Пусть $A \otimes \mathbf{Q}$ — поле. Тогда любой морфизм A-смешанных структур Ходжа строго совместим с фильтрациями W. и F;

(3) Функтор $V \mapsto \mathrm{Gr}_j^W(V)$ есть точный функтор из категории A-смешанных структур Ходжа в категорию A-структур Ходжа веса j;

(4) Функтор $V \mapsto \mathrm{Gr}_F^p(V)$ точен.

Пусть V — смешанная структура Ходжа, $V^{p,q} = \left(\mathrm{Gr}_{p+q}^W(V)\right)^{p,q}$. *Числами Ходжа* $h^{p,q}$ пространства V называются целые

$$h^{p,q} := \dim_{\mathbf{C}}(V^{p,q}).$$

Напомним некоторые конструкции, которые существенны для смешанных ходжевых структур Делиня на когомологических группах комплексных алгебраических многообразий. Рассмотрим сначала случай гладкого многообразия X. Из теоремы Хиронаки о разрешении особенностей [104] следует, что можно указать компактификацию $X \overset{j}{\hookrightarrow} \overline{X}$ такую, что дополнение $D = \overline{X} - X$ есть дивизор с нормальными пересечениями. Такую компактификацию назовем *хорошей*. Можно выбрать такую хорошую компактификацию, что $D = \bigcup_i D_i$, где D_i гладкие; зафиксируем далее порядок компонент D.

Делинь в [54] и [56] ввел понятие *логарифмического комплекса де Рама* $\Omega_{\overline{X}}^{\cdot}(\log D)$ (это стало теперь стандартным обозначением; в [54] этот комплекс обозначался через $\Omega_{\overline{X}}^{\cdot}\langle D \rangle$). $\Omega_{\overline{X}}^{\cdot}(\log D)$ есть комплекс пучков над $\overline{X}$. Во-первых, $\Omega_{\overline{X}}^1(\log D)$ есть $\mathcal{O}_{\overline{X}}$-подмодуль $j_*(\Omega_X^1)$, порожденный $\partial z_i / z_i$, где z_i — локальное задание компоненты в D_i. Затем, $\Omega_{\overline{X}}^p(\log D) = \wedge_{\mathcal{O}_{\overline{X}}}^p \Omega_{\overline{X}}^1(\log D)$. Пучки $\Omega_{\overline{X}}^p(\log D)$ локально свободны над $\mathcal{O}_{\overline{X}}$.

Пусть $W_n\left(\Omega_{\overline{X}}^p(\log D)\right)$ — подмодуль, порожденный произведением $\alpha \wedge \partial z_{i_1}/z_{i_1} \wedge \ldots \wedge \partial z_{i_m}/z_{i_m}$ для $m \leqslant n$ и голоморфной α.

Это дает подкомплекс пучков и

$$W_n\left(\Omega^p_{\overline{X}}(\log D)\right)\wedge W_m\left(\Omega^q_{\overline{X}}(\log D)\right)\subset W_{n+m}\left(\Omega^{p+q}_{\overline{X}}(\log D)\right).$$

Пусть D^n (соответственно, $\tilde{D}^n$) — объединение (соответственно, дизъюнктное объеденение) лежащих в $\overline{X}$ пересечений $D_{i_1}\cap\ldots\cap D_{i_n}$ из n компонент D. Пусть $i_n:\tilde{D}^n\to\overline{X}$ — каноническое отображение. Напомним, что для комплекса $K^\bullet$ и для $n\in\mathbf{Z}$ комплекс $K^\bullet[n]$ определяется как $K[n]^p=K^{n+p}$ (сдвиг $K^\bullet$ влево на n).

Предложение 1.3. Отображение $\alpha\wedge\frac{dz_{i_1}}{z_{i_1}}\wedge\ldots$ $\ldots\wedge\frac{dz_{i_n}}{dz_{i_n}}\to\alpha|_{D_{i_1}\cap\ldots\cap D_{i_n}}$ дает изоморфизм комплексов пучков над $\overline{X}$:

$$\operatorname{Res}:\operatorname{Gr}^W_n(\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D)\cong i_{n*}\Omega^\bullet_{\tilde{D}^n}[-n].$$

Пусть теперь через $\tau_{\leq n}(K^\bullet)$ для любого комплекса $K^\bullet$ обозначается каноническая фильтрация Делиня

$$\tau_{\leq n}(K^\bullet):\ldots\to K^{n-2}\to K^{n-1}\xrightarrow{d_{n-1}}\ker d_n\to 0\to 0\to\ldots$$

такая, что индуцированное отображение когомологий $H_{\leq n}(K^\bullet)\to H^p(K^\bullet)$ есть изоморфизм при $p\leq n$ и нулевое — при $p>n$. Она обладает свойством: $\operatorname{Gr}^\tau_n(K^\bullet)$ квазиизоморфно $H^n(K^\bullet)[-n]$.

Напомним, что *фильтрованный морфизм* $\varphi:(A^\bullet, W_\bullet)\to\to(B^\bullet, W_\bullet)$ фильтрованных комплексов называется *фильтрованным квазиизоморфизмом*, если для любого j индуцированный морфизм комплексов $\operatorname{Gr}^W_j:\operatorname{Gr}^W_j(A)\to\operatorname{Gr}^W_j(B)$ является квазиизоморфизмом. Эквивалентно, φ индуцирует изоморфизм E_1-членов спектральных последовательностей этих фильтрованных комплексов; следовательно, если фильтрация исчерпывающая и разделяющая, то φ — квазиизоморфизм. Справедлива

Теорема 1.4 (Делинь [56, II, предложение 3.1.8]). Морфизмы фильтрованных комплексов

$$\left(\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D), W\right)\leftarrow\left(\Omega^\bullet_{\overline{X}}(\log D), \tau\right)\to\left(j_*\Omega^\bullet_X, \tau\right)\cong(Rj_*\mathbf{C}, \tau)$$

являются фильтрованными изоморфизмами. Следовательно, спектральные когомологии Лере для j в комплексных когомологиях можно отождествить со спектральной последовательностью гиперкогомологий фильтрованного комплекса пучков $\left(\Omega^\bullet_X(\log D), W\right)$ над $\overline{X}$.

Фильтрация Ходжа $F^{\cdot}$ log-комплекса есть фильтрация

$$F^p\Omega^{\cdot}_{\overline{X}}(\log D):0\to\ldots\to\Omega^p_{\overline{X}}(\log D)\to\Omega^{p+1}_{\overline{X}}(\log D)\to\ldots. \quad (1.2)$$

Фильтрации $W_{\cdot}$ и $F^{\cdot}$ на комплексе пучков $\Omega^{\cdot}_{\overline{X}}(\log D)$ над $\overline{X}$ индуцируют фильтрации $W_{\cdot}$ и $F^{\cdot}$ на гиперкогомологиях $H^p\left(\overline{X}, \Omega^{\cdot}_{\overline{X}}(\log D)\right)=H^p(X, \mathbf{C})$.

Следующая теорема установлена Делинем [56, II, § 3.2] для спектральной последовательности фильтрованного комплекса; она отличается от классической теоремы в [86]. В дальнейшем более удобно иметь дело с убывающей фильтрацией $W^{\cdot}$, а не возрастающей $W_{\cdot}$. Переход от одной фильтрации к другой осуществляется по правилу $W_n=W^{-n}$.

Для описания теоремы Делиня, предположим, что $W^{\cdot}$ — возрастающая фильтрация на комплексе $K^{\cdot}$ в абелевой категории, и положим

$$Z_r^{p,q}=\ker\left(d:W^p\left(K^{p+q}\right)\to K^{p+q+1}/W^{p+r}\left(K^{p+q+1}\right)\right)$$

и

$$B_r^{p,q}=W^{p+1}\left(K^{p+q}\right)+d\left(W^{p-r+1}\left(K^{p+q-1}\right)\right)\subset K^{p+q}.$$

Тогда E_r-член спектральной последовательности для $(K^{\cdot}, W)$ есть $E_r^{p,q}:=Z_r^{p,q}\left(B_r^{p,q}\cap Z_r^{p,q}\right)$. Дифференциал d_r отображает $E_r^{p,q}$ в $E_r^{p+r,q-r-1}$ и индуцирован дифференциалом K, как обычно; когомологии комплекса $(E_r^{\cdot\cdot}, d_r)$ отождествляются с $E_{r+1}^{\cdot\cdot}$.

Стоит отметить элегантную переформулировку этих определений, принадлежащую Эл Зейну [76, § 2.8]. Он показал, что $E_r^{p,q}$ равен

$$E_\infty^{p,q}\left(W^{p-r+1}K/W^{p+r}K\right)=\mathrm{Gr}^p_W H^{p+q}\left(W^{p-r+1}K/W^{p+r}K\right).$$

Это дает явное автодуальное описание соглашений Делиня.

Напомним теперь конструкцию Делиня *сдвинутой фильтрации* Dec(W) («filtration décalée») Положим $\mathrm{Dec}(W)^p/K^n:=$ $:=Z_1^{p+n,-p}$. Тогда, по построению, комплекс $(E_0(\mathrm{Dec}(W)), d_0)$ квазиизоморфен комплексу $(E_1(W)d_1)$. Следовательно, $E_r(\mathrm{Dec}(W))\cong E_{r+1}(W)$ для $r\geqslant 1$ [56, II, предложение 1.3.4].

Теорема 1.5 (Делинь [56, II, теорема 3.2.5.]) (1) Фильтрация W на $H^p(X, \mathbf{C})$ возникает из фильтрации W на $H^p(X, \mathbf{Q})$. Эта фильтрация, так же как и фильтрация F на $H^p(X, \mathbf{C})$ не зависит от выбора компактификации $\overline{X}$ пространства X.

(2) Фильтрации $W[p]$ и F определяют на $H^p(X, \mathbf{Z})$ смешанную структуру Ходжа; эта смешанная структура Ходжа функториальна для алгебраических отображений.

(3) Спектральная последовательность для фильтрации W имеет член E_1 равный ${}_WE_1^{p,q}=H^{2p+q}(\tilde{D}^p, \mathbf{Q})$. Эта спектральная

последовательность вырождается в члене E_2. Спектральная последовательность Лере для $j: X \hookrightarrow \overline{X}$ вырождается в члене E_3.

(4) Спектральная последовательность для фильтрации F,

$$_FE_1^{p,q} = H^q(\overline{X}, \Omega_{\overline{X}}^p(\log D)) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathbf{C})$$

вырождается в члене E_1.

(5) Спектральная последовательность для пучка $\Omega_{\overline{X}}^p(\log D)$, снабженного фильтрацией W, вырождается в члене E_2. Ее E_1-член есть $E_1^{-n,k+n} = H^k(\tilde{D}^n, \Omega_{\tilde{D}^n}^{p-n})$.

(6) Числа Ходжа $h^{p,q}$ смешанной структуры Ходжа на $H^n(X, \mathbf{Z})$ ненулевые лишь при $p \leqslant n$, $q \leqslant n$ и $p+q \geqslant n$.

Заметим, что в (3) спектральная последовательность фильтрованного комплекса $(Rj_*\mathbf{C}, \tau)$ получается «копированием» («décalage») спектральной последовательности Лере.

Доказательство этой теоремы использует ряд средств, одним из которых является классическая теория Ходжа для гладких проективных многообразий $\tilde{D}^n$, другим — теорема о комплексах, снабженных двумя фильтрациями. Эта теорема очень техническая, но и очень важная. Если $K^\cdot$ — комплекс в некоторой абелевой категории, снабженный двумя фильтрациями W и F, члены $E_r(K, W)$ спектральной последовательности для W-фильтрации получают тройную фильтрацию. Для их описания, предположим, что $W^\cdot$ — возрастающая фильтрация,

$$Z_r^{p,q} = \ker(d: W^p(K^{p+q}) \to K^{p+q+1}/W^{p+r}(K^{p+q+1})$$

и

$$B_r^{p,q} = W^{p+1}(K^{p+q}) + d(W^{p-r+1}(K^{p+q-1}) \subset K^{p+q}.$$

(1) Поскольку $E_r^{p,q} = Z_r^{p,q}/(B_r^{p,q} \cap Z_r^{p,q})$, то существует естественная фильтрация на $E_r^{p,q}$ как фактора субобъекта $K^{p+q}/B^{p,q}$ в K^{p+q} фильтрованного с помощью F. Это есть *первая прямая фильтрация*, обозначаемая через F_d.

(2) Поскольку, двойственным образом, $E_r^{p,q} = \ker(K^{p+q}/B_r^{p,q} \to K^{p+q}/(Z_r^{p,q} + B_r^{p,q})$, $E_r^{p,q}$ получает фильтрацию как субобъект фактора $K^{p+q}/B^{p,q}$ в K^{p+q}, фильтрованного F. Это — *вторая прямая фильтрация*, обозначаемая через F_{d^*}.

(3) *Рекурсивная фильтрация* (filtration récurrente) F_r определяется на $E_r^{p,q}$ индукцией по $r \geqslant 0$. Для $r=0, F_r = F_d = F_{d^*}$ на $E_0^{p,q} = H^{p+q}(\mathrm{Gr}_W^p(K))$. На $E_{r+1}^{p,q}$ рекурсивная фильтрация индуцируется фильтрацией $E_{r+1}^{p,q}$ как подфактора $E_r^{p,q}$.

Получается, при этом, что $F_d \subset F_r \subset F_{d^*}$ на $E_r^{p,q}$. Следующий результат дает условия совпадения этих фильтраций.

Теорема 1.6 (Делинь, [56, II, теорема 1.3.16] и [56, III, предложение 7.2.8]). (1) Пусть комплекс K снабжен двумя фильтрациями W и F, причем F разделяющая и исчерпывающая. Пусть r_0 — целое, — такое, что для $0 \leqslant r \leqslant r_0$ дифференциалы комплекса $E_r(K, W)$ строго совместимы с рекурсивной фильтрацией F_r. Тогда для $r \leqslant r_0+1$ три фильтрации F_d, F_{d^*} и F_r совпадают на $E_r^{p,q}$.

(2) Если для любого $r \geqslant 0$ дифференциалы d_r строго совместимы с рекурсивными фильтрациями на $E_r^{p,q}$, то фильтрации F_d, F_{d^*} и F_r совпадают на E_∞ и совпадают с фильтрацией, индуцированной F на подфакторах $\mathrm{Gr}_j^W H^\cdot(K^\cdot)$ в $H^\cdot(K^\cdot)$.

(3) В предположениях (2) спектральная последовательность $E(K, F)$ вырождается в члене E_1 и имеем изоморфизм спектральных последовательностей:

$$\mathrm{Gr}_F^p(E_r(K, W)) \cong E_r(\mathrm{Gr}_F^p K, W).$$

Эта теорема, примененная к бифильтрованному комплексу глобальных сечений бифильтрованного ациклического комплекса пучков над $\bar{X}$, дает резольвенту комплекса $\Omega_{\bar{X}}^\cdot(\log D)$ из теоремы 1.5. Для члена ${}_WE_r^{pq}$ спектральной последовательности для W в гипергомологиях нетрудно видеть, что все три фильтрации совпадают [56, II, теорема 3.2.5].

Теорема 1.5 аксиоматизирована Делинем в понятии *когомологических смешанных комплексов Ходжа*, к определению которых мы и приступаем. Определение использует понятие приведенных категорий, принадлежащее Вердье [27], [88], [190]. Читатель, не знакомый с этим понятием, может представлять себе объект приведенной категории комплексов как комплекс, определенный с точностью до квазиизоморфизма. Например, если $\underline{K}^\cdot$ комплекс пучков над X, комплекс $R\Gamma(X, \mathbf{K}^\cdot)$ определяется как $\Gamma(X, I^\cdot)$ для ациклической резольвенты $I^\cdot$ комплекса $\underline{K}^\cdot$.

Определение 1.7. (1) Пусть A — подкольцо $\mathbf{R}$ такое, что $A \otimes \mathbf{Q}$ — поле. *A-комплекс Ходжа веса m* состоит из следующих объектов:

a) комплекса K_A в приведенной категории комплексов A-модулей, ограниченного снизу, такого, что любой $H^p(K_A)$ — A-модуль конечного типа;

b) ограниченного снизу фильтрованного комплекса $(K_\mathbf{C}, F)$ $\mathbf{C}$-векторных пространств и изоморфизма $\alpha: K_\mathbf{C} \xrightarrow{\sim} K_A \otimes \mathbf{C}$;

При этом, должны быть выполнены условия:

(CH1) Дифференциал d комплекса $K_\mathbf{C}$ строго совместим с F, эквивалентно, спектральная последовательность фильтрованного комплекса $(K_\mathbf{C}, F)$ вырождается в члене E_1;

(CH2) Для любого $p \geqslant 0$ фильтрация F на $H^p(K_{\mathbf{C}}) = H^p(K_A) \otimes \mathbf{C}$ определяет A-структуру Ходжа веса $m+p$;

(2) Пусть X — топологическое пространство. *A-когомологический комплекс Ходжа веса m* на X состоит из следующих объектов:

a) Комплекса K_A в приведенной категории комплексов пучков A-модулей над X, ограниченных снизу;

b) Объекта $(K_{\mathbf{C}}, W)$ в приведенной категории фильтрованных комплексов пучков $\mathbf{C}$-векторных пространств над X, ограниченных снизу;

c) Изоморфизма $\alpha: K_{\mathbf{C}} \xrightarrow{\sim} K_A \otimes \mathbf{C}$ в приведенной категории комплексов пучков над X, ограниченных снизу.

При этом, должна быть выполнена аксиома:

(CHC) Тройка $(R\Gamma(X, K_A), (R\Gamma(X, K_{\mathbf{C}}), F), R\Gamma(X, \alpha)$ есть комплекс Ходжа веса m.

Например, когомологический комплекс Ходжа связан с любым компактным кэлеровым многообразием X. Именно, положим $A = \mathbf{Z}$, $K_{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}$ (постоянный пучок) и пусть $K_{\mathbf{C}}$ — голоморфный комплекс де Рама Ω_X^* с фильтрацией («filtration bête») F. Вместе с включением $\alpha: \mathbf{C} \to K_{\mathbf{C}} = \Omega_X^*$ тройка $(K_{\mathbf{Z}}, (K_{\mathbf{C}}, F), \alpha)$ есть когомологический комплекс Ходжа веса 0.

Определение 1.8. 1) *A-смешанный комплекс Ходжа* сотоит из следующих объектов:

a) Комплекса K_A A-модулей (в приведенной категории), ограниченного снизу, такого, что $H^p(K_A)$ — A-модуль конечного типа при всех p.

b) Фильтрованного комплекса $(K_{A \otimes \mathbf{Q}}, W)$ $A \otimes \mathbf{Q}$-векторных пространств, ограниченного снизу, и изоморфизма $K_{A \otimes \mathbf{Q}} \xrightarrow{\sim} K_A \otimes \mathbf{Q}$ в приведенной категории;

c) Бифильтрованного комплекса $(K_{\mathbf{C}}, W, F)$ $\mathbf{C}$-векторных пространств и фильтрованного изоморфизма $\alpha: (K_{\mathbf{C}}, W) \xrightarrow{\sim} (K_{A \otimes \mathbf{Q}}, W) \otimes \mathbf{C}$ в фильтрованной приведенной категории.

При этом, должна быть выполнена аксиома:

(CHM) Для любого n тройка $(\mathrm{Gr}_n^W(K_{A \otimes \mathbf{Q}}), \mathrm{Gr}_n^W(K_{\mathbf{C}}), \mathrm{Gr}_n^W(\alpha))$ есть $A \otimes \mathbf{Q}$-комплекс Ходжа веса n.

(2) *A-когомологический смешанный комплекс Ходжа на пространстве X* определяется заданием

a) Комплекса K_A пучков A-модулей над X, ограниченного снизу, и такого, что когомологические группы $H^p(X, K_A)$ есть A-модули конечного типа и отображение

$$H^*(X, K_A) \otimes \mathbf{Q} \to H^*(X, K_A \otimes \mathbf{Q})$$

— изоморфизм;

b) Фильтрованного комплекса $(K_{A \otimes \mathbf{Q}}, W)$ пучков $A \otimes \mathbf{Q}$-модулей, ограниченного снизу (где W — возрастающая фильтрация), и изоморфизма $K_{A \otimes \mathbf{Q}} \xrightarrow{\sim} K_A \otimes \mathbf{Q}$ в приведенной категории;

с) Бифильтрованного комплекса $(K_{\mathbf{C}}, W, F)$ пучков $\mathbf{C}$-векторных пространств над $X^{\cdot}$ (с убывающей F и возрастающей W), ограниченного снизу, и изоморфизма $\alpha:(K_{\mathbf{C}}, W)\rightrightarrows(K_{A\otimes\mathbf{Q}}, W)\otimes\mathbf{C}$ в фильтрованной приведенной категории.

При этом, должна быть выполнена аксиома:

(CHMC) для всех n тройка $(\mathrm{Gr}_n^W(K_{A\otimes\mathbf{Q}}), \mathrm{Gr}_n^W(K_{\mathbf{C}}), \mathrm{Gr}_n^W(\alpha))$ есть $A\otimes\mathbf{Q}$-когомологический комплекс Ходжа веса n.

Легко видеть, что если $(K_A, (K_{A\times\mathbf{Q}}, W), (K_{\mathbf{C}}, W, F))$ — когомологический смешанный крмплекс Ходжа над $X^{\cdot}$, то тройка

$$(R\Gamma(X^{\cdot}, K_A), R\Gamma(X^{\cdot}, (K_{A\otimes\mathbf{Q}}, W)), R\Gamma(X^{\cdot}, (K_{\mathbf{C}}, W, F))$$

есть A-смешанный комплекс Ходжа.

Основная теорема в [56, II] (теорема 1.5) теперь может быть переформулирована следующим образом:

Теорема 1.9 ([56, 8.18]). Пусть $\overline{X}$ — гладкое проективное многообразие над $\mathbf{C}$ и $D\subset\overline{X}$ — дивизор с нормальными пересечениями. Пусть $X=\overline{X}-D$. Обозначим через j — включение $X\hookrightarrow\overline{X}$. Пусть W — каноническая фильтрация $W_nRj_*\mathbf{Q}=\tau_{\leqslant n}Rj_*\mathbf{Q}$ на $Rj_*\mathbf{Q}$. Пусть log комплекс $\Omega^{\cdot}_{\overline{X}}(\log D)$ снабжен фильтрациями W и F. Изоморфизм α в приведенной категории $\Omega^{\cdot}_{\overline{X}}(\log D)\rightrightarrows Rj_*\Omega^{\cdot}_X\cong Rj_*\mathbf{C}=(Rj_*\mathbf{Q})\otimes\mathbf{C}$ есть фильтрованный изоморфизм в приведенной категории.

Тогда тройка $(Rj_*\mathbf{Z}, (Rj_*\mathbf{Q}, W), (\Omega^{\cdot}_{\overline{X}}(\log D, W, F))$ есть $\mathbf{Z}$-когомологический комплекс Ходжа на $\overline{X}$.

Следующая теорема показывает, что условия, определяющие смешанный комплекс Ходжа, имеют сильные следствия.

Теорема 1.10 (Делинь, [56, III; 8.1.9]. Пусть K — смешанный комплекс Ходжа.

(1) На члене ${}_WE_r^{p,q}$ спектральной последовательности для $(K_{\mathbf{C}}, W)$ две прямые и рекурсивная фильтрации, определяемые F, совпадают;

(2) Фильтрация $W[n]$ на $H^n(K_{A\otimes\mathbf{Q}})=H^n(K_A)\otimes\mathbf{Q}$ и фильтрация F на $H^n(K_{\mathbf{C}})=H^n(K_A)\otimes\mathbf{C}$ определяют A-смешанную структуру Ходжа на $H^n(K_A)$;

(3) Дифференциалы ${}_Wd_1$ для ${}_WE_1^{p,q}$ сохраняют биградуировку Ходжа;

(4) Спектральная последовательность для $(K_{\mathbf{C}}, F)$ вырождается в члене E_1;

(5) Спектральная последовательность для $(K_{A\otimes\mathbf{Q}}, W)$ вырождается в члене E_2;

(6) Спектральная последовательность для $(\mathrm{Gr}_F^p(K_{\mathbf{C}}), W)$ вырождается в члене E_2.

Общая конструкция Делиня смешанных структур Ходжа на $H^p(X, \mathbf{Z})$ для отделимой схемы X над $\mathbf{C}$ основана на существовании гладкой симплициальной схемы $X_\cdot=(X_n)_n$ над $\mathbf{C}$ вместе с аугментацией $a: X_\cdot \to X$ и хорошей компактификацией $X_\cdot \hookrightarrow \overline{X}_\cdot$. Симплициальное пространство $X_\cdot$ должно быть «собственным гипернакрытием» X, то есть должно удовлетворять следующему условию: для любого $n \geqslant -1$ естественное отображение $X_{n+1} \to \operatorname{cosq}_n^X(\operatorname{sg}_n X_\cdot)$ собственно и сюръективно, где $\operatorname{sq}_n X_\cdot$ — n-остов $X_\cdot$ — n-усеченное аугментированное симплициальное пространство, и cosq_n^X «коостовный функтор» из n-усеченных аугментированных симплициальных пространств в аугментированное симплициальные пространства (этот функтор сопряжен справа функтору остова $\operatorname{sq}_n=\operatorname{sq}_n^X$ для аугментированных симплициальных пространств, см. [171]). Значение этого условия состоит в том, что оно предполагает, что a есть «универсальное когомологическое опускание», в частности $H^*(X, \mathbf{Z}) \cong H^*(X_\cdot, \mathbf{Z})$.

Поэтому нам нужно подходящее определение A-смешанных комплексов Ходжа для косимплициальных комплексов или для ДГ (дифференциальных градуированных) комплексов. ДГ комплекс есть комплекс комплексов, или, эквивалентно, двойной комплекс, первая степень которого — комплекс, вторая — ДГ объекты.

Приведем пример такой симплициальной схемы X_n. Для алгебраической кривой X над $\mathbf{C}$ пусть $\pi: X_0 \to X$ — ее нормализация, пусть далее, $g: X' \to X$ — кривая, гомеоморфная X, получаемая стягиванием каждого конечного подмножества $\pi^{-1}(s)$ в X_0 в точку (регулярными функциями на X' являются регулярные функции на X, принимающие одно и то же значение на слое $\pi^{-1}(x)$. Положим $X_1 = X_0 \times_{X'} X_0$, $X_2 = X_0 \times_{X} X_0 \times_{X'} X_0$ и т. д.

Фасадные отображения являются естественными проекциями, отображения вырождения получаются из диагонального включения $X_0 \hookrightarrow X_1 = X_0 \times_X X_0$. Далее, каждое X_n гладко, поскольку оно есть дизъюнктное объеденение X_0 и конечного множества точек. $X_\cdot$, следовательно, определяет собственное гипернакрытие X. Пусть $X_n \hookrightarrow \overline{X}_n$ — естественная гладкая компактификация (заметим, что каждая компонента X_n имеет размерность 0 или 1). Тогда мы получаем гладкую собственную симплициальную схему $\overline{X}_\cdot$.

Определение 1.11. *А-ДГ смешанный комплекс Ходжа* состоит из

(1) Комплекса K_A в приведенной категории комплексов, ограниченного снизу, ограниченных снизу ДГ A-модулей (то есть K_A — двойной комплекс, ограниченный снизу в вертикальном и горизонтальном направлениях);

(2) Фильтрованного комплекса $(K_{A\otimes\mathbf{Q}}, W)$ ДГ $(A\otimes\mathbf{Q})$-векторных пространств и изоморфизма $K_A\otimes\mathbf{Q}\xrightarrow{\sim}K_{A\otimes\mathbf{Q}}$;

(3) Бифильтрованного комплекса $(K_{\mathbf{C}}, W, F)$ ДГ $\mathbf{C}$-векторных пространств с фильтрованным квазиизоморфизмом

$$(K_{A\otimes\mathbf{Q}}, W)\otimes\mathbf{C}\xrightarrow{\sim}(K_{\mathbf{C}}, W).$$

При этом, должно быть выполнено условие:

Для любого n тройка $\left(K^n_A, \left(K^n_{A\otimes\mathbf{Q}}, W\right), \left(K^n_{\mathbf{C}}, W, F\right)\right)$ есть A-смешанный комплекс Ходжа.

Предложение 1.12 (Делинь [56, II, 8. 1.19). Пусть $X_\cdot\hookrightarrow\overline{X}_\cdot$ — хорошая компактификация гладкого симплициального многообразия $X_\cdot$, такая, что $D_n=\overline{X}_n-X_n$ — дивизор с нормальными пересечениями. Положим $K^n_{\mathbf{Z}}:=R\Gamma(\overline{X}_n, Rj_*\mathbf{Z})$ с обычным дифференциалом, индуцированным симплициальной структурой. Пусть $K^n_{\mathbf{Q}}:=R\Gamma(\overline{X}_n, Rj_*\mathbf{Q})$ с фильтрацией $W_k=\tau_{<k}$. Пусть $K^n_{\mathbf{C}}:=R\Gamma(\overline{X}_n, \Omega^\cdot_{\overline{X}_n}(\log(D_n))$ с обычными фильтрациями W и F. Тогда $(K^\cdot_{\mathbf{Z}}, (K^\cdot_{\mathbf{Q}}, W), (K^\cdot_{\mathbf{C}}, W, F))$ есть Z-ДГ смешанный комплекс Ходжа.

Для A-ДГ смешанного комплекса Ходжа $K^\cdot$ пусть $sK^\cdot$ — ассоциированный простой комплекс. Фильтрация L получается фильтрацией по ДГ степеням. Диагональная фильтрация $\delta(W, L)$ на $sK^\cdot$ определяется как

$$\delta(W, L)_n(sK^\cdot)=\bigoplus_{p,q}W_{n+p}(K^{p,q}).$$

Пусть $\mathrm{Dec}_1 W$ — фильтрация индуцированная «копированием» («décalage») фильтрации W на $K^\cdot_{A\otimes\mathbf{Q}}$. Следующая теорема показывает, что ассоциированный простой комплекс ДГ смешанного комплекса Ходжа есть A-смешанный комплекс Ходжа.

Предложение 1.13 ([56, III, теорема 8.1.15]). Пусть $K^\cdot$ A-ДГ смешанный комплекс Ходжа.

(1) Ассоциированный простой комплекс с фильтрациями $\delta(W, L)$ и F есть A-смешанный комплекс Ходжа;

(2) E_1-член $E_1^{a,b}$ спектральной последовательности для $(sK\otimes\mathbf{Q}, \delta(W, L))$ изоморфен $\sum\limits_{a=\gamma-\beta, b=\alpha+\beta} H^\alpha(\mathrm{Gr}^W_\beta K^{\cdot,\gamma})$. d_1-дифференциал есть сумма связывающего гомоморфизм $H^\alpha(\mathrm{Gr}^W_\beta K^{\cdot,\gamma})\to$ $\to H^{\alpha+1}(\mathrm{Gr}^W_{\beta-1}, K^{\cdot,\gamma})$ и симплициального дифференциала $H^\alpha(\mathrm{Gr}^W_\beta K^{\cdot,\gamma})\to H^\alpha(\mathrm{Gr}^W_\beta K^{\cdot,\gamma+1})$;

(3) На ${}_LE_r$-членах спектральной последовательности, определяемой $(sK^\cdot, L)$ две прямые и рекурсивная фильтрации, определяемые $\mathrm{Dec}_1(W)$, совпадают; это же верно и для трех фильтраций, определяемых F. Эти фильтрации обозначаются через W и F;

(4) Для любого $r \geqslant 1$, $({}_iE_r, W, F)$ есть A-смешанная структура Ходжа. Дифференциалы d_r являются морфизмами смешанных структур Ходжа.

Применяя это теорему к геометрической ситуации предложения 1.12, Делинь доказал, что справедлива

Теорема 1.14. В условиях предложения 1.12. имеем:

(1) Существует естественная смешанная структура Ходжа на $H^*(\mathcal{X}_{\cdot}, \mathbf{Z})$, функториальная для пары $(X_{\cdot}, \bar{\mathcal{X}}_{\cdot})$.

(2) В рациональных когомологиях спектральная последовательность для $(sK^{\cdot}\otimes\mathbf{Q}, \delta(W, L)$ имеет член E_1, равный

$$E_1^{-a,b} = \bigoplus_{p+2r=b,\, q-r=a} H^p(\tilde{D}_q{}^r, \mathbf{Z}).$$

Спектральная последовательность вырождается в члене E_2.

(3) Для чисел Ходжа $h^{p,q}$ имеем: $h^{p,q} \neq 0 \Rightarrow 0 \leqslant p, q \leqslant n$.

(4) Если $D_{\cdot} = \varnothing$, то $h^{p,q} \neq 0 \Rightarrow 0 \leqslant p, q \leqslant n$ и $p+q \leqslant n$.

Следовательно, поскольку для когомологических целей любая отделимая схема над $\mathbf{C}$ может быть заменена на гладкую симплициальную, Делинь доказал, что справедлива

Теорема 1.15 ([56, III, § 8.2]). (1) Существует функториальная смешанная структура Ходжа на $H^n(X, \mathbf{C})$ для отделимой схемы X над $\mathbf{C}$. Изоморфизм Кюннета и чашечное умножение есть морфизмы смешанной структуры Ходжа;

(2) Если числа Ходжа $h^{p,q}$ для $H^n(X, \mathbf{Z})$ не нулевые, то $0 \leqslant p, q \leqslant n$. Если $N = \dim X$ и $n \geqslant N$, то имеют место более точные неравенства $n - N \leqslant p, q \leqslant N$. Если X собственная, то $p+q \leqslant n$. С другой стороны, если X гладкая, то $p+q \geqslant n$.

С другой стороны, Эл Зейном в [73] был найден другой метод построения смешанной структуры Ходжа на $H^n(Y, \mathbf{Z})$ типа Делиня, не использующий симплициальных методов, а основанный на его технике «смешанного конуса». Пусть Y — замкнутое подмногообразие гладкого алгебраического многообразия X. Пусть $p: X' \to X$, где X' гладкое,— собственный бирациональный морфизм, такой, что p — изоморфизм вне Y и $Y' = p^{-1}(Y)$ — дивизор с нормальными пересечениями. Тогда имеет место точная последовательность в категории смешанных структур Ходжа [73, I]:

$$0 \to H^n(X', \mathbf{Q}) \to H^n(Y', \mathbf{Q}) \oplus H^n(X, \mathbf{Q}) \to H^n(Y, \mathbf{Q}) \to 0.$$

Она означает, что $H^n(Y, \mathbf{Q})$ с ее смешанной структурой Ходжа выражается через когомологии многообразий лишь с нормальными пересечениями особенностей. Эл Зейн построил когомологический комплекс Ходжа, основываясь на этой геометрической конструкции.

Делинь [56] доказал следующий результат на основе анализа весов.

Теорема 1.16 ([56, III, § 8.2]. (1) Пусть $f: Y \to X$ — собственный сюръективный алгебраический морфизм, X собственна и Y гладка. Тогда верхний весовой фактор $\mathrm{Gr}_n^W H^n(X, \mathbf{Q})$ у $H^n(X, \mathbf{Q})$ можно отождествить с образом $H^n(X, \mathbf{Q})$) в $H^n(Y, \mathbf{Q})$. Эквивалентно, ядро $f^*: H^n(X, \mathbf{Q}) \to H^n(Y, \mathbf{Q})$ равно $W_{n-1}H^n(X, \mathbf{Q})$. Последовательность

$$H^n(X, \mathbf{Q}) \to H^n(Y, \mathbf{Q}) \xrightarrow{p_1^* - p_2^*} H^n(Y \times_X Y, \mathbf{Q})$$

— точная.

(2) В диаграмме схем

$$\tilde{X} \xrightarrow{\pi} X \xrightarrow{f} Y$$

пусть Y гладка, X собственна, $\tilde{X}$ гладка и собственна, и π сюръективно. Тогда ядро f^* и ядро $(f\pi)^*$ совпадают вне $H^*(Y, \mathbf{Q})$.

В работе Делиня [56, III, § 10] было проведено детальное изучение H^1 для алгебраической кривой. Он описал ее в терминах «1-мотива», это понятие показало свою важность в теории компактификации пространств модулей кривых, абелевых многообразий и К3 поверхностей, а также в теории чисел [187].

Более общо, Делинь определил смешанную структуру Ходжа на когомологиях произвольной отделимой симплициальной схемы.

Теорема 1.17 ([56, III, § 8.3]). Когомологии отделимой симплициальной схемы $X.$ допускают естественную смешанную структуру Ходжа. Спектральная последовательность $E_1^{p,q} = H^q(X_p, \mathbf{Z}) \Rightarrow H^{p+q}(X_., \mathbf{Z})$ есть спектральная последовательность в категории смешанных структур Ходжа.

В частности, для классифицирующего пространства B_G линейной алгебраической группы G (гладкой симплициальной схемы), нечетномерные рациональные когомологии равны нулю и $H^{2n}(B_G, \mathbf{Q})$ имеет чистый тип (n, n) [56, III, теорема 9.1.1].

Делинь установил также, что (см. [56, III, предложение 9.3.1]) для квазипроективного многообразия X над $\mathbf{C}$ существует «комплекс дифференциальных операторов порядка 1» $K^\cdot$ на X (то есть каждый K^n есть когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль и $d: K^n \to K^{n+1}$ — дифференциальный оператор порядка 1), являющийся резольвентой постоянного пучка $\mathbf{C}_X$. Делинь вывел из существования такого комплекса, что естественное отображение $H^\cdot(X, \mathbf{C}) \to H^\cdot(X, \Omega_X^\cdot)$ инъективно и расщепляется естественным образом. Это утверждение было впервые доказано Блумом и Херерой [25].

Комплекс $K^\cdot$ определим как $sR\varepsilon_* \Omega_{X.}^\cdot$ для собственного гипернакрытия $\varepsilon: X. \to X$. Существует естественное отображение $\Omega_X^\cdot \to K^\cdot$. Комплекс $K^\cdot$ обладает свойством: для собствен-

ной $X^{\cdot}$ спектральная последовательность для фильтрации F вырождается в члене E_1.

Дю Буа [64] обобщил конструкцию $K^{\cdot}$ на случай отделимых схем $X^{\cdot}$ над $\mathbf{C}$. Он ввел приведенную категорию $D_{\mathrm{diff}}(X)$ комплексов дифференциальных операторов на X и показал, что в $D_{\mathrm{diff}}(X^{\cdot})$ комплекс $K^{\cdot}$ не зависит от выбора собственного гипернакрытия. Он обозначал этот комплекс через $\underline{\Omega}_X^{\cdot}$. Для морфизма отделимых схем $f: X \to S$ существует естественное отображение $\underline{\Omega}_S^{\cdot} \to Rf_* \underline{\Omega}_X^{\cdot}$. Существует также версия $\underline{\Omega}_S^{\cdot}(\log \overline{S} - S)$ для $\Omega_S^{\cdot}$ с логарифмическими особенностями, которая есть комплекс пучков над компактификацией $\overline{S}$ схемы S.

Для ряда интересных примеров Дю Буа нашел комплекс $\underline{\Omega}_X^{\cdot}$. Например, если $X^{\cdot}$ имеет особенности с нормальными пересечениями, пусть $X_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} X$ — нормализация X и $X_1 = X_0 \times_X X_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} X$, тогда $\underline{\Omega}_X^p = \ker\left(\varepsilon_{0*}\Omega_{X_0}^p \to \varepsilon_{1*}\Omega_{X_1}^p\right)$.

Если X — кривая, то пусть $\pi: X_0 \to X$ ее нормализация и $g: X' \to X$ — кривая, гомеоморфная X, получаемая стягиванием каждого конечного подмножества $\pi^{-1}(s)$ в X_0 в точку. Тогда $\underline{\Omega}_X^{\cdot}$ изоморфен комплексу $0 \to g_* \mathcal{O}_{X'} \to \pi_* \Omega_{X_0}^1 \to 0$.

Следует отметить, что комплексы типа $\Omega_{\overline{X}}^{\cdot}(\log D)$ и комплексы Делиня—Дю Буа (с логарифмическими особенностями) могут быть определены в топологии Зарисского и в соответствие с теоремой GAGA Серра [169], гиперкогомологии комплекса Зарисского совпадают с комплексно-аналитическими гиперкогомологиями.

С другой стороны, конструкция Делиня работает равным образом для кэлеровых многообразий, если рассматривать только кэлеровы многообразия, допускающие кэлерову компактификацию; так что, например, получаем смешанную структуру Ходжа на когомологиях гладких симплициальных кэлеровых многообразий.

Теория Делиня [56], так же как и трактовка Эл Зейна [73], дает также смешанную структуру Ходжа на когомологиях с компактными носителями и на когомологиях Бореля—Мура. Совсем недавно теория Ходжа—Делиня была переформулирована и обобщена Наварро Азнаром [135] на гомотопические группы алгебраических многообразий. Делинем были также получены аналогичные результаты. Одним из основных средств [135] является конструкция функтора прямого образа для приведенной категории пучков ДГ-$\mathbf{Q}$-алгебр. См. теорему 2.25 отражающую результаты Наварро Азнара о смешанных структурах Ходжа для исчезающих циклов.

§ 2. Вырождение структур Ходжа

Начнем с понятия *поляризованной вариации A-структуры Ходжа*, для подкольца A в $\mathbf{R}$. Это понятие введено Гриффитсом [91] и Делинем [55]. Напомним, что для локальной системы $\mathbf{V}_{\mathbf{C}}$ комплексных векторных пространств над комплексным многообразием X соответствующее голоморфное векторное расслоение $\mathcal{V}:=\mathcal{O}_X\otimes\mathbf{V}_{\mathbf{C}}$ допускает интегрируемую связность ∇ с пространством $\mathbf{V}_{\mathbf{C}}$ горизонтальных сечений.

Определение 2.1 ([55], [91]). Пусть A — подкольцо $\mathbf{R}$ и X — комплесное многообразие. *Поляризованная вариация A-структуры Ходжа веса m* над X определена заданием локальной системы $\mathbf{V}_A$ над X A-модулей конечного типа вместе со следующими объектами:

(1) Убывающей фильтрацией $\ldots\mathcal{F}^{p+1}\subset\mathcal{F}^p\subset\ldots$ голоморфных векторных расслоений как голоморфных подрасслоений $\mathcal{V}=\mathcal{O}_X\otimes\mathbf{V}_A$;

(2) Плоской билинейной формой $S:\mathbf{V}_A\times\mathbf{V}_A\to A(-m)$, удовлетворяющей условиям:

(a) $\nabla(\mathcal{F}^p)\subset\Omega^1_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}^{p-1}$ (*условие трансверсальности Гриффитса*);

(b) для любого $x\in X$ A-модуль $\mathbf{V}_{A,x}$ с фильтрацией F_x^p индуцированной $\mathcal{F}^p$ и билинейной формой S_x есть поляризованная структура Ходжа веса m.

Типичная геометрическая ситуация, в которой возникают такие объекты, происходит из гладкого проективного морфизма $f:Y\to X$ алгебраических квазипроективных многообразий над $\mathbf{C}$. Обозначим через Y_x слой $f^{-1}(x)$. Для любого $m\geqslant 0$ пусть $\mathcal{P}^m_{\mathbf{Z}}\subset R^mf_*\mathbf{Z}$ состоит из примитивных когомологических классов слоев f. Пусть $\mathcal{F}^p_x=\bigoplus\limits_{j\geqslant p}P^{j,m-j}(Y_x)$ определяет подрасслоение $\mathcal{F}^p$; оно голоморфно, поскольку может быть описано с помощью $R^mf_*F^p\Omega^\cdot_{Y/X}$, где подкомплекс $F^p\Omega^\cdot_{Y/X}$ комплекса $\Omega^\cdot_{Y/X}$ описан в (1.1). Существует естественная билинейная форма S, определенная в § 1 и мы получаем $\mathbf{Z}$-поляризованную вариацию структуры Ходжа.

Если выбрать базовую точку x в X, то вариация структуры Ходжа $\mathbf{V}$ приводит к голоморфному отображению $\Phi:X\to M/\Gamma$, где M — подходящее классифицирующее пространство поляризованных структур Ходжа на слое $\mathbf{V}_x$ и Γ — группа монодромии, действующая на M как подгруппа группы Ли G автоморфизмов $(\mathbf{V}_{\mathbf{R}},S)$. Φ называется *отображением периодов по Гриффитсу*. Более точно, пусть $\rho:\pi_1(X,x)\to\mathrm{GL}(\mathbf{V}_{\mathbf{R},x})$ — гомоморфизм монодромии. Положим $\Gamma=\mathrm{im}\,\rho$. Тогда для универсальной накрывающей $\widetilde{X}$ пространства X, Φ допускает поднятие $\widetilde{\Phi}:\widetilde{X}\to M$ такое, что $\widetilde{\Phi}(\gamma z)=\rho(\gamma)\widetilde{\Phi}(z)$ [89, III].

Нам необходимо сказать большее о классифицирующем пространстве M поляризованных вещественных структур Ходжа веса m с числами Ходжа $h^{p,q}$. Зафиксируем вещественное векторное пространство V и $(-1)^m$-симметричную билинейную форму S на V. M является открытым подмножеством флагового многообразия $\hat{M}$ (для ортогональной группы относительно S), состоящего из убывающих фильтраций $\ldots \subset F^{p+1} \subset F^p \subset \ldots$ пространства $V_{\mathbf{C}}$, таких, что

(1) $\dim \mathrm{Gr}_F^p V_{\mathbf{C}} = h^{p, m-p}$;

(2) пространство, ортогональное F^p (относительно S) есть F^{m+1-p}.

Комплексная полупростая группа Ли $G_{\mathbf{C}}$ автоморфизмов $(V_{\mathbf{C}}, S)$ действует транзитивно на $\hat{M}$, группой изотропии которой является параболическая подгруппа B. Само M есть орбита вещественной группы $G = G_{\mathbf{R}}$ с компактной группой изотропии $K = G \cap B$. Пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$, $\mathfrak{b}$ — алгебры Ли групп $G_{\mathbf{C}}$, $G_{\mathbf{R}}$ и B соответственно. Любая F в $\hat{M}$ определяет фильтрацию, обозначаемую снова через F, для $\mathrm{End}(V) = V^* \otimes V$ и $\mathfrak{g}$ с $F^0(\mathfrak{g}) = \mathfrak{b}$. *Горизонтальное подрасслоение* $T_h\hat{M}$ касательного расслоения $T\hat{M}$ имеет слой в F равный $F^{-1}(\mathfrak{g})/\mathfrak{b} \subset \mathfrak{g}/\mathfrak{b} = T_F(\hat{M})$. Это подрасслоение, очевидно, $G_{\mathbf{C}}$-эквивариантно. Условие трансверсальности Гриффитса означает, что $\tilde{\Phi}: \tilde{X} \to M$ горизонтально, т. е. $d\tilde{\Phi}$ принимает значения в $T_h\hat{M}$.

При $F \in M$, определенная выше фильтрация на $\mathfrak{g}$ вместе с формой Киллинга на $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}$ определяет поляризованную структуру Ходжа. Эрмитова форма, индуцированная на $\mathfrak{b}^{\perp} \cong T_F M$ поляризацией дает эрмитому метрику на M, которая кэлерова.

Следующий важный результат был впервые доказан Ландманом [119] и Клеменсом [50] для геометрических вариаций структуры Ходжа и Борелем — в общем случае.

Предложение 2.3 (Борель [55], [167]). Пусть $V_{\mathbf{Z}}$ — $\mathbf{Z}$-поляризованная вариация ходжевой структуры над комплексным многообразием X. Предположим, что существует открытое вложение $X \hookrightarrow \bar{X}$, где $D := \bar{X} - X$ — дивизор с нормальными пересечениями. Тогда монодромия $V_{\mathbf{Z}}$ для каждой локальной компоненты D квазиунипотентна, то есть ее собственные значения суть корни из единицы.

В основном, в этом параграфе будет рассматриваться теория вырождений структур Ходжа в локальном смысле. В геометрической ситуации гладкий проективный морфизм $f: Y \to X$ вырождается над D — границей некоторой (частной) компактификации $X \hookrightarrow \bar{X}$. Это означает, что невозможно продолжить f до гладкого семейства над $\bar{X}$. Имея дело с этой ситуацией, нужно продолжать f некоторым образом до проективного морфизма $\bar{f}: \bar{Y} \to \bar{X}$ и использовать разрешение особенностей для просле-

живания особенностей слоев над D. В случае, когда X имеет размерность 1, эти методы весьма успешны. В случае, когда размерность X больше единицы, проследить особенности становится весьма проблематичным.

В обоих случаях представляет большой интерес изучение вырождения семейства таким образом, что оно не зависит от выбора конкретного расширения f на X. Теория вырождений структур Ходжа не зависит от геометрических предположений и дает информацию об асимптотическом поведении структур Ходжа на когомологиях слоев, и, следовательно, дает конкретную информацию о поведении отображения периодов.

Теорема о нильпотентной орбите, принадлежащая Шмиду, применима в общей ситуации вещественной поляризованной вариации структуры Ходжа с квазиунипотентной монодромией (согласно теореме Бореля, этот случай содержит и $\mathbf{Z}$-вариации). Эта теорема локальна для $D=\bar{X}—X$, так что можно считать, что X — произведение дисков Δ и пунктированных дисков Δ^*, скажем, $X=(\Delta^*)^n\times\Delta^k\subset\bar{X}=\Delta^{n+k}$. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — преобразования монодромии, действующие на $\mathbf{V}$. Поскольку каждое γ_i квазиунипотентно, существуют нильпотентные преобразования N_i — *логарифмы монодромии*, и положительные целые $l_1, \ldots, l_n$, такие, что

$$\gamma_j^{l_j}=\exp(N_j).$$

Универсальное накрывающее пространство для $(\Delta^*)^n\times\Delta^k$ есть $H^n\times\Delta^k$, где $H=\{z\in\mathbf{C}\mid \operatorname{Im} z>0\}$ — верхняя полуплоскость. Пусть $(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ — координаты на накрывающем пространстве $\mathbf{z}=(z_1, \ldots, z_n)$ и $\mathbf{w}=(w_1, \ldots, w_k)$. Положим $s_i=e^{z_i}$ $\mathbf{s}=(s_1, \ldots, s_n)$. Тогда $(\mathbf{s}, \mathbf{w})$ — координаты на $(\Delta^*)^n\times\Delta^k$. Тогда отображение $\tilde{\Phi}$ удовлетворяет условию $\tilde{\Phi}(\mathbf{z}+l_j\varepsilon_j, \mathbf{w})=$ $=\gamma_j^{l_j}\tilde{\Phi}(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ для ε_j — j-того элемента стандартного базиса пространства $\mathbf{C}^n$.

Определим сначала понятие *нильпотентной орбиты*.

Определение 2.3. *Нильпотентной орбитой* называется голоморфное отображение $\theta:\mathbf{C}^n\to\hat{M}$ вида

$$\theta(\mathbf{z})=\exp(\Sigma z_jN_j)\cdot F,$$

где

(1) $F\in\hat{M}$;

(2) $\{N_j\}_{j=1}^{n}$ — множество коммутирующих нильпотентных элементов $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}}\cap F^{-1}\mathfrak{g}$ (следовательно, θ — горизонтальное отображение);

(3) Существует $\alpha\in\mathbf{R}$ такое, что $\theta(z)\in M$ при $\operatorname{Im} z_j>\alpha$.

В рассматриваемой ситуации, исходя из поднятия $\tilde{\Phi}:H^n\times\times\Delta^k\to M$ отображения периодов, можно построить отображение

$$\tilde{\psi}(\mathbf{z}, \mathbf{w}) := \exp(-\Sigma z_j N_j)\cdot\tilde{\Phi}(\mathbf{l}\cdot\mathbf{z}, \mathbf{w})$$

для $\mathbf{l}=(l_1, \ldots, l_n)$.

Это однозначное отображение пропускается через голоморфное отображение $\psi:(\Delta^*)^n\times\Delta^k\to\widehat{M}$.

Теорема 2.4 (*Теорема Шмида о нильпотентной орбите* [167, теорема 4.12]). Пусть $\psi:(\Delta^*)^n\times\Delta^k\to\widehat{M}$ определено выше. Тогда

(1) ψ продолжается голоморфно на Δ^{n+k};

(2) Пусть $F(\mathbf{w})=\psi(0, \mathbf{w})$ и $\theta_{\mathbf{w}}(\mathbf{z})=\exp(\Sigma z_j N_j)F(\mathbf{w})$. Тогда для любого $\mathbf{w}\in\Delta^k$, $\mathbf{z}\mapsto\theta_{\mathbf{w}}(\mathbf{z})$ — нильпотентная орбита. Более того, для любого G-инвариантного расстояния d на M существуют неотрицательные постоянные α, β и K такие, что при $\operatorname{Im} z_j>\alpha$ $\theta_{\mathbf{w}}(\mathbf{z})\in M$ и

$$d(\tilde{\Phi}(\mathbf{z}, \mathbf{w}), \theta_{\mathbf{w}}(\mathbf{z}))\leqslant K\sum_{j=1}^{n}(\operatorname{Im} z_j)^{\beta}e^{-2\pi l_j^{-1}\operatorname{Im} z_j}.$$

Постоянные α, β, K зависят только от пространства модулей M через числа Ходжа и вес и индексы унипотентности $l_1, \ldots, l_n$.

Замечание 2.5. Оценка расстояния, приведенная здесь, принадлежит Делиню и более точная, чем оценка, данная в [167]; она доказана в [41, § 1].

В размерности единица теорема о нильпотентной орбите для отображений периодов геометрической природы эквивалентна регулярности связности Гаусса—Манина [93]. В произвольной размерности теорема о нильпотентной орбите дает регулярность этой связности.

Поскольку теорема о нильпотентной орбите утверждает, что вблизи точек D поляризованная вариация структуры Ходжа может быть как угодно точно аппроксимирована нильпотентной орбитой, изучение нильпотентных орбит имеет первостепенную важность для изучения вырождения смешанных структур Ходжа. Это достигается с помощью теоремы об SL(2)-орбите, принадлежащей Шмиду [167] в одномерном случае, и Каттани—Каплану—Шмиду — в многомерном [42].

Прежде чем обсудить теорему об SL(2)-орбите, рассмотрим расщепление смешанной структуры Ходжа. Пусть (V, W, F) — смешанная структура Ходжа над $\mathbf{R}$ (так что V — вещественное векторное пространство). *Расщеплением смешанной структуры Ходжа* (V, W, F) называется биградуировка

$$V_{\mathbf{C}}=\sum V^{p,q}$$

такая, что $W_l=\sum_{p+q\leqslant l} V^{p,q}$ и $F^p=\sum_{r\geqslant p} V^{r,s}$. Делинем было построено расщепление каноническое произвольной смешанной структуры Ходжа.

Определение и предложение 2.6 (Делинь, см. [131] и [41]). Для смешанной структуры Ходжа (V, W, F) над $\mathbf{R}$ положим

$$I^{p,q}=F^p\cap W_{p+q}\cap((\overline{F}^q\cap W_{p+q})+\overline{U}^{q-1}_{p+q-2}),$$

где $U_b{}^a=\sum_{j\geqslant 0} F^{a-j}\cap W_{b-j}$.

(i) $(I^{p,q})_{p,q}$ — есть функториальное расщепление (V, W, F), удовлетворяющее условию

$$I^{p,q}\equiv\overline{I}^{q,p}\ (\mathrm{mod}\bigoplus_{r<p,s<q} I^{r,s}). \tag{2.1}$$

Более того, это — единственное расщепление, для которого справедливо (2.1).

(ii) Это естественное расщепление устанавливает эквивалентность категории смешанных структур Ходжа над $\mathbf{R}$ и категории $\mathbf{R}$-векторных пространств V с биградуировкой $V_{\mathbf{C}}=\sum_{p,q} I^{p,q}$, удовлетворяющей (2.1).

Говорят, что смешанная структура Ходжа *расщепляется* над $\mathbf{R}$, если она допускает расщепление $(J^{p,q})_{p,q}$, такое, что $J^{p,q}=\overline{J^{q,p}}$. Из предложения 2.6 следует, что такое расщепление, если оно существует, единственно и задается как $J^{p,q}=F^p\cap\overline{F}^q\cap W_{p+q}$. Существует канонический метод деформации произвольной вещественной смешанной структуры Ходжа в смешанную структуру Ходжа, расщепляющуюся над $\mathbf{R}$. Со смешанной структурой Ходжа (V, W, F) ассоциируется нильпотентная алгебра Ли

$$\mathfrak{l}^{-1,-1}:=\{X\in\mathrm{End}(V_{\mathbf{C}}:X(I^{p,q})\subset\bigoplus_{r<p,s<q} I^{r,s}\}.$$

Ясно, что $\overline{\mathfrak{l}}^{-1,-1}=\mathfrak{l}^{-1,1}$, следовательно, $\mathfrak{l}^{-1,-1}$ допускает вещественную форму $\mathfrak{l}_{\mathbf{R}}^{-1,-1}=\mathrm{End}(V_{\mathbf{R}})\cap\mathfrak{l}^{-1,-1}$.

Предложение 2.7. Для заданной смешанной структуры Ходжа (V, W, F) над $\mathbf{R}$ существует единственное $\delta\in\mathfrak{l}_{\mathbf{R}}^{-1,-1}$, такое, что $(V, W, e^{-i\delta}F)$ есть расщепляющаяся над $\mathbf{R}$ смешанная структура Ходжа. Функтор $(V, W, F)\mapsto((V, W, e^{i\delta}F), \delta)$ устанавливает эквивалентность категории смешанных структур Ходжа над $\mathbf{R}$ и категории, объектами которой являются пары, состоящие из смешанной структуры Ходжа (V, W, F), расщепляющейся над $\mathbf{R}$, и элемента $\delta\in\mathfrak{l}_{\mathbf{R}}^{-1,-1}(W, F)$, морфизмы которой — морфизмы смешанных структур Ходжа, подправленные эндоморфизмом δ.

Геометрия этой ситуации может быть описана следующим образом. Для вещественного векторного пространства $(V_{\mathbb{R}}, W_{\cdot})$ с заданной фильтрацией, пусть F^W — множество фильтраций F для $V_{\mathbb{C}}$ таких, что (V, F, W) — смешанная структура Ходжа. Пусть $F^W_{\mathbb{R}}$ — подмногообразие F^W, такое, что смешанная структура Ходжа (V, F, W) расщепляется над $\mathbb{R}$. Тогда многообразия F^W и $F^W_{\mathbb{R}}$ — *гладкие*. Пусть U — *комплексная нильпотентная* группа Ли с алгеброй Ли $\mathfrak{u}=\{T\in W_{-1}\mathrm{End}(V_{\mathbb{C}})\,|\,T\equiv T \bmod \mathfrak{l}^{-1,-1}\}$. Тогда U действует на P^W и это действие сохраняет ходжеву структуру на $\mathrm{Gr}^W_j(V)$. Имеем: $F^W=U\cdot F^W_{\mathbb{R}}$ и для $F\in F^W_{\mathbb{R}}$ со стабилизатором $F^0(U)$ касательное пространство к $F^W_{\mathbb{R}}$ в точке F есть

$$W_{-1}\,\mathrm{End}(V_{\mathbb{R}})+F^0(U)/F^0(U).$$

Теперь $U/F^0(U)$ изоморфно $\exp(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}^{-1,1})$, так как $\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}^{-1,-1}$ — дополнительное подпространство к $F^0(U)$ вне $\mathfrak{u}$. Факторизуя $U/F^0(U)$ по $\exp(W_{-1}\,\mathrm{End}(V_{\mathbb{R}}))$, получаем двойное факторпространство, изоморфное $\exp(\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}^{-1,-1})/\exp(\mathfrak{l}_{\mathbb{C}}^{-1,-1})$, и, следовательно, изоморфное $\exp(i\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}^{-1,-1})$. Это объясняет роль $\exp\left(i\mathfrak{l}_{\mathbb{R}}^{-1,-1}\right)$ в предложении 2.7.

Рассмотрим теперь поляризованную смешанную структуру Ходжа. Для целого k *k-билинейной формой* на вещественной смешанной структуре Ходжа $(V_{\mathbb{R}}, W, F)$ называется невырожденная билинейная форма S на $V_{\mathbb{R}}$ со значениями в $\mathbb{R}(-k)$, которая $(-1)^k$-симметрична и удовлетворяет условию $S(F^p, F^{k-p+1})=0$.

Определение 2.8 (*Поляризованная смешанная структура Ходжа*). Пусть $(V_{\mathbb{R}}, W, F)$ — смешанная структура Ходжа и S — k-билинейная форма на $(V_{\mathbb{R}}, W, F)$. Говорят, что $(V_{\mathbb{R}}, W, k, S)$ *поляризована нильпотентным вещественным эндоморфизмом* N пространства V, если N удовлетворяет условиям:

(1) N сохраняет S;

(2) $W=W(N)[k]$, где весовая фильтрация $W(N)$ [171] есть единственная фильтрация V такая, что $N\cdot W_l(N)\subset W_{l-2}$ и для любого $j\geqslant 0$, N^j индуцирует изоморфизм $N^j:\mathrm{Gr}^W_j(N)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Gr}^W_{-j}(N)$;

(3) $NF^p\subset F^{p-1}$;

(4) структура Ходжа веса $k+l$ на примитивной части $P_{k+l}:=\ker\left(N^{l+1}:\mathrm{Gr}^W_{k+l}\to \mathrm{Gr}^W_{k-l-2}\right)$ поляризована билинейной формой $(2\pi i)^{-l}\,S(\cdot, N^l)$.

Расщепление смешанной поляризованной структуры Ходжа $(V, W, F, S; N)$ — это расщепление смешанной структуры Ходжа

$$W_l=\sum_{p+q<l}, \quad F^p=\sum_{r\geqslant p} J^{r,s},$$

совместимое с N (то есть $NJ^{p,q} \subset \bigoplus_{r\leqslant p-1,\, s\leqslant q-1} J^{r,s}$), и такое, что расщепление

$$H_l = \sum_{p+q=k+l} J^{p,q}$$

автодуально относительно S, то есть $S(H_l, H_m)=0$ при $l+m \neq -1$. Полупростой эндоморфизм Y пространства V определенный как $Y(u)=(p+q-k)u$ для $u \in J^{p,q}$ совместим с S, W и F, в частности, расщепление Делиня $I^{p,q}$ совместимо с любой поляризацией смешанной структуры Ходжа.

Связь с нильпотентными орбитами заключается в следующем. Пусть $z \mapsto \exp(zN)F$ — однопараметрическая нильпотентная орбита (см. определение 2.3). Рассмотрим вещественную фильтрацию W как некоторый сдвиг весовой фильтрации монодромии $W(N)$; именно, $W=W(N)[-m]$, где m — вес вариации структуры Ходжа.

Теорема 2.9 (Шмид, [167]). Для однопараметрической нильпотентной орбиты $(V, W, F, S; N)$ есть поляризованная смешанная структура Ходжа.

Эта теорема была получена Шмидом как следствие его теоремы об $SL(2)$-орбите, которую мы обсудим ниже. Для вариаций структур Ходжа геометрического происхождения она допускает геометрическое доказательство [179], которое будет обсуждаться в конце этого параграфа. Обратное утверждение к теореме дано в [38, следствие 3.13]. Эта теорема может быть переформулирована в терминах канонического расширения $\overline{\mathscr{V}}$ для $\mathscr{V}$, голоморфного векторного расслоения над Δ^n, порожденного сечениями

$$\tilde{v}(s) = \exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{n} (\log s_j) N_j\right) v, \qquad (2.2)$$

где v — многозначное сечение $\mathbf{V}$. Заметим, что связность ∇ имеет логарифмические полюса относительно $\overline{\mathscr{V}}$, то есть ее продолжение дает $\mathcal{O}_{\Delta^n}$-линейное отображение

$$\overline{\nabla}: \overline{\mathscr{V}} \to \Omega^1_{\Delta^n}(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_{\Delta^n}} \overline{V}.$$

Следствие 2.10. (1) Фильтрация $\mathscr{F}^{\cdot}$ для $\mathscr{V}$ продолжается до фильтрации $\overline{\mathscr{V}}$ подрасслоениями.

(2) Пусть $n=1$. Векторное пространство $V_0 := \overline{\mathscr{V}}_0$, снабженное вещественной структурой, индуцированной изоморфизмом $v \mapsto \tilde{v}$ в (2.1) и пара (W, F), где W — весовая фильтрация монодромии с центром в m (см. определение 2.8) и F — индуцирована $\mathscr{F}$, есть смешанная структура Ходжа, поляризованная N.

Пусть $(V, W, F, S; N)$ — поляризованная смешанная структура Ходжа, $(V, W, \tilde{F})$ — ассоциированное R-расщепление смешанной структуры Ходжа. Положим $F = e^{i\delta}\tilde{F}$ для $\delta \in I_{\mathbf{R}}^{-1,-1}$. Поскольку N коммутирует с δ, то N — также эндоморфизм смешанной структуры Ходжа $(V, W, \tilde{F})$ типа $(-1, -1)$. Пусть $(\tilde{I}^{r,s})_{rs}$ — R-расщепление $(V, W, \tilde{F})$, где $\tilde{I}^{p,q}$ комплексно сопряжено $\tilde{I}^{q,p}$. Пусть $\tilde{Y}$ — соответствующее полупростое преобразование:

$$\tilde{Y}(v) = (p + q + k)v \quad \text{для } v \in \tilde{I}^{p,q}.$$

Пара $(\tilde{Y}, N)$ может быть дополнена единственным образом до $\mathfrak{sl}(2)$-тройки $(\tilde{N}^+, \tilde{Y}, N)$. Имеем коммутационные соотношения:

$$[\tilde{N}^+, N] = \tilde{Y}, \quad [\tilde{Y}, \tilde{N}^+] = 2\tilde{N}^+, \quad [\tilde{Y}, N] = -2N.$$

Ясно, что $\tilde{N}^+$ — нильпотентный эндоморфизм $(V, W, \tilde{F})$ типа $(1, 1)$. Получаем гомоморфизм алгебр Ли $\tilde{\rho}: \mathfrak{sl}(2; \mathbf{R}) \to \mathfrak{g}$, отображающий стандартные образующие $\mathfrak{sl}(2; \mathbf{R})$ в $(\tilde{N}^+, \tilde{Y}, N)$. Он поднимается до гомоморфизма групп Ли $\tilde{\rho}: \mathrm{SL}(2; \mathbf{C}) \to G_{\mathbf{C}}$; $\tilde{\rho}$ определено над $\mathbf{R}$. Поскольку $\tilde{Y}$ и $\tilde{N}^+$ сохраняют фильтрацию $\tilde{F}$, отображение $g \mapsto \tilde{\rho}(g)\tilde{F}$ индуцирует эквивариантное вложение

$$\mathbf{CP}^1 \cong \mathrm{SL}(2; \mathbf{C})/B^- \hookrightarrow \check{M},$$

где $B^- = \left\{\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a^{-1} \end{pmatrix}\right\}$ — борелевская подгруппа. Следовательно, нильпотентная орбита $z \mapsto \exp(zN)\tilde{F}$ SL(2)-эквивариантна. Теорема об SL(2)-орбите дает точное соответствие между этой орбитой и исходной нильпотентной орбитой (с F вместо $\tilde{F}$). Для ее формулировки удобно определить связность на $\tilde{B}$-главном расслоении $G_{\mathbf{R}} \to G_{\mathbf{R}}/\tilde{B} \cong M$, где $\tilde{B}$ — стабилизатор $e^{iN}\tilde{F}$ в $G_{\mathbf{R}}$. Поскольку $\tilde{B}$ сохраняет положительно определенные эрмитовы формы на пространствах Ходжа в $\mathrm{Gr}_{\cdot}^{W}(V, e^{iN}\tilde{F})$, $\tilde{B}$ компактна. Поэтому имеем ортогональное разложение $\mathfrak{g}_{\mathbf{R}} = \tilde{\mathfrak{b}} \oplus \tilde{\mathfrak{b}}^{\perp}$ относительно формы Киллинга. Это $\tilde{B}$-инвариантное разложение определяет $G_{\mathbf{R}}$-инвариантную связность на главном расслоении.

Теорема 2.11 (*Теорема Шмида об* SL(2)-*орбите* [167]). Пусть $(V, W, F, S; N)$ как в теореме 2.9. Предположим, что α таково, что $\exp(zN)F$ и $\exp(zN)\tilde{F}$ принадлежат M при $\operatorname{Im} z > \alpha$. Тогда существует вещественно-аналитическая $G_{\mathbf{R}}$-значная функция $\tilde{g}(y)$, определенная при $y > \alpha$ такая, что

(1) $\exp(iyN)F = \tilde{g}(y)\exp(iyN)\tilde{F}$ при $y > \max(0, \alpha)$ (то есть $\tilde{g}(y)$ преобразует нильпотентную орбиту в нильпотентную);

(2) Для $\tilde{h}(y)=\tilde{g}(y)\exp\left(-\frac{1}{2}\log y\tilde{Y}\right)$, $G_{\mathbf{R}}$-значная кривая $y\mapsto\tilde{h}(y)$ горизонтальна относительно связности на главном расслоении $G_{\mathbf{R}}\to G_{\mathbf{R}}/\tilde{B}\cong M$; эквивалентно, $\tilde{h}(y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\tilde{h}(y)^{-1}\tilde{h}'(y)\in\mathfrak{b}^{\perp}$;

(3) $\tilde{g}(y)$ допускает сходящееся разложение Тейлора в окрестности ∞:

$$\tilde{g}(y)=\tilde{g}(\infty)(1+\tilde{g}_1y^{-1}+\tilde{g}_2y^{-2}+\ldots);$$

(4) $\tilde{g}(\infty)\in\exp(\mathfrak{l}_{\mathbf{R}}^{-1,-1}\cap\ker(\operatorname{ad}N))$.

Эти свойства определяют $\tilde{g}(y)$ единственным образом. Пусть

$$\tilde{g}(y)^{-1}=(1+\tilde{f}_1y^{-1}+\ldots)\,\tilde{g}(\infty)^{-1}$$

— ряд Тейлора для $\tilde{g}(y)^{-1}$. Тогда, имеем, дополнительно:

(5) $(\operatorname{ad}N)^{k+1}\tilde{g}_k=0$ и $(\operatorname{ad}N)^{k+1}\tilde{f}_k=0$.

(6) $\tilde{g}_k$ и $\tilde{f}_k$ принадлежат линейной оболочке $\operatorname{End}(V)^{p,q}_{\mathbf{R}}$ при $p+q\leqslant k-1$.

Заметим, что значение $\tilde{h}(y)$ состоит в том, что оно сопрягает $e^{iN}\tilde{F}$ в $\exp(iYN)F$: $\exp(iyN)F=\tilde{h}(y)e^{iN}\tilde{F}$.

Важным следствием теоремы об SL(2)-орбите является оценка нормы Ходжа:

Следствие 2.12. (Шмид, [167]). Пусть $(\mathbf{V},\mathcal{F},S)$ — поляризованная вариация $\mathbf{R}$-структуры Ходжа веса m над пунктированным диском Δ^* с координатой s. Допустим, что $\mathbf{V}$ имеет унипотентную монодромию. Пусть $W=W(N)[m]$ — сдвинутая весовая фильтрация монодромии. Плоское сечение v для $\mathbf{V}$ лежит в W_l-W_{l-1} в том и только том случае, если в малом секторе с центром в нуле

$$\langle v,v\rangle\sim(\log|s|)^l.$$

Фильтрация Ходжа $\tilde{F}_0:=\tilde{g}(\infty)\tilde{F}$ представляет особый интерес. Как и $\tilde{F}$ она связана с F (невещественным) элементом нильпотентной группы $\exp(\mathfrak{l}^{-1,-1}\cap\ker(\operatorname{ad}N))$. Поскольку $\tilde{g}(\infty)\in G_{\mathbf{R}}$, $(V,W,\tilde{F}_0)$ есть $\mathbf{R}$-расщепление смешанной структуры Ходжа, поляризованной N. Замечательный факт заключается в том, что $\tilde{F}_0$ зависит только от (V,W,F), а не от N. Можно переформулировать теорему об SL(2)-орбите в терминах $\tilde{F}_0$. Положим $N^+:=\operatorname{Ad}(\tilde{g}(\infty))\tilde{N}^+$, $Y=\operatorname{Ad}(\tilde{g}(\infty))\tilde{Y}$ и получим SL(2)-тройку (N^+,Y,N). Вместе с новыми $G_{\mathbf{R}}$-значными кривыми $g(y)=\tilde{g}(y)\tilde{g}(\infty)^{-1}$, $h(y)=\tilde{h}(y)\tilde{g}(\infty)^{-1}=g(y)\exp\left(-\frac{1}{2}(\log y)Y\right)$, получаем:

$$\exp(yN)F=g(y)\exp(iyN)\tilde{F}_0=h(y)e^{iN}\tilde{F}_0.$$

Коэффициенты g_j (соответственно, f_j) разложения Тейлора $g(y)$ (соответственно, $g(y)^{-1}$) удовлетворяют условиям (5) и (6) теоремы 2.10.

Предложение 2.13. [41, предложение 3.28]. Пусть

$$\delta = \sum_{p,q\geqslant 1} \delta_{-p,-q}.$$

Линейные преобразования g_k и f_k выражаются как универсальные полиномы от некоммутирующих переменных $\delta_{-p,-q}$ и $\mathrm{ad}\, N^+$. Они удовлетворяют оценке

$$\| g_k \|, \ \| f_k \| \leqslant C(1 + \| N^+ \| + \| Y \| + \| N \|)^n (\max_{p,q} \| \delta_{-p,-q} \|^m)^k.$$

Обобщение SL(2)-теоремы на нильпотентные орбиты в случае нескольких переменных оказывается исключительно сложным. Даже сама формулировка в течение многих лет оставалась загадкой. Первый шаг в этом направлении был сделан Каттани и Капланом, которые, вдохновленные аналогичным результатом Делиня [58], доказали, что весовая фильтрация монодромии постоянна на открытом конусе. Для формулировки их результатов нам понадобятся дальнейшие определения из [58].

Предложение и определение 2.14 (Делинь [58, II], см. также [184]). Пусть $(V, W.)$ — фильтрованное векторное пространство и N — нильпотентный эндоморфизм V, сохраняющий W. *Весовая фильтрация* для N относительно W есть фильтрация M для V такая, что

(1) $NM_j \subset M_{j-2}$;

(2) фильтрация, индуцированная M на $\mathrm{Gr}_j^W(V)$, есть весовая фильтрация для $(\mathrm{Gr}_k^W(V), W)$ с центром в k.

Если M существует, то она единственна.

Мы отсылаем читателя к [184, §2] по поводу детального обсуждения весовой фильтрации M. Заметим, например [184, предложение 2.6], что если W имеет длину 2, то M существует в том и только том случае, если N^l есть строгий эндоморфизм (V, W) для любого $l > 0$.

Предложение 2.15 ([39, §3]). (I) Пусть $\theta(z) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} z_j N_j\right) \cdot F$, $z \in \mathbf{C}^n$, — нильпотентная орбита (см. определение 2.3). Положим

$$C := \left\{ \sum_{j=1}^{n} \lambda_j N_j : \lambda_j \in \mathbf{R},\ \lambda_j > 0 \right\}.$$

Тогда весовая фильтрация $W(N)$, ассоциированная с $N \in C$, не зависит от N. Обозначим ее через $W(C)$.

Для подмножества J в $\{1, \ldots, n\}$ пусть

$$C_J=\left\{\sum_{j\in J}\lambda_j N_j : \lambda_j \in \mathbf{R},\ \lambda_j>0\right\}.$$

(2) Пусть $N\in C_J$ и $N'\in C_{J'}$. Для $N''\in C_{J\cup J'}$, $W(N'')$ — весовая фильтрация N относительно $W(N')$.

Отметим, что утверждение (2) сформулировано в [39] с некоторыми неточностями (см. [184, теорема 3.12]). Из теоремы 2.9 получаем, что для любого $N\in C$, $(V, W(C), [-m], F, N)$ — поляризованная смешанная структура Ходжа. Следующие конструкции зависят от фиксированного порядка переменных в $\mathbf{C}^n$. Для $1\leqslant r\leqslant n$ положим

$$C_r := \left\{\sum_{j=1}^{r}\lambda_j N_j : \lambda_j \in \mathbf{R},\quad \lambda_j>0\right\}.$$

Каждый элемент C_r определяет ту же весовую фильтрацию, скажем, $W(C_r)$; положим $W^r=W(C_r)[-m]$. Определим фильтрации Ходжа $\tilde{F}_r\in\hat{M}$, $1\leqslant r\leqslant n$, убывающей индукцией по r следующим образом.

Пусть $\tilde{F}_n$ — фильтрация Ходжа на $\mathbf{R}$-расщепленной смешанной структуре Ходжа канонически ассоциированной с (V, W^n, F) по теореме об SL (2)-орбите (эта фильтрация обозначалась через $\tilde{F}_0$ при обсуждении теоремы 2.11). Теперь $(V, W^n, \tilde{F}_n)$ поляризована произвольным $N\in C=C_n$, следовательно, отображение

$$(z_1, \ldots, z_{n-1})\mapsto \exp\left(\sum_{j=1}^{n-1} z_j N_j\right)(e^{iN_n}\tilde{F}_n)$$

— нильпотентная орбита в случае $(n-1)$ переменной, принимающая значения в M при $\operatorname{Im}(z_j)>0$. В частности, $(V, W^{n-1}, e^{iN_n}, \tilde{F}_n)$ есть смешанная структура Ходжа, поляризованная любым $N\in C_{n-1}$. Пусть $\tilde{F}^{n-1}$ — фильтрация Ходжа на $\mathbf{R}$-расщеплении смешанной структуры Ходжа, ассоциированной с ней по теореме об SL (2)-орбите. Продолжая этот процесс, получаем $\tilde{F}_r\in\hat{M}$ такую, что для любого r, $(V, W^r, \tilde{F}^r)$ есть $\mathbf{R}$-расщепленная смешанная структура Ходжа, канонически ассоциированная с $(V, W^r, e^{iN_{r+1}}\tilde{F}_{r+1})$ $(V, W^r, \tilde{F}^r)$ поляризовано любым $N\in C_r$.

Для вещественных чисел $t_1, \ldots, t_{r-1}$ отображение

$$z\mapsto\left(\exp zN_r+\sum_{j=1}^{r-1} t_j N_j\right)(e^{iN_{r+1}}\tilde{F}_{r+1})$$

есть нильпотентная орбита с одной переменной. Пусть $h_r(t_1, \ldots, t_{r-1}, jy)$ — $G_{\mathbf{R}}$-значная функция, ассоциированная с ней (где $(t_1, \ldots, t_{r-1})$ — параметры).

Теорема 2.16 (*Теорема об* SL(2)-*орбите для n переменных*, Каттани — Каплан — Шмид, [41], [40]). Пусть $\theta: \mathbf{C}^n \to \check{M}$ — нильпотентная орбита,

$$\theta(\mathbf{z}) = \exp\left(\sum_{j=1}^{n} z_j N_j\right) F.$$

Тогда существует единственный гомоморфизм групп Ли $\rho: \mathrm{SL}(2; \mathbf{C}^n) \to G_{\mathbf{C}}$, обладающий следующими свойствами:

(1) $\rho_*: \mathfrak{sl}(2; \mathbf{C}^n) \to \mathfrak{g}$ — морфизм смешанных структур Ходжа для смешанной структуры Ходжа на $\mathfrak{g}$, индуцированной $e^{iN_1} \cdot \tilde{F}_1$;

Обозначим через $(\hat{N}_j^+, \hat{Y}_j, \hat{N}_j^-)$ образ при отображении ρ стандартных образующих j экземпляров $\mathfrak{sl}(2; \mathbf{R})$. Положим

$$\hat{N}_r^{\pm} = \sum_{j=1}^{r} \hat{N}_j^{\pm}, \quad \hat{Y}_r = \sum_{j=1}^{r} \hat{Y}_j.$$

Тогда

(2) $\tilde{F}_r = e^{-i\hat{N}_r^-}(e^{iN_1}\tilde{F}_1)$;

(3) $\hat{Y}_r$ — полупростой эндоморфизм, ассоциированный с расщеплением смешанной структуры Ходжа $(W^r, \tilde{F}_r)$ и, следовательно, $W(\hat{N}_r^-) = W(C_r)$;

(4) $\hat{N}_r^-$ — компонента N_r в подпространстве $\bigcap_{j=1}^{r-1} \ker(\operatorname{ad} \hat{Y}_j)$ относительно единого спектрального представления коммутирующих полупростых эндоморфизмов $\operatorname{ad}(\hat{Y}_j)_{j=1}^{r-1}$;

$$(5) \quad \sum_{s=1}^{r} y_s y_r^{-1} N_s = \operatorname{Ad}\left(\prod_{j=r-1}^{1} h_j(y_1 y_j^{-1}, \ldots, y_{j-1} y_j^{-1}; y_j y_{j+1}^{-1})\right) \hat{N}_r^-.$$

Более того, существуют $G_{\mathbf{R}}$-значные функции $g_r(y_1, \ldots, y_r)$, определенные при $y_j > 0$, если $1 \leqslant r \leqslant n-1$, и при $y_j > \alpha$ для некоторого α, если $r = n$ такие, что

(6) Для $j < r \leqslant n$, $g_j(y_1, \ldots, y_j)$ коммутируют с $\hat{Y}_r$ и сохраняют $F_r \in M$. Следовательно, они индуцируют (0, 0)-эндомор-

физмы смешанной структуры Ходжа $(W^r, \tilde{F}_r)$.

(7) $\sum_{s=1}^{r} y_s N_s = \mathrm{Ad}\left(\prod_{j=r-1}^{1} g_j\,(y_1 y_{j+1}^{-1}, \ldots, y_j y_{j+1}^{-1})\right) \sum_{s=1}^{r} y_s \hat{N}_s^-$;

(8)

$$\exp\left(i\sum_{j=1}^{n} y_j N_j\right)F = \left(\prod_{r=n}^{1}(g_r\,(y_1 y_{r+1}^{-1}, \ldots, y_r y_{r+1}^{-1}))\right)\exp\left(i\sum_{j=1}^{n} y_j \hat{N}_j^-\right);$$

(9) Функции $g_r(y_1, \ldots, y_r)$ и их обратные допускают разложения в степенные ряды по неотрицательным степеням $y_1 y_2^{-1}, \ldots, y_{r-1}\, y_r^{-1}$ со свободным членом 1, сходящиеся в области вида

$$y_1 y_2^{-1} > \beta, \ldots, y_{r-1} y_r^{-1} > \beta, \quad y_r > \beta.$$

Доказательство состоит в проведении тонкой индукции по числу переменных. Коммутирующие эндоморфизмы $\hat{Y}_j$ для $\mathbf{V}$ дают плоскую мультиградуировку $\mathbf{V} = \oplus \mathbf{V}_{l_1,\ldots,l_n}$. Для каждого j подрасслоения $\mathbf{V}_l^j \underset{l_j=l}{\oplus} \mathbf{V}_{l_1,\ldots,l_n}$ градуируют весовую фильтрацию W^j. Имеем:

$$\mathbf{V}_{l_1,\ldots,l_n} \cong \mathrm{Gr}_{l_n}^{W^n}(\ldots(\mathrm{Gr}_{l_1}^{W_1}(\mathbf{V})).$$

Эта мультиградуировка $\mathbf{V}$ очень полезна для получения оценок роста сечений в секторах в $(\Delta^*)^n$ вида $\log|s_j|/\log|s_{j+1}| > \varepsilon$. Для случая других секторов необходимо выполнить перестановку индексов. Пусть $e:(\Delta^*)^n \to G_{\mathbf{R}}$ задано как

$$e(\mathbf{s})\,v = \prod_j (\log|s_j|\cdot\log|s_{j+1}|^{-1})^{l_j/2} v,$$

для $v \in V_{l_1,\ldots,l_n}$. Тогда имеет место следующая оценка нормы.

Предложение 2.17 ([41, предложение 5.24], [113]). Допустим, что монодромия унипотентна и пусть h — метрика Ходжа, индуцированная поляризацией. Пусть v_1, v_2 — многозначные плоские сечения $\mathbf{V}$ и

$$\tilde{v}_j(\mathbf{s}) = \exp\left(-\sum \frac{\log s_j}{2\pi} N_j\right) v_j$$

— соответствующее голоморфное сечение $\mathscr{V}$. Положим

$$h(v_1, v_2) := \langle e\cdot v_1, e\cdot v_2 \rangle,$$

$$\tilde{h}(v_1, v_2) := \langle e\cdot \tilde{v}_1, e\cdot \tilde{v}_2 \rangle.$$

Тогда в любом локально плоском репере в V матрицы h и $\tilde{h}$, также, как и их обратные, ограничены в любом секторе вида

$$\frac{\log|s_j|}{\log|s_{j+1}|} > \varepsilon, \ldots, -\log|s_n| > \varepsilon, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Это утверждение может быть переформулировано в терминах оценок норм для плоских сечений V, давая обобщение следствия 2.12.

Предложение 2.18 ([41, теорема 5.21]). Плоское сечение v принадлежит $\bigcap_j W^j_{l_j}$ и не принадлежит

$$\sum_j \left(W^1_{l_1} \cap \ldots \cap W^j_{l_{j-1}} \cap \ldots \cap W^n_{l_n}\right)$$

в том и только том случае, если для любого сектора вида

$$\frac{\log|s_1|}{\log|s_2|} > \varepsilon, \ldots, -\log|s_n| > \varepsilon$$

имеем:

$$\langle v, v \rangle \sim \prod_j \left(\frac{\log|s_j|}{\log|s_{j+1}|}\right)^{l_j}.$$

Эти оценки имеют решающее значение для теорем сравнения L_2-когомологий с коэффициентами в V и когомологиями пересечения, которые будут обсуждаться в конце § 2.

Возвращаясь к одномерным вариациям структуры Ходжа отметим, что они возникают геометрически из собственных голоморфных отображений $f: X \to \Delta$ с f гладкой в пунктированном диске Δ^*. Зафиксируем координату s на Δ. Конструкции будут зависеть от координат. Можно считать, используя разрешение особенностей, что $D = f^{-1}(0)$ есть дивизор с нормальными пересечениями. Мы будем следовать далее Стинбринку [179]. Вполне аналогичные результаты были получены Клеменсом [51]. Стинбринк использовал относительную версию $\Omega^*_{X/\Delta}(\log D)$ log комплекса Делиня. Имеем:

$$\Omega^1_{X/\Delta}(\log D) = \Omega^1_X(\log D)/f_*\Omega^1_\Delta(\log 0)$$

и

$$\Omega^p_{X/S}(\log D) = \wedge^p \Omega^1_{X/\Delta}(\log D).$$

Предложение 2.19 [179, теорема 2.18]. Для любого $m \geqslant 0$ высший прямой образ пучка $\mathcal{V}^m := R^m f_*(\Omega^{\cdot}_{X/\Delta}(\log D))$ локально свободен над Δ и для всех s из Δ каноническое отображение

$$R^m f_*\left(\Omega^{\cdot}_{X/\Delta}(\log D)\right) \otimes_{\mathcal{O}_\Delta} k(s) \to H^m\left(X_s, \Omega^{\cdot}_{X/\Delta}(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_s}\right)$$

есть изоморфизм.

При всех $s \in \Delta^*$ векторное пространство $H^m(X_s, \Omega^{\cdot}_{X/\Delta}(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_s})$ изоморфно $H^m(X_s, \mathbf{C})$. Следовательно, слой $\mathcal{V}^m_0$ — хороший кандидат для описания «предела при $s \to 0$ когомологических групп $H^m(X_s, \mathbf{C})$». Конечно, комплекс $\Omega^{\cdot}_{X/\Delta}(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_D$ квазиизоморфен комплексу почти циклов

$\psi_f(\mathbf{C}_X)$, описанному в п. 2.21 ниже (см. [171, § 2]); если D приводимо, то он допускает интересное описание на D [81, (3, 2)].

Предложение 2.20 ([171, предложение 2.20]). Векторное расслоение с мероморфной связностью $\mathcal{V}^m$ есть каноническое расширение в смысле Делиня [54], то есть оно удовлетворяет условиям:

(1) связность ∇ на $\mathcal{V}^m$ имеет полюс порядка $\leqslant 1$ в 0;

(2) любое собственное значение α вычета $\mathrm{Res}_0(\nabla) \subset \mathrm{End}(\mathcal{V}_0{}^m)$ удовлетворяет условиям $\alpha \in \mathbf{Q}$, $0 \leqslant \alpha < 1$.

Напомним теперь определения пространств и пучков почти циклов и исчезающих циклов, принадлежащие Гротендику и Делиню [171]. Хотя для этого достаточно случая постоянного пучка на X, мы рассмотрим случай произвольного ограниченного комплекса пучков $K^\cdot$ над X в интересах дальнейшего изложения (см. § 4). Пусть $f: X \to \Delta$ — голоморфное отображение, $\tilde{\Delta}^*$ — универсальное накрывающее пространство для Δ^* и $\pi: \tilde{\Delta}^* \to \Delta$ — естественное отображение. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} \tilde{X}^* \arrow[r, "k"] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] & D \arrow[l, "i"'] \arrow[d] \\ \tilde{\Delta}^* \arrow[r, "\pi"] & \Delta & \{0\} \arrow[l] \end{tikzcd}.$$

Определение 2.21 ([171]). Для ограниченного комплекса пучков $K^\cdot$ над X^* *комплекс* $\psi_f(K^\cdot)$ *почти циклов* для $K^\cdot$ есть объект $\psi_f(K^\cdot) = i^*Rk_*k^*(K^\cdot)$ приведенной категории комплексов пучков над D. Для комплекса пучков $K^\cdot$ над X *комплекс* $\varphi_f(K^\cdot)$ *исчезающих циклов* определяется как конус морфизма комплексов $i^*K^\cdot \to \psi_f(K^\cdot)$. Обозначим через can канонический морфизм $\psi_f \to \varphi_f$. Пусть T — операция монодромии — автоморфизм $\psi_f(K^\cdot)$ и $\varphi_f(K^\cdot)$. Тогда существует канонический морфизм $\mathrm{Var}: \varphi_f(K^\cdot) \to \psi_f(K^\cdot)$ такой, что $T - 1 = \mathrm{can} \circ \mathrm{Var}$ на φ_f и $T - 1 = \mathrm{Var} \circ \mathrm{can}$ на ψ_f.

Проиллюстрируем эти определения в случае $K^\cdot = \mathbf{C}_X$. Комплексы пучков $\psi_f(\mathbf{C}_X)$ и $\varphi_f(\mathbf{C}_X)$ конструктивны. Когомологии их стеблей в $y \in D$ таковы: $\mathcal{H}^j\psi_f(\mathbf{C}_X)_y = H^j(X(s, y), \mathbf{C})$, где $X(s, y)$ — «слой Милнора», $\mathcal{H}^j\varphi_f(\mathbf{C}_X)_y = \tilde{H}^j(X(s, y), \mathbf{C})$ (приведенные когомологии слоя Милнора). Группа гиперкогомологий $H^j(D, \psi_f(\mathbf{C}_X))$ равна $H^j(\tilde{X}^*, \mathbf{C})$ и, следовательно, равна группе когомологий $H^j(X_s, \mathbf{C})$ общего слоя X_s.

Вернемся к ситуации, когда задано отображение $f: X \to \Delta$, где f — гладко и собственно над $X^* = X - D$, D — дивизор с нормальными пересечениями. Предположим, что автоморфизм монодромии T на $H^p(X_s, \mathbf{Q}) = H^p(\tilde{X}^*, \mathbf{Q})$ *унипотентен* и D — алгебраическое многообразие. Стинбринк построил когомологический смешанный комплекс Ходжа на D следующим

образом. Пусть $A_{\mathbf{Z}}^{\cdot}=\psi_{f,1}(\mathbf{Z}_X)$, где индекс 1 обозначает максимальный подкомплекс комплекса $\psi_f(\mathbf{Z})$, на котором T унипотентен. Тогда $H^p(Y, A_{\mathbf{Z}}^{\cdot})\cong H^p(\tilde{X}^*, \mathbf{Z})=H^p(X_s, \mathbf{Z})$.

Конструкция $(A_{\mathbf{Q}}^{\cdot}, W_{\cdot})$ более сложная. Пусть $j: X^*\hookrightarrow X$ — включение; для $k\geqslant 0$ положим

$$H_{\mathbf{Q}}^k := i^*Rj_*\mathbf{Q}_{X^*}(k+1)[k+1]/(\tau_{\leqslant k}i^*Rj_*\mathbf{Q}_{X^*}(k+1))[k+1].$$

Существует естественное отображение θ: $H^k\to H^{k+1}$ — чашечное умножение с образующей θ в $H^1(\Delta^*, \mathbf{Q}(1))$. Используя пучковую конструкцию Сулливана d. g. a. полиномиальных дифференциальных форм на триангуляции, можно реализовать H^k как комплексы пучков, так, что $\theta\circ\theta=0$. Стинбринк доказал, что точна последовательность

$$0\to\psi_{f,1}(\mathbf{Q}_X)\xrightarrow{\theta} H_{\mathbf{Q}}^0\xrightarrow{\theta} H_{\mathbf{Q}}^1\to\ldots.$$

Следовательно, если $A_{\mathbf{Q}}^{\cdot}$ — ассоциированный простой комплекс для двойного комплекса $H_{\mathbf{Q}}^0\xrightarrow{\theta}\overline{H}_{\mathbf{Q}}^1\to\ldots$, то существует квазиизоморфизм $\theta: A_{\mathbf{Z}}^{\cdot}\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}\xrightarrow{\sim} A_{\mathbf{Q}}^{\cdot}$. Фильтрация $W_{\cdot}$ на $A_{\mathbf{Q}}^{\cdot}$ определяется следующим образом. Пусть $W_rH_{\mathbf{Q}}^k$ — образ

$$\tau_{\leqslant r+2k+1}(i^*Rj_*\mathbf{Q}_{X^*}(k+1))[k+1]$$

в $H_{\mathbf{Q}}^k$ (см. § 1 по поводу связи весовой и канонической фильтраций). Тогда $W_rA_{\mathbf{Q}}^{\cdot}$ — простой комплекс, ассоциированный с двойным комплексом

$$W_rH_{\mathbf{Q}}^0\to W_rH_{\mathbf{Q}}^1\to\ldots.$$

Для построения $A_{\mathbf{C}}^{\cdot}$ исходим из двойного комплекса

$$A^{p,q} := \Omega_X^{p+q+1}(\log D)/W_q\Omega_X^{p+q+1}(\log D)$$

с горизонтальным дифференциалам, индуцированным внешним дифференциалом, и вертикальным дифференциалом, индуцированным $\theta=ds/s$. Пусть $A_{\mathbf{C}}^{\cdot}$ — ассоциированный простой комплекс. Отображение θ: $\Omega_{X/\Delta}^{\cdot}\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{O}_{D_{\mathrm{red}}}\to A_{\mathbf{C}}^{\cdot}$ — квазиизоморфизм относительно фильтрации F. Фильтрация W для $A_{\mathbf{C}}^{\cdot}$ индуцируется

$$W_rA^{p,q}=W_{2q+r+1}\Omega_X^{p+q+1}(\log D)/W_q\Omega_X^{p+q+1}(\log D).$$

Фильтрация F задается как $F^pA_{\mathbf{C}}^{\cdot}=\bigoplus_{r\geqslant p}A^{r,s}$.

Теорема 2.22 (Стинбринк [179, Теорема 4.19]). Построенные выше комплексы, фильтрации и квазиизоморфизмы определяют когомологический комплекс Ходжа на D. В частности, когомологические группы $H^p(\tilde{X}^*, \mathbf{Q})$ допускают смешанную

структуру Ходжа и T — автоморфизм этой смешанной структуры, N — эндоморфизм типа $(-1,1)$.

Стинбринк установил фильтрованные квазиизоморфизмы

$$\mathrm{Gr}_r^W(A_P^{\cdot}) \cong \oplus_{k\geqslant 0,-r}(a_{r+2k+1})_* \mathbf{Q}_{\tilde{D}^{r+2k+1}}(-r-k)[-r-2k] \quad (2.3)$$

и

$$\mathrm{Gr}_r^W(A_C^{\cdot}) \cong \oplus_{k\geqslant 0,-r} a_{r+2k+1})_* \Omega^{\cdot}_{\tilde{D}^{r+2k+1}}(-r-k)[-r-2k]. \quad (2.4)$$

Факт существования когомологического комплекса Ходжа теперь выводился из теории Деляня—Ходжа (§ 1).

Некоторые функториальные свойства смешанной структуры Ходжа на $H^*(\tilde{X}^*, \mathbf{Q})$ дает следующая

Теорема 2.23 (Стинбринк, [179, § 4. § 5] см. также [76] и [162]). Снабдим $H^p(X)$ смешанной структурой Ходжа, индуцированной изоморфизмом $H^p(X) \cong H^p(D)$.

(1) $H^{\cdot}(X^*)$ и $H^{\cdot}_D(X)$ допускают естественные смешанные структуры Ходжа и точная последовательность когомологий с носителями

$$\ldots \to H^p(D) \xrightarrow{\alpha} H^p(X^*) \xrightarrow{\beta} H^{p+1}(X) \to H^{p+1}(D) \to \ldots$$

точна в категории смешанных структур Ходжа.

(2) Последовательность Вана

$$\ldots \to H^p(X^*) \to H^p(\tilde{X}^*) \xrightarrow{N} H^p(\tilde{X}^*) \to H^{p+1}(X^*) \to \ldots$$

точна в категории смешанных структур Ходжа.

(3) Если f — проективный морфизм относительной размерности n то для любого $r \geqslant 0$ гиперплоский класс L индуцирует изоморфизм смешанной структуры Ходжа

$$L^r : H^{n-r}(\tilde{X}^*) \cong H^{n+r}(\tilde{X}^*)(r).$$

(4) Если f проективен, фильтрация W на $H^p(\tilde{X}^*)$ совпадает с весовой фильтрацией монодромии. Эндоморфизм N индуцирован эндоморфизмом ν для $A^{\cdot}$, он дает поляризацию смешанной структуры Ходжа на $H^p(\tilde{X}^*)$. Последовательность

$$H^p(D, \mathbf{Q}) \to H^p(\tilde{X}^*, \mathbf{Q})^N \to H^p(\tilde{X}^*, \mathbf{Q})(-1)$$

точная (то есть справедлива *теорема о локально инвариантном цикле*).

Замечание 2.24. Теорема о локально инвариантном цикле была доказана с помощью трансцендентных методов Гриффитсом и Шмидом [93] и Клеменсом и Шмидом [91], с помощью l-адических методов она была установлена Кацем [171]. Обобщение ее см. в [195].

Отметим, что некоторые из методов, пригодны и для случая вырождений кэлеровых многообразий (см. [92], [51]).

В [180] Стинбринк обобщил эти результаты, с той поправкой, что монодромия унипотентна. Поскольку монодромия всегда квазиунипотентна, можно осуществить замену базы

$$\begin{array}{ccc} \tilde{Z} & \xrightarrow{\tilde{f}} & \Delta \\ {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ X & \xrightarrow{f} & \Delta \end{array}$$

с $\sigma(s)=s^e$ для подходящего e. Теперь $\tilde{f}$ — унипотентная монодромия и $\tilde{Z}$ имеет лишь особенности фактора, поэтому, обобщая построения на этот случай, получаем, что $H^*(\tilde{Z}^*)$ допускает смешанную структуру Ходжа. Однако $H^*(\tilde{X}^*)$ изоморфно $H^*(\tilde{Z}^*)$. Мы отсылаем читателя к [180] по поводу деталей и многих интересных примеров. «Формальную» версию двойного комплекса Стинбринка $\ldots \to H^p_{\mathbf{Q}} \to H^{p+1}_{\mathbf{Q}} \to \ldots$ см. в [148[. В работе [183] Ван Доорн и Стинбринк показали, что в случае, когда $f: B \to \Delta$ (B — малый шар в $\mathbf{C}^n$) имеет изолированную особенность в нуле, то, если действие T на $H^{n-1}(X_s, \mathbf{C})$ имеет жорданову клетку размерности n (с собственным значением $\neq 1$), то оно имеет жорданову клетку размерности $n-1$ с собственным значением 1. Это — дополнение к теореме монодромии Ландмана [119], Брискорна [30] Лё [121]. При $n=1$ это утверждение содержит результат Лё (монодромия для неприводимой плоской кривой особенности имеет конечный порядок).

В [181] рассматривался случай исчезающих циклов для произвольной изолированной особенности. Недавно Наварро Азнар [135] получил весьма общие результаты с помощью комбинирования симплициальной техники, техники Стинбринка и комплексов Тома—Уитни.

Теорема 2.25 ([135]). Пусть X — комплексно-аналитическое пространство, $f: X \to \Delta$ — непостоянное аналитическое отображение относительной размерности n, V — открытое по Зарисскому подмножества подпространства $\bar{V}$ в $D := f^{-1}(0)$, которые оба компактны и алгебраичны. Тогда когомологические группы $H^p(V, \psi_f(\mathbf{Z}))$ и $H^p(V, \varphi_f(\mathbf{Z}))$ допускают смешанные структуры Ходжа, так что

(1) Точная последовательность исчезающих циклов точна как последовательность смешанных структур Ходжа.

(2) Чашечное произведение на $H^{\cdot}(V, \psi_f(\mathbf{Z})$ и на $H^{\cdot}(V, \varphi_f(\mathbf{Z}))[-1]$ — морфизмы смешанных структур Ходжа.

(3) Полупростая часть T_s оператора монодромии T — автоморфизм смешанной структуры Ходжа. Следовательно, унипотентные подпространства $H^p(V, \psi_f(\mathbf{Z})_1)$ и $H^p(V, \varphi_f(\mathbf{Z})_1)$ — смешанные структуры Ходжа.

(4) Логарифм N унипотентной части T есть морфизм смешанной структуры Ходжа типа $(-1,1)$ и последовательность Вана (см. теорему 1.22), — точная последовательность смешанных структур Ходжа.

(5) Если $X-D$ гладко и $V=\{x\}$, где x — изолированная рациональная особенность, то фильтрация Ходжа такова, что $\mathrm{Gr}_F^0(H^p(\psi_f(\mathbf{Q}))_x)_1=0$ для всех $p>0$.

Весьма интересным направлением исследований, касающихся геометрических и аналитических аспектов фильтрации Ходжа смешанной ходжевой структуры Стинбринка, является направление, открытое А. Н. Варченко и развитое далее в работах Шерка, Стинбринка, Фама и М. Саито, а также в работах Барле. А. Н. Варченко [1], [3] ввел понятие *асимптотической фильтрации Ходжа для* $\mathscr{V}:=\mathscr{V}^{n-1}$ в случае, когда $f:B\to\Delta$ имеет относительную размерность $n-1$, B — малый шар в $\mathbf{C}^n$ с центром в изолированной особой точке 0 в D. Для голоморфной n-формы $\omega\in\Omega^n(X)$ пусть $\sigma[\omega]$ — сечение $\sigma[\omega]:=\omega/df\,\mathscr{V}$ над Δ^*. Пусть Λ — множество собственных значений монодромии T, действующей на $H^{n-1}(X_s\mathbf{C})$. Тогда $\sigma[\omega]$ допускает асимптотическое представление вида

$$\sigma[\omega]=\sum_{\lambda\in\Lambda}\sum_{\alpha\in\Lambda(\lambda)}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}A_{k,\alpha}s^{\alpha}(\log s)^k,$$

где $\Lambda(\lambda)=\{\alpha\in\mathbf{Q}\,|\,\alpha>-1,\ \exp(-2\pi i\alpha)=\lambda\}$ и каждое $A_{k,\alpha}$ — плоское многозначное сечение. Для достаточно малого $|s|$ ряд сходится в любом секторе с центром в 0.

Для заданной $\omega\in\Omega^n(X)$ пусть $\alpha(\omega)$ — минимум тех $\alpha\in\bigcup\Lambda(\lambda)$, для которых $A_{k,\alpha}$ не нуль. Главная часть $\tau_{\max}[\omega]$ определяется как

$$\sigma_{\max}[\omega]=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}A_{k,\alpha(\omega)}s^{\alpha(\omega)}(\log s)^k.$$

Определение 2.26 (А. Н. Варченко). *Асимптотическая фильтрация Ходжа* для $\mathscr{V}$ есть $\mathscr{F}^p=\mathrm{span}\{\tau_{\max}[\omega]\,|\,\alpha(\omega)\leqslant n-s-p\}$. Это убывающая фильтрация голоморфных подрасслоений с $\mathscr{F}^n=$, $\mathscr{F}^0=\mathscr{V}$.

Предложение 2.27 ([3]). (1) Для любого $s\in\Delta^*$ фильтрации $W_{\cdot}$ и $F^{\cdot}$ на $\mathscr{V}_s$ определяют смешанную структуру Ходжа.

(2) Асимптотическая фильтрация Ходжа и фильтрация Ходжа — Стинбринка дают одну и ту же фильтрацию на $\mathrm{Gr}^W_{\cdot}$.

Отметим, что асимптотическая фильтрация Ходжа существенно отлична от ходжевой фильтрации Стинбринка [165]. Асимптотическая фильтрация Ходжа была обобщена на случай неизолированной особенности Барле [9]. А. Н. Варченко и Барле получили замечательные соотношения между нулями

полиномов Бернштейна—Сато для f и смешанными структурами Ходжа на исчезающих когомологиях.

Шерк и Стинбринк [166] нашли очень интересное описание фильтрации Ходжа на $H^{n-1}(X_s)$, тесно связанное с работой А. Н. Варченко. Их работа была уточнена Фамом [138] и М. Саито [149], [151]. Пусть S — расширение $\mathcal{V}^p$ до голоморфного векторного расслоения над Δ такого, что ∇ имеет полюс порядка не более 1 относительно S и вычет ∇ имеет собственные значения в полуинтервале $(-1,0]$.

Пусть H'' — *расширение Брискорна* [30], которое есть образ $\Omega^n(B)$ при отображении $\omega\mapsto\omega/df$. Пусть $F^p(S)=S\cap\cap\left(\nabla_{\frac{d}{dz}}\right)^{n-p}\cdot H''$ и обозначим через $F^p(S_0)$ индуцированную фильтрацию на слое S_0. Тогда Шерк и Стинбринк, Фам и М. Саито [166], [149], [151] доказали, что она совпадает с ходжевой фильтрацией Стинбринка в исчезающих когомологиях. Доказательство состояло в компактификации и использовании описания Гриффитса фильтрации Ходжа для гладких проективных гиперповерхностей в терминах вычетов мероморфных дифференциальных форм.

М. Саито развил теорию модулей Ходжа и смешанных модулей Ходжа основываясь на фильтрованных $\mathbf{D}$-модулях, которые будут обсуждаться в § 4. В частности, он дал общий метод изучения исчезающих циклов, основанный на $\mathbf{D}$-модульной конструкции исчезающих циклов. Упомянем здесь два результата, об исчезающих циклах, полученные этими методами.

Первый из них, принадлежащий М. Саито, дает доказательство гипотезы Стинбринка о «спектре» гиперповерхностной особенности. Пусть T — автоморфизм конечного порядка смешанной структуры Ходжа на V. Тогда спектр $\mathrm{Sp}(H, T)$ есть полином Лорана

$$\sum_{\alpha\in\mathbf{Q}} n_\alpha t^\alpha,\quad n_\alpha=\dim \mathrm{Gr}_F^p V_{\mathbf{C},\lambda},$$

$$\lambda=e^{-2\pi\alpha},\quad -p<\alpha<p+1.$$

Для аналитического пространства $X\hookrightarrow\mathbf{C}^n$ и $f:X\cap B\to\mathbf{C}$ Стинбринк определил спектр $\mathrm{Sp}(f, 0)$ ростка f в нуле как

$$\mathrm{Sp}(f,0)=\sum_j(-1)^{n-j}\,\mathrm{Sp}\,(H^j\psi_f(\mathbf{R}_B)_0)(n), T_s).$$

Гипотеза Стинбринка, доказанная М. Саито [157] описывала спектр $f+l^m$ для линейной формы f и $m\gg0$. в терминах $\mathrm{Sp}(f)$ и геометрии сингулярного множества для f.

Второй результат, принадлежащий М. Саито и Цукеру [162] давал условия вырождения в члене E_3 спектральной последовательности с E_2-членом $H^p(\Delta, \mathcal{H}^q(\psi_f(\mathbf{Q}_X))$ для собственного морфизма $f:X\to\Delta$ и кэлерова многообразия X. Это давало доказательство гипотезы Илюзье и улучшало методы [195].

§ 3. L_2-когомологии

Пусть M — риманово многообразие, E — метризуемая локальная система на M (то есть E — пучок горизонтальных сечений плоского комплексного векторного расслоения с эрмитовым скалярным произведением, не обязательно плоским). Если φ — E-значная дифференциальная форма на M, то ее поточечная длина $|\varphi|$ есть функция на M; интегрируя ее по риманову объему, получаем индуцированную L_2-полунорму

$$\|\varphi\|^2=\int_M |\varphi|^2\, dV_M.$$

Введем следующие обозначения:

$$\left.\begin{aligned}
&A^{\cdot}(M, \mathrm{E})-C^{\infty}\text{-комплекс де Рама на } M \text{ с коэффициентами в } \mathrm{E};\\
&L^{\cdot}(M, \mathrm{E})-\text{область задания } d \text{ (определяемого в слабом смысле)}\\
&\qquad \text{в терминах } L_2 \text{ форм с измеримыми коэффициентами},\\
&A^{\cdot}_{(2)}(M, \mathrm{E})-\text{область определения } d \text{ для } L_2C^{\infty}\text{-форм},\\
&L^{\cdot}_{(2)}(M, \mathrm{E})-\text{область определения } d \text{ для } L_2 \text{ форм с измеримыми}\\
&\qquad \text{коэффициентами.}
\end{aligned}\right\}\quad (3.1)$$

Отметим, что понятия измеримости, множества меры нуль, локальной интегрируемости внутренним образом определяются на любом C^{∞}-многообразии, не зависимо от римановой структуры. Локально интегрируемая i-форма φ определяет *поток* (распределение, определенное на гладких формах с компактными носителями) T_{φ} коразмерности i по формуле

$$T_{\varphi}(\psi)=\int_M \varphi\wedge\psi;$$

обратно, поток определяет форму φ с точностью до почти всюду. В случае, когда φ гладка, имеет место *теорема Стокса*

$$T_{\varphi}(\psi)=\int_M d\varphi\wedge\psi=(-1)^{i+1}\int_M \varphi\wedge d\psi,$$

так что для любого потока T коразмерности i определен поток dT коразмерности $i+1$ по формуле

$$(dT)\psi=(-1)^{i+1}T(d\psi).$$

Это определяет (в слабом смысле) *внешний дифференциал потока.* По определению, локально L^2 i-форма φ принадлежит $L^i(M, \mathrm{E})$ в том и только том случае, если поток dT_{φ} задается локально L_2 $(i+1)$-формой и т. д.

Имеем диаграмму комплексов

$$\begin{array}{ccc} A^\cdot(M,E) & \xrightarrow{\alpha} & L^\cdot(M,E) \\ \uparrow\iota & & \uparrow k \\ A^\cdot_{(2)}(M,E) & \xrightarrow{\beta} & L^\cdot_{(2)}(M,E) \end{array} \qquad (3.2)$$

Здесь α и β—квазиизоморфизмы (см. [43, § 8]); в случае, когда M компактно, ι и k—изоморфизмы. Отметим, что когда M является внутренностью многообразия с углами $\overline{M}$, то $A^\cdot(M, \mathrm{E})$ также квазиизоморфен его подкомплексу $A^\cdot(\bar{M}, \mathrm{E})$, состоящему из форм, гладких вплоть до границы; то же верно и для $A^\cdot_{(2)}$.

Определение 3.1. *L_2-когомологиями* M с коэффициентами в E, $H^\cdot_{(2)}(M, \mathrm{E})$, называются когомологии комплекса $L^\cdot_{(2)}(M, \mathrm{E})$.

Замечание 3.2. Из приведенной выше диаграммы следует, что существует каноническое отображение

$$H^\cdot_{(2)}(M, \mathrm{E}) \to H^\cdot(M, \mathrm{E}), \qquad (3.3)$$

которое является изоморфизмом, в случае когда M (или $\overline{M}$) компактно. Важно, что мы различаем L_2-когомологии от их образа при этом отображении.

Очевидно, что (3.1) определяет также предпучки на M, ассоциированные с которыми пучки обозначаются рукописными латинскими буквами, например, $\mathscr{A}^\cdot(M, \mathrm{E})$ и т. д. Заметим, что $\mathscr{A}^\cdot_{(2)}(M, \mathrm{E}) = \mathscr{A}^\cdot(M, \mathrm{E})$ и аналогично—для $\mathscr{L}^\cdot$. Пучки $\mathscr{A}^\cdot(M, \mathrm{E})$ и $\mathscr{L}^\cdot(M, \mathrm{E})$—тонкие, так как они являются $\mathscr{A}^0(M, \mathbf{C})$-модулями. Их гиперкогомологии есть $H^\cdot(M, \mathrm{E})$.

Для представления L_2-когомологий как гиперкогомологий комплекса пучков, необходимо произвести некоторые компактификации $j\colon M \hookrightarrow M^*$ для получения глобального L_2 условия. По данному M^* подпучок $\mathscr{L}^\cdot_{(2)}(M^*, \mathrm{E})$ пучка $j_*\mathscr{L}^\cdot(M, \mathrm{E})$ определен предпучком

$$U \text{ открытое в } M^* \mapsto L^\cdot_{(2)}(U \cap M, \mathrm{E}.) \qquad (3.4)$$

Это дает комплекс тонких пучков в том случае, когда выполнены некоторые условия на метрику M и границу M в M^*: здесь должны существовать срезающие функции с ограниченными дифференциалами (см. [194, с. 175]).

Предложение 3.3. При выполнении последнего условия

$$H^\cdot_{(2)}(M, \mathrm{E}) \simeq H^\cdot\left(M^*, \mathscr{L}^\cdot_{(2)}(M^*, \mathrm{E})\right).$$

Для метризуемых комплексных векторных расслоений можно определить L_2 когомологии Дольбо аналогичным образом,

заменяя d на $\bar{\partial}$-оператор. Однако нам потребуются только L_2 d-когомологии.

Основное достоинство L_2 когомологий заключается в справедливости для них теоремы Ходжа, причём в очень общей формулировке. Пусть

$$Z^i_{(2)} = Z^i_{(2)}(M, \mathbf{E})$$

—(гильбертово) пространство замкнутых L_2 i-форм и

$$B^i_{(2)} = dL^{i-1}_{(2)}(M, \mathbf{E}).$$

По определению,

$$H^i_{(2)} = H^i_{(2)}(M, \mathbf{E}) = Z^i_{(2)}/B^i_{(2)}.$$

Пусть $h^i_{(2)} = h^i_{(2)}(M, \mathbf{E})$ — ортогональное дополнение $B^i_{(2)}$ в $Z^i_{(2)}$. Справедливо соотношение

$$H^i_{(2)} \simeq h^i_{(2)} \oplus (\overline{B^i_{(2)}}/B^i_{(2)}), \tag{3.5}$$

где черта обозначает замыкание в $Z^i_{(2)}$.

Для более привычного описания $h^i_{(2)}$ напомним, что плотно определенный *сопряженный дифференциал* d^* для d есть оператор, определенный следующим образом. Для L_2 i-формы φ и $L_2(i-1)$-формы η соотношение $d^*\varphi = \eta$ означает, что оператор

$$T(\psi) = \langle \varphi, d\psi \rangle, \quad \psi \in L^{i-1}_{(2)}(M, \mathbf{E})$$

ограничен в L_2-норме, поэтому он представим L_2 $(i-1)$-формой, а именно, формой η. Хорошо известно, что d^* есть замыкание его ограничения δ на гладкие формы с компактными носителями, для которого, по теореме Стокса,

$$\delta\varphi = (-1)^i *^{-1} d *,$$

где $*$ — *оператор Ходжа* «звездочка», определенный с помощью метрик M и $\mathbf{E}$:

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_M \varphi \wedge (*\bar{\psi}).$$

Тогда

$$h^i_{(2)} = \{\varphi \in L^i_{(2)}(M, \mathbf{E}) \mid d\varphi = 0, \ d^*\varphi = 0\}.$$

По общим соображениям получаем

Предложение 3.4. i) $h^i_{(2)} \subset \{L^2$-решения уравнения Лапласа для $\mathbf{E}$-значных i-форм$\}$.

ii) $\bar{B}^i_{(2)}/B^i_{(2)}$ — бесконечномерное векторное пространство, если оно не нулевое.

Отсюда вытекает

Предложение 3.5 (*Теорема Ходжа*). Если $B^i_{(2)}$ замкнуто в $Z^i_{(2)}$, то $H^i_{(2)} \simeq h^i_{(2)}$. Это выполнено, в частности, если $H^i_{(2)}$ конечномерно.

Если M полно, то нетрудно видеть, что утверждение i) в предложении 3.4 дает равенство [7], [83]. Это приводит к следующему утверждению:

Следствие 3.6. *Если M полно и $B^i_{(2)}$ замкнуто, то $H^i_{(2)}$* изоморфно пространству L^2 гармонических **E**-значных i-форм.

Наконец, рассмотрим случай, когда M — компактное кэлерово многообразие, и $\mathbf{E}=\mathbf{C}$. Поскольку лапласиан переводит (p, q)-формы в (p, q)-формы, то справедливо

Предложение 3.7 (*Теорема разложения Ходжа*). Пусть M — компактное кэлерово многообразие с конечномерными L_2-когомологиями. Тогда разложение гармонических форм на компоненты чистой бистепени индуцирует структуру Ходжа

$$H^i_{(2)}(M, \mathbf{C}) \simeq \bigoplus_{p+q=i} H^{p,q}_{(2)}(M).$$

В силу замечания 3.2, это утверждение содержит классическую теорию Ходжа, то есть случай компактного M (см. § 1).

Делинь обобщил предложение 3.7 на вариации структур Ходжа [192, §§ 1—2]. Опишем это обобщение. Пусть X — эрмитово комплексное многообразие, $\mathbf{V}$ — метризованная локальная система, содержащая поляризованную вариацию структуры Ходжа веса m над X. Пусть $A^{p,q;r,s}_{(2)}(X, \mathbf{V})$ — пространство L_2 p, q)-форм со значениями в (r, s) расслоении Ходжа для $\mathbf{V}$. Тогда

$$A^i_{(2)}(X, \mathbf{V}) = \bigoplus_{\substack{p+q=i \\ r+s=m}} A^{p,q;r,s}_{(2)}(X, \mathbf{V})$$

(ортогональная прямая сумма). В терминах тотальной голоморфной степени

$$A^{(P,Q)}_{(2)}(X, \mathbf{V}) = \bigoplus_{\substack{p+r=P \\ q+s=Q}} A^{p,q;r,s}_{(2)}(X, \mathbf{V}).$$

Если метрика на X кэлерова, лапласиан для $\mathbf{V}$-значных форм сохраняет бистепень (P, Q). Это дает в условиях предложения 3.7 ходжеву структуру веса $i+m$:

$$H^i_{(2)}(X, \mathbf{V}) \simeq \bigoplus_{P+Q=i+m} H^{(P,Q)}_{(2)}(X, \mathbf{V}). \tag{3.7}$$

Если X компактно, последнее соотношение допускает более ясное описание (ср. с (1.1)). Голоморфный комплекс де Рама для $\mathbf{V}$, $\Omega^{\cdot}_X \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{V}$, есть резольвента $\mathbf{V}$ и допускает убывающую фильтрацию F, в которой F^p — подкомплекс

$$\mathcal{F}^p \to \Omega^1_X \otimes \mathcal{F}^{p-1} \to \Omega^2_X \otimes \mathcal{F}^{p-2} \to \ldots, \tag{3.8}$$

так что Gr_F^p есть $\mathcal{O}_X$-линейный комплекс

$$\mathcal{F}^p/\mathcal{F}^{p+1} \to \Omega_X^1 \otimes (\mathcal{F}^{p-1}/\mathcal{F}^p) \to \Omega_X^2 \otimes (\mathcal{F}^{p-2}/\mathcal{F}^{p-1}) \to \ldots \qquad (3.9)$$

Предложение 3.8. Пусть X — компактное кэлерово многообразие.

i) пара $K_A = \mathbf{V}_A$, $K_C = (\Omega_X^{\cdot} \otimes_A \mathbf{V}_A, F)$ определяет когомологический комплекс Ходжа веса m (определение 1.7);

ii) фильтрация, индуцированная F на $H^i(X, \mathbf{V})$ есть фильтрация Ходжа, ассоциированная с (3.7)

В связи с предложением 3.8, естественно ожидать большего в геометрической ситуации. Пусть $f: Z \to X$ — гладкий проективный морфизм. Имеем ассоциированную спектральную последовательность Лере

$$E_2^{p,q} = H^p(X^{\cdot}, R^q f_* \mathbf{Q}) \Rightarrow H^{p+q}(Z, \mathbf{Q}). \qquad (3.10)$$

С точностью до замены индексов она есть спектральная последовательность канонической фильтрации τ на $\mathbf{R}f_* \mathbf{Q}_Z$. Приятным следствием классической теории Ходжа является

Теорема 3.9 ([53], см. также [89, III, § 3]). Спектральная последовательность (3.10) вырождается в члене E_2.

Это дает

$$\mathrm{Gr}_m^{\tau} H^k(Z, \mathbf{Q}) \simeq H^{k-m}(X^{\cdot}, R^m f_* \mathbf{Q}). \qquad (3.11)$$

Это соотношение важно ввиду справедливости следующего утверждения.

Предложение 3.10. (Делинь, см. [192, (2.16)]). Пусть X компактно. Тогда

i) Фильтрация τ на $H^k(Z, \mathbf{Q})$ есть фильтрация подструктурами Ходжа.

ii) Если в правой части задана ходжева структура из предложения 3.8, то изоморфизм (3.11) есть изоморфизм структур Ходжа.

Замечание 3.11. Фильтрация структуры Ходжа ходжевыми подструктурами расщепляется поляризацией. Поэтому $\mathbf{Q}$-структура Ходжа $H^{k-m}(X, \mathbf{R}^m f_* \mathbf{Q})$ есть прямой фактор $H^k(Z, \mathbf{Q})$.

Во многих ситуациях, когда X допускает лишь хорошую кэлерову компактификацию, следует ожидать (см. конец введения в [56, III]), что существует естественная смешанная структура Ходжа на $H^{\cdot}(X, \mathbf{V})$, для которой справедлив аналог утверждения предыдущего предложения. Случай, когда X — кривая также доставляет существенные сложности и окончательный результат по этому поводу имеется в [192]. В этой работе ходжева структура индуцируется фильтрациями F и W на логарифмическом комплексе де Рама $\Omega_{\bar{X}}^{\cdot}(\log D) \otimes \overline{\mathcal{V}}$ — подкомплексом комплекса $j_*(\Omega_X^{\cdot} \otimes_C \mathbf{V})$, квазиизоморфного $\mathbf{R}j_* \mathbf{V}$.

Фильтрация F описывается просто: она есть ограничение фильтрации, индуцированной (3.8) с помощью прямого образа: F^p есть

$$\overline{\mathscr{F}}^p \to \Omega^1_{\overline{X}}(\log D) \otimes \overline{\mathscr{F}}^{p-1}.$$

Рассмотрение весовой фильтрации W приводит к L_2-когомологиям (в современной трактовке это предшествовало смешанной теории Ходжа). Для этого использовалась метрика Пуанкаре на X, то есть такая метрика, что на диске Δ лежащем в D имеется следующая асимптотика для Δ^*:

$r^{-2}\log^{-2}r[dr^2+(rd\,\theta)^2]$ в полярных координатах (τ, θ).

Теорема 3.12. Пусть X — кривая с метрикой Пуанкаре и $\mathbf{V}$ метризовано метрикой Ходжа. Тогда

i) $\mathscr{L}^{\cdot}_{(2)}(\overline{X}, \mathbf{V})$ есть резольвента $j_*\mathbf{V}$. Следовательно,

$$H^i(\overline{X}, j_*\mathbf{V}) \simeq H^i_{(2)}(X, \mathbf{V})$$

дает поляризованную структуру Ходжа веса $i+m$.

ii) Голоморфный L_2 комплекс

$$\Omega^{\cdot}_{(2)}(\overline{X}, \mathbf{V}) = j_*\left(\Omega^{\cdot}_{\overline{X}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{V}\right) \cap \mathscr{L}^{\cdot}_{(2)}(X, \mathbf{V})$$

есть также и резолвента $j_*\mathbf{V}$ и фильтрация F (индуцированная (3.8)) на $H^{\cdot}(\overline{X}, j_*\mathbf{V})$ есть фильтрация Ходжа, возникающая из i).

iii) $\Omega^{\cdot}_{(2)}(\overline{X}, \mathbf{V})$ есть подкомплекс комплекса $\overline{\mathscr{V}} \to \nabla\overline{\mathscr{V}}$, и включение есть фильтрованный квазиизоморфизм относительно F.

Замечание 3.13. Если задана асимптотика ходжевой нормы (2.12), то комплекс $\Omega^{\cdot}_{2}(X, \mathbf{V})$ может быть явно описан в терминах весов локальной монодромии. На диске Δ с центром в точке из D он задается как (см. [192, (4.4)]):

$$W_m(\overline{\mathscr{V}}) \to (dz/z)\, W_{m-2}(\overline{\mathscr{V}}),$$

где $w_l(\overline{\mathscr{V}}) = \{\sigma \in \overline{\mathscr{V}} \mid \sigma(0) \in W_l V(0)\}$.

Кратко, смешанная теория Ходжа получается так (важен только случай $i=1$). Первый нетривиальный весовой уровень $H^1(X, \mathbf{V})$ есть $H^1(\overline{X}, j_*\mathbf{V})$. Остальное получается с помощью пределов Шмида смешанных структур Ходжа в точках D с помощью вычетов $\Omega^{\cdot}_{\overline{X}}(\log D) \otimes \overline{\mathscr{V}} / \nabla\overline{\mathscr{V}}$ (см. [192, § 13] или § 7). Более того, имеет место

Предложение 3.14 ([192, (15.5)]). Если $\mathbf{V}_{\mathbf{Q}} = R^m f_* \mathbf{Q}$ для некоторого гладкого проективного морфизма $f: Z \to X$, то смешанная структура Ходжа на $H^i(X, \mathbf{V}_{\mathbf{Q}})$ индуцирована смешанной структурой Ходжа на $H^{i+m}(Z, \mathbf{Q})$.

Доказательство теоремы 3.12 основано на асимптотике нормы Ходжа, которая следует из теоремы об $SL(2)$-орбите для одной переменной (теорема 2.11). Обобщение на многомерное X также возможно, ввиду наличия асимптотики нормы в случае нескольких переменных (предложение 2.18). Для этого, заметим, что X допускает (необходимо полную) кэлерову метрику с особенностями Пуанкаре на D (см. [192, (3.2)]).

Теорема 3.15 ([42], [117]). Пусть X допускает кэлерову метрику с особенностями Пуанкаре на D, $\mathbf{V}$ метризована метрикой Ходжа. Тогда $\mathscr{L}^{\cdot}_{(2)}(\bar{X}, \bar{\mathbf{V}})$ квазиизоморфен комплексу $\underline{IC}^{\cdot}(\bar{X}, \mathbf{V})$ извращенных в среднем коцепей.

Следствие 3.16. $\underline{IH}^{i}(\bar{X}, \mathbf{V}) \simeq H^{i}_{(2)}(X, \mathbf{V})$ допускает ходжеву структуру веса $i+m$.

Комплекс $\underline{IC}^{\cdot}(\bar{X}, \mathbf{V})$ из теоремы 3.15 квазиизоморфен «пучку Делиня» [88, II, § 3], который допускает следующее описание.

Пусть $D(k) = \{z \in D \mid z$ принадлежит, по крайней мере, k компонентам $D\}$,

$$U(k) = \bar{X} - D(k), \quad j_k : U(k) \hookrightarrow U(k+1).$$

Тогда $\bar{X} = U(n+1)$, где $n = \dim_{\mathbb{C}} X$, $X = U(1)$ и $j = j_n \circ j_{n-1} \circ \ldots \circ j_1$. Пучок Делиня есть

$$\tau_{\leqslant n-1} \mathrm{R} j_{n*} \ldots \tau_{\leqslant 1} \mathrm{R} j_{2*} [\tau_{\leqslant 0} \mathrm{R} j_{1*} \mathbf{V}].$$

Для доказательства теоремы 3.15 нужно показать, что на пунктированном полидиске Пуанкаре

$$H^{\cdot}_{(2)}((\Delta^*)^n, \mathbf{V}) \simeq \underline{IH}^{\cdot}(\Delta^n, \mathbf{V}). \tag{3.12}$$

В случае унипотентной локальной монодромии, правая часть допускает комбинаторное описание в терминах (коммутирующих) логарифмов монодромии N_j следующим образом. Для произвольного подмножества $J \subset \{1, \ldots, n\}$ положим

$$N_J = \prod_{j \in J} N_j, \quad K_J(V) = N_J V, \quad K^i(V) = \bigoplus_{|J|=i} K_J(V).$$

Получаем конечномерный комплекс $K^{\cdot}(V)$ дифференциалы которого — суммы элементов

$$\varepsilon_{j,J} N_j : K_{J-\{j\}}(V) \to K_J(V)$$

для всех $j \in J$; где $\varepsilon_{j,J}$ равно 1 или —1 если j на нечётном или четном месте при упорядочении J в порядке возрастания.

Лемма 3.17.

$$\underline{IH}^{\cdot}(\Delta^n, \mathbf{V}) \simeq H^{\cdot}(K^{\cdot}(V)).$$

Доказательство (3.12) основано на оценке (2.18) нормы Ходжа и следствии того факта, что N_j задают нильпотентную орбиту (определение 2.3). Пусть $N = N^n = \sum_{j=1}^{n} N_j$. Определим фильтрацию Wt на $K^{\cdot}(V)$ как

$$Wt_l(K_J) = K_J(W_{l+|J|}V),$$

где W — весовая фильтрация нильпотентного эндоморфизма N. Тогда справедливо

Предложение 3.18 ([42], [117]). i) $N: K^{\cdot}(V) \to K^{\cdot}(NV)$ индуцирует нулевое отображение в когомологиях.

(ii) (*«чистота»*). Любой когомологический класс в $H^{\cdot}(K^{\cdot}(V)$ имеет представителя в $Wt_0 K^{\cdot}(V)$.

Изоморфизм (3.12) следует из предложения 3.18 ii), поскольку, по существу, Wt контролирует асимптотику интегранта в соответствующей L_2-полунорме.

Для построения подкомплекса $\mathscr{S}^*$ в $\Omega^{\cdot}_{\overline{X}}(\log D) \otimes \overline{\mathscr{V}}$ можно использовать $K^{\cdot}(V)$.

На $\overline{X}$ корректно определен

$$\mathscr{S}^l = \{\varphi \in \Omega^l_{\overline{X}}(\log D) \overline{\otimes} \mathscr{V} : \mathrm{Res}_{\widetilde{D}_J} \varphi \in N_J V\}. \tag{3.13}$$

Теперь мы в состоянии предположить (см. [117, предложение 3.4.3]), что справедлива

Гипотеза 3.19. Комплекс $\mathscr{S}^*$ вместе с фильтрацией F, индуцированной (3.8) дополняет $\underline{IC}^{\cdot}(X, \mathbf{V}_A)$ до когомологического A-комплекса Ходжа веса m так, что задаваемая им ходжева структура на $\underline{IH}^i(\overline{X}, \mathbf{V})$ совпадает с ходжевой структурой из следствия 3.16.

Конструкция смешанной структуры Ходжа на $H^{\cdot}(X, \mathbf{V})$ такой, что F задано в (3.8), была установлена в [160] на основе техники смешанных модулей Ходжа [153] (см. § 4 и [116]). Попытка передоказать справедливость этой конструкции без использования $\mathbf{D}$-модулей — весьма правдоподобная — была предпринята в [75]. Изоморфизм L_2-когомологий и когомологий пересечения в следствии 3.16 привел к множеству аналогичных и результатов, и гипотез в других контекстах. Например, основным является следующий. Пусть $\overline{X}$ — комплексное проективное многообразие и X — множество его регулярных точек. Пусть за-

дано проективное вложение

$$\overline{X} \hookrightarrow \mathbf{P}^N,$$

тогда можно рассмотреть метрику Фубини—Штуди на $\overline{X}$, сужение которой на X дает кэлерову метрику. Класс этой метрики является внутренним для $\overline{X}$, в том смысле, что ее асимптотическое поведение в любой точке $\overline{X}$ зависит только от аналитического ростка $\overline{X}$ в этой точке. С другой стороны, это — не полная метрика (кроме случая, когда $X=\overline{X}$), так что нельзя надеятся на то, что для гармонических форм, представляющих L_2-когомологические классы (см. предложение 3.5), их (p, q)-компоненты ведут себя подобным образом. Чигер, Горецки и Макферсон высказали следующую гипотезу.

Гипотеза 3.20 ([45]). Для проективного многообразия $\overline{X}$ с метрикой Фубини—Штуди

i) $H^{\cdot}_{(2)}(X, \mathbf{C}) \simeq \underline{IH}^{\cdot}(\overline{X}, \mathbf{C})$.

ii) Ходжева структура индуцирована разложением L_2 гармонических форм.

Изоморфизм i) здесь понимается в локальном смысле, как в теореме 3.15. Основой гипотезы служит то, что что-то должно индуцировать чистую структуру Ходжа на когомологиях пересечения, поскольку аналогичное известно в характеристике p (см. [42] и [13, (5.3)]), а указанное выше — наиболее естественный для этого кандидат. Более того, Чигер установил аналог гипотезы 3.20 i) для римановых псевдомногообразий, метрика которых имеет конические особенности [43]. Это изучение было продолжено в [44], где было доказано утверждение ii) гипотезы 3.20 для многообразий с (аналитическими) коническими особенностями. Утверждение для общих комплексных поверхностей рассматривалось в работах Хсианга и Пати [107] и Нагазе [134], [135].

Одним из путей избежания тяжелого вопроса о справедливости (ii) для неполной метрики является подход, основанный на замене метрики Фубини—Штуди на подходящую полную кэлерову метрику на X, для которой справедливо i). Это было сделано в случае, когда $\overline{X}$ имеет изолированные особенности, в работах Сапера [163] и Озавы [137].

В некоторых специальных случаях X допускает естественную полную метрику. Например, когда X — *локально симметрическое многообразие* (фактор эрмитово-симметрического пространства G/K по арифметически определенной подгруппе Γ группы G без кручения), оно допускает метрику Бергмана. Пусть $\mathbf{V}$ — локальная система, соответствующая конечномерному представлению G, метризованная с помощью так называемого допустимого внутреннего произведения. Пусть X^* компактификация Бейли—Бореля — Сатаке пространства X, являющаяся нормаль-

ным проективным многообразием. В [194, § 3] дана гипотеза типа 3.16 для $\overline{X}=X^*$. Она была доказана двумя различными путями в работе Луенды [125] и Сапера и Стерна [164] см. также [199, III]. Хотя мы и не обсуждаем здесь эти доказательства, следует отметить, что Луенда использовал некоторые результаты о вариациях структуры Ходжа, приведенные в нашей работе. Локальная система $\mathbf{V}$ содержит «локально однородные» вариации структуры Ходжа [193]. Использование теоремы разложения (см. теорему 4.13) позволяет свести задачу к теореме о локальной чистоте (предложение 3.18 (ii)) на хорошей (некоторой) резольвенте X^*.

В любом случае уместно спросить, насколько «правильна» ходжева структура, построенная с помощью L_2-когомологий. Рассмотрим сначала случай, когда $\overline{X}$ имеет только изолированные особенности. Тогда известен изоморфизм

$$\underline{IH}^i(\overline{X})\simeq\begin{cases}H^i(X), \text{ при } i<n,\\ H^i(\overline{X}), \text{ при } i>n,\\ \operatorname{im}\{H^n(\overline{X})\to H^n(X)\}, \text{ при } i=n\end{cases} \tag{3.14}$$

Теория Ходжа—Делиня (§ 1) дает априорную структуру Ходжа для правой части, эта структура, действительно, чистая и, очевидно, правильная. Метод сравнения L_2-когомологий с этим случаем изложен в [197], где сравнение проведено для некоторых из указанных случаев. Для общих многообразий $\overline{X}$ конструкция, данная Морихико Саито, также правильная, поскольку она обладает свойством совместимости. Для сравнения L_2-когомологий с этой конструкцией нужно еще разработать соответствующие методы.

§ 4. D-модули и теория Ходжа

Чтобы мотивировать появление D-модулей в теории Ходжа, рассмотрим теорию вариаций структур Ходжа с другой точки зрения. Напомним (§ 2), что для вещественной локальной системы $\mathbf{V_R}$ на гладком комплексном многообразии X вариация структуры Ходжа веса m с объемлющей локальной системой $\mathbf{V_R}$ есть убывающая фильтрация $\mathscr{F}^p(\mathscr{V})$ голоморфного векторного расслоения $\mathscr{V}=\mathscr{O}_X\otimes\mathbf{V_R}$ голоморфными векторными расслоениями, обладающая следующими свойствами:

(1) для любого $x\in X$ вещественное векторное пространство $\mathbf{V}_{\mathbf{R},x}$ (слой в точке x) вместе с фильтрацией, индуцированной $\mathscr{F}^p(\mathscr{V})$, есть чистая структура Ходжа веса m;

(2) выполнено условие трансверсальности Гриффитса (см. § 2).

Напомним также, что поляризация вариации структур Ходжа над X есть $(-1)^m$-симметричная билинейная форма S на локальной системе $\mathbf{V_R}$, индуцирующая поляризацию весовой m-структуры Ходжа на каждом слое $\mathbf{V}_{\mathbf{R},x}$ (см. § 2 по поводу деталей).

Естественно возникает вопрос об обобщении этих условий на случай, когда $\mathbf{V_R}$ заменяется на вещественный конструктивный пучок $K_\mathbf{R}$ над X. В данном случае нужно искать что-то вроде «комплекса дифференциальных операторов порядка 1» (в смысле § 1), квазиизоморфного $K_\mathbf{R} \otimes \mathbf{C}$, вместе с фильтрацией. Группы гиперкогомологий $K_\mathbf{R}$ вместе с этой фильтрацией должны давать структуры Ходжа, по крайней мере, для компактного X. Более общо, желаемые объекты должны быть функториальными относительно взятия прямого образа для проективного морфизма. Причина существования таких объектов связана с тем, что понятие *чистого комплекса Делиня* [58, II, § 6.2] должно допускать аналог в нулевой характеристике.

Например, предположим, что X — риманова поверхность, $S \subset X$ — конечное подмножество, $U := X - S$ — его дополнение и $(\mathbf{V_R}, \mathcal{F}^p(\mathcal{V}))$ — поляризованная вариация структуры Ходжа. Тогда голоморфный L^2-комплекс Цукера [192], обсуждавшийся в § 3, есть фильтрованный комплекс пучков $\Omega^{\cdot}_{(2)}(\mathbf{V})$, являющийся резольвентой конструктивного пучка $j_*(\mathbf{V_C})$, где $j: U \to X$ — включение. Цукер показал, что группы гиперкогомологий для $\Omega^{\cdot}_{(2)}(\mathbf{V})$ допускают естественные структуры Ходжа (см. § 3). Следовательно, L^2-комплекс является примером разыскиваемых нами объектов.

Причина рассмотрения пучка $j_*(\mathbf{V_C})$ как хорошего (в случае кривых, в обозначениях, введенных выше) заключается в том, что он не только конструктивен, но и (с точностью до сдвига) является извращенным пучком в смысле [15, § 4.0]. Поскольку мы ищем аналог чистого комплекса Делиня, и так как чистые комплексы, по-существу, являются прямыми суммами сдвинутых извращенных пучков, более естественно рассматривать извращенные пучки, а не конструктивные. В случае характеристики p, $j_*(\mathbf{V})$ будет чистым, если сама $\mathbf{V}$ — чистая (см. следствие 1.8.9, ввиду коммутирования операции j_* с двойственностью Вердье); наоборот, извращенные пучки $Rj_*(\mathbf{V})$ и $j_!(\mathbf{V})$ не чистые, а только смешанные.

Необходимость рассмотрения извращенных пучков вместо конструктивных была осознана после работы Каттани—Каплана—Шмида о вырождении структур Ходжа над базой высокой размерности [41], [42] (см. также § 2 и § 3). Эта работа использовала L^2 когомологии и когомологии пересечения, и комплекс пересечения $\underline{IC}_x$ работы [88, II, § 3], описанный в § 3 для специального случая, является примером (конечно, наиболее важным) извращенного пучка. Однако, другой основной причиной

их введения являются $\mathbf{D}$-модули. Даже сама теория вариации структуры Ходжа приводит к рассмотрению $\mathbf{D}$-модулей.

Чтобы пояснить эту точку зрения, обозначим через $\mathbf{D}_X$ пучок ростков голоморфных дифференциальных операторов на X (понятие дифференциального оператора порядка r можно, например, определить индукцией по r как в [15]). Пусть $\mathbf{D}_X(r)$ — подпучок дифференциальных операторов порядка $\leqslant r$. Следовательно, $\mathbf{D}_X(0)=\mathcal{O}_X$. *(Левый)* $\mathbf{D}_X$*-модуль* $\mathcal{M}$ есть пучок (левых) модулей над $\mathbf{D}_X$.

Как обычно, имеется понятие когерентности для $\mathbf{D}_X$-модуля. Если $\mathbf{D}_X$ сам когерентен, $\mathcal{M}$ когерентен в том и только том случае, если он допускает локально свободное представление

$$\mathbf{D}_X^b \to \mathbf{D}_X^a \to \mathcal{M} \to 0.$$

Для таких когерентных $\mathcal{M}$ существует, по крайней мере, локально, *хорошая фильтрация*

$$\mathcal{M} = \bigcup_{n \in \mathbf{Z}} \mathcal{M}_n;$$

это означает, что каждый $\mathcal{M}_n$ есть когерентный $\mathcal{O}_X$-модуль,

$$\mathbf{D}_X(1)\,\mathcal{M}_n \subset \mathcal{M}_{n+1} \tag{4.1}$$

и

$$\text{для } n \gg 0 \text{ в (4.1) — равенство.} \tag{4.2}$$

Такая фильтрация легко строится локально на X. Выберем когерентный $\mathcal{O}_X$-модмодуль $\mathcal{M}_0$ модуля $\mathcal{M}$, порождающий $\mathcal{M}_0$ над $\mathbf{D}_X$ и положим $\mathcal{M}_i=\mathbf{D}_X(j)\cdot\mathcal{M}_0$ для $j\geqslant 0$. Это дает хорошую фильтрацию $\mathcal{M}$. *Фильтрованный* $\mathbf{D}$*-модуль* есть $\mathbf{D}$-модуль, снабженный хорошей фильтрацией.

Хорошо известно, что $\mathbf{D}_X$-модуль $\mathcal{M}$ когерентен в том и только том случае, если он является пучком ростков сечений голоморфного векторного расслоения $\mathcal{V}$, снабженного интегрируемой связностью $\nabla : \mathcal{V} \to \Omega_X{}^1 \otimes \mathcal{V}$; действие голоморфного векторного поля ξ на $\mathbf{D}_X$-модуль задается с помощью ∇_ξ. Допустим теперь, что $\mathcal{V}$-ассоциировано с вариацией структур Ходжа и обозначим через $\mathcal{F}^p(\mathcal{V})$ соответствующую фильтрацию Ходжа. Пусть $\mathcal{M}_n$ — пучок ростков сечений $\mathcal{F}^{-n}(\mathcal{V})$. Тогда определена хорошая фильтрация $\mathcal{M}$, поскольку (4.1) эквивалентно условию трансверсальности Гриффитса.

Ввиду того, что фильтрованные $\mathbf{D}_X$-модули возникают описанным путем из вариаций структур Ходжа, они дают естественные основания для определения понятия «извращенной вариации структур Ходжа», к которому мы еще вернемся. Для мотивировки, необходимо напомнить понятие «соответствия Римана—Гильберта», дающего эквивалентность категории голономных $\mathbf{D}_X$-модулей с регулярными особенностями и категории извращенных пучков над X. Напомним сначала, что для когерент-

ного $\mathbf{D}_X$-модуля $\mathscr{M}$, характеристическое многообразие $\mathrm{Ch}(\mathscr{M})$ — корректно определенное коническое комплексно-аналитическое подмногообразие кокасательного расслоения T^*X. В соответствии с теоремой Бернштейна [28], $\mathrm{Ch}(\mathscr{M})$ имеет размерность, по крайней мере, $n=\dim X$, если $\mathscr{M}$ не нулевой.

Определение 4.1. Когерентный $\mathbf{D}_X$-модуль $\mathscr{M}$ называется *голономным*, если

$$\dim \mathrm{Ch}(\mathscr{M})\leqslant n.$$

Напомним теперь, как получается конструктивный комплекс (приводящий к извращенному пучку) исходя комплекса де Рама голономного $\mathbf{D}_X$-модуля $\mathscr{M}$. Этот комплекс де Рама $\mathrm{DR}(\mathscr{M})$ есть комплекс пучков

$$\mathscr{M}\xrightarrow{d}\Omega^1_X\otimes\mathscr{M}\xrightarrow{d}\Omega^2_X\otimes\mathscr{M}\ldots\xrightarrow{d}\Omega^n_X\otimes\mathscr{M},$$

где $\Omega^j_X\otimes\mathscr{M}$ берется в степени $j-n$. Дифференциал d легко описывается в локальных координатах $(z_1,\ldots,z_n)$:

$$d(\omega\otimes u)=\sum_{i=1}^{n}(dz_i\wedge\omega)\otimes\frac{\partial}{\partial z_i}u.$$

для дифференциальной формы ω и сечения u модуля $\mathscr{M}$.

Например, если $\mathscr{M}$ когерентен, то $\mathrm{DR}(\mathscr{M})$ — голоморфный комплекс де Рама соответствующей локальной системы, сдвинутый на n шагов влево. В общем случае справедливо следующая

Теорема 4.2. Для любого голономного $\mathbf{D}_X$-модуля $\mathscr{M}$-комплекс $\mathrm{DR}(\mathscr{M})$ есть извращенный пучок над X.

Это было, в основном, доказано Касиварой, приблизительно в 1974 г. [109], хотя понятие «извращенного пучка» было введено через несколько лет А. А. Бейлинсоном, Бернштейном и Делинем [15, § 4.0]. Мы отсылаем читателя к этой фундаментальной статье по поводу теории.

Определение 4.3. Комплекс пучков $\mathbf{C}$-векторных про странств $K^{\cdot}$ над X называется *извращенным*, если

(1) пучки когомологий $\mathscr{H}^j(K^{\cdot})$ конструктивны и их носители имеют размерность не более $-j$;

(2) когомологические пучки $\mathscr{H}^j(D(K^{\cdot}))$ двойственного по Вердье комплекса

$$D(K^{\cdot}){:}\,\boldsymbol{R}=\mathrm{Hom}_X(K^{\cdot},\mathbf{C}_X[2n])$$

также имеют носители размерности не более $-j$.

Обозначим через $\mathrm{Perv}(\mathbf{C}_X)$ категорию извращенных пучков комплексных векторных пространств с точностью до квазиизоморфизмов (см. [15, § 4.0] по поводу точного определения в терминах приведенных категорий).

Любой объект категории $\mathrm{Perv}\ (\mathbf{C}_X)$ имеет конечную длину (по крайней мере, локально над X). Неприводимыми объектами

являются комплексы пересечения $\underline{IC}_z(\mathbf{V})$ для неприводимого замкнутого аналитического подмногообразия $Z\subset X$ и неприводимой локальной системы $\mathbf{V}$ над открытым по Зарисскому подмножеством в Z.

По построению, категория $\mathrm{Perv}(\mathbf{C}_X)$ допускает антиинволюцию $K^\cdot \to D(K^\cdot)$. Соответствующая инволюция в категории голономных $\mathbf{D}_X$-модулей задается как

$$\mathscr{M} \to \mathscr{M}^* := \mathrm{Ext}^n_{\mathbf{D}_X} \otimes_{\mathcal{O}_X} \Omega^n (X)^{\otimes -1}.$$

См. [109] и [28] по поводу этой двойственности. Отметим только здесь, что тензорное произведение с $\Omega^n(X)^{\otimes -1}$ переводит правый $\mathbf{D}_X$-модуль в левый $\mathbf{D}_X$-модуль.

Как и в одномерном случае, существует много $\mathbf{D}_X$-модулей с одним и тем же комплексом де Рама. Поэтому для получения эквивалентности категорий нужно ограничиться специальным классом голономных $\mathbf{D}_X$-модулей.

Определение 4.4 Пусть $\mathscr{M}$ — голономный $\mathbf{D}_X$-модуль. Пусть Z — замкнутое аналитическое подмногообразие X и $\mathscr{I}_Z$ — соответствующий пучок идеалов в $\mathcal{O}_X$. Говорят, что $\mathscr{M}$ имеет *регулярные особенности* на Z, если естественное отображение комплексов пучков

$$\underline{\mathrm{D}}\mathrm{R}(\mathrm{R}\Gamma_{[Z]}(\mathscr{M})) \to \mathrm{R}\underline{\Gamma}(\mathrm{DR}(\mathscr{M}))$$

есть изоморфизм, где

$$\underline{\mathrm{R}}\Gamma_{[Z]}(\mathscr{M}) := \varinjlim R\,\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}_X}\left(\mathcal{O}_X/\mathscr{I}^n_Z, \mathscr{M}\right)$$

— приведенный функтор функтора $\underline{\Gamma}[z]$ алгебраической геометрии [170]. Это комплекс $\mathbf{D}_X$-модулей с голономными пучками когомологий, по теореме Касивары [110]. $\mathscr{M}$ называется *голономным $\mathbf{D}_X$-модулем с регулярными особенностями*, если он имеет регулярные особенности на любом замкнутом подмногообразии Z в X.

Это определение принадлежит Рамису [140]. Оно, по-существу означает, что когомологии комплекса де Рама для $\mathscr{M}$ с носителями в Z могут быть найдены как комплекс де Рама комплекса алгебраических локальных когомологий $\mathscr{M}$ на Z.

Теорема 4.5 *(Соответствие Римана—Гильберта)*. Функтор $\mathscr{M} \mapsto \mathrm{DR}(\mathscr{M})$ дает эквивалентность категории голономных $\mathbf{D}_X$-модулей с регулярными особенностями и категории $\mathrm{Perv}\ (\mathbf{C}_X)$ извращенных пучков комплексных векторных пространств над X.

Эта теорема принадлежит Мебкхуту [128], [129], Касиваре и Каваи [115]. На самом деле эти авторы доказали более сильную теорему, дающую эквивалентность приведенных категорий.

Существует точное соответствие между операциями на $\mathbf{D}_X$-модулях и операциями на извращенных пучках. Например, если $f: X \to Y$ — собственное комплексно-аналитическое отображе-

ние комплексно-аналитических многообразий, то для голономного $\mathbf{D}_X$-модуля $\mathscr{M}$ Касивара определил [110] комплекс $\int_f \mathscr{M}$ $\mathbf{D}_Y$-модулей, пучки когомологий которых $\mathscr{H}^j(S_f M)$ голономны. Он определяется для $d = \dim X - \dim Y$ следующим образом:

$$\int_f \mathscr{M} = \mathrm{R} f^* \left(\mathbf{D}_{Y \leftarrow X} \overset{\mathrm{L}}{\underset{\mathbf{D}_X}{\otimes}} \mathscr{M} \right) [d],$$

где $\mathbf{D}_{Y \leftarrow X}$ — пучок $(f^{-1}(\mathbf{D}_Y), \mathbf{D}_X)$-бимодулей (по нашему соглашению, первое кольцо действует слева, второе — справа). $\mathbf{D}_{Y \leftarrow X}$ равен $f^*(\mathbf{D}_Y) \otimes_{\mathcal{O}_X} \omega_{X/Y}$ (где $\omega_{X/Y} := \omega_X \otimes f^*(\omega_Y)^{\otimes -1}$ и операция тензорного произведения с этим линейным расслоением приводит к преобразованию $(\mathbf{D}_X, f^{-1}(\mathbf{D}_Y))$-бимодуля в $(f^{-1}(\mathbf{D}_Y), \mathbf{D}_X)$-бимодуль).

Эта конструкция может быть конкретизирована в случае, когда f — замкнутая иммерсия (если $(z, \ldots, z_d)$ — голоморфные функции, производные которых порождают конормальное расслоение $\mathscr{N}_{X/Y}$, то

$$\int_f \mathscr{M} = \mathscr{M}[z_1, \ldots, z_d][d]\Big)$$

и в случае, когда f — гладкое отображение $\Big($тогда $\int_f \mathscr{M}$ есть образ при $\mathrm{R} f_*$ «относительного комплекса де Рама $\mathbf{DR}_f(\mathscr{M})$»$\Big)$. Мы отсылаем читателя к [28], [115], [128] по поводу доказательства того, что комплекс де Рама для $\int_f \mathscr{M}$ изоморфен $\mathrm{R} f^*(\mathrm{DR}(\mathscr{M}))$, следовательно, комплекс де Рама для $\int_f^j \mathscr{M} := \mathscr{H}^j\left(\int_f \mathscr{M}\right)$ изоморфен j-тому извращенному пучку когомологий ${}^{\mathrm{p}}\mathscr{H}^j(\mathrm{R} f_* \mathrm{DR}(\mathscr{M}))$. Заметим, в частности, что в случае, когда Y — точка, векторное пространство $H^j\left(\int_f \mathscr{M}\right)$ есть j-тая группа гиперкогомологий $H^j(X, \mathrm{DR}(\mathscr{M}))$.

Существует также операция обратного образа на $\mathbf{D}_X$-модулях, соответствующая операции обратного образа для извращенных пучков, мы отсылаем к [129] по поводу обсуждения «шести операций Гротендика» для $\mathbf{D}_X$-модулей (см. также [28]). Далее мы опишем $\mathbf{D}_X$-модуль, соответствующий функтору ψ исчезающего цикла Гротендика и Делиня [171], который понадобится нам для изложения конструкции М. Саито.

Оператор прямого образа $\mathscr{H}^j S_f$ может быть продолжен до операции над голономными $\mathbf{D}$-модулями с хорошей фильтрацией. Это было впервые замечено Брылински [32] и точно сформулировано Ломоном [120].

Предложение и определение 4.6. Пусть $f: X \to Y$ —

собственное отображение и $\mathscr{M}$ — голономный $\mathbf{D}_X$-модуль с хорошей фильтрацией $(\mathscr{M}_n)$. Положим $d:=\dim X-\dim Y$ и определим подпучок $(\int_f^j\mathscr{M})_n$ пучка

$$\int_f^j \mathscr{M} := \mathrm{R}^{j+d} f_*\left(\mathrm{D}_{Y\leftarrow X} \overset{\mathrm{L}}{\underset{\mathrm{D}}{\otimes}} \mathscr{M}\right)$$

следующим образом:

(1) если f — замкнутая иммерсия, то

$$\left(\int_f^{-d} \mathscr{M}\right)_n := \sum_{k+l\leqslant n} f_*\left(\mathrm{D}_{Y\leftarrow X}(l) \overset{\mathrm{L}}{\underset{\mathrm{D}_X}{\otimes}} \mathscr{M}_k\right);$$

(2) если f — гладкое отображение, то

$$\left(\int_f^{j} \mathscr{M}\right)_n := \sum_{k+l\leqslant n} \mathrm{Image}\left(\mathrm{R}^{j+d} f_*\left(\mathrm{D}_{Y\leftarrow X}(l)\right) \overset{\mathrm{L}}{\underset{\mathrm{D}_X}{\otimes}} \mathscr{M}_k\right),$$

где образ относится к отображению, индуцированному на $\mathrm{R}^{j+d} f_*(-\!-)$ включением пучков, а $\mathrm{D}_{Y\leftarrow X}(l):=f^*(\mathrm{D}_Y(l)\otimes\omega_{X/Y})$;

(3) В общем случае f представляется как суперпозиция гладкого отображения и замкнутой иммерсии и фильтрация $\left(\int_f^j \mathscr{M}\right)_n$ определяется за два шага.

Тогда $\left(\int_f^j \mathscr{M}\right)_n$ есть хорошая фильтрация на D_Y-модуле $\int_f^j \mathscr{M}$.

Заметим, что этот процесс дает фильтрацию приведенного тензорного произведения $\mathrm{D}_{Y\leftarrow X} \overset{\mathrm{L}}{\underset{\mathrm{D}_X}{\otimes}} \mathscr{M}$ до применения функтора прямого образа $\mathrm{R}f_*$. В частности, получаем фильтрацию комплекса де Рама для $\mathscr{M}$ подкомплексами

$$(\mathrm{DR}(\mathscr{M}))_n := \ldots \Omega_X^j \otimes \mathscr{M}_{n-j} \to \Omega_X^{j+1} \otimes \mathscr{M}_{n-j-1} \ldots$$

Беря глобальные когомологии, получаем фильтрацию $H^j(X, \mathrm{DR}(\mathscr{M}))$, описанную в 4.6. См. [32].

Идея Брылински состояла в определении для любого комплексно-аналитического многообразия X некоторой категории голономных $\mathbf{D}_X$-модулей с регулярными особенностями, снабженных хорошей фильтрацией. Должна быть определена также операция прямого образа $\int_f^j$ для проективного морфизма f, где $\int_f^j$ определено в определении 4.6. В случае точки, фильтрованный $\mathbf{D}$-модуль есть фильтрованное векторное пространство и условие состоит в том, что фильтрация дает ходжеву структуру.

Рассмотрим теперь вопрос о том, каким образом устойчивость искомой категории относительно прямого образа приводит к ходжевым структурам на группах гиперкогомологий. Пусть $(\mathscr{M}, (\mathscr{M})_n)$ — объект нашей гипотетической категории фильтро-

ванных $\mathbf{D}_X$-модулей. Допустим, что X проективно и пусть $p: X \to \mathrm{pt}$. Тогда $\int_p{}^j(\mathcal{M})$ — фильтрованное векторное пространство. Поскольку предполагается, что оно принадлежит нашей категории относительно точки, оно допускает структуру Ходжа.

Предположим, например, что $\mathcal{M}$ имеет комплекс де Рама, совпадающий с комплексом пересечений $\underline{IC}_z$ подмногообразия Z в X. Тогда, в соответствии с гипотезой Чигера, Горецки и Макферсона [45] (см. гипотезу 3.20), существует чистая структура Ходжа на глобальных когомологиях пересечения для Z (если Z проективно). Поэтому, конкретно, мы должны найти хорошую фильтрацию $\mathcal{M}$, такую, что индуцированная фильтрация на глобальных когомологиях комплекса $\mathrm{DR}(\mathcal{M})$ есть фильтрация Ходжа этой структуры Ходжа.

Этот поиск устойчивости относительно прямого образа для проективных морфизмов может быть использован как способ построения правильных фильтраций голономных $\mathbf{D}$-модулей. Вернемся, например, к поляризованной вариации структур Ходжа $(\mathbf{V}_{\mathbf{R}}, \mathcal{F}^p(\mathcal{V}))$. Как мы видели в начале этого параграфа, имеется естественная хорошая фильтрация $(\mathcal{M})_n$ пучка $\mathcal{M}$ ростков сечений $\mathcal{V}$. Если X проективно, то Делинь доказал, что это дает ходжеву фильтрацию для поляризованной ходжевой структуры на глобальных гомологиях $\mathrm{DR}(\mathcal{M}) \simeq \mathcal{V}_{\mathbf{C}}$ (предложение 3.7). Следовательно, можно быть уверенным в существовании правильного понятия хорошей фильтрации.

Все это дает основания для следующей *гипотезы Брылински*.

Гипотеза 4.7 [32]. Существует естественно определенная фильтрация на комплексах пересечений (с твисторными коэффициентами), которая индуцирует чистые ходжевы структуры на глобальных когомологиях.

В некотором смысле эта гипотеза сформулирована М. Саито. Брылински дал точное определение хорошей фильтрации, основанное на микролокальной теории псевдодифференциальных систем с регулярными особенностями, введенными Касиварой и Каваи [115]. Такая фильтрация — правильная для базы X размерности один, в этом случае фильтрованный комплекс де Рама голономного $\mathbf{D}_X$-модуля с комплексом де Рама $j_*(\mathbf{V})$ для поляризованной вариации $\mathbf{V}$ структуры Ходжа над открытым множеством $U \xrightarrow{j} X$ фильтрованно квазиизоморфен голоморфному L^2-комплексу Цукера $\Omega^{\cdot}_{(2)}(\mathbf{V})$.

Брылински показал, что эта фильтрация обладает многими хорошими свойствами во многих примерах [32], однако с ней очень трудно работать и ее вычислять. Более того, М. Саито построил контрпример, показывающий, что эта фильтрация не является правильной в общей ситуации! [149, § 5].

М. Саито пошел по другому пути для определения категории $MH(X, n)$ чистых модулей Ходжа веса n на комплексном многообразии X. Основа его подхода содержится в объемной статье

[159]. Сводка результатов приведена в [152]. М. Саито сначала ввел категорию $MF_n(\mathbf{D}_X)$ фильтрованных $\mathbf{D}_X$-модулей $(\mathcal{M}, F)$ (фильтрация обозначается через $F_n(\mathcal{M})_{n\in Z}$), где $\mathcal{M}$ — голономный модуль с регулярными особенностями и фильтрация — хорошая. Морфизмами в этой категории являются $\mathbf{D}_X$-линейные отображения, сохраняющие фильтрацию. Эта категория — точная, если определять в ней точные короткие последовательности, как точные последовательности объемлющих $\mathbf{D}_X$-модулей, в которых морфизмы строго совместимы с фильтрациями.

Поскольку желательно обобщение вариаций структуры Ходжа, то необходима вещественная структура на извращенном пучке $\mathrm{DR}(\mathcal{M})$. Более общо, если A — подполе $\mathbf{R}$ (например, $\mathbf{Q}$), то имеется категория $\mathrm{Perv}\,(A_X)$ A-извращенных пучков над X, которая отображается на $\mathrm{Perv}(\mathbf{C}_X)$ «подъемом скаляров».

Затем М. Саито определил [152], [159] $MF_h(\mathbf{D}_X, A)$ как расслоенное произведение категорий $MF_h(\mathbf{D}_X)$ и $\mathrm{Perv}(A_X)$ над $\mathrm{Perv}(\mathbf{C}_X)$; так что объект категории $MF_h(\mathbf{D}_X, A)$ есть четверка $(\mathcal{M}, F, K, \alpha)$, где $(\mathcal{M}, F)$ — фильтрованный голономный $\mathbf{D}_X$-модуль с регулярными особенностями, K — A-извращенный пучок над X, α — изоморфизм, $\alpha: \mathrm{DR}(\mathcal{M}) \to K\otimes\mathbf{C}$. Обычно α опускается в обозначениях. «n-тый твистор Тейта» $(\mathcal{M}, F, K)$ (n) определялся как $(\mathcal{M}, F[n], K(n))$, где $F[n]_k = F_{k-n}$ и $K(n) = (2\pi i)^n K$. Можно также определить двойственный к $(\mathcal{M}, F, K)$,— найти фильтрацию на двойственном модуле $\mathcal{M}^*$ и использовать свободную фильтрованную резольвенту $\mathcal{M}$ как в [32].

Кроме этой категории $MF_h(\mathbf{D}_X, A)$ М. Саито определил полную подкатегорию $MH(X, n)$ — *категорию модулей Ходжа веса* n. Она определяется индукцией по размерности X. Решающий шаг индукции включает в себя рассмотрение «пучка почти циклов» $\psi_g(K)$ и «пучка исчезающих циклов» $\varphi_g(K)$ для конструктивного комплекса пучков K над X и непостоянной голоморфной функции g на X. Они представляют собой конструктивные комплексы пучков над $g^{-1}(0)$, и были введены и изучены в [171] (см. также определение 2.21).

Предложение 4.8. (Габбер, см. [33]). Пусть $g: X\to\mathbf{C}$ — непостоянная голоморфная функция. Если $K^\bullet$ — извращенный пучок над X, то $\psi_g(K)[-1]$ и $\varphi_g(K)[-1]$ — извращенные пучки над $g^{-1}(0)$.

Дадим далее конструкцию функторов ψ и φ на уровне голономных $\mathbf{D}$-модулей. Она принадлежит Мальгранжу [126] в случае $\mathcal{O}_X$ и Касиваре [112] — для общих голономных $\mathbf{D}_X$-модулей $\mathcal{M}$ с регулярными особенностями. Вкладывая X в $X\times\mathbf{C}$ с помощью отображения $x\mapsto(x, g(x))$, можно заменить g на проекцию на второй сомножитель $X\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}$. Поэтому можно считать, что g — гладкое.

Если g — гладко, то $X_0 := g^{-1}(0)$ — гладкая гиперповерхность. *V-фильтрация Касивары — Мальгранжа* определяется сначала на пучке $\mathbf{D}_X$ — это есть возрастающая фильтрация

$(V_\alpha \mathbf{D}_X)$, индексированная $\alpha \in \mathbf{Q}$. Пусть I_{X_0} — пучок идеалов X_0. Тогда

$$V_\alpha \mathbf{D}_X := \{P \in \mathbf{D}_X \mid P\left(I^j_{X_0}\right) \subset P^{j-[\alpha]}_{X_0} \ \forall j \in \mathbf{Z}\}.$$

В частности, $V_\alpha \mathbf{D}_X = V_k \mathbf{D}_X$ для $k=[\alpha]$. Локально можно считать, что $X = X_0 \times \mathbf{C}$, тогда $V_k \mathbf{D}_X$ порождается как $\mathbf{D}_{X_0}$-модуль элементами

$$g^i \left(\frac{\partial}{\partial g}\right)^j, \quad i-j \geqslant -k.$$

Пусть теперь $\mathscr{M}$ — когерентный $\mathbf{D}_X$-модуль. Тогда существует не более одной фильтрации $(V_\alpha(\mathscr{M}))_{\alpha \in \mathbf{Z}}$, пронумерованной рациональными числами, такой, что

(1) $\bigcup\limits_{\alpha \in \mathbf{Q}} V_\alpha(M) = M$ и любой $V_\alpha(M)$ — когерентный $V_0(\mathbf{D}_X)$-модуль;

(2) $(V_i \mathbf{D}_X)(V_\alpha(M)) \subset V_{\alpha+i}(M)$ для всех $\alpha \in \mathbf{Q}$ и $i \in \mathbf{Z}$; более того, включение $g \cdot V_\alpha(M) \subset V_{\alpha-1}(M)$ есть равенство при $\alpha < 0$

(3) для всех α действие $g\dfrac{\partial}{\partial g} + \alpha$ на $\mathrm{Gr}^V_\alpha M$ нильпотентно

Здесь через $\partial/\partial g$ обозначено произвольное векторное поле на X такое, что $[\partial/\partial g, g] = 1$. Легко видеть [112], [159, лемма 3.1.2], что если эта фильтрация V существует, то она единственна. Она называется *рациональной V-фильтрацией.* Касивара доказал, что она существует, если $\mathscr{M}$ — голономный модуль с регулярными особенностями и монодромия $\mathrm{DR}(\mathscr{M})$ квазиунипотентна [129].

Определение 4.9 (М. Саито, [159, § 3.2]). Пусть $(\mathscr{M}, F)$ — фильтрованный $\mathbf{D}_X$-модуль. Говорят, что $(\mathscr{M}, F)$ *квазиунипотентен и регулярен* на X_0, если рациональная V-фильтрация существует и выполнены следующие условия совместимости V и F:

(a) $g(F_p V_\alpha \mathscr{M}) = F_p V_{\alpha-1} \mathscr{M}, \quad \alpha < 1;$

и

(b) $\dfrac{\partial}{\partial g}(F_p \mathrm{Gr}^V_\alpha \mathscr{M}) = F_{p+1} \mathrm{Gr}^V_{\alpha+1} \mathscr{M} \cap \left(\dfrac{\partial}{\partial g}(\mathrm{Gr}^V_\alpha \mathscr{M})\right), \quad \alpha \geqslant 0.$

Построения М. Саито требовали функтора «почти циклов» $(\mathscr{M}, F, K) \mapsto \psi_g(\mathscr{M}, F, K)$ и функтора «исчезающих циклов» $(\mathscr{M}, F, K) \mapsto \varphi_g(\mathscr{M}, F, K)$ на уровне фильтрованных $\mathbf{D}$-модулей.

Конструкция 4.10. Для $(\mathscr{M}, F, K)$, что и выше,

$$\psi_g(\mathscr{M}, F, K) := \Big(\bigoplus_{-1<\alpha\leqslant 0} \mathrm{Gr}^\alpha_V(\mathscr{M}, F), \ \psi_g K[-1]\Big),$$

$$\varphi_{g,1}(\mathscr{M}, F, K) := (\mathrm{Gr}^{-1}_V(\mathscr{M}, F[-1], \varphi_{g,1} K[-1]).$$

Отображение $\mathrm{can}: \psi_g \to \varphi_{g,1}$ индуцировано $-\dfrac{\partial}{\partial g}$ и отображение $\mathrm{Var}: \varphi_{g,1} \to \psi_{g,1}(-1)$ индуцировано g.

Эта конструкция приспосабливает на случай фильтрованных $\mathbf{D}$-модулей построения Мальгранжа [126] и Касивары [112].

М. Саито доказал, что (см. [159, лемма 5.1.4]) следующие два условия эквивалентны для квазиунипотентной и регулярной вдоль $X_0=g^{-1}(0)$ тройки $(\mathcal{M}, F, K^{\cdot})$.

(I) В категории $\sim MF_h(\mathbf{D}_X, A)$, $\varphi_1(\mathcal{M})$ разлагается в прямую сумму $\ker(\mathrm{Var})$ и $\mathrm{Im}(\mathrm{can})$;

(II) В $MF_h(\mathbf{D}_X, A)$ имеется разложение

$$(\mathcal{M}, F, K^{\cdot})=(\mathcal{M}_1, F_1, K_1^{\cdot})\oplus(\mathcal{M}_2, F_2, K_2^{\cdot}),$$

где $\mathcal{M}_2$ имеет носитель в X_0, а $\mathcal{M}_1$, F_1, $K_1^{\cdot}$ не имеют субъектов или фактор объектов с носителями в X_0.

Наконец, мы можем вернуться к индуктивному определению [159, § 5.1] полной подкатегории $MH(X, A, n)$ в $MF_h(\mathbf{D}_X, A)$ чистых модулей Ходжа веса n. Во-первых, пусть $MF_h(\mathbf{D}_X, A)_{(0)}$ — полная подкатегория $MF_h(\mathbf{D}_X, A)$, объекты которой удовлетворяют (I) или (II) для произвольной g. Тогда $MH(X, A, n)$ есть наибольшая полная подкатегория $MF_h(\mathbf{D}_X, A)_{(0)}$, для которой выполнены следующие два условия:

(1) Объект $MH(X, A, n)$ с носителем $\{x\}$ имеет вид $(\mathcal{M}, F, K)=i_*(H_{\mathbf{C}}, F, H_A)$ для включения $i:\{x\}\hookrightarrow X$, где $(H_{\mathbf{C}}, F, H_A)$ — чистая A-структура Ходжа веса n с возрастающей фильтрацией $F_p:=F^{-p}$;

(2) Если $(\mathcal{M}, F, K)$ принадлежит $MH(X, A, n)$, то для любой непостоянной голоморфной функции g для весовой фильтрации W монодромии, сдвинутой на $n-1$ имеем:

$$\mathrm{Gr}_i^W\psi_g(\mathcal{M}, F, K)\in MH(X, A, i)$$

для всех $i\in\mathbf{Z}$, и такое же условие выполнено для $\mathrm{Gr}_i^W\varphi_{g,1}(\mathcal{M}, F, K)$.

Это завершает определение категории $MH(X, A, n)$. Заметим, что фильтрация F объекта $\mathcal{M}$ категории $MH(X, A, n)$ определяется ее сужением на открытое множество $g\neq 0$, пересекающееся с носителем любого прямого фактора $\mathcal{M}$. В [159, 3.2.2.1—3.2.2.2] показано, что

$$F_p(\mathcal{M})=\sum_{i\geq 0}\left(\frac{\partial}{\partial g}\right)^i(V_{<0}\mathcal{M}\cap j_*j^*F_{p-i}(\mathcal{M})),$$

где $j:X-X_0\hookrightarrow X$ — включение.

Для неприводимого замкнутого аналитического подмногообразия Z в X полная подкатегория $MH_Z(X, A, n)$ в $MF(X, A, n)$ определяется следующим образом: объект $(\mathcal{M}, F, K)$ принадлежит $MH_Z(X, A, n)$ в том и только том случае, если он имеет носитель Z и не допускает субобъектов или факторобъектов со строго меньшими носителями. Говорят, что $(\mathcal{M}, F, K)$ имеет *носитель строго равный* Z в этом случае. Объект в

$MH_Z(X, A, n)$ называется *«чистым модулем Ходжа веса n»* со строгим носителем Z [159, 5.1.3].

Предложение 4.11 [159, предложение 5.1.6]. $MH_Z(X, A, n)$ и $MH(X, A, n)$ — абелевы категории. Имеет место разложение

$$MH(X, A, n) := \bigoplus_{Z \subset X} MH_Z(X, A, n).$$

Любой морфизм в этих категориях — строгий относительно фильтрации F. Далее, эти подкатегории $MF_h(\mathbf{D}_X, A)$ устойчивы относительно операции прямого слагаемого.

Как побочный результат при доказательстве предложения 4.11 М. Саито получил достаточно много информации о почти циклах $\psi_g(M, F, K)$. Логарифм N монодромии индуцирует изоморфизм в категории $MF_h(\mathbf{D}_X, A)$:

$$N^i : \mathrm{Gr}^W_{n-1+i}\psi_g(\mathcal{M}, F, K) \simeq \mathrm{Gr}^W_{n-1-i}\psi_g(\mathcal{M}, F, K)(-i)$$

и морфизм вариации $\mathrm{Var} : \varphi_{g,1}(\mathcal{M}, F, K) \to \psi_{g,1}(\mathcal{M}, F, K)$ есть строгий мономорфизм.

Для получения результатов об устойчивости этих категорий относительно операции прямого образа, необходимо понятие «поляризации» модуля Ходжа $(\mathcal{M}, F, K)$. Можно считать, что $(\mathcal{M}, F, K)$ принадлежит $MH_Z(X, A, n)$ для некоторого неприводимого Z. Поляризация, в соответствии с [159, 5.23], есть спаривание $S : K \otimes K \to A_X[2n](-n)$, удовлетворяющее условиям:

P1. Если i — каноническая инволюция $K \otimes K$, то $S \circ i = (-1)^n S$, т. е. S — «$(-1)^n$ симметрично»;

P2. S рассматриваемое как морфизм из K в n-тый твистор Тейта дуального извращенного пучка $D(K) = \mathrm{R}\,\mathrm{Hom}(K, A_X[2n])$ продолжается до изоморфизма между $(\mathcal{M}, F, K)(n)$ и $D(\mathcal{M}, F, K)$;

P3. Если $Z = \{x\}$ и $(\mathcal{M}, F, K) = i_*(H_C, F, H_A)$ для $i : \{x\} \to X$ и (H_C, F, H_A) — A-структуры Ходжа, то $S = i_* S'$ для поляризации S' этой структуры;

P4. Если $\dim Z > 0$ и g — росток голоморфной функции в точке x с $g(x) = 0$ и g не равен тождественно нулю на Z, то для логарифма N монодромии двойственность

$$\mathrm{Gr}^W_{n-1+i}\psi_g S \circ (\mathrm{id} \otimes N^i) : P_N \,\mathrm{Gr}^W_{n-1+i}\psi_g K[-1] \otimes$$

$$\otimes P_N \,\mathrm{Gr}^W_{n-1+i}\psi_g K[-1] \to A_X[2\dim X](\dim X - n - i + 1)$$

есть поляризация $P_N \mathrm{Gr}^W_{n-1+i}\psi_g K[-1]$ для любого i. Здесь P_N обозначает примитивную часть относительно N. Здесь используется автодуальность фильтрации W монодромии и то, что ψ коммутирует с двойственностью Вердье. По поводу деталей см. [159].

После этих определений сформулируем первую основную теорему из [159].

Теорема 4.12 (М. Саито [159, теорема 5.3.2]). Пусть

$f: X \to Y$ — проективный морфизм гладких комплексно-аналитических многообразий и пусть l — первый класс Чженя относительно обильного линейного расслоения. Пусть $(\mathcal{M}, F, K) \in MH_Z(X, A, n)$ снабжено поляризацией S. Тогда

(1) комплекс $\int_f (\mathcal{M}, F)$ строгий и $\mathcal{H}^j \int_f (\mathcal{M}, F)$ принадлежит $MH(Y; A, n+i)$;

(2) справедлива *трудная теорема Лефшеца*: то есть l^j:

$\mathcal{H}^{-j}\left(\int_f (\mathcal{M}, F, K)\simeq \mathcal{H}^j \int_f (\mathcal{M}, F, K)(j)\right.$ есть изоморфизм;

(3) $(-1)^{(j-1)} \cdot 2f_* S \circ (\mathrm{id} \otimes l^j): P_l(\mathcal{H}^{-j}K) \otimes P_l(\mathcal{H}^{-j}K) \to A_Y[2\dim X](\dim Y - n + j)$ есть поляризация с примитивной частью $P_l(\mathcal{H}^j K)$ относительно l.

Неявно в этом утверждении содержится утверждение о том, что операция прямого образа для f в контексте фильтрованных $\mathbf{D}$-модулей (см. предложение 4.6) коммутирует с двойственностью. Заметим, что утверждение (1) теоремы в случае, когда Y — точка, дает, что спектральная последовательность

$$E_1^{p,q} = H^{p+q}(X, \mathrm{Gr}^F_{-q}\mathrm{DR}(\mathcal{M})) \Rightarrow H^{p+q}(X, \mathrm{DR}(\mathcal{M}))$$

вырождается в члене E_1. Это может быть рассмотрено как обобщение аналогичного результата о вырождении Делиня, который является центральным для его смешанной теории Ходжа (см., например, теорему 1.5). Он означает, что дифференциал комплекса строго совместим с фильтрацией F.

Предыдущая теорема может быть полезной, если действительно построены объекты с поляризацией в категории $MH_Z(X, A, n)$. В этом направлении справедлива

Теорема 4.13 [159, теорема 5.4.4.]. Пусть X — гладкое комплексно-аналитическое многообразие размерности d и $(\mathbf{V}_A, F, S)$ — поляризованная вариация ходжевых структур веса n на X. Тогда соответствующий фильтрованный $\mathbf{D}_X$-модуль есть смешанный модуль Ходжа веса n со строгим носителем X.

Следуя [159], получаем несколько следствий:

Теорема 4.14 ([159]). Теорема о разложении А. А. Бейлинсона, Бернштейна, Делиня и Габера [15, теорема 6.2.5] справедлива для $\mathbf{R}f_*(K)$, где f — проективный морфизм, K — объект категории $\mathrm{Perv}(A_X)$, содержащей модуль Ходжа на X.

Теорема 4.15 ([158] и [159]). Пусть $\mathbf{V}_A$ — поляризованная вариация структуры Ходжа веса n над открытым по Зарисскому подмножеством компактного кэлерова многообразия X. Тогда группы когомологий пересечения $IH^k(X, \mathbf{V})$ допускают поляризованные структуры Ходжа. В частности, поляризованная структура Ходжа на $IH^k(X, A)$ есть прямой фактор соот-

ветствующей структуры $H^k(\tilde{X}, A)$ для разрешения особенностей $\tilde{X}$ для X.

Существование такой структуры Ходжа было высказано в качестве гипотезы Чигером, Горецки и Макферсоном [45] (гипотеза 3.20)

М. Саито обобщил случай $\mathscr{M}=\mathcal{O}_X$ теоремы 4.10 до следующего утверждения.

Теорема 4.16. Пусть X — компактное кэлерово многообразие и $f: X \to Y$ — собственный морфизм. Тогда справедливо заключение теоремы 4.13 для $\mathcal{O}_X$.

Существует обильный запас модулей Ходжа, в соответствии со следующей теоремой.

Теорема 4.17 ([155], [160]). Пусть $j: U \to X$ — открытая иммерсия d-мерного гладкого алгебраического многообразия над $\mathbf{C}$, такая, что $D=X-U$ — дивизор с нормальными пересечениями. Пусть $\mathbf{V}$ — поляризованная вариация ходжевой структуры веса n на U такая, что $\mathbf{V}_A$ имеет квазиунипотентную локальную монодромию. Для $\alpha \in \mathbf{R}$ пусть $\mathscr{V}_X^{>\alpha}$ — расширение Делиня для $\mathscr{V}$ до векторного расслоения над X, для которого ∇ имеет полюс порядка $\leqslant 1$ и её вычеты на любой ветви D имеют спектр в $(\alpha, \alpha+1]$.

Пусть $\mathbf{D}_X$-модуль $\mathscr{M}$ есть под-$\mathbf{D}_X$-модуль $j_*\mathscr{V}$, порожденный $\mathscr{V}_X^{\geqslant -1}$. Тогда $\mathrm{DR}(\mathscr{M})$ есть реализация $\mathrm{IC}^{\cdot}(X^{\cdot}, \mathbf{V}_{\mathbf{C}})$. Зададим фильтрацию на $\mathscr{V}_X^{\geqslant -1}$ с помощью $F_p\mathscr{V}_X^{\geqslant -1} := \mathscr{V}_X^{\geqslant -1} \cap j_* F_p(\mathscr{V})$ фильтрацию $\mathscr{M}$ с помощью $F_p(\mathscr{M}) := \Sigma_i F_i(\mathbf{D}_X) F_{p-i}(\mathscr{V}_X^{\geqslant -1})$. Пусть $K := \underline{\mathrm{IC}}^{\cdot}(X^{\cdot}, \mathbf{V}_A)$. Тогда $(\mathscr{M}, F, K)$—модуль Ходжа над X веса $\overline{d+n}$. Более того, спаривание $S: K \otimes K \to \mathbf{Q}_X(-n)(2d$ дает поляризацию $(\mathscr{M}, F, K)$.

Следствие 4.18 ([160]). Пусть X — комплексное алгебраическое многообразие, $Z \subset X$ — замкнутое алгебраическое подмногообразие. Подкатегория $MH_Z(X, A, n)$, состоящая из поляризованных модулей Ходжа, эквивалентна категории поляризованных вариаций структуры Ходжа над открытым и по Зарисскому гладкими, плотными подмножествами.

М. Саито развил также теорию «смешанных модулей Ходжа» над комплексным алгебраическим подмногообразием X [153], [156], [157], [160]. Последние являются объектами категории $MHM(X)$ — полной подкатегории категории, объектами которой являются четвёрки $(\mathscr{M}, F, K; W)$, где $(\mathscr{M}, F)$ — фильтрованный $\mathbf{D}$-модуль, K — извращенный пучок над $\mathbf{R}$, $\alpha: \mathrm{DR}(\mathscr{M}) \cong K \otimes \mathbf{C}$ — изоморфизм и W — пара фильтраций на $\mathscr{M}$ и K, совместимых с α. Для $\mathscr{M}$ из $MUM(X)$ каждый $\mathrm{Gr}_j^W(\mathscr{M})$ есть поляризованный модуль Ходжа веса j. Все стандартные функторы f_*, f^*, $f_!$, ψ_g, $\varphi_{g,1}$ $\otimes$, Hom определены для MHM (—) и для приведенной категории комплексов смешанных модулей Ходжа. В частности, получается смешанная структура

Ходжа на гиперкогомологиях. Допустимые вариации смешанной структуры Ходжа в смысле определения 7.2 принадлежат этой категории.

М. Саито дал интересные приложения своей теории к исчезающим циклам. Пусть $f: X \to \mathbf{C}$ — голоморфная функция на аналитическом пространстве X. Допустим, что $X \subset \mathbf{C}^n$, $0 \in X$, и что f продолжается до функции на шаре в $\mathbf{C}^n$. Пусть $X(f; x) = B_\varepsilon \cap X_t$ — слой Милнора для малого шара B_ε, $0 < |t| \ll \varepsilon$. Пусть $i_x: \{x\} \hookrightarrow X$ — включение. Так как $H^j(X(f; x), A) = H^j(i_x^* \psi_f(A_X))$, то эта когомологическая группа снабжается естественной структурой Ходжа, ввиду функториальности $MHM(X)$ относительно ψ и i_x^*. Аналогично, $H_c^j(X(f; x), A) = H^j(i_x^! \psi_f(A_X))$ имеет смешанную структуру Ходжа, кроме того, гомологии и когомологии Бореля — Мура слоя Милнора допускают смешанные структуры Ходжа. Все они совместимы со спариванием двойственности. Форма пересечения

$$H_c^j(X(f; x), A) \otimes H_c^{2n-j}(X(f; x), A) \to A(-n)$$

является морфизмом смешанных структур Ходжа.

Теорема 4.19 ([157, теорема 2.10]). Пусть X и $X_0 = f^{-1}(0)$ имеют изолированные особенности в точке x. Обозначим через $\underline{\mathrm{IC}}_X^\cdot(\mathbf{R})$ комплекс пересечения для X (с вещественными коэффициентами). Тогда $\underline{\mathrm{IC}}_X^\cdot(\mathbf{R})$ есть когомологический комплекс Ходжа и имеет место изоморфизм $\mathrm{Gr}_\cdot^W H^n(X(f; x), \mathbf{R}) \cong L_\cdot \oplus L'$ градуированных ходжевых структур с действием нильпотентного эндоморфизма N степени -2 такого, что N^k индуцирует изоморфизмы $N^k: L_{n+k} \cong L_{n-k}(-k)$ и $N^k: L'_{n+1-k} \cong L'_{n+1+k}$. Более того, для примитивной части P_N относительно N,

$$P_N L_{n+k} \cong \mathrm{Gr}_{n-k}^W H^{-1} i_x^* \underline{\mathrm{IC}}_X^\cdot(\mathbf{R})(-k), \quad k \geqslant 0,$$

и

$$P_N L'_{n+k} \cong \mathrm{Gr}_{n-k}^W (H^{-1} i_x^* \underline{\mathrm{IC}}_{X_0}^\cdot(\mathbf{R}) / H^{-2} i_x^* \underline{\mathrm{IC}}_X^\cdot(\mathbf{R}))(-k), \quad k > 0.$$

Другое интересное приложение теории М. Саито связано с высшими вычетными спариваниями К. Саито [149]. Рассмотрим диаграмму комплексных многообразий с базовой точкой O:

$$\begin{array}{ccc} (Z, 0) & \xrightarrow{\hat{\pi}} & (X, 0) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ (S, 0) & \xrightarrow{\pi} & (T, 0) \end{array},$$

где π, q — субмерсии, $\dim S = m$, $\dim T = m-1$, $\dim X = n+m$ и $\dim Z = n+m+1$. Пусть δ_1 (соответственно, δ_2) — голоморфное векторное поле на S (соответственно, на Z) такое, что $\pi^{-1}(\mathcal{O}_T) = \{g \in \mathcal{O}_S \mid \delta_1 g = 0\}$ и $\hat{\pi}'^{-1}(\mathcal{O}_X) = \{g \in \mathcal{O}_Z \mid \hat{\delta}_1 g = 0\}$; $p_* \hat{\delta}_1 = \delta_1$.

Пусть $\mathfrak{g}$ — пучок алгебр Ли над T определенный как $\mathfrak{g} = \{\delta \in \pi_* \mathrm{Der}_S \mid [\delta_1, \delta] = 0\}$. Тогда $\mathfrak{g}$ — $\mathcal{O}_T$-свободный модуль ранга m.

К. Саито определил *гамильтонову систему* F как голоморфную функцию F на Z такую, что $F(0) = 0$ и $\hat{\delta}_1 F = 1$. Задание F эквивалентно заданию сечения ι для $\hat{\pi}$ с образом $F^{-1}(0)$ или заданию голоморфного отображения $\varphi: (X, 0) \to (S, 0)$ такого, что $q = \pi \circ \varphi$ и $\varphi = p \circ \iota$. Пусть $C \subset X$ — схема критических точек для φ. Существует естественный $\mathcal{O}_T$ гомоморфизм $\mathfrak{g} \to q_* \mathcal{O}_C$ сопоставляющий v элемент $v \cdot F|_C$. Если он биективен, то F называется *универсальным развертыванием* для $f := F|_{q^{-1}(0)}$. Предположим, что f имеет изолированную особенность в 0.

Выберем функцию t_1 на S такую, что $\delta_1(t_1) = 1$ и пусть $F_1 = t_1 - F$. Определим $\mathcal{O}_S$-модули $\mathcal{H}_F^{(-k)}$, $k \in \mathbb{N}$, следующим образом. При $k = 0$

$$\mathcal{H}_F^{(0)} := \varphi_* \Omega_{X/T}^{n+1} / dF_1 \wedge d\left(\varphi_* \Omega_{X/T}^{n-1}\right)$$

есть решетка Брискорна. Определим, по индукции, $\mathcal{H}_F^{(-k-1)} := \{\omega \in \mathcal{H}_F^{(-k)} \mid \nabla_{\delta_1} \omega \in \mathcal{H}_F^{(-k)}\}$. Пусть $r^{(0)}: \mathcal{H}_F^{(0)} \to \varphi_* \Omega_F := \Omega_{X/S}^{n+1}$ — естественное отображение. Пополнение

$$\widehat{\pi_* \mathcal{H}_F^{(0)}} := \varprojlim \pi_* \mathcal{H}^{(0)} / \pi_* \mathcal{H}^{(-k)}$$

есть, очевидно, $\mathfrak{g}$-модуль и $\mathcal{O}_T[[\delta_1^{-1}]]$-модуль.

Определим первое вычетное отображение J_F как невырожденную $\mathcal{O}_T$-билинейную форму $J_F: q_* \Omega_F \times q_* \Omega_F \to \mathcal{O}_T$,

$$J_F(\psi_1(z, t')\, dz_0 \wedge \ldots \wedge dz_n, \psi_2(z, t')\, dz_0 \wedge \ldots \wedge dz_n) =$$

$$= \mathrm{Res}_{X/T} \begin{bmatrix} \psi_1 \cdot \psi_2 dz_0 \wedge \ldots \wedge dz_n \\ \dfrac{\partial F}{\partial z_0}, \ldots, \dfrac{\partial F}{\partial z_n} \end{bmatrix},$$

где «Res» — вычет Гротендика. (Здесь мы ввели координаты t на T и (z, t') — на Z.)

Высшее вычетное спаривание К. Саито есть расширение J_F. Оно определено на (микро)локализации $\widehat{\pi_* \mathcal{H}_F} := \mathcal{O}_T[[\delta_1^{-1}]] \otimes \widehat{\pi_* \mathcal{H}_F^{(0)}} \mathcal{O}_T[[\delta_1^{-1}]]$.

Теорема 4.20 (К. Саито, [149]). Существует $\mathcal{O}_T$-билинейное отображение

$$K_F : \pi_* \widehat{\mathscr{H}}_F \times \pi_* \widehat{\mathscr{H}}_F \to \mathcal{O}_T[[\delta_1^{-1}]],$$

обладающее следующими свойствами:

(1) $K_F(\omega_1, \omega_2) = K_F(\omega_2, \omega_1)^*$, где «*» обозначает формально сопряженный к псевдодифференциальному оператору.

(2) $K_F(P\omega_1, \omega_2) = K_F(\omega_1, P^*\omega_2) = PK_F(\omega_1, \omega_2)$ $\forall P \in \mathcal{O}_T[[\delta_1^{-1}]]$.

(3) $\delta K_F(\omega_1, \omega_2) = K_F(\delta\omega_1, \omega_2) + K_F(\omega_1, \delta\omega_2)$ $\forall \delta \in \mathfrak{g}$.

(4) $\frac{\partial}{\partial \delta_1} K_F(\omega_1, \omega_2) = K_F(t_1\omega_1, \omega_2) - K_F(\omega_1, t_1\omega_2)$.

(5) Ограничение K_F на $\pi_* \widehat{\mathscr{H}}_F^{(0)}$ принимает значения в $\delta_1^{-n-1}\mathcal{O}_T[[-\delta_1^{(-1)}]]$ и конгруэнтно $J_F(r^{(0)}(-,-), r^{(0)}(-,-))$ по модулю δ_1^{-n-2}.

Существование этого высшего вычетного спаривания тесно связано с существованием «примитивной формы» и отображения периодов, которые также были изучены К. Саито.

М. Саито связал высшее вычетное спаривание с автодуальностью на исчезающих циклах. Ограничимся случаем $\mathcal{O}_T$-модулей и высшим вычетным спариванием относительно начала координат. Пусть $\mathscr{M}$ — D-модуль Гаусса — Манина для $f := F|_{q^{-1}(0)}$ с фильтрацией (F, V). Тогда $F_{-n}(\mathscr{M})$ — решетка Брискорна. Далее, высшее вычетное спаривание индуцирует точное спаривание

$$\mathrm{Gr}_V^{\alpha}\mathscr{M} \otimes \mathrm{Gr}_V^{\beta}\mathscr{M} \to \mathbf{C} \otimes \delta_1^{-1}, \quad \alpha + \beta = i.$$

С точностью до знака, это спаривание отождествляется со спариванием естественным и точным на $\varphi_f \mathbf{C}_X = H^n(X(f;\ x), \mathbf{C}_X)$, построенным М. Саито [157, § 2.7]. Это дает топологическую интерпретацию высшего вычетного спаривания.

§ 5. Когомологии Делиня—Бейлинсона

Следуя А. А. Бейлинсону, мотивировать определение когомологических групп $H^q_{\mathscr{D}}(X, \mathbf{Z}(j))$ для собственного алгебраического многообразия X над $\mathbf{C}$ можно следующим образом. Напомним сначала, что для неприводимого алгебраического подмногообразия $Z \subset X$ коразмерности j в X когомологический класс c_Z в $H^{2j}(X, \mathbf{C})$ допускает два уточнения:

(1) класс $c_{Z,H}$ в $F^j(H^{2j}(X, \mathbf{C})) = H^{2j}(X, F^j)$, где $F^j = F^j(\Omega_X^{\cdot})$ — усечение («troncation bête») голоморфного комплекса де Рама $\Omega_X^{\cdot}$; оно отражает тот факт, что c_Z — фильтрация Ходжа $\geqslant j$;

(2) класс $c_{Z,B}$ в $H^{2j}(X, \mathbf{Z}(j))$ отображающийся в c_Z включением $\mathbf{Z}(j) \hookrightarrow \mathbf{C}$; он отражает целочисленность c_Z.

Следовательно, естественно рассмотреть расслоенное произведение $H^{2j}(X, F^j)$ и $H^{2j}(X, \mathbf{Z}(j))$ над $H^{2j}(X, \mathbf{C})$. Делинь построил эту конструкцию на уровне комплексов пучков (см. книгу [147]). Напомним, что расслоенное произведение — это ядро морфизма, и ядро морфизма комплексов совпадает с конусом этого морфизма, сдвинутым вправо на 1, в случае, когда он сюръективен. Следовательно, для $j \in \mathbf{Z}$ и подкольца A в $\mathbf{R}$ Делинь определил комплекс пучков $A(j)_{\mathscr{D}}$ над X как

$$A(j)_{\mathscr{D}} = \operatorname{cone}(F^j \oplus A(j) \to \Omega_X^\cdot)[-1]. \qquad (5.1)$$

Для $j \leqslant 0$ рассматриваемый морфизм сюръективен, поэтому $A(j)_{\mathscr{D}}$ совпадает с ядром, которое изоморфно $A(j)$. Для $j \geqslant 0$ комплекс $A(j)_{\mathscr{D}}$ квазиизоморфен комплексу пучков

$$0 \to A(j) \to \mathcal{O}_X \to \Omega_X^1 \to \ldots \to \Omega_X^{j-1}. \qquad (5.2)$$

Определение 5.1. *Группами когомологий Делиня* $H^q_{\mathscr{D}}(X, A(j))$ называются гиперкогомологии комплекса пучков $A(j)_{\mathscr{D}}$, т. е.

$$H^q_{\mathscr{D}}(X, A(j)) = H^q(X, A(j)_{\mathscr{D}}).$$

Аналогично определяются когомологические группы Делиня с носителями в замкнутом подмножестве Y в X, обозначаемые через $H^q_{Y,\mathscr{D}}(X, A(j))$.

Непосредственно из определения следует, что комплексы $A(j)_{\mathscr{D}}$ и, следовательно, когомологические группы Делиня, функториальны относительно алгебраических отображений.

Из построения ясно, что комплекс пучков $A(j)_{\mathscr{D}}$ допускает разложение в различающий треугольник

$$\ldots A(j)_{\mathscr{D}} \to A(j) \oplus F^j \to \Omega_X^\cdot \to A(j)_{\mathscr{D}}[1] \ldots . \qquad (5.3)$$

Поэтому справедлина длинная точная последовательность групп

$$\ldots H^q_{\mathscr{D}}(X, A(j)) \to H^q(X, A(j)) \oplus F^j H^q(X, \mathbf{C}) \to H^q(X, \mathbf{C}) \to$$
$$\to H^{q+1}_{\mathscr{D}}(X, A(j)) \ldots \qquad (5.4)$$

и аналогичная точная последовательность для когомологических групп с носителями в замкнутом подмножестве.

Отметим, что $A(0)_{\mathscr{D}}$ квазиизоморфен A и $A(1)_{\mathscr{D}}$ изоморфен $\mathcal{O}_X / A(1)[-1]$, поэтому $\mathbf{Z}(1)_{\mathscr{D}}$ квазиизоморфен $\mathcal{O}_X^*[-1]$.

Предложение 5.2 (Делинь, см. [77, § 2]). Для алгебраического подмногообразия Z в X чистой коразмерности p существует канонический когомологический класс $c_{\mathscr{D}}(Z)$ в

$H^{2p}_{Z,\mathcal{D}}(X, \mathbf{Z}(p))$, отображающийся в класс «Бетти» для Z в $H^{2p}_Z X, \mathbf{Z}(p))$ и в класс «Ходжа» для Z в $H^{2p}_Z(X, F^p)$.

Доказательство. В построенной выше точной последовательности группа $H^{2p-1}_Z(X, \mathbf{C})$ — нулевая, по соображениям размерности. Следовательно, $H^{2p}_Z(X, \mathbf{Z}(p)_{\mathcal{D}})$ равна расслоенному произведению $H^{2p}_Z(X, \mathbf{Z}(p))$ и $H^{2p}_Z(X, F^p)$ над $H^{2p}_Z(X, \mathbf{C})$. Поэтому, существование класса $c_{\mathcal{D}}(Z)$, удовлетворяющего нужным условиям, следует из того обстоятельства, что класс Бетти и класс Ходжа имеют один и тот же образ в $H^{2p}_Z(X, \mathbf{C})$.

Замечание 5.3. Конструкцию класса Ходжа для Z (для ходжевых когомологий с носителями в Z) можно найти в [69].

Этот ход рассуждений можно обобщить на класс когомологий алгебраических циклов коразмерности p. Расширяя носитель, получаем канонический класс в $H^{2p}_{\mathcal{D}}(X, \mathbf{Z}(p))$. В случае, если γ гомологичен нулю, он связан с классом для γ в промежуточном якобиане Гриффитса $J^p = H^{2p-1}(X, \mathbf{C})/H^{2p-1}(X, \mathbf{Z}) + F^pH^{2p-1}(X, \mathbf{C})$ следующим образом. Существует треугольник в приведенной категории:

$$\mathbf{Z}(p)[-1] \to \Omega^{\cdot}/F^p[-1] \to \mathbf{Z}(p)_{\mathcal{D}} \to \mathbf{Z}(p). \qquad (5.5)$$

Он индуцирует длинную точную последовательность

$$\ldots H^{q-1}(X, \mathbf{Z}(p)) \to H^{q-1}(X, \mathbf{C})/F^pH^{q-1}(X, \mathbf{C}) \to$$
$$\to H^q_{\mathcal{D}}(X, \mathbf{Z}(p)) \to H^q(X, \mathbf{Z}(p)) \ldots \qquad (5.6)$$

Поэтому ядро отображения $H^q_{\mathcal{D}}(X, \mathbf{Z}(p)) \to H^q(X, \mathbf{Z}(p))$ изоморфно J^p.

Предложение 5.4 (Делинь, см. [19], [77], [78]). Если цикл γ коразмерности p гомологичен нулю, то когомологический класс в J^p, полученный из когомологий Делиня, совпадает с классом, построенным Гриффитсом с помощью отображения Абеля—Якоби.

Упомянем об одном примере приложения когомологий Делиня к алгебраическим циклам, принадлежащим Эл Зейну и Цукеру [77]. Пусть $f: X \to \Delta$ — проективный морфизм, где X гладко, а f гладко в пунктированном диске Δ^*. Пусть $X^* = f^{-1}(\Delta^*)$. Пусть Z — алгебраический цикл коразмерности k в X такой, что его класс в $H^{2k}(X^*, \mathbf{Z})$ равен нулю. Тогда класс Гриффитса цикла в каждой точке Δ^* может быть рассмотрен как сечение пучка

$$\mathcal{J}^k_{X^*/\Delta^*} = R^{2k-1}f_*\sigma_k(\Omega^{\cdot}_{X^*/\Delta^*})/\mathrm{im}\, R^{2k-1}f_*\mathbf{Z}$$

k-того промежуточного якобиана, где для комплекса $K^{\cdot}$, $\sigma_k(K^{\cdot})$ обозначает фактор $K^{\cdot}$ по его k-тому усечению («tronсation bête», см. § 1). Этот пучок допускает естественное расширение над Δ, именно

$$R^{2k-1}f_*\sigma_k(\Omega^{\cdot}_{X/\Delta}(\log D)/\operatorname{im} R^{2k-1}f_*\mathbf{Z}.$$

Работая с относительными когомологиями Делиня, Эл Зейн и Цукер показали, что сечения этого пучка над Δ^* продолжаются на Δ. Этот результат означает, что «нормальные функции» могут быть продолжены в начало координат.

Рассмотрим теперь замечательную конструкцию произведения $A(j)_{\mathscr{D}}\otimes A(k)_{\mathscr{D}}\to A(j+k)_{\mathscr{D}}$. Построения ниже принадлежат А. Бейлинсону [19]. Он определил произведение таким образом, что естественные отображения комплексов $A(j)_{\mathscr{D}}\to\to A(j)$ и $A(j)_{\mathscr{D}}\to F^j$ совместимы с этим произведением (заметим, что чашечное умножение отображает $F^j\otimes F^k$ в F^{j+k}). Это произведение есть в точности умножение $\cup_\alpha: A(j)_{\mathscr{D}}\otimes A(k)_{\mathscr{D}}\to\to A(j+k)_{\mathscr{D}}$ для вещественного α, определенное следующим образом:

$$f_j\cup_\alpha f_k=f_j\wedge f_k \text{ для } f_j\in F^j,\ f_k\in F^k;$$
$$a_j\cup_\alpha a_k=a_ja_k\in A(j+k) \text{ для } a_j\in A(j),\ a_k\in F^k;$$
$$a_j\cup_\alpha f_k=f_j\cup_\alpha a_k=\omega_j\cup\omega_k=0;$$
$$f_j\cup_\alpha\omega_k=(-1)^{\deg f_j}\alpha f_j\wedge\omega_k,\quad \omega_j\cup_\alpha f_k=(1-\alpha)\,\omega_j\wedge f_k;$$
$$a_j\cup_\alpha\omega_k=(1-\alpha)\,a_j\omega_k,\quad \omega_j\cup_\alpha a_k=\alpha a_k\omega_j$$

для $f_j\in F^j$, $f_k\in F^k$, $a_j\in A(j)$, $a_k\in F^k$ и ω_j, $\omega_k\in\Omega^{\cdot}$.

Предложение 5.5 ([19, § 1]) (1). Каждое $\cup_\alpha$ есть морфизм комплексов;

(2) Гомотопический класс $\cup_\alpha$ не зависит от α и обозначается через $\cup$;

(3) Умножение $\cup$ ассоциативно и коммутативно с точностью до гомотопии;

Класс $(a, f)=(1, 1)\in A(0)_{\mathscr{D}}$ есть двусторонняя единица для $\cup$.

Замечание 5.6. Аналогичная конструкция произведения основана на реализации (5.2) для $A(j)_{\mathscr{D}}$. Она есть оригинальная конструкция Делиня [11], [19].

Блох [20] использовал когомологии Делиня для установления связи классов Чженя векторных расслоений над комплексным проективным многообразием, ассоциированными с представлением фундаментальной группы, и классами Чигера—Симонса. Для формулировки его результата обозначим через $CH^k(X)_{\mathrm{hom}\simeq 0}$ подгруппу группы Чжоу алгебраических циклов коразмерности k, состоящую из циклов, гомологичных нулю.

Пусть $\Phi_k: CH^k(X)_{\mathrm{hom}\simeq 0}\to J^k$ отображение циклов Гриффитса. Заметим, что J^k может быть естественно отождествлено с $H^{2k-1}(X, \mathbf{R})/H^{2k-1}(X, \mathbf{Z})$.

Теорема 5.7 (Блох [20, теорема 3.1]. Пусть X — комплексное проективное многообразие и $\rho: \pi_1/X)\to \mathrm{U}(n)$ унитарное представление. Пусть $\mathscr{E}$ — соответствующее алгебраическое векторное расслоение над X. Для $k\geqslant 0$ пусть $c_k(\mathscr{E})\in CH^k(X)$ — классы Чженя в группе Чжоу коразмерности k. Пусть N — такое целое, что цикл $N\cdot c_k(\mathscr{E})$ гомологически тривиален. Тогда

$$\Phi^k(N\cdot c_k(\mathscr{E}))=N\cdot \widehat{c_k}(\rho),$$

где $\widehat{c_k}(\rho)\in H^{2k-1}(X, \mathbf{R})/H^{2k-1}(X, \mathbf{Z})$ — (топологический) класс Чженя Чигера — Симонса [46] для локальных систем.

По поводу обобщений теоремы 5.7, см. [178] и [198] Блохом были получены далее замечательные результаты в случае $k=2$.

Он использовал (многозначную) *дилогарифмическую функцию*

$$L_2(x):=\int_0^x \log(1-t)\frac{dt}{t}$$

для построения гомоморфизма $\varepsilon: \mathscr{A}(\mathbf{C})\to \mathbf{C}\otimes\mathbf{C}^*$, где, для любого поля F, $\mathscr{A}(F)$ — ядро отображения $F^*+F^*\to K_2(F)$. Отображение ε определяется как

$\varepsilon(a):=[\log(1-a)\otimes a]+[2\pi i\otimes \exp(L_2(a))]$.

Оказывается, что оно не зависит от ветви для $\log$ и L_2. Имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
 & & & \mathscr{B}(\mathbf{C}) \arrow[d] & \\
 & & \mathscr{A}(\mathbf{C}) \arrow[r, "\equiv"] \arrow[d, "\varepsilon"] & \mathscr{A}(\mathbf{C}) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbf{C}^* \arrow[r, "2\pi i\otimes Id"] & \mathbf{C}\otimes\mathbf{C}^* \arrow[r] & \mathbf{C}^*\otimes\mathbf{C}^* \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & & K_2(\mathbf{C}) \arrow[d] & \\
 & & & 0 &
\end{tikzcd}$$

из которой получается гомоморфизм $\Phi: \mathscr{B}(\mathbf{C})\to\mathbf{C}^*$.

Теорема 5.8 (Блох [20]) (1). Пусть B^* — образ Φ. Тогда $B^*=\Phi(\mathscr{B}(\mathbf{Q}))$ и, следовательно, счетно.

(2) Пусть $\mathscr{E}$ — алгебраическое векторное расслоение, ассоциированное с локальной системой над X и N — положительное целое, такое, что алгебраический цикл $N\cdot c_2(\mathscr{E})$ гомологически

тривиален. Тогда $\Phi^2(N\cdot c_2(\mathscr{E}))$ принадлежит образу композиции

$$H^3(X, B^*)\to H^3(X, \mathbf{C}^*)\to J^2(X).$$

Блох впервые нашел регуляторное отображение $K_2(X)\to \to H^1(X, \mathbf{C}^*)$ в случае, когда X — кривая [20], [22]. Им были найдены замечательные приложения, в частности, для дзета-функции эллиптических кривых. Делинем была найдена интерпретация этого регулятора в терминах линейного расслоения, снабженного связностью. Следующая теорема указывает на глубокую связь когомологий Делиня и итерированных интегралов в смысле Чена.

Теорема 5.9 (А. А. Бейлинсон, Блох, Делинь [11, §1—2]) Пусть X — гладкое комплексно-аналитическое многообразие.

(1) $H^1_{\mathscr{D}}(X, \mathbf{Z}(1))$ изоморфна $\mathcal{O}^*(X)$;

(2) $H^2_{\mathscr{D}}(X, \mathbf{Z}(2))$ изоморфна $H^1(X, \mathcal{O}^*_X\xrightarrow{d\log}\Omega^1_X)(1)$, следовательно, при $i=\sqrt{-1}$ — $H^1(X, \mathcal{O}^*_X\xrightarrow{d\log}\Omega^1_X)$;

(3) $H^1(X, \mathcal{O}^*_X\xrightarrow{d\log}\Omega^1_X)$ изоморфна группе изоморфных классов обратимых пучков над X снабженных связностью;

(4) Спаривание $H^1_{\mathscr{D}}(X, \mathbf{Z}(1))\times H^1_{\mathscr{D}}(X, \mathbf{Z}(1))\to H^2_{\mathscr{D}}(X, \mathbf{Z}(2))$, следовательно, может быть рассмотрено как ассоциированное обратимым функциям f и g на X линейное расслоение со связностью $(\mathscr{L}, \nabla)$;

(5) Кривизна линейного расслоения в (4) равна $d\log(f)\wedge \wedge d\log(g)$;

(6) Монодромия ∇ на контуре γ в X равна

$$\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \log(f)\,d\log(g)-\log g(p)\int_\gamma d\log(f)\right),$$

где p — точка на γ, а интегрирование производится по контуру γ начиная с p;

(7) В случае, когда X — открытое подмножество римановой поверхности $\overline{X}$ и γ — малый контур, окружающий точку q в $\overline{X}-X$, монодромия ∇ на γ равна символу Тейта $(f, g)_q$.

Замечание 5.10. (1) Изоморфизм из $H^1(\mathcal{O}^*_X\xrightarrow{d\log}\Omega^1_X)$ в группу классов изоморфизмов линейного расслоения со связностью может быть построен явным образом (см. [22]): пусть $(U_\alpha)_\alpha$ — открытое покрытие X и $h_{\alpha,\beta}\in\mathcal{O}^*(U_\alpha\cap U_\beta)$, $\omega_\alpha\in\Omega(U_\alpha)$ — 1-коцикл этого покрытия с коэффициентами в $\mathcal{O}^*_X\xrightarrow{d\log}\Omega^1_X$, то есть предположим, что выполнено $d\log(h_{\alpha,\beta})=\omega_\alpha-\omega_\beta$ на $U_\alpha\cup U_\beta$. Тогда линейное расслоение $\mathscr{L}$ определяется следующим образом: его

сечениями на открытом множестве V являются семейства голоморфных функций f_α на U_α таких, что $f_\alpha = h_{\alpha,\beta} f_\beta$ на $U_\alpha \cap U_\beta$. Связность ∇ определяется следующим образом. Если локальное сечение σ расслоения $\mathcal{L}$ задано семейством f_α, то $\nabla(\sigma)$ задается семейством 1-форм $df_\alpha + f_\alpha \omega_\alpha$.

Легко видеть, что выражение

$$\int_\gamma \log(f)\, d\log(g) - \log g(p) \int_\gamma d\log(f)$$

по модулю $2\pi i \mathbf{Z}$ не зависит от выбора $p \in \gamma$.

Существование дилогарифмической функции тесно связано с тривиальностью линейного расслоения со связностью, ассоциированной с $(f, 1-f)$.

Следствие 5.11 ([22]). Пусть X — гладкая алгебраическая кривая над $\mathbf{C}$. Существует естественное отображение из $K_2(X)$ в $H^2_{\mathcal{D}}(X, \mathbf{Z}(2))$, переводящее $\{f, g\}$ в $f \cup g$.

Мы отсылаем читателя к [141], [146] по поводу интерпретации Рамакришнана этого регулятора в терминах группы Гейзенберга.

Когомологии Делиня, определенные выше для гладких комплексно-аналитических многообразий, осмысленны для случая собственных алгебраических многообразий, но не для аффинных. Например, $H^1(X, \mathbf{Z}(1)_{\mathcal{D}}) = \mathcal{O}^*(X)$ — большая группа в этом случае. Поэтому А. А. Бейлинсон модифицировал конструкцию Делиня для гладких алгебраических многообразий, введя «условия роста» — типа условий, входящих в теорию Ходжа — Делиня.

Определение 5.12 ([11], [78]). Пусть X — гладкое квазипроективное комплексное алгебраическое многообразие и $X \xrightarrow{j} \overline{X}$ — хорошая компактификация с $D := \overline{X} - X$. Пусть $\Omega^\cdot_{\overline{X}}(\log D)$ — логарифмический комплекс де Рама — Делиня. Пусть F^p — усечение («troncation bête») комплекса (см. §1).

Существует естественный изоморфизм $Rj_* A(p) \to Rj_* \Omega^\cdot_X$ и $F^p \to Rj_* \Omega^\cdot_X$ комплексов пучков над $\overline{X}$. Определим комплекс пучков $A(p)_{\mathcal{D}}$ над $\overline{X}$ как

$$A(p)_{\mathcal{D}} = \mathrm{cone}(Rj_* A(p) \oplus F^p \to Rj_* \Omega^\cdot_X)[-1].$$

Когомологии Делиня — Бейлинсона $H^q_{\mathcal{D}}(X, A(p))$ есть группы гиперкогомологий $H^q_{\mathcal{D}}(X, A(p)) = H^q(\overline{X}, A(p)_{\mathcal{D}})$. Они не зависят от выбора $\overline{X}$ и функториальны относительно алгебраических отображений.

Точная последовательность (5.4) легко обобщается на слу-

чай когомологий Делиня—Бейлинсона. Для иллюстрации условий роста, отметим, что справедливо

Предложение 5.13 ([78, предложение 2.12]). Пусть X — гладкое проективное комплексное алгебраическое многообразие.

(1) $H^1_{\mathcal{D}}(X, \quad A(1)) = \{f \in \overline{H^0}(X, \quad j_*(\mathcal{O}_X/A(1)) : df \in H^0(X, \Omega^1_{\overline{X}}(\log D))\}$;

(2) $H^1_{\mathcal{D}}(X, \mathbf{Z}(1))$ канонически изоморфна группе обратимых регулярных функций на X.

Легко доказать следующие результаты.

Предложение 5.14 (1). Если алгебраический морфизм алгебраических гладких многообразий индуцирует изоморфизм в когомологиях с коэффициентами в A, то он также индуцирует изоморфизм групп $H^{\cdot}_{\mathcal{D}}(-, A(*))$.

(2) Когомологии Делиня—Бейлинсона гомотопически инвариантны, в том смысле, что $H^k_{\mathcal{D}}(X, A(p))$ изоморфна $H^k_{\mathcal{D}}(X\times\mathbf{A}^1, A(p))$.

Прежде чем обсудить конструкцию А. А. Бейлинсона характеров Чженя со значениями в когомологиях Делиня—Бейлинсона, необходимо обобщить эти когомологии на случай гладких симплициальных схем $X_{\cdot} = (X_n)_{n\in\mathbf{N}}$. Для этого, используем «компактификацию» $X_{\cdot} \hookrightarrow \overline{X}_{\cdot}$, где каждое $X_n \hookrightarrow \overline{X}_n$ есть хорошая компактификация. Можно реализовать комплекс Бейлинсона $A(p)_{\mathcal{D}}$ на $\overline{X}_n$, используя инъективную резольвенту пучка $A(p)$ и комплекс пучков $\Omega^{\cdot}$ над X_n. Можно добиться функториальности этих комплексов относительно фасадных отображений $\overline{X}$. Тогда комплексы Делиня—Бейлинсона над $\overline{X}_n$ организуются в симплициальный комплекс пучков над симплициальной схемой $\overline{X}$. Беря инъективные резольвенты и глобальные сечения, получаем симплициальный обьект в категории комплексов абелевых групп следовательно, двойной комплекс. Переходя к когомологиям, получаем когомологии Делиня—Бейлинсона $H^{\cdot}_{\mathcal{D}}(X_{\cdot}, A(*))$ (они не зависят от выбора компактификации). По поводу деталей см. [108].

Точная последовательность (5.6) обобщается на эту ситуацию (с помощью смешанной теории Ходжа для симплициальных схем (теорема 1.14)). Для определения классов Чженя, необходимо рассмотреть симплициальную схему $B\,\mathrm{GL}(N, \mathbf{C})$, которая является классифицирующим пространством для алгебраической группы $\mathrm{GL}(N, \mathbf{C})$. Эта симплициальная схема снабжается главным расслоением $E\,\mathrm{GL}(N, \mathbf{C}) \to B\,\mathrm{GL}(N, \mathbf{C})$ со структурной группой $\mathrm{GL}(N, \mathbf{C})$ и стягиваемым тотальным пространством, следовательно, имеются классы Чженя $c_p \in H^{2p}(B\,\mathrm{GL}(N, \mathbf{C}), A(p))$. В [56, III] доказано, что когомологии $B\,\mathrm{GL}\,CN, \mathbf{C})$ сосредоточены в четных степенях и что

$H_{\mathcal{D}}^{2p}(B\,\mathrm{Gl}(N, \mathbf{C}))=F^pH^{2p}(B\,\mathrm{Gl}(N, \mathbf{C}))$. Получается, что отображение из $H_{\mathcal{D}}^{2p}(B\,\mathrm{Gl}(N, \mathbf{C}), A(p))$ в $H^{2p}(\mathrm{Gl}(N, \mathbf{C}), A(p))$ есть изоморфизм, поэтому класс Чженя c_p в $H^{2p}(\mathrm{Gl}(N, \mathbf{C}), A(p))$ допускает единственное поднятие на $H_{\mathcal{D}}^{2p}(B\,\mathrm{Gl}(N, \mathbf{C}), A(p))$, которое также обозначается через c_p.

Поскольку $B\,\mathrm{Gl}(n, \mathbf{C})$ классифицирует главные $\mathrm{Gl}(n, \mathbf{C})$-расслоения это приводит к классам Чженя $c_p(E)\in H_{\mathcal{D}}^{2p}(X, A(p))$ для алгебраического векторного расслоения E. над комплексным алгебраическим многообразием X. Отсюда А.А. Бейлинсон определил характер Чженя ch: $K_0(X)\to\oplus_{p\geqslant 0}H_{\mathcal{D}}^{2p}(X, A(p))$, который является гомоморфизмом алгебр и определяется по c_p с помощью стандартных формул (см. определение 5.15 ниже). Затем он определил характер Чженя для высших K-групп. Мы следуем здесь изложению Суле [177], которое вполне аналогично его более ранней трактовке характера Чженя для l-адических когомологий.

Рассмотрим сначала аффинный случай $X=\mathrm{Spec}\,(R)$, где R — гладкая $\mathbf{C}$-алгебра. Существует естественный морфизм симплициальных схем $e: X\times B\,\mathrm{Gl}(N, R)\to B\,\mathrm{Gl}(n, \mathbf{C})$; в степени n; e_n есть очевидное отображение вычисления из $X\times\mathrm{Gl}(N, R)^n$ в $\mathrm{Gl}(N, \mathbf{C})^n$. Следует подчеркнуть, что $\mathrm{Gl}(N, R)$ есть дискретная схема, поэтому $X\times\mathrm{Gl}(N, R)^n$ — дизъюнктное объединение многообразий, каждое из которых изоморфно X. Значит когомологии Делиня—Бейлинсона для $X\times B\,\mathrm{Gl}(N, R)$ допускают разложение Кюннета

$$H_{\mathcal{D}}^k(X\times B\,\mathrm{Gl}\,(N, R), \mathbf{Z}\,(p))=$$
$$=\bigoplus_{i+j=k} H_{\mathcal{D}}^i\,(X, \mathbf{Z}\,(p))\otimes H^j\,(B\mathrm{Gl}\,(n, R), \mathbf{Z}).$$

Следовательно, при $m+k=2p$ класс $e^*(c_p)\in H_{\mathcal{D}}^{2p}\times(X\times B\,\mathrm{Gl}(N, R), \mathbf{Z}(p))$ индуцирует гомоморфизм $H_m(\mathrm{Gl}(N, R), \mathbf{Z})\to H_{\mathcal{D}}^k(X, \mathbf{Z}(p))$. При $m\geqslant 1$ обозначим через $c_{p,k}$: $K_m(X)\to H_{\mathcal{D}}^k(X, \mathbf{Z}(p))$, композицию этого гомоморфизма с отображением $K_m(X)\to H_m(\mathrm{Gl}(N, R), \mathbf{Z})$, которое задается отображением Гуревича для $B\,\mathrm{Gl}(N, R)^+$ («+» означает плюс-конструкцию Квиллена).

Для обобщения определения этих классов Чженя на неаффинные гладкие многообразия одним из подходов, принадлежащий. А. Бейлинсону [11], состоял в обобщении предыдущей конструкции на гладкие симплициальные схемы над $\mathbf{C}$ и был основан на том замечании, что для любого гладкого алгебраического многообразия X над $\mathbf{C}$ существует гладкая аффинная симплициальная схема $Y_\cdot$ с аугментацией $Y_0\to X$, такая, что обратный образ дает изоморфизм $H^j(X, \mathbf{Z})\to H^j(Y_\cdot, \mathbf{Z})$ (можно взять для простоты для $Y_\cdot$ нерв аффинного открытого покрытия X).

Тогда обратный образ дает также изоморфизм когомологий Деліня—Бейлинсона.

Вместо этой конструкции можно использовать конструкцию расслоенного по Зарисскому пространству $Y \to X$ со слоем — аффинным пространством $\mathbf{A}^n$ и аффинным тотальным пространством, принадлежащую Юанолу и Каруби (этот подход детализирован в [168]).

Определение 5.15 ([11]). Пусть A—$\mathbf{Q}$-подалгебра $\mathbf{R}$. *Характер Чженя*

$$\mathrm{ch}: K_m(X) \to \bigoplus_{p \geqslant 0} H_{\mathcal{D}}^{2p-m}(X, A(p))$$

определяется следующим образом: $\mathrm{ch} = \sum\limits_{p \geqslant 0} \mathrm{ch}_{p,2p-m}$, где

(1) для $m \geqslant 1$, $\mathrm{ch}_{p,k} = (-1)^{p-1}/(k-1)!\, c_{p,k}$;

(2) для $m=0$ и $p>0$

$$\mathrm{ch}_{p,2p}(x) = \frac{N_p((c_{p,2p}(x))}{p!}, \quad x \in K_0(X),$$

где N_p — p-тый полином Ньютона;

(3) $\mathrm{ch}_{0,0}(x) \in H^0(X, \mathbf{Z})$ — локально постоянная функция $\operatorname{rank}(x)$ на X.

Напомним [11], [177], что группы $K_m(X)$, где X — схема, допускают операции Адамса ψ^r и, если $K_m(X)^{(p)}$ — подгруппа $K_m(X) \otimes \mathbf{Q}$, где ψ^r действуют как умножение на r^p, справедлива «весовая декомпозиция»:

$$K_m(X) \otimes \mathbf{Q} = \bigoplus_{p \geqslant 0} K_m(X)^{(p)}.$$

Предложение 5.16 ([11]). Пусть A — $\mathbf{Q}$-подалгебра $\mathbf{R}$. Характер Чженя из определения 5.14 обладает следующими свойствами:

(1) Для данных p и k с $m=2p-k$, $\mathrm{ch}_{p,k}$ обращается в нуль на $K_m(X)^{(j)}$ при $j \neq p$.

(2) $\mathrm{ch}(y \cdot z) = \mathrm{ch}(y) \smile \mathrm{ch}(z)$ для $y \in K_i(X)$, $z \in K_j(X)$, $y \cdot z \in K_{i+j}(X)$.

А. А. Бейлинсон затем ввел *мотивные когомологии* $H^k_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(p)) := K_m(X)^{(p)}$ для $m=2p-k$. Поэтому $\mathrm{ch}_{p,k}$ может рассматриваться как отображение из $H^k_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(p))$ в $H^k_{\mathcal{D}}(X, A(p))$.

Следуя А. А. Бейлинсону [11], проиллюстрируем характер Чженя для нескольких случаев.

Пример 5.17 ([11], [147], [177]). (1) $c_{1,1}: K_1(X) \to H^1_{\mathcal{D}}(X, \mathbf{Z}(1)) = \mathcal{O}(X)^*$ есть классическое детерминантное отображение;

(2) Напомним, что $K_1(X)^{(p)}$ есть $E^{p-1,-p}$-член спектральной

последовательности Герштена, тензорно умноженный на $\mathbf{Q}$. Следовательно, $K_1(X)^{(p)}$ есть фактор группы конечных семейств (f_α) ненулевых мероморфных функций на неприводимых подмногообразиях Y_α в X коразмерности $p-1$, такой, что цикл коразмерности p, $\Sigma_\alpha \operatorname{div}(f_\alpha)$ на X есть нуль, по подгруппе, порождённой образом $K_\alpha(\mathbf{C}(z))$ для произвольного подмногообразия Z в X коразмерности $p-2$.

Для $A=\mathbf{R}$ компонента $\mathrm{ch}_{p,2p-1}$ характера Чженя для $K_1(X)$ есть отображение из $E^{p-1,-p}$ в $H_{\mathscr{D}}^{2p-1}(X, \mathbf{R}(p)) = H^{2p-2}\times \times(X, \mathbf{R}(p)) \cap H^{p-1,p-1}(X)$. Оно сопоставляет классу семейства (f_α) линейную форму на дифференциальных формах ω чистого типа $(p-1, p-1)$ с вещественным $(2\pi i)^p\omega$, определенную как

$$\omega \mapsto \sum_\alpha \int_{Y_\alpha^0} \log|f_\alpha| \wedge \omega,$$

где Y_α^0 — гладкая часть Y_α.

(3) Характер Чженя $\mathrm{ch}_{2,2}: K_2(X) \to H_{\mathscr{D}}^2(X, \mathbf{Z}(2)) = H^1(X, \mathbf{C}^*)$ (1 есть отображение, описанное в следствии 5.11.

(4) Пусть $c_p \in H_{\mathrm{cont}}^{2p-1}(\mathrm{Gl}(N, \mathbf{C}), \mathbf{R})$ — канонический неразложимый элемент, построенный Борелем [26]. Композиция отображения Гуревича с отображением $H_{2p-1}(\mathrm{Gl}(N, \mathbf{C})) \to \mathbf{R}$, индуцированным c_p, совпадает с отображением $c_{p,1}: K_{2p-1}(\mathbf{C}) \to \mathbf{R}$ [11, § 2, приложение].

Для формулировки *гипотезы Бейлинсона* о связи мотивных когомологий с когомологиями Делиня — Бейлинсона для проективного гладкого многообразия $X_{\mathbf{Q}}$ над $\mathbf{Q}$, нам, во-первых, необходимо описать комплексные когомологические группы $H_{\mathscr{D}}^k(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(p))$ гладкого многообразия $X_{\mathbf{R}}$ над $\mathbf{R}$. Комплексные когомологии $H^k(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{C})$ ассоциированного комплексного многообразия $X_{\mathbf{C}}$ равны алгебраическим когомологиям де Рама [94]. Эти алгебраические когомологии де Рама являются комплексификацией вещественных векторных пространств $H_{\mathrm{DR}}^k(X_{\mathbf{R}})$ и, следовательно, допускают вещественную структуру. Эта вещественная структура индуцирована инволюцией ι окольцованного пространства $(X(\mathbf{C}), \Omega_X^\cdot)$, такой, что ι есть комплексное сопряжение на $X(\mathbf{C})$ и $\iota(\omega)(z) = \overline{\omega}(\overline{z})$ для $\omega \in \Omega_X^\cdot$ и $z \in X(\mathbf{C})$.

Заметим теперь, что ι индуцирует комплексное сопряжение на подпучке $\mathbf{C}$ и на его подпучке $\mathbf{R}(p)$. Кроме того, ι сохраняет подпучок F^p. Следовательно, ι индуцирует инволюцию пары $(X, \mathbf{R}(p)_{\mathscr{D}})$.

Определение 5.18. Для гладкого проективного много-

образия $X_{\mathbf{R}}$ над $\mathbf{R}$ пусть $H^k_{\mathcal{D}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(p))$ — инварианты $H^k_{\mathcal{D}}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{R}(p))$ относительно инволюции ι.

Предложение и определение 5.19. Пусть $X_{\mathbf{R}}$ — гладкое проективное многообразие над $\mathbf{R}$. Тогда характер Чженя $H^*_{\mathcal{M}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{Q}(*)) \to H^*_{\mathcal{D}}(X_{\mathbf{C}}, \mathbf{R}(*))$ пропускается через отображение из $H^*_{\mathcal{M}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{Q}(*))$ в $H^*_{\mathcal{D}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(*))$, называемое *регуляторным*, и обозначаемое через reg.

Теперь мы в состоянии сформулировать гипотезу А. А. Бейлинсона.

Гипотеза 5.20 ([11], см. также [168]). Пусть X — гладкое проективное многообразие над $\mathbf{Q}$ и $0 \leqslant i \leqslant 2 \dim X$, $p \geqslant 0$, $m = i+1-p$. Тогда

(1) Если $m < i/2$, то регуляторное отображение индуцирует изоморфизм

$$H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(p)) \otimes \mathbf{R} \xrightarrow{\sim} H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(p)).$$

(2) Если $m = \frac{i}{2}$ и $p = i/2+1$, то пусть $N^m(X)$ — группа m-мерных циклов на X (по модулю гомологической эквивалентности) и

$$\bar{z}: N^m(X) \to H^{2m+1}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(m+1))$$

— композиция отображения циклов

$$z: N^m(X) \to H^{2m}(X(\mathbf{C}), \mathbf{R}(m))$$

со связывающим гомоморфизмом

$$H^{2m}(X(\mathbf{C}), \mathbf{R}(m)) \to H^{2m+1}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(m+1))$$

легко проверить, что $\bar{z}$ действительно принимает значения в $H^{2m+1}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(m+1))$. Тогда отображения reg и $\bar{z}$ индуцируют изоморфизм

$$\left(H^{i+1}_{\mathcal{M}}(X, \mathbf{Q}(n)) \otimes \mathbf{R}\right) \oplus (N^m(X) \otimes \mathbf{R}) \xrightarrow{\sim} H^{i+1}_{\mathcal{D}}(X_{\mathbf{R}}, \mathbf{R}(n)).$$

Как следствие этой гипотезы получается, что когомологии Делиня—Бейлинсона наследуют естественную $\mathbf{Q}$-структуру. Эта $\mathbf{Q}$-структура играет существенную роль для формулировки гипотезы А. А. Бейлинсона о специальных значениях и, более общо, ассоциирует ведущий коэффициент L-рядов с когомологиями проективных многообразий над $\mathbf{Q}$. Мы не будем углубляться в эту тему, поскольку она довольно далека от нашей, а также потому, что имеется ряд ее прекрасных изложений [147], [177]. Очевидность гипотезы 5.20 для А. А. Бейлинсона связана с его рассмотрением [11, § 2] эллиптических кривых с комплексным умножением, модулярных кривых и произведений моду-

лярных кривых. Недавно Рамакришнан рассмотрел случай поверхностей Гильберта—Блюменталя [143]

Дадим ещё одну *гипотезу Бейлинсона,* именно, *«Ходж-$\mathscr{D}$»*-гипотезу.

Гипотеза 5.21. Пусть X — гладкое проективное многообразие над $\mathbf{C}$ и $p \geqslant 0$. Тогда векторное пространство $H^{2p}(X, \mathbf{R}(p))$ порождено классами циклов коразмерности p и классами потоков $\Sigma_\alpha \log|f_\alpha|$, рассмотренных в примере 5.17 (2).

Рассмотрим теперь понятие «абсолютных когомологий Ходжа», принадлежащее А. А. Бейлинсону [12] и его связь с когомологиями Деликя—Бейлинсона. По поводу этой связи см. также [108, § 2]. В качестве мотивировки, напомним сначала описание расширения смешанных структур Ходжа.

Предложение 5.22 ([131, предложение 8.1]). Пусть A — подполе в $\mathbf{R}$ и E, F — смешанные структуры Ходжа над A. Группа $\mathrm{Ext}^1_{A\text{-}MH}(E, F)$ классов эквивалентности расширения

$$0 \to F \to H \to E \to 0$$

A-смешанных структур Ходжа канонически изоморфна

$$= \mathrm{Hom}^W(E \otimes_A \mathbf{C}, F \otimes_A \mathbf{C}) / \mathrm{Hom}^W_F(E \otimes_A \mathbf{C}, F \otimes_A \mathbf{C}) + \mathrm{Hom}^W\overline{(E, F)}$$

и, следовательно, —

$$W^0(\mathrm{Hom}(E, F) \otimes_A \mathbf{C}) / (W^0 \cap F^0)(\mathrm{Hom}(E, F) \otimes_A \mathbf{C}) + W^0 \mathrm{Hom}(E, F).$$

Как следствие получаем $\mathrm{Ext}^j_{A\text{-}MH}(E, F) = 0$ для $j \geqslant 2$. Основой для предложения 5.22 для когомологий Делиня — Бейлинсона, является то, что точную последовательность (5.5) можно переписать в виде

$$\ldots \mathrm{Ext}^1_{A\text{-}MH}(A, H^{q-1}(X, A(p)) \to H^q_{\mathscr{D}}(X, A(p)) \to$$
$$\to \mathrm{Ext}^0_{A\text{-}MH}(A, H^q(X, A(p))) \ldots$$

Это дает, что $H^q_{\mathscr{D}}(X, A(p))$ могут быть интерпретированы как $\mathrm{Ext}^q(A, R\Gamma(X, A(p)))$ в подходящей приведенной категории смешанных ходжевых структур. Это и было сделано А. А. Бейлинсоном [12]. Для объяснения его результата, напомним понятия смешанного A-комплекса Ходжа, принадлежащее Делиню (определение 1.8):

Определение 5.23. Пусть A — подкольцо $\mathbf{R}$ и A-смешанный комплекс Ходжа $K^\cdot$ задается диаграммой (в приведенной категории):

$$K^\cdot_A \xrightarrow{\alpha} (K^\cdot_{A \otimes \mathbf{Q}}, W) \xrightarrow{\beta} (K^\cdot_{\mathbf{C}}, W, F).$$

Абсолютные ходжевы когомологии $H^l_{\mathscr{H}} K^\cdot$ есть l-тые когомологические группы комплекса

$$R\Gamma_{\mathcal{H}}(K^{\cdot}) :=$$

$$:= \operatorname{cone}\left(K^{\cdot}_A \oplus \hat{W}_0 K^{\cdot}_{A\otimes\mathbf{Q}} \oplus (\hat{W}_0 \cap F^0) K^{\cdot}_{\mathbf{C}} \xrightarrow{(\alpha,\beta)} {}'K^{\cdot}_{A\otimes\mathbf{Q}} \oplus \hat{W}'_0 K^{\cdot}_{\mathbf{C}}\right)[-1],$$

где комплексы ${}'K^{\cdot}_{A\otimes\mathbf{Q}}$ и $({}'K^{\cdot}_{\mathbf{C}}W)$ таковы, что с их помощью выражаются морфизмы α и β (в приведенной категории) в терминах настоящих морфизмов комплексов; более точно α — композиция $\alpha_1: K^{\cdot}_A \to {}'K^{\cdot}_{A\otimes\mathbf{Q}}$ и «обратного» к $\alpha_2: (K^{\cdot}_{A\otimes\mathbf{Q}}, W) \to {}'K^{\cdot}_{A\otimes\mathbf{Q}}$; β — композиция $\beta_1: (K^{\cdot}_{A\otimes\mathbf{Q}}, W) \to ({}'K^{\cdot}_{\mathbf{C}}, W)$ и «обратного» к $\beta_2: (K^{\cdot}_{\mathbf{C}}, W, F) \to ({}'K^{\cdot}_{\mathbf{C}}, W)$.

Отображения α и β в комплексе $R\Gamma_{\mathcal{H}}(K^{\cdot})$ есть $\alpha = (\alpha_1 - \alpha_2, 0)$ и $\beta = (0, \beta_1 - \beta_2)$. Обозначение $\hat{W}$ относится к «копирующей фильтрации» («filtration décalée) Dec W Делиня, о которой упоминалось в § 1.

В соответствии с Делинем (см. теорему 1.9), существует смешанный A-комплекс Ходжа, ассоциированный с гладким комплексным алгебраическим многообразием (и, более общо, с гладким симплициальным алгебраическим многообразием). Этот смешанный комплекс Ходжа обозначается через $R\Gamma(X, A)$. Для вычисления Ext групп в приведенной категории A-смешанных комплексов Ходжа, необходим следующий результат.

Предложение 5.24 (А. А. Бейлинсон [12, § 3.11]). Естественный функтор из приведенной категории A-смешанных поляризованных структур Ходжа в подкатегорию приведенной категории A-смешанных поляризованных комплексов Ходжа состоящую из ограниченных комплексов, есть эквивалентность триангулированных категорий.

Следствие 5.25. Существует естественная гиперэкст спектральная последовательность для A-смешанного комплекса $K^{\cdot}$:

$$E_2^{p,q} = \operatorname{Ext}^p_{A\text{-}MH}\left(A, H^q\left(K^{\cdot}_A\right)\right) \Rightarrow H^{p+q}_{\mathcal{H}}(K^{\cdot}).$$

Следствие 5.26. Для гладкой симплициальной схемы $X_{\cdot}$ когомологическая группа Делиня — Бейлинсона $H^q_{\mathcal{D}}(X_{\cdot}, A(p))$ канонически изоморфна $\operatorname{Ext}^q_{A\text{-}MH}(A, R\Gamma(X_{\cdot}, A(p))$.

Это утверждение дает также способ построения гомологий Делиня—Бейлинсона (с замкнутыми носителями) для комплексных алгебраических многообразий. Мы отсылаем читателя к [108] по поводу этой конструкции. Более явное определение этой теории гомологий дано в [11]. В [108] доказано, что пара: теория когомологий и теория гомологий, построенные таким образом, удовлетворяют аксиомам Блоха и Огуса [24].

А. А. Бейлинсон использовал когомологии Делиня — Бейлин-

сона [13, § 3] для определения архимедова весового спаривания в следующей ситуации: пусть X — собственное гладкое алгебраическое многообразие над $\mathbf{C}$ размерности n, Z_1 и Z_2 — алгебраические циклы коразмерностей d_1 и d_2, соответственно, $d_1+d_2=n-1$, с непересекающимися носителями. В предположении, что Z_1 гомологически тривиален оказывается, что класс c_{Z_1} для Z_1 в $H_{\mathscr{D}}^{2d_1}(X, \mathbf{R}(d_1)) \simeq H^{2d_1}(X, \mathbf{R}(d_1))$ — нулевой, следовательно, класс α_1 для Z_1 в когомологиях Деланя — Бейлинсона с носителем $|Z_1|$ есть образ относительно связывающего гомоморфизма класса, скажем $\tilde{\alpha}_1$ в $H_{\mathscr{D}}^{2d_1-1}(W_1, \mathbf{R}(d_1))$ для $W_1:=X-|Z_1|$.

Чашечное произведение $\tilde{\alpha}_1$ с классом $\alpha_2 \in H^{2d_2}_{|Z_2|,\mathscr{D}}(X, \mathbf{R}(d_2))$ дает класс в $H^{2n+1}_{|Z_2|,\mathscr{D}}(X, \mathbf{R}(n+1))$. Существует естественное следовое отображение $\operatorname{Tr}: H_{\mathscr{D}}^{2n+1}(X, \mathbf{R}(n+1)) \to \mathbf{R}$, которое является изоморфизмом. А. А. Бейлинсон затем определил весовое спаривание как

$$\langle Z_1, Z_2 \rangle = \operatorname{Tr}(\tilde{\alpha}_1 \smile \alpha_2).$$

Если X — кривая, то это дает локальное архимедово спаривание Нерона — Тейта.

Наконец, отметим недавнюю важную работу А. А. Бейлинсона, Макферсона и Шехтмана [17] и работу Хейна и Макферсона [100], связывающие алгебраическую K-теорию, полилогарифмы и когомологии Деланя — Бейлинсона. Основным новым геометрическим объектом здесь является гладко усеченное строгое симплициальное алгебраическое многообразие $G^p_{\cdot}$, определенное для целого $p \geqslant 1$. «Усеченное» означает, что симплициальное многообразие определено только до степени k, $p \leqslant k \leqslant 2p$. «Строгое» означает, что имеются только фасадные отображения и нет отображений вырождения. Для $q \geqslant 1$, G^p_q определяется как открытое подмножество грассманиана коразмерности p линейных подпространств в $\mathbf{C}^{p+q}$, не пересекающих никаких координатных плоскостей размерностей $p-1$. Существует $p+q+1$ естественных внешних отображений $A_j: G^p_q \to G^p_{q-1}$. Усеченное симплициальное многообразие $G^p_{\cdot}$ равно G^p_{k-p} в степени k.

Существование естественного векторного расслоения E ранга p над $G^p_{\cdot}$ определяет класс c_p в $H_{\mathscr{D}}^{2p}(G^p_{\cdot}, \mathbf{Z}(p))$. Принятая в [17] и [100] точка зрения на p-логарифм состоит в том, что он является многозначной голоморфной функцией на G^p_{p-1}. Более точно, эти авторы ввели многозначные когомологии Деланя — Бейлинсона $H^*_{\mathscr{M}\mathscr{D}}(X_{\cdot}, \mathbf{Q}(p))$ для соответствующего симплициального алгебраического многообразия $X_{\cdot}$, отображающиеся

на когомологии Делиня—Бейлинсона. Было высказано как гипотеза, что c_p имеет естественный лифт на $H^{2p}_{\mathcal{M}\mathcal{D}}(G^p_{\cdot}\mathbf{Q}(p))$. Конкретно этот лифт должен состоять из многозначной функции p-log на G^p_{p-1}, 1-формы на G^p_{p-2} и т. д., давая коцикл в двойном комплексе. Это дает, что функция p-log удовлетворяет условию

$$\sum_{j=0}^{2p}(-1)^j A_j^*(p\text{-log})=\text{const}.$$

$p-1)$-форма ω_{p-1} на $G_0^p=(\mathbf{C})^{*p}$ нормализуется условием $d\omega_{p-1}=dz_1/z_1\wedge\ldots\wedge dz_p/z_p$. Такой класс был построен в [100] при $p=1, 2, 3$ и было доказано также, что группы $H^{2p}_{\mathcal{M}\mathcal{D}}\times\times(G^p_{\cdot}, \mathbf{Q}(p))$, $H^{2p}_{\mathcal{D}}(G^p_{\cdot}, \mathbf{Q}(p))$ и $\Omega^p(G_0^p)$ изоморфны. Вообще говоря, существует много захватывающих открытых вопросов для топологов, связанных с G^p_q; по их поводу мы отсылаем читателя к [100].

§ 6. Смешанные структуры Ходжа на гомотопических группах

Делинь, Гриффитс и Морган [62] скомбинировали теорию Ходжа—Делиня и рациональную теорию гомотопий Сулливана для получения глубоких результатов о рациональной теории гомотопий для комплексных проективных многообразий (и, более общо, для компактных пространств Мойшезона). Затем Морган [131] доказал существование естественной смешанной структуры Ходжа на гомотопических группах гладких алгебраических многообразий. Его метод был снова основан на теории Сулливана минимальных моделей [185].

Начнем с напоминания теории Сулливана минимальных моделей для *дифференциальных градуированных алгебр* (ДГА для краткости), над фиксированным основным полем L. Они градуированы неотрицательными степенями и дифференциал повышает степень на 1.ДГА

$$A^{\cdot}=\bigoplus_{k\geqslant 0}A^k=A^0\oplus A^+$$

называется *связной*, если $A^0=L$. Для таких $A^{\cdot}$ пространство $I(A^{\cdot}):=A^{\cdot}/A^+\cdot A^+$ *неразложимых элементов* определяется как факторпространство $A^{\cdot}$. Значение $I(A^{\cdot})$ состоит в том, что оно есть пространство, порожденное минимальным множеством образующих $A^{\cdot}$ как алгебра.

Введем сначала понятие *расширения Хирша* степени k ДГА $A^{\cdot}\hookrightarrow B^{\cdot}$. Для построения $B^{\cdot}$ необходимо задание $A^{\cdot}$, векторного пространства V и линейного отображения $\varphi: V\to A^{k+1}$. Тогда $B^{\cdot}:=A^{\cdot}\otimes S(V_k)$ как алгебра, где $S(V_k)$—симметрическая

алгебра V (в степени k), если k четно и внешняя алгебра, если k нечетно. Дифференциал для $B^{\cdot}$ совместим с дифференциалом алгебры $A^{\cdot}$ и $d(x)=\varphi(x)\in A^{k+1}$ для x из V. Говорят, что расширение Хирша $A^{\cdot}\hookrightarrow B^{\cdot}$ имеет *конечную размерность*, если конечномерно V. Если $B^{\cdot}:=A^{\cdot}\otimes S(V)$ — расширение Хирша, то $I(B^{\cdot})=I(A^{\cdot})\oplus V$.

Определение 6.1 ([185]). ДГА $M^{\cdot}$ называется *минимальной алгеброй*, если

(a) она связна;

(b) является объеденением возрастающего семейства ДГА-подалгебр

$$L=M_0^{\cdot}\subset M_1^{\cdot}\subset\ldots,$$

где $M_j^{\cdot}\subset M_{j+1}^{\cdot}$ — расширение Хирша:

(c) отображение из $I(M^{\cdot})$ в себя, индуцированное d, есть нуль, или, эквивалентно, $d(M^{\cdot})\subset M^{+}\cdot M^{+}$.

Последовательность подалгебр $M_j^{\cdot}$ в (b) называется *рядом для* $M^{\cdot}$. Этот ряд называется *конечномерным*, если каждое расширение конечномерно.

Заметим, что если $M^{\cdot}$ минимальна, при $I^1(M^{\cdot})=0$, ряд $M_j^{\cdot}$ может быть сделан каноническим, если потребовать, чтобы расширение Хирша $M_j^{\cdot}\subset M_{j+1}^{\cdot}$ было бы степени $j+1$; тогда $M_j^{\cdot}$ есть подалгебра, порожденная неразложимыми элементами степени $\leqslant j$. Таким образом мы приходим к понятию минимальной модели ДГА.

Определение 6.2. Пусть $A^{\cdot}$ — ДГА. *Минимальной моделью* $A^{\cdot}$ называется отображение $\varphi: M^{\cdot}\to A^{\cdot}$ ДГА, такое, что

(a) $M^{\cdot}$ минимальна;

(b) $\varphi_*: H(M^{\cdot})\to H(A^{\cdot})$ изоморфизм.

Сулливан развил теорию гомотопий для ДГА, в которой расширение Хирша играло роль расслоения со слоем $K(\pi, k)$. Нам потребуется понятие *гомотопии отображений* f_0, f_1: $A^{\cdot}\to B^{\cdot}$. Гомотопией H, связывающей f_0 с f_1 называется отображение ДГА $H: A^{\cdot}\to B^{\cdot}\otimes L[t, dt]$, (такое, что $f_0=\mathrm{ev}_0\circ H$ и $f_1=\mathrm{ev}_1\circ H$, где ev_0 (соответственно, ev_1) есть отображение вычисления в 0 (соответственно, в 1). Центральным разультатом теории является

Предложение 6.3. Пусть $A^{\cdot}$ — ДГА. Тогда существует минимальная модель для $A^{\cdot}$. Если $M^{\cdot}\xrightarrow{\varphi}A^{\cdot}$ и $M^{\cdot\prime}\xrightarrow{\varphi'}A^{\cdot}$ — две минимальные модели, то существует изоморфизм $I: M^{\cdot}\to M^{\cdot\prime}$ такой, что φ и $\varphi'\circ I$ — гомотопные отображения из $M^{\cdot}$ в $A^{\cdot}$. Более того, само I единственно с точностью до гомотопии.

Для применения теории гомотопий дифференциальных градуированных алгебр к топологическим пространствам, необходима ДГА, вычисляющая когомологии пространства. Для глад-

кого многообразия M имеется *алгебра де Рама*, то есть вещественная ДГА $A^{\cdot}(M)$ гладких дифференциальных форм. Сулливан [185, § 8] показал, что для симплициального комплекса X $\mathbf{Q}$-алгебра $E^{\cdot}(X)$ совместимых семейств полиномиальных дифференциальных форм на симплексах X вычисляет рациональные когомологии X. Минимальная модель таких ДГА, ассоциированных с X, дает «рациональный нильпотентный гомотопический тип» X в смысле Кана [29]. Результат особенно прозрачен в односвязном случае.

Предложение 6.4 ([185]). Пусть X — односвязный полиэдр, такой, что $H^j(X, \mathbf{Q})$ конечномерны для всех j. Пусть $E^{\cdot}(X)$ — ДГА $\mathbf{Q}$-полиномиальных форм на X и $M^{\cdot}$ — ее минимальная модель. Пусть $M_0^{\cdot}=\mathbf{Q}\subset M_1^{\cdot}\subset\ldots$ — канонический ряд для $M^{\cdot}$. Тогда:

(1) $M_1^{\cdot}=\mathbf{Q}$ (в этом случае говорят, что ДГА $M^{\cdot}$ *односвязна*),

(2) для $j\geqslant 2$, $M_j^{\cdot}$ — минимальная алгебра для j-того этажа рациональной башни Постникова для X;

(3) $I^k(M^{\cdot})$ канонически изоморфна двойственному к $\pi_k(X)\otimes\mathbf{Q}$.

Аналогичный результат справедлив для алгебры де Рама гладкого многообразия. В неодносвязном случае минимальная модель $M^{\cdot}$ имеет неразложимые элементы степени 1. $M^{\cdot}$ содержит «1-минимальную модель», допускающую канонический ряд $A_1^{\cdot}\subset A_2^{\cdot}\subset\ldots$, где каждая $A_i^{\cdot}$ порождена элементами степени 1. Переходя к двойственным пространствам, получаем башню алгебр Ли $\ldots\to\mathfrak{L}_2\to\mathfrak{L}_1\to 0$. Ясно, что $\mathfrak{L}_1$ абелева, $\mathfrak{L}_2$ — центральное расширение $\mathfrak{L}_1$ и т. д.

Предложение 6.5. Башня алгебр Ли $\ldots\to\mathfrak{L}_2\to\mathfrak{L}_1\to 0$ (неканонически) изоморфна башне нильпотентных алгебр Ли, ассоциированных с нильпотентным пополнением $\pi_1(X)$.

Метод Моргана снабжения структурами Ходжа гомотопических групп алгебраических многообразий показывает, что биградуировка комплекса де Рама может быть преобразована, при соблюдении определенных условий, в биградуировку его минимальной модели.

Определение 6.6. *Смешанная диаграмма Ходжа* (над $\mathbf{R}$) состоит из фильтрованной дифференциальной $\mathbf{R}$-алгебры $(A, W_{\cdot})$ и двух бифильтрованных дифференциальных $\mathbf{C}$-алгебр $(E^{\cdot}, W_{\cdot}, F^{\cdot})$ и $(\overline{E}^{\cdot}, W_{\cdot}, \overline{F}^{\cdot})$ и диаграммы морфизмов дифференциальных алгебр

$$E^{\cdot}\xleftarrow{\varphi}A\otimes_{\mathbf{R}}\mathbf{C}\xrightarrow{\overline{\varphi}}\overline{E}^{\cdot}$$

таких, что

(1) φ и $\overline{\varphi}$ совместимы с фильтрациями $W_{\cdot}$ и индуцируют изо-

морфизмы E_1-членов спектральных последовательностей, ассоциированных с $W_.$; следовательно, спектральные последовательности ${}_WE_r^{p,q}$ для $E^{\cdot}$ и $\overline{E}^{\cdot}$ снабжены вещественной структурой;

(2) спектральная последовательность для $W_.$-фильтраций вырождается в члене E_2;

(3) для любого члена ${}_WE_r^{p,q}(E^{\cdot})$ (соответственно, ${}_WE_r^{p,q}(\overline{E}^{\cdot})$) рассматриваемого как субфактор $E^{\cdot}$ (соответственно, $\overline{E}^{\cdot}$), для $r \geqslant 1$ фильтрация, индуцированная $F^{\cdot}$ (соответственно, $\overline{F}^{\cdot}$) q-противоположна комплексно сопряженной;

(4) фильтрация на ${}_WE_\infty^{p,q}(E^{\cdot})$ рассмотренная в (3) совпадает с индуцированной фильтрацией на $\mathrm{Gr}_p^W H(E^{\cdot})$ и соответствующее условие выполнено для ${}_WE_\infty^{p,q}(\overline{E}^{\cdot})$;

(5) для всех $r \geqslant 0$ дифференциал d_r W-спектральной последовательности строго совместим с фильтрацией, индуцированной $F^{\cdot}$ в (3);

(6) фильтрация, индуцированная $F^{\cdot}$ на $H^*(A \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C})$ комплексно сопряжена фильтрации, индуцированной $\overline{F}^{\cdot}$.

Для иллюстрации этого понятия, рассмотрим гладкое комплексное алгебраическое многообразие X и пусть $X \hookrightarrow \overline{X}$ — его хорошая компактификация, такая, что $D = \overline{X} - X$ — дивизор с нормальными пересечениями. Пусть $D = \bigcup_j D_j$, где D_j — гладкие дивизоры.

Выберем C^∞-трубчатую окрестность N_j для каждого дивизора D_j и гладкую замкнутую 2-форму ω_j на $\overline{X}$ с носителем в N_j, такую, что класс ω_j в $H^2(N_j, \partial N_j)$ есть класс Тома нормального расслоения к $D_j \hookrightarrow X$. Пусть A — ДГА над $\mathbf{R}$, порожденная $C^\infty(\overline{X})$ и символами θ_j степени 1, $d\theta_j = \omega_j$. Фильтрация W «считает» количество символов θ_j необходимых для записи элемента A. Фильтрация F пусть фильтрация Делиня («filtration bête»).

Пусть $E^{\cdot}(\log D)$ — подалгебра комплексной алгебры де Рама $A^{\cdot}(X^{\cdot}) \otimes \mathbf{C}$, состоящая из тех дифференциальных форм, которые вблизи точек D локально принадлежащих $D_1, \ldots, D_r$, записываются в виде

$$\sum_{I \subset \{1, \ldots, r\}} \alpha_I \wedge \prod_{j \in I} \frac{dz_j}{z_j},$$

где z_j — функция, локально задающая D_j, α_I — гладкая дифференциальная форма. Другими словами, $E^{\cdot}(\log D)$ — образ пространства глобальных сечений тензорного произведения пучков $\Omega_{\overline{X}}^{\cdot}(\log D) \otimes_{\mathcal{O}_X} A_{\overline{X}}^{0,\cdot}$, где $A_{\overline{X}}^{0,\cdot}$ снабжена обычной биградуировкой.

Фильтрация W «считает» мощность подмножеств I в локальном выражении выше. Фильтрация $F^{\cdot}$ есть «filtration bête» Делиня. Пусть $E^{\cdot}(\overline{\log D})$ — комплексно сопряженная подалгебра, такая, что в локальном выражении в точках D вместо dz_j/z_j стоит $\partial\bar{z}_j/\bar{z}_j$.

Для построения отображения $\varphi: A \to E^{\cdot}(\log D)$ ДГА необходимо найти 1-форму β_j в $E^{\cdot}(\log D)$, такую, что $d\beta_j = \omega_j$. Как показано в [131, лемма 3.2], такая β_j может быть локально найдена в виде $-\frac{1}{2\pi i}\left(\frac{dz_j}{z_j}\right) + \alpha_j$ с гладкой α_j. Далее полагаем $\varphi(\theta_j) = \beta_j$ и определяем $\bar{\varphi}: A \to E^{\cdot}(\overline{\log D})$ просто как комплексно сопряженное в φ.

Предложение 6.7 [131, Предложение 3.5]. Диаграмма

$$E^{\cdot}(\log D) \xleftarrow{\varphi} A \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{E}^{\cdot}(\log D)$$

есть смешанная диаграмма Ходжа.

Это утверждение, по-существу, есть переформулировка теории смешанных структур Ходжа—Делиня для гладких комплексных многообразий (см. § 1).

Для смешанной диаграммы Ходжа

$$E^{\cdot} \xleftarrow{\varphi} A \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{E}^{\cdot}$$

существует обобщение понятия минимальных моделей [131, § 6]. Биградуировка на ДГА $M^{\cdot}$ есть разложение

$$M^{\cdot} = \sum_{r,s \geqslant 0} (M^{\cdot})^{r,s},$$

где $(M^{\cdot})^{0,0} = L$, и d и произведение имеют бистепень $(0, 0)$. Морфизм из биградуированной ДГА $M^{\cdot} = \sum\limits_{r,s \geqslant 0} (M^{\cdot})^{r,s}$ в смешанную диаграмму Ходжа

$$E^{\cdot} \xleftarrow{\varphi} A \otimes_{\mathbf{R}} \mathbf{C} \xrightarrow{\bar{\varphi}} \bar{E}^{\cdot}$$

состоит из отображений ДГА $\psi: M^{\cdot} \to E^{\cdot}$, $\rho: M^{\cdot} \to A \otimes \mathbf{C}$ и $\psi': M^{\cdot} \to \bar{E}^{\cdot}$, вместе с гомотопиями: $H: M^{\cdot} \to E^{\cdot} \otimes L[t, dt]$ связывающими $\varphi\rho$ с ψ, и $H': M^{\cdot} \to \bar{E}^{\cdot} \otimes L[t, dt]$, связывающей $\bar{\varphi}\rho$ с ψ', такими, что

(1) $\rho((M^{\cdot})^{r,s}) \subset W_{-(r+s)}(A \otimes \mathbf{C})$, $\psi((M^{\cdot})^{r,s}) \subset W_{-(r+s)}(E^{\cdot}) \cap F^r(E^{\cdot})$ и $\psi'((M^{\cdot})^{r,s}) \subset W_{-(r+s)}(\bar{E}^{\cdot}) \cap \bar{F}^s(E^{\cdot}) + \sum\limits_{i \geqslant 2} W_{i-r-s}(\bar{E}^{\cdot}) \cap \bar{F}^{s-i+1}(\bar{E}^{\cdot})$;

(2) $H((M^{\cdot})^{r,s}) \subset W_{-r-s}(E^{\cdot}) \otimes L(t, dt)$, $H'((M^{\cdot})^{r,s}) \subset W_{-r-s}(\bar{E}^{\cdot}) \otimes \otimes L[t, dt]$.

Если, кроме того, $\rho: M^{\cdot} \to A \otimes \mathbf{C}$ — минимальная модель, то

$(M^{\cdot}, \psi, \rho, \psi', H, H')$ называется *биградуированной минимальной*

Предложение 6.8 ([131, теорема 6.6]). Произвольная смешанная диаграмма Ходжа допускает биградуированную минимальную модель. Индуцированная биградуировка на когомологиях диаграммы с ее смешанной ходжевой структурой совместима с биградуировкой когомологий минимальной модели. *моделью для смешанной диаграммы Ходжа.*

Доказательство использует «принцип двух типов» для смешанных диаграмм Ходжа. Морган доказал также, что биградуированная минимальная модель единственная с точностью до биградуированного изоморфизма [131], следствие 6.9[. Им была также доказана естественность свойства биградуированной модели. В случае алгебраического многообразия он получил следующее утверждение.

Предложение 6.9. (1) Пусть X — гладкое комплексное алгебраическое многообразие и пусть $N^{\cdot}_X$ — минимальная модель для комплекса де Рама многообразия X. Тогда $N^{\cdot}_X$ имеет биградуировку, единственную с точностью до изоморфизма.

(2) Пусть $f: X_1 \to X_2$ — алгебраическое отображение. Тогда существуют хорошие компактификации $X_1 \hookrightarrow \overline{X}_1$, $X_2 \hookrightarrow \overline{X}_2$, такие, что f продолжается до алгебраического отображения $f: \overline{X}_1 \to \overline{X}_2$. Индуцированное отображение ДГА $f^*: N^{\cdot}_{X_2} \to N^{\cdot}_{X_1}$ единственно с точностью до гомотопии. Это отображение может быть выбрано сохраняющим биградуировку.

Следующим вопросом теперь становится определение весовой фильтрации $W.$ на минимальной модели. Если $M^{\cdot}$ — минимальная ДГА, то фильтрация $W.(M^{\cdot})$ называется *минимальной*, если

(a) $W.$ совместима со структурой произведения;

(b) d отображает W_l в W_{l-1};

(c) $dM^{\cdot} \cap W_{l-1} = dW_l$.

Предложение 6.10 ([131, определение 7.4]). Пусть $A^{\cdot}$ — ДГА с мультипликативной фильтрацией $W.(A^{\cdot})$, такой, что ассоциированная спектральная последовательность вырождается в члене E_2. Говорят, что фильтрация W *соответствует* минимальной модели, если существуют минимальная модель $\rho: M^{\cdot} \to A^{\cdot}$ и минимальная фильтрация $W.(M^{\cdot})$ такие, что

(1) ρ совместимо с фильтрациями;

(2) отображение $H(M^{\cdot}) \to H(A^{\cdot})$, индуцированное ρ, есть изоморфизм фильтрованных векторных пространств.

Пара $(M^{\cdot}, W.)$ называется *фильтрованной минимальной моделью* для $(A^{\cdot}, W.)$. Такая минимальная модель единственна с точностью до изоморфизма.

Предложение 6.11 ([131, теорема 7.7]). Для гладкого алгебраического многообразия X весовая фильтрация ДГА $\mathbf{Q}$-по-

линомиальных форм на некоторой триангуляции соответствует минимальной модели M_X.

Следовательно, для гладкого алгебраического многообразия X имеется фильтрация $W_\cdot$ на $\mathbf{Q}$-минимальной модели $M_X^\cdot$, а также биградуировка на комплексной минимальной модели $N_X^\cdot$. Полагая

$$\widetilde{W}_l(N_X^\cdot) = \bigotimes_{p+q\leqslant l} (N^\cdot)^{p,q}$$

определяем фильтрацию алгебры $W_\cdot : W_l := \widetilde{W}_{n+l}$ в степени n. Это минимальная фильтрация и существует фильтрованный изоморфизм $I: N_X^\cdot \to M_X^\cdot \otimes \mathbf{C}$. I единственен с точностью до гомотопии, сохраняющей фильтрацию.

Теорема 6.12. Любой такой фильтрованный изоморфизм $I: N_X^\cdot \to M_X^\cdot \oplus \mathbf{C}$ определяет смешанный комплекс Ходжа. Индуцированная смешанная ходжева структура на $H(M_X^\cdot)$ совпадает со смешанной ходжевой структурой Делиня на $H^\cdot(X)$.

Поскольку для односвязного X рациональные гомотопические группы X двойственны к пространству неразложимых элементов M_X° (предложение 6.4), то отсюда получаем смешанную структуру Ходжа на гомотопических группах.

Теорема 6.13 ([131, теорема 9.1]). Пусть X — односвязное гладкое алгебраическое многообразие.

(1) Гомотопические группы $\pi_n(X) \otimes \mathbf{Q}$ допускают естественную смешанную структуру Ходжа. Произведение Уайтхеда $\pi_n(X) \otimes \pi_m(X) \to \pi_{+m-1}(X)$ есть морфизм смешанных структур Ходжа;

(2) кольцо когомологий j-того этажа X_j рациональной башни Постникова для X также допускает естественную смешанную структуру Ходжа. Отображение $X_j \to X_{j-1}$ и отображение $X \to X_j$ индуцируют морфизмы смешанных структур Ходжа.

В случае проективных многообразий имеет место более точный результат.

Теорема 6.14 (Делинь, Гирффитс, Морган и Сулливан [62, § 6]). Пусть X — компактное комплексное многообразие, для которого справедлива dd^c-лемма (например, кэлерово многообразие или многообразие Мойшезона). Тогда

(1) Минимальная модель изоморфна минимальной модели для $H^\cdot(X)$, где $H^\cdot(X)$ рассматривается как ДГА с нулевым дифференциалом (в этом случае говорят об вещественном, следовательно, рациональном «формальном» гомотопическом типе X).

(2) Если X односвязно, то вещественные гомотопические группы $\pi_k(X) \otimes \mathbf{R}$ зависят только от алгебры когомологий $H^\circ(X, \mathbf{R})$. Более того, все произведения Масси произвольных порядков рационально равны нулю.

(3) Вещественная форма канонической башни нильпотентных факторов фундаментальных групп многообразия X определяется $H^1(X, \mathbf{R})$ и чашечным произведением $H^1(X, \mathbf{R}) \otimes \otimes H^1(X, \mathbf{R}) \to H^2(X, \mathbf{R})$.

Обращение в нуль тройных произведений Масси было впервые явно обнаружено Атьей, который показал, что группа верхне-треугольных 3×3-матриц с целыми компонентами не может быть фундаментальной группой компактного кэлерова многообразия.

Ввиду отсутствия базовой (отмеченной) точки в конструкциях Моргана, фундаментальная группа описывает фильтрацию Ходжа с точностью до внутреннего сопряжения.

Теорема 6.15 ([131, теорема 9.2]). Башня рациональных алгебр Ли с рациональным нильпотентным пополнением $\pi_1(X)$ есть башня алгебр Ли в категории смешанных структур Ходжа. Весовая фильтрация определяется подалгебрами. Она единственна и функториальна для алгебраических отображений. Фильтрация Ходжа единственна с точностью до внутренних автоморфизмов.

Морган использовал это утверждение для описания структуры башни алгебр Ли.

Теорема 6.16 ([131, теорема 9.4]). Пусть X — гладкое алгебраическое многообразие с хорошей компактификацией $\bar{X} \hookrightarrow \bar{X}$ и пусть $A = H_1(\bar{X}, \mathbf{C}) \oplus \mathrm{Coker}\{H_2(\bar{X}) \to \bigoplus_j H_0(D_j, \mathbf{C})(1)\}$. Это пространство, неканонически изоморфное $H_1(X, \mathbf{C})$, допускает биградуировку с бистепенями $(-1, 0)$, $(0, -1)$, $(-1, 1)$.

Существует биградуированный идеал I алгебры Ли в свободной алгебре Ли $\mathcal{F}(A)$ такой, что башня нильпотентных комплексных алгебр Ли, ассоциированная с $\pi_1(X)$, изоморфна башне нильпотентных фактoралгебр для $\mathcal{F}(A)/I$. Изоморфизм алгебр Ли сохраняет биградуировку. Идеал I порождается элементами лишь бистепеней $(-1, -1)$, $(-1, -2)$, $(-2, -1)$ и $(-2, -2)$.

Это утверждение дает, что множество конечно порожденных групп не могут быть фундаментальными группами гладкого комплексного алгебраического многообразия. Этот результат Делинь обобщил на случай нормальных алгебраических многообразий.

Хотя, в соответствии с теоремой 6.14, для односвязного комплексного проективного многообразия X группа $\pi_n(X) \otimes \mathbf{Q}$ может быть вычислена с помощью кольца когомологий $H^*(X, \mathbf{Q})$ Карлсон, Клеменс и Гриффитс [36] доказали, что смешанная структура Ходжа на $\pi_n(X)$ не определяется кольцом $H^*(X, \mathbf{Q})$ с его ходжевой структурой уже в случае $n=3$. Они связали $\pi_3(X)$ с промежуточным якобианом $J_2(X)$ Гриффитса следующим образом. Пусть $\mathcal{N} = NS(X)$ — группа Нерона—Севе-

ри для X и $\alpha: S^2(\mathcal{N})\to H_{2N-2}(X, \mathbf{Z})$ — естественное спаривание. Тогда отображение циклов Гриффитса из гомологически тривиальных циклов (см. § 5) индуцирует гомоморфизм $\Phi: \ker(\alpha)\to\to J_2(X)$. Его можно рассматривать как элемент

$$\operatorname{Hom}(\ker(\alpha)\otimes\mathbf{C},\ H^3(X,\ \mathbf{C}))/\operatorname{Hom}_F(\ker(\alpha)\otimes\mathbf{C},\ H^3(X,\ \mathbf{C}))+$$
$$+\operatorname{Hom}(\ker(\alpha),\ H^3(X,\ \mathbf{Z})).$$

С другой стороны, имеем точную последовательность

$$0\to H^3(X, \mathbf{Z})\to\pi_3(X)^*\to K\to 0$$

в категории смешанных структур Ходжа, где $K=\ker(S^2H^2(X, \mathbf{Z})\to H^4(X, \mathbf{Z}))$. Класс этого расширения определяет элемент u в

$$\operatorname{Hom}(K\otimes\mathbf{C},\ H^3(X,\ \mathbf{C}))/\operatorname{Hom}_F(K\otimes\mathbf{C},\ H^3(X,\ \mathbf{C}))+$$
$$+\operatorname{Hom}(K, H^3(X, \mathbf{Z})).$$

Карлсон, Клеменс и Морган доказали, что при отображении

$$\operatorname{Hom}(K\otimes\mathbf{C}, H^3(X, \mathbf{C}))\to\operatorname{Hom}(\ker(\alpha)\otimes\mathbf{C}, H^3(X, \mathbf{C})),$$

индуцированном включением $\ker(\alpha)\subset K$, элемент u переходит в Φ.

Рассмотрим теперь совершенно другой подход к определению смешанных структур Ходжа на гомотопических группах, принадлежащий Хейну [98], [99], который основан на *барьерной конструкции*[1]. Этот подход обладает определёнными преимуществами, он очень естественен с топологической точки зрения, использует базовые точки и дает точные результаты, касающиеся фундаментальных групп. Он также тесно связан с итерированными интегралами. Классическая барьерная конструкция является алгебраической версией конструкции пространства петель как косимплициального пространства. Пусть A° — (не обязательно коммутативная) аугментированная ДГА на кольцом L с аугментирующим идеалом IA°. Положим

$$B^{-s,t}(A^{\cdot})=[\otimes^s IA^{\cdot}]^t.$$

Будем использовать традиционные обозначения $[a_1|\dots|a_s]$ для $a_1\otimes\dots\otimes a_s$. Определим инволюцию τ на любом градуированном векторном пространстве V по формуле $\tau(v)=(-1)^{\deg v}v$. На B определим два дифференциала: *внутренний дифференциал* d_I распространение d на тензорную

[1] Иногда эту конструкцию называют просто бар-конструкцией (Примеч. пер.).

алгебру) и *комбинаторный дифференциал* d_C. Они определяются следующим образом:

$$d_I[a_1|\ldots|a_s]=\sum_{i=1}^{s}(-1)^i[\tau a_1|\ldots|\tau a_{i-1}|da_i|a_{i+1}\ldots|a_s],$$

$$d_C[a_1|\ldots|a_s]=\sum_{i=1}^{s}(-1)^{i+1}[\tau a_1|\ldots|\tau a_{i-1}|\tau a_i\wedge a_{i+1}|a_{i+2}\ldots|a_s].$$

Таким образом, получаем двойной комплекс. Барьерная конструкция на $A^{\cdot}$ есть ассоциированный тотальный комплекс. Он обозначается через $B(A^{\cdot})$. Определим диагональное отображение $\Delta:B(A^{\cdot})\to B(A^{\cdot})\otimes B(A^{\cdot})$ по формуле

$$\Delta[a_1|\ldots|a_s]=\sum_{i=0}^{s}[a_1|\ldots a_i]\otimes[a_{i+1}|\ldots|a_s].$$

Тогда $B(A^{\cdot})$ — ДГ коалгебра. Если $A^{\cdot}$ коммутативна, то $B(A^{\cdot})$ снабженное смешанным произведением является ДГ алгеброй Хопфа.

Барьерная фильтрация

$$0\subset L=\mathbf{B}^0\subset\mathbf{B}^{-1}\subset\mathbf{B}^{-2}\subset\ldots B(A^{\cdot})$$

определяется как

$$\mathbf{B}^{-s}=\sum_{u\leqslant s}B^{-u,v}$$

и приводит к так называемой *спектральной последовательности Эйленберга—Мура.*

Теорема 6.17 ([5]). Пусть X — односвязное пространство. Обозначим через $A^{\cdot}(X)$ ДГА симплициальных полиномиальных дифференциальных форм на симплициальном комплексе Simp (X). Тогда когомологии пространства петель $P_{x,x}(X)$ в точке изоморфны, как алгебры Хопфа, когомологиям барьерной конструкции для $A^{\cdot}(X)$.

Геометрически это означает, что $P_{x,x}(X)$ гомотопически эквивалентно гомотопическому пределу косимплициального пространства, которое, в степени n, есть X_n.

Чен [48] определил вариант барьерной конструкции, включающей в себя ДГ правый $A^{\cdot}$-модуль $M^{\cdot}$ и ДГ левый $A^{\cdot}$-модуль $N^{\cdot}$. Пусть $T^{-s,t}$ $M^{\cdot}, A^{\cdot}, N^{\cdot})=[M^{\cdot}\otimes(\otimes^s A^+)\otimes N^{\cdot}]^t$. Будем использовать обозначение $m[a_1|\ldots|a_s]n$ для элементов $T^{-s,t}(M^{\cdot}, A^{\cdot}, N^{\cdot})$. Мы отсылаем читателя к [48] и [98, § 1—2] по поводу точных формул для дифференциалов d_C и d_I для рассматриваемого случая. Введем градуированное подпространство R в $T^{-s,t}(M^{\cdot}, A^{\cdot}, N^{\cdot})$; порожденное элементами вида

(a) $m[df\,|a_1|\ldots|a_s]n+mf[a_1|\ldots|a_s]n-m[fa_1|\ldots|a_s]n;$

(b) $m[a_1|\ldots|a_s|df]n+m[a_1|\ldots|fa_s]n-m\,[a_1|\ldots|a_s]f\,n$

(c) $m[a_1|\ldots|a_{i-1}|df|a_i|\ldots|a_s|n+m[a_1|\ldots|fa_{i-1}|a_i|\ldots$ $\ldots|a_s]n-m[a_1|\ldots|a_{i-1}|fa_i\ldots|a_s]n$, где $f\in A^0$.

Можно проверить, что R — действительно подкомплекс. Факторкомплекс $\bar{B}(M^\cdot, A^\cdot, N^\cdot)=T(M^\cdot, A^\cdot, N^\cdot)/R$ называется *редуцированной барьерной конструкцией*. Здесь снова имеется барьерная фильтрация на $\bar{B}$ и спектральная последовательность Эйленберга — Мура. Заметим, что d_C равен нулю на Gr_B.

Предложение 6.18 ([48, § 32]). E_1-член спектральной последовательности для $\bar{B}(M^\cdot, A^\cdot, N^\cdot)$ изоморфен $\bar{B}(H(M^\cdot), H(A^\cdot), H(N^\cdot))$.

Если $A^\cdot$ коммутативна, и $M^\cdot, N^\cdot$ — ДГА, то $\bar{B}(M^\cdot, A^\cdot, N^\cdot)$ становится ДГА со смешанным произведением. Для получения обычной барьерной конструкции, допустим, что $A^\cdot$ аугментирована и $M^\cdot=N^\cdot=L$. Обозначим $\bar{B}(L, A^\cdot, L)$ через $\bar{B}(A^\cdot)$. Тогда имеется очевидное отображение $B(A^\cdot)\to\bar{B}(A^\cdot)$. Если $H(A^\cdot)$ связна, то это отображение — квазиизоморфизм.

Для пространства X и ассоциированной ДГА $A^\cdot$ редуцированная барьерная конструкция $\bar{B}(A^\cdot, A^\cdot, A^\cdot)$ является моделью для алгебры де Рама пространства путей PX. Более точно, *итерированный интеграл Чена* определяет отображение $\int$ из $A^{\cdot\otimes r}$ в $A^\cdot(PX)$, которое может быть описано следующим образом. Пусть $w_1, \ldots, w_r$ — элементы $A^\cdot(PX)$. Рассмотрим n-симплекс $\sigma:\Delta^n\to PX$ на PX и пусть $\Phi:[0, 1]\times\Delta^n\to X$ — соответствующее отображение. Обозначим через t первую координату на прямом произведении $[0, 1]\times\Delta^n$ и пусть $\partial/\partial t$ — соответствующее векторное поле. Дифференциальная форма

$$\sigma^*\left(\int w_1\ldots w_r\right)$$

описывается как интеграл

$$\int\ldots\int\limits_{0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant\ldots\leqslant t_r\leqslant 1} w_1'(t)\wedge\ldots\wedge w_r'(t_r)\,dt_1\ldots dt_r,$$

где

$$w_j'(t)=\frac{\partial}{\partial t}\lrcorner\Phi^*(w_j).$$

Пусть $p_t:PX\to X$ — точка кривой в $t\in[0, 1]$.

Предложение 6.19 (Чен, [48]). Если X — односвязное пространство, то отображение из $\bar{B}(A^\cdot, A^\cdot, A^\cdot)$ в $A^\cdot(PX)$ определенное как

$$w'[w_1|\ldots|w_r]w''\mapsto p_0{}^*w'\wedge\left(\int w_1\ldots w_r\right)\wedge p_1{}^*w''$$

есть изоморфизм ДГА.

Редуцированная барьерная конструкция является алгебраическим инструментом вычисления прообраза расслоения

$$PX \to X \times X$$

при отображении $f=(f_0, f_1) : Y \times Z \to X \times X$.

Предложение 6.20. Пусть $f_0 : Y \to X$ и $f_1 : Z \to X$ — непрерывные отображения, $f=(f_0, f_1) : Y \times Z \to X \times X$ и P_f определено из диаграммы

$$\begin{tikzcd} P_f \arrow[r, "F"] \arrow[d] & PX \arrow[d] \\ Y\times Z \arrow[r, "f"] & X\times X \end{tikzcd} .$$

Допустим, что X односвязно. Тогда отображение $\bar{B}(A^{\cdot}(Y), A^{\cdot}(X), A^{\cdot}(Z)) \to A^{\cdot}(P_f)$ есть квазиизоморфизм ДГА.

Это применимо, в частности, к гомотопическому слою $E_f(y)$ отображения $f : X \to Y$ в точке $y \in Y$, поскольку он является прообразом расслоения путей при отображении включения $X \times \{y\} \hookrightarrow X \times Y$.

Рассматривая пространства петель в точке P_{xx} для неодносвязного пространства X имеем спаривание

$$B(A^{\cdot}(X)) \otimes S_{\cdot}(P_{xx}(X)) \to L,$$

где $S_{\cdot}(-)$ — сингулярный цепной комплекс. Так как

$$H_0(P_{xx}(X), L) = L(\pi_1(X, x)],$$

то в нулевых когомологиях получаем спаривание

$$H^0(B(A^{\cdot}(X)) \otimes L[\pi_1(X, x)] \to L.$$

Теорема 6.21 (Чен [48, § 2.6]). Если X линейно связно, то при спаривании

$$H^0 B(A^{\cdot}(X)) \otimes L(\pi_1(X, x)) \to L$$

барьерная фильтрация

$$0 \subset \mathbf{B}_0 \subset \mathbf{B}_1 \subset \ldots H^0 B(A^{\cdot}(X))$$

двойственна фильтрации

$$L[\pi_1(X, x)] \supset J \supset J^2 \supset \ldots$$

степеней аугментирующего идеала J в групповой алгебре $L[\pi_1(X, x)]$. Следовательно, спаривание дает изоморфизм

$$\mathbf{B}_s H^0 B(A^{\cdot} X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_L(L[\pi_1(X, x)]/J^{s+1}, L).$$

Полезно заметить, что $\mathrm{Gr}_s^{\mathrm{B}} H^0 B(A^{\cdot}(X))$ является подпространством $\otimes^s H^1(X)$.

Для применения барьерной конструкции к теории Ходжа, необходимо показать, что барьерная конструкция ДГА, являющейся смешанным комплексом Ходжа, снова является смешанным комплексом Ходжа. С этой целью Хейн ввел понятие мультипликативного L-смешанного комплекса Ходжа, который есть смешанный комплекс Ходжа

$$(A_L^{\bullet}, W) \xrightarrow{\alpha} (A_{\mathbf{C}}^{\bullet}, W, F),$$

где $(A_L^{\bullet}, W)$ и $(A_{\mathbf{C}}^{\bullet}, W, F)$ — фильтрованные ДГА и α индуцирует квазиизоморфизм ДГА над $\mathbf{C}$. Он аналогичным образом определил понятие L-СХК, который есть модуль над мультипликативным смешанным комплексом Ходжа (СХК).

Им был получен следующий основной технический результат.

Предложение 6.22 ([98, теорема 3.2.1]]. Пусть A — положительно градуированный L-СХК, весовая фильтрация которого ограничена снизу. Допустим, что $H^0(A) = L$. Если СХК M есть правый A-модуль и СХК N есть левый A-модуль, то

$$\overline{B}(M, A, N) = ((\overline{B}(M_L, A_L, N_L), W_{\bullet}), (\overline{B}(M_{\mathbf{C}}, A_{\mathbf{C}}, N_{\mathbf{C}}), W_{\bullet}, F^{\bullet}),$$

где фильтрации $W_{\bullet}$ и $F^{\bullet}$ определяются естественным диагональным процессом, есть $L = CXK$.

Хейн [98, теорема 5.6.3] доказал, что существует естественный L-СХК, ассоциированный с произвольным симплициальным многообразием $X_{\bullet}$ и хорошей компактификацией $X_{\bullet} \hookrightarrow \overline{X}_{\bullet}$. Аналогичный результат был также доказан Делинем (неопубликовано) и Наварро Азнаром [135].

Вместе с предложением 6.20 это утверждение дает смешанную структуру Ходжа на когомологиях барьерной конструкции, следовательно, в частности, на когомологиях $P_{x,x}$. Поскольку эти когомологии являются алгеброй Хопфа, то получаем смешанную структуру Ходжа на их примитивной части, и, следовательно, на гомотопических группах X.

Построения [98] и [135] дают следующую теорему.

Теорема 6.23. Пусть X — комплексное алгебраическое многообразие и x — точка X.

(1) Если (X, x) нильпотентно (в смысле [29]), то высшие гомотопические группы X допускают смешанную структуру Ходжа, для которой произведение Уайтхеда есть морфизм смешанной структуры Ходжа.

(2) Отображение Гуревича для (X, x) есть морфизм смешанной структуры Ходжа.

(3) Пополнение $\mathbf{Q}[\pi_1(X, x)]^{\wedge}$ в групповом кольце $\mathbf{Q}[\pi_1(X, x)]$ относительно аугментирующего идеала J имеет смешанную структуру Ходжа в категории алгебр Хопфа. Если X собственно и гладко, фильтрация степеней J есть весовая фильтрация.

Все эти смешанные структуры Ходжа функториальны относительно алгебраических отображений $f: (X, x) \to (Y, y)$.

Существует версия этой теоремы для относительных гомотопических групп (см. [98, теорема 4.2.2]). Следующий результат о гомотопических слоях и соответствующих представлениях монодромии представляет особый интерес для геометров.

Теорема 6.24 ([98, теорема 4.3.1]). Пусть $f: (X, x) \to (Y, y)$ — алгебраическое отображение. Допустим, что Y связно и что действие $\pi_1(Y, y)$ на когомологиях $H_*(E_f(y))$ гомотопического слоя унипотентно при всех k. Тогда существует естественная смешанная структура Ходжа на когомологических группах и (если $E_f(y)$ нильпотентен) на гомотопических группах гомотопического слоя $E_f(y)$. Представление монодромии $\mathbf{Q}\pi_1(Y, y) \to \operatorname{End} H^k(E_f(y))$ есть морфизм смешанных структур Ходжа.

Применяя эту теорему к $(Y, y) = (\mathbf{C}^*, t)$ с расслоением f в окрестности t, Хейн [98] получил смешанные структуры Ходжа на когомологиях и гомотопиях гомотопического слоя, которые совпадают с предельными смешанными структурами Ходжа на когомологиях и гомотопиях общего слоя $f^{-1}(t)$ (в смысле § 2).

Смешанная структура Ходжа на пополнении фундаментальной группы алгебраической кривой имеет интресные связи с гармоническими объемами Харриса [103] и с образами двумерных циклов в их якобиевом многообразии в соответствующем промежуточном якобиане Гриффитса [139]. Отметим следующую теорему типа Торелли для кривых с отмеченными точками.

Теорема 6.25 (Хейн [99], Пулте [139]). Пусть V и W — гладкие комплексные проективные кривые. Пусть x — точка V, y — точка W. Если существует гомоморфизм колец между $\mathbf{Z}\pi_1(V, x)/J^3$ и $\mathbf{Z}\pi_1(W, y)/J^3$, *то существует изоморфизм* $f: V \to W$. Более того, кроме двух точек $x=a$ или $x=b$, f может быть выбрано переводящим точку x в y.

Приложения смешанных структур Ходжа на факторах групповой алгебры к унипотентным вариациям смешанных структур Ходжа будет обсуждаться в § 7.

§ 7. Вариация смешанной структуры Ходжа

Понятие вариации структуры Ходжа (в абстрактном смысле) было введено в § 2. Мы видели, что существует полная локальная теория ее вырождения (теоремы 2.4 и 2.16). Более того, она обеспечивает теорию Ходжа для когомологий с коэффициентами в объемлющей локальной системе (теорема 3.15). Напомним, что алгебраическая геометрия дает вариации ходжевой структуры над $\mathbf{Z}$ из собственного гладкого морфизма $f: Z \to X$ с локальной системой $\mathbf{V} = R^m f_* \mathbf{C}$.

Если мы опустим условие гладкости или собственности для $f: Z \to X$ и заменим его на условие локального топологического

постоянства, которое автоматически выполнено в собственном гладком случае, и справедливо для открытых по Зарисскому подмножеств X для любого морфизма многообразий (см. [189]), то f приводит к семейству смешанных структур Ходжа на $H^m(Y_x, \mathbf{Z})$, когда x пробегает X, удовлетворяющих некоторым условиям. Это приводит к абстрактному понятию (градуировано-поляризованной) вариации смешанной структуры Ходжа, которое мы сейчас определим:

Определение 7.1. Пусть A — подкольцо $\mathbf{R}$ и X — комплексное многообразие. *Градуировано-поляризованной вариацией A-смешанной структуры Ходжа* называется объект, определенный заданием локальной системы $\mathbf{V}_A$ на X A-модулей конечного ранга и

(1) Возрастающей фильтрации $\subset W_k \subset W_{k+1} \subset \ldots$ для $\mathbf{V}_A \otimes_Z \mathbf{Q}$;

(2) Убывающей фильтрации $\subset \mathcal{F}^{p+1} \subset \mathcal{F}^p \subset \ldots$ для $\mathcal{V} = \mathcal{O}_X \otimes_A \mathbf{V}_A$;

(3) Последовательности билинейных форм

$$S_k : \mathrm{Gr}_k^W(\mathbf{V}_A \otimes \mathbf{Q}) \times \mathrm{Gr}_k^W(\mathbf{V}_A \otimes \mathbf{Q}) \to A(-k) \otimes \mathbf{Q},$$

удовлетворяющих условиям:

(a) $\nabla \mathcal{F}^p \subset \Omega_X^1 \otimes \mathcal{F}^{p-1}$;

(b) задание $\mathrm{Gr}_k^W(\mathbf{V}_A \otimes \mathbf{Q})$, фильтрации, индуцированной $\mathcal{F}$ на $\mathcal{O}_X \otimes \mathrm{Gr}_k^W \mathbf{V}_A$, и S_k дает поляризованную вариацию структуры Ходжа (2.1) веса k.

Как и в случае чистых структур Ходжа, вариация смешанной структуры может быть описана в терминах соответствующего классифицирующего пространства смешанных структур Ходжа. Пусть V — вещественное векторное пространство с возрастающей фильтрацией W. Фиксируем билинейные формы S_k на $\mathrm{Gr}_k^W V$ как в определении 7.1 (3). Мы хотим описать множество M всех убывающих фильтраций F на $\mathbf{V}_\mathbf{C}$, которые индуцируют ходжевы структуры с заданными числами Ходжа на каждом $\mathrm{Gr}_k^W V$, поляризованном формой S_k. Обозначим через M_k классифицирующее пространство последних, тогда (§2) M расслаивается над $\prod_k M_k$ со слоем, однородным относительно действия унипотентной комплексной группы Ли. Грубо говоря, эта унипотентная группа содержит расширения данных для смешанных структур Ходжа. Конечно, природа этих расширений для смешанной теории Ходжа неоднократно изучалась [12], [34], [37], [131].

Пространство M может быть получено с точки зрения классов эквивалентности расщеплений, которые мы упоминали ранее

(см. замечание перед определением и предложением 2.6). Рассмотрим, в частности, расщепление

$$V_{\mathbf{C}}=\oplus V^{p,q}$$

такое, что $W_l=\bigoplus\limits_{p+q\leqslant l} V^{p,q}$, $V^{p,q}\equiv\overline{V^{q,p}}(\operatorname{mod} W_{p+q-1})$. Это — вещественное расщепление, если $V^{p,q}=\overline{V^{q,p}}$.

Пусть $W_0\,\mathrm{Gl}(V)$ — группа автоморфизмов V, сохраняющих фильтрацию W на V. Пусть $W_{-1}\,\mathrm{Gl}(V)$ — ядро канонического отображения

$$W_0\,\mathrm{Gl}(V)\xrightarrow{\pi}\prod_k \mathrm{Gl}(\mathrm{Gr}_k^W V).$$

Пусть $G_k\subset\mathrm{Gl}(\mathrm{Gr}_k^W V)$ — подгруппа сохраняющая S_k, и

$$\tilde{G}=\pi^{-1}\left(\prod_k G_k\right).$$

Множество вещественных расщеплений является главным однородным пространством для $\tilde{G}_{\mathbf{R}}$, а множество всех расщеплений — главное однородное пространство для

$$\tilde{H}=\tilde{G}_{\mathbf{R}}\cdot W_{-1}\,\mathrm{Gl}\,(V)_{\mathbf{C}}.$$

Выберем вещественное расщепление (которое, следовательно, определяет фильтрацию Ходжа F смешанной структуры Ходжа, расщепляющейся над $\mathbf{R}$) как базовую точку. Пусть $\tilde{B}$ — подгруппа $F^0\tilde{H}$ в $\tilde{H}$, сохраняющая F; тогда $M\simeq\tilde{H}/\tilde{B}$ и $\tilde{G}_{\mathbf{R}}/(\tilde{B}\cap\tilde{G}_{\mathbf{R}})$ дает подпространство смешанных ходжевых структур, расщепляющихся над $\mathbf{R}$. Горизонтальное подрасслоение может быть определено, как и раньше, и вариация смешанной структуры Ходжа приводит к горизонтальному голоморфному отображению $\tilde{\Phi}:\tilde{X}\to M$, эквивариантному относительно действия группы монодромии.

Существенным отличием от «чистого» случая является отсутствие какого-либо аналога теоремы о нильпотентной орбите для вариации смешанной структуры Ходжа. Однако, имеется путь, послуживший и причиной принятого определения 7.1. В условиях отсутствия тотальной ходжевой фильтрации F в (2) и (a) мы говорим только о последовательностях чистых подфакторов. В [184, (3.16)] приведены простые примеры градуировано-поляризованной вариации смешанной структуры Ходжа, либо не имеющей предельной фильтрации Ходжа, либо ведущей себя как чистая для Gr^W. Хотя чистые вариации «внутренне управляемы», необходимы условия на расширения.

Следующее определение кажется искусственным, однако, оно — правильное

Определение 7.2 ([114], [184]). (i) *Градуировано-поляризованная вариацией* $\mathbf{Q}$*-смешанной структуры Ходжа* над Δ^* называется допустимой, если

(a) Предельная фильтрация Ходжа (в смысле (2.10)) существует и индуцирует предельную фильтрацию Шмида на каждом $\mathrm{Gr}_k^W \mathbf{V}$.

(b) Нильпотентная часть логарифма монодромии (относительно W) допускает весовую фильтрацию относительно W (см. (2.14)).

(ii) Градуировано-поляризованная вариация смешанной структуры Ходжа на X называется *допустимой*, если ее сужение на любой мероморфно вложенный Δ^* допустимо в смысле (i).

Значение этого определения заключается в справедливости следующих двух результатов.

Теорема 7.3. Любая геометрическая вариация смешанной структуры Ходжа является допустимой.

Теорема 7.4. Для допустимых вариаций смешанной структуры Ходжа $\mathbf{V}$ на квазипроективном многообразии X существует функториальная смешанная структура Ходжа на $H^{\cdot}(X, \mathbf{V})$.

Наметим доказательства этих утверждений.

Теорема 7.3 доказывается с помощью обобщения конструкции Стинбринка [179] (см. теорему 2.22) на негладкий несобственный случай. Это было сделано в начале 1980 гг., частично переоткрывая, Дю Буа [65], Эл Зейном [76] Гюлленом, Наварро Азнаром и Пуэрта [95], Стинбринком и Цукером [184]. С помощью симплициальных гипернакрытий (см. теорему 1.14) можно заметить что гладкий, но, возможно, несобственный случай — ключевой и мы его опишем здесь.

Пусть $f: X \to \Delta$ собственный морфизм, такой, что f гладко в Δ^* и $D = f^{-1}(0)$ — дивизор с нормальными пересечениями. Пусть $Y \subset X$ — дивизор с нормальными пересечениями, такой, что отображение, индуцированное f на каждом $\tilde{Y}^n$ (обозначения те же, что и в предложении 1.3), в Δ гладко на Δ^* и, более того, $D \cup Y$ — дивизор с нормальными пересечениями. Используя конструкцию почти циклов (определение 2.21) для пары (X, Y) аналогично, как и предложение 2.19, получается

Предложение 7.5. Для каждого $m \geqslant 0$ высший прямой образ пучка

$$\mathscr{Y}^m = R^m f_* (\Omega^{\cdot}_{X/\Delta}(\log Y \cup D))$$

свободен над Δ и для всех $s \in \Delta$ каноническое отображение

$$\mathscr{Y}^m \otimes \mathcal{O}_{\Delta} k(s) \to H^m(X_s, \Omega^{\cdot}_{X/\Delta}(\log Y \cup D) \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{O}_{X_s})$$

есть изоморфизм.

Замечание 7.6. Для $s \in \Delta^*$ правая часть равна $H^m(X_s - Y_s, \mathbf{C})$; при $s = 0$ получаем канонический изоморфизм когомологий почти циклов для $X - Y$ на $H^m(\tilde{X}^* - \tilde{Y}^*, \mathbf{C})$.

Не ограничивая общности, мы можем считать, как и в § 2, что автоморфизм монодромии для $H^m(X_s - Y_s, \mathbf{Q})$ унипотентен.

Когомологический смешанный комплекс Ходжа строится аналогично [179] — в данной ситуации $Y=\varnothing$; и построения сводятся к случаю, рассмотренному Стинбринком.

Имеем диаграмму

$$\begin{tikzcd} X-Y-D \arrow[r, "j"] \arrow[d] & X-Y \arrow[r, "g"] \arrow[d] & X \arrow[dl] & D \arrow[l, "i"'] \arrow[d] \\ \Delta^* \arrow[r] & \Delta & & \{0\} \arrow[ll, "f"] \end{tikzcd} \quad . \qquad (7.1)$$

Пусть $A^{\cdot}_{\mathbf{Z}}=\psi_{f,1}(Rg_*\mathbf{Z}_{X-Y})$. Положим

$$H^q_{\mathbf{Q}}=i^*Rg_*Rj_*\mathbf{Q}_{X-Y-D}(q+1)[q+1]/i^*Rg_*(\tau_g Rj_*\mathbf{Q}_{X-Y-D}\ldots), \quad (7.2)$$

и определим $\theta: H^q_{\mathbf{Q}}\to H^{q+1}_{\mathbf{Q}}$ как и раньше. Берем для $(A^{\cdot}_{\mathbf{Q}}, W)$ получающийся простой комплекс с фильтрацией, определяемой как

$$W_k H^q_{\mathbf{Q}}=\operatorname{image} i^*\tau_{\leqslant k+2q+1}R(gj)_*\mathbf{Q}_{X-Y-D}(k+1)[k+1]. \quad (7.3)$$

Наконец, $A^*_{\mathbf{C}}$ — простой комплекс, двойного комплекса с членами

$$A^{p,q}=\Omega_X^{p+q+1}(\log Y\cup D)/W(D)_q\,\Omega_X^{p+q+1}(\log Y\cup D) \quad (7.4)$$

и дифференциалами, индуцированными d и $\theta=ds/s$; его фильтрации, как и раньше W и F, есть

$$W_k A^{p,q}=\operatorname{image} W_{k+2q+1}\Omega_X^{p+q+1}(\log Y\cup D),$$

$$F^p A^{\cdot}_{\mathbf{C}}=\bigoplus_{r\geqslant p} A^{r,s}. \quad (7.5)$$

В (7.4) $W(D)$ обозначает весовую фильтрацию, определяемую только дивизором D (т. е. не учитываются полюса вдоль Y). Конечно, тотальная весовая фильтрация W для $\Omega^{\cdot}_X$ $(\log Y\cup D)$ «составлена» из $W(D)$ и $W(Y)$ и есть, конечно, *конволюция* (или *амальгамма*) этих фильтраций:

$$W_k=\sum_{l+m=k} W(D)_l\cap W(Y)_m. \quad (7.6)$$

Полезно также рассмотреть третью фильтрацию $W(Y)$ на $A^{\cdot}_{\mathbf{C}}$, определенную более наивным образом:

$$W(Y)_l A^{p,q}=\operatorname{image} W(Y)_l\,\Omega_X^{p+q+1}(\log Y\cup D).$$

Как и в случае $Y=\varnothing$, комплекс $A^{\cdot}_{\mathbf{C}}$ допускает эндоморфизм ν, задаваемый, с точностью до знака каноническими проекциями

$$\nu: A^{p,k}\to A^{p-1,q+1}.$$

Ясно, что ν соответствует фильтрации $W(Y)$. На гиперкогомологиях ν индуцирует логарифм монодромии N.

Предложение 7.7. (1) Фильтрация $W(Y)$ может быть определена на комплексе, квазиизоморфном $A^{\cdot}_{\mathbf{Q}}$, так, что $\mathrm{Gr}_l^{W(Y)} A^{\cdot}$ вместе с эндоморфизмом, индуцированным ν, изоморфен $\mathbf{Q}$-когомологическому ходжеву комплексу Стинбринка для собственной гладкой ситуации $\widetilde{Y}^{(l)} \to \Delta$ с эндоморфизмом, сдвинутым на $[-l]$.

(2) Отображение

$$\Omega^{\cdot}_{X/\Delta}(\log(Y \cup D)) \otimes \mathcal{O}_{D\,\mathrm{red}} \to A^{\cdot}_{\mathbf{C}}$$

есть бифильтрованный квазиизоморфизм относительно $W(Y)$ и F.

Прежде чем двигаться дальше, нам нужно ввести одно понятие, принадлежащее Эл Зейну [70]. Оно является упрощённой версией понятия из [184, § 6] (см. также [196, § 3]), вполне достаточной для приложений.

Определение 7.8. $\mathbf{Q}$-когомологический смешанный комплекс Ходжа $(K^{\cdot}_{\mathbf{Q}}, W)$, $(K^{\cdot}_{\mathbf{C}}, W, F)$ называется *фильтрованным возрастающей фильтрацией* P для $K^{\cdot}_{\mathbf{Q}}$ и $K^{\cdot}_{\mathbf{C}}$, если

(a) $(P_jK^{\cdot}_{\mathbf{Q}}/P_kK^{\cdot}_{\mathbf{Q}}, W)$, $(P_jK^{\cdot}_{\mathbf{C}}/P_kK^{\cdot}_{\mathbf{C}}, W, F)$ — когомологический смешанный комплекс Ходжа при $j > k$;

(b) $\mathrm{Gr}_l^W P_j K^{\cdot}_{\mathbf{C}} \simeq \bigoplus_{k \leq j} \mathrm{Gr}_l^W \mathrm{Gr}_k^P K^{\cdot}_{\mathbf{C}}$, т. е. P расщепляется на $\mathrm{Gr}_l^W K^{\cdot}_{\mathbf{C}}$.

Предложение 7.9 ([70], [76]). Для $\mathbf{Q}$-когомологического смешанного комплекса Ходжа, фильтрованного с помощью P (как выше)

(1) Две прямые фильтрации и рекурсивная фильтрация, определяемая W на ${}_pE_r$, совпадают и для $r = \infty$ они совпадают с фильтрацией W для $H^{\cdot}(K^{\cdot}_{\mathbf{C}})$, индуцированной на $\mathrm{Gr}^P H^{\cdot}(K^{\cdot}_{\mathbf{C}})$; то же верно с заменой W на F.

(2) Фильтрации W и F определяют смешанную структуру Ходжа на ${}_pE_r$ и d_r есть морфизм смешанных структур Ходжа. На $E_\infty^{-j, n+j} \simeq \mathrm{Gr}_j^P H^n(K^{\cdot}_{\mathbf{C}})$ смешанная структура Ходжа есть фактор смешанной структуры Ходжа на

$$\mathrm{im}\,\{H^n(P_jK^{\cdot}_{\mathbf{C}}) \to H^n(K^{\cdot}_{\mathbf{C}})\}.$$

Замечание 7.10. Роль условия (b) в определении 7.8 состоит лишь в том, чтобы показать, что конструкции «Dec W» и «P_j/P_k» на $R\Gamma K^{\cdot}_{\mathbf{C}}$ коммутируют. Условие выполнено в случае, когда W записано в виде конволюции P с некоторой фильтрацией на $K^{\cdot}_{\mathbf{C}}$ [195, (A.1)].

Теперь получаем, что справедлива

Теорема 7.11. Пара $(A^{\cdot}_{\mathbf{Q}}, W), (A^{\cdot}_{\mathbf{C}}, W, F)$ есть **Q**-когомологический смешанный комплекс Ходжа фильтрованный с помощью $W(Y)$. На $H^m(D, A^{\cdot}_{\mathbf{C}}) \simeq \mathscr{V}_0^m$

(1) $W(Y)$ индуцирует весовую фильтрацию Делиня когомологической группы

$$H^m(\tilde{X}^* - \tilde{Y}^*, \mathbf{C}) \simeq H^m(X_t - Y_t, \mathbf{C}) \quad (t \in \Delta^*);$$

(2) F индуцирует предельную фильтрацию Ходжа;

(3) W индуцирует весовую фильтрацию локального логарифма монодромии N относительно $W(Y)$.

Первое утверждение следует из предложений и замечаний 7.7,7.8 и 7.10, поскольку $W(Y)$ — «конволютант» W. Можно непосредственно убедиться в том, что существует квазиизоморфизм (ср. с 2.4):

$$\mathrm{Gr}_r^W A^{\cdot}_{\mathbf{C}} \simeq \bigoplus_{k \geqslant 0, -r} \bigoplus_{l < k+r} (a_{r+2k+1})_* \Omega^{\cdot}_{\tilde{Y}(l) \cap \tilde{D}(r+2k+1-l)}(-r-k)[-r-2k].$$

Из 7.5, 7.7(2) и 7.9 получаем, что предельная фильтрация Ходжа индуцирована F и ведет себя хорошо на $\mathrm{Gr}^{W(Y)}$. Наконец, 7.6(1) близко к 7.11(3) (см. (2.14)), именно, оно дает аналогичное утверждение для

$$_{W(Y)}E_1^{-l, \cdot} \simeq H^{\cdot}(\tilde{Y}^l, \mathbf{C})[l].$$

Для получения такого соотношения для $_{W(Y)}E_2 \simeq \mathrm{Gr}^{W(Y)} H^{\cdot}(A^{\cdot}_{\mathbf{C}})$ нужна более сильная аргументация (см. [76, (3.30)], [184, (5.7)]).

Этим мы заканчиваем доказательство теоремы 7.3 в гладком случае. Обсудим теперь доказательство теоремы 7.4.

Во-первых, сформулируем важное следствие (7.4), а именно, жёсткость допустимых вариаций смешанной структуры Ходжа. (Это не означает, что не существует нетривиальных деформаций, наоборот, при любой деформации «все должно меняться»). Если **V** и **V′** объемлющие допустимые вариации, то Hom(**V**, **V′**) также допустима (см. [184, (5.7)]), так что

$$H^0(X, \mathrm{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V}')) \hookrightarrow \mathrm{Hom}(V(x), V'(x)) \qquad (7.7)$$

есть морфизм смешанных структур Ходжа для любого $x \in X$. При $\mathbf{V} = \mathbf{V}'$ как локальных систем, фильтрованных W, существует тавтологический элемент

$$\mathrm{Id} \in W_0 H^0(X, \mathrm{Hom}(\mathbf{V}, \mathbf{V}')).$$

Тогда (7.7) утверждает, что тождественный элемент есть F^0 (то есть изоморфизм вариаций смешанной структуры Ходжа), если это имеет место хотя бы в одной точке X. Следовательно, получается

Теорема 7.12 (*Жёсткости*). Допустимая вариация смешанной структуры Ходжа над компактифицируемым кэлеровым многообразием определяется полностью её представлением монодромии и значением в одной точке. Другими словами, если

заданы фильтрованная локальная система $(\mathbf{V}, W)$ на X, точка $x \in X$ и фильтрация $F(x)$ на $V(x)$, такие, что $(V(x), W(x), F(x))$ определяют смешанную структуру Ходжа, то существует не более одного расширения этих данных до допустимой вариации смешанной структуры Ходжа.

Замечание 7.13. Для вариаций (чистых) структур Ходжа в компактном случае это было впервые доказано Гриффитсом [89, III, § 7], в геометрическом случае — Делинем [56, II, (4.1)], в общем, без условия кэлеровости — Шмидом [167, (7.24)].

Конструкция смешанной структуры Ходжа для $H^{\cdot}(X, \mathbf{V})$, где $\mathbf{V}$ объемлет допустимую вариацию смешанной структуры Ходжа над компактифицируемым кэлеровым многообразием X, в полной общности была дана М. Саито [160] на основе использования его теории смешанных модулей Ходжа [153], [155].

В случае, когда X — кривая, смешанная структура Ходжа может быть построена «вручную» и это сделано в [184, § 4]. Предположим, для простоты, что локальные преобразования монодромии в $x \in D$ унипотентны и $N(x)$ — их нильпотентные логарифмы. Рассмотрим

$$K^{\cdot}_{\mathbf{C}} = \Omega^{\cdot}_X(\log D) \otimes \overline{\mathscr{V}}$$

с обычной фильтрацией F (как в (3.8)). Весовая фильтрация Wt для $K^{\cdot}_{\mathbf{C}}$ состоит в подкомплексах

$$\overline{\mathscr{A}} \to \mathscr{B}, \tag{7.8}$$

где $\overline{\mathscr{A}}$ — каноническое расширение, ассоциированное с локальной подсистемой $\mathbf{A}$ в $\mathbf{V}$ и

$$\mathscr{B} = \{\varphi \in \Omega^1_{\overline{X}}(\log D) \otimes \overline{\mathscr{A}} : \mathrm{Res}_x(\varphi) \in B(x) \ \forall x \in D\}. \tag{7.9}$$

Здесь $B(x)$ удовлетворяет условию

$$N(x) A(x) \subset B(x) \subset A(x).$$

Будем писать $\{\mathbf{A}, B\}$ для (7.8). Положим

$$B_k(x) = N(x) W_k(x) + M_{k-1}(x) W_k(x),$$

где $M(x)$ — весовая фильтрация $N(x)$ относительно W и $\mathscr{B}_k$ определим соответственным образом (как в (7.9)). Тогда $Wt_k K^{\cdot}_{\mathbf{C}}$ есть комплекс $\{\mathbf{W}_k, B_k\}$, т. е.

$$\overline{\mathscr{W}}_k \to \mathscr{B}_k.$$

Можно найти изоморфизм (фильтрованный с помощью F)

$$\mathrm{Gr}^{Wt}_k K^{\cdot}_{\mathbf{C}} \simeq \{\mathrm{Gr}^W_k \mathscr{V}, N\, \mathrm{Gr}^W_k\} \oplus$$
$$\oplus \left(\bigoplus_{x \in D} \mathrm{Gr}^{M(x)}_{k-1} (W_{k-1}(x)/N(x) W_{k-1}(x))(-1)[-1]\right). \tag{7.10}$$

Замечание 7.14. Формула (7.9) содержит опущенное описание весовой фильтрации в «чистом» случае (см. после (3.14)).

Теорема 7.15. Для допустимой вариации A-смешанной структуры Ходжа на гладкой алгебраической кривой X с объемлющей локальной системой $\mathbf{V}$, $(K^{\cdot}_{\mathbf{C}}, Wt; F)$ есть комплексная часть когомологического A-смешанного комплекса Ходжа, для которого

$$H^{\cdot}(K^{\cdot}_{\mathbf{C}}) \simeq H^{\cdot}(X, \mathbf{V}).$$

Существует другой важный случай, когда теорема 7.4 может быть доказана непосредственно (см. [101, § 8]) и который представляет самостоятельный интерес.

Определение 7.16. Вариация смешанной структуры Ходжа с объемлющей локальной системой $\mathbf{V}$ и весовой фильтрацией W называется *унипотентной*, если вариации структуры Ходжа на чистых подфакторах $\mathrm{Gr}_k^W \mathbf{V}$ постоянны.

Классифицирующее отображение $\tilde{\Phi}$ унипотентной вариации отображает в $W_{-1}\mathrm{Gl}(V)_{\mathbf{C}}/(\tilde{B} \cap W_{-1}\mathrm{Gl}(V)_{\mathbf{C}})$. Причиной для такого ее названия является

Предложение 7.17. Каждое из следующих условий на представление монодромии

$$\rho: \pi_1(X, x) \to W_0\mathrm{Gl}(V)$$

вариации смешанной структуры Ходжа эквивалентно «унипотентности» (в определённом выше смысле):

(1) ρ унипотентно;

(2) линейное распространение ρ на групповое кольцо, $\bar{\rho}$: $\mathbf{C}\pi_1(X, x) \to W_0\mathfrak{gl}(W)$ тривиально на некоторой степени J^l аугментирующего идеала;

(3) $\bar{\rho}(J) \subset W_{-1}\mathfrak{gl}(V)$.

Дадим некоторые примеры унипотентных вариаций, происходящих из геометрии.

Примеры 7.17. (1) Пусть X — гладкое многообразие. Для любого $s \geqslant 0$ семейство $\mathbf{Z}[\pi_1(X, x)]/J^{s+1}$, при x пробегающем X, определяет унипотентную вариацию смешанной структуры Ходжа. В самом деле, для двойственной вариации $\mathbf{B}_s H^0(H(A^{\cdot} X))$ — см. (6.19) и (6,20), — $\mathrm{Gr}^{\mathbf{B}}$ полностью описывается в терминах когомологий, так что ходжева структура не зависит от x. Такая вариация называется *s-той тавтологической вариацией.*

(2) Пусть X — гладкая полная кривая. Зафиксируем точку $y \in X$ и рассмотрим $V(x) = H^1(X\{x, y\})$ (которое может быть отождествлено с H_1 для сингулярной факторкривой, в которой x и y отождествлены), когда x пробегает $X - \{y\}$. Из точной последовательности

$$0 \to \mathbf{C}([x] - [y]) \to H^1(X, \{x. y\}) \to H^1(X) \to 0$$

видно, что получающаяся вариация смешанной структуры Ходжа унипотентна. Она родственна первому примеру (1), по-

скольку она двойственна к $H^1(X, \{x, y\})(1) \simeq H^0(P_{xy}X)/J^2$. (См. [101, (5.39)]).

(3) Пусть V — векторное пространство размерности 2, рассмотрим множество смешанных структур Ходжа на V с

$$h^{p,q} = \begin{cases} 1, & \text{если } (p, q) = (0, 0),\ (-1, 1), \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Как мы уже говорили ранее, это множество параметризуется с помощью $W_{-1}\mathrm{Gl}(V) \simeq \mathbf{C}$. Унипотентная вариация $\mathbf{Z}$-смешанной структуры Ходжа тогда определяется над

$$\mathbf{C}^* \simeq \mathbf{C}/\mathbf{Z}(1).$$

Можно показать, что она имеет геометрическое происхождение [184, 2.13)].

Из 7.17(1) получаем, что все локальные преобразования монодромии в унипотентной вариации, конечно, унипотентны и их нильпотентные логарифмы N удовлетворяют условию

$$NW_l(V) \subset W_{l-1}(V) \text{ для всех } l. \tag{7.11}$$

Предположим далее, что вариация смешанной структуры Ходжа также допустима. Тогда условие (7.2) (в) эквивалентно следующему усилению (7.11):

$$NW_l(V) \subset W_{l-2}(V) \text{ для всех } l,$$

и весовая фильтрация N относительно W совпадает с W.

Для допустимых унипотентных вариаций имеется теорема классификации, дополняющая теорему 7.12 для этого случая, формулируемая в терминах представления монодромии.

Определение 7.18. *A-смешанным теоретико-ходжевым унипотентным представлением* $\pi_1(X, x)$ называется гомоморфизм A-алгебр

$$\rho : A[\pi_1(X, x)]/J^{s+1}) \to \mathfrak{gl}(V_a)$$

для некоторого $s \geqslant 0$, являющийся морфизмом смешанных структур Ходжа; здесь V_a — объемлет некоторую A-смешанную структуру Ходжа.

Теорема 7.19 ([101, (1.6)]). Допустимые унипотентные вариации находятся во взаимно однозначном соответствии с смешанными теоретико-ходжевым унипотентными представлениями $\pi_1(X, x)$.

Это соответствие легко описывается и заключается в следующем. $\mathbf{C}[\pi_1(X, x)]/J^{s+1}$ есть *s-тая группа Мальцева* G_s (подмножество групповых элементов). Отображение ρ сужается до группового гомоморфизма

$$G_s \to W_{-1}\mathrm{Gl}(V);$$

далее, поскольку ρ — смешанное теоретико-ходжево, то оно определяет отображение

$$G_{s,\mathbf{C}}/F^0G_{s,\mathbf{C}} \xrightarrow{\hat{\rho}} W_{-1}\mathrm{Gl}(V)_{\mathbf{C}}/F^0W_{-1}\mathrm{Gl}(V)_{\mathbf{C}}.$$

Заметим, что область значений $\hat{\rho}$ есть пространство всех смешанных ходжевых структур, чистые подфакторы которых совпадают с чистыми подфакторами заданной смешанной структуры Ходжа на V. Исходя из $V = \mathbf{C}[\pi_1(X, x)]/J^{s+1}$ и сопряженного представления ρ, получаем

Предложение 7.20 ([101, (5.20)]). Классифицирующее отображение s-той тавтологической вариации пропускается через $\hat{\rho}$.

Пусть $\alpha_s: \tilde{X} \to G_{s,\mathbf{C}}/F^0_{s,\mathbf{C}}$ — результирующее отображение. (Можно проверить, что α_1 задается обычным отображением Альбанезе [101, (5.40)].) Тогда для любого ρ (и соответствующего $\hat{\rho}$) получаем унипотентную вариацию смешанной структуры Ходжа, беря $\hat{\rho} \circ \alpha_s$ как классифицирующее отображение. Тавтологические вариации, будучи геометрическими, допустимы и легко видеть, что таковы же и построенные выше [101, С. 115]. Обратно, представление монодромии

$$\mathbf{C}[\pi_1(X, x)]/J^{s+1} \to W_0\mathfrak{gl}(V)$$

допустимой унипотентной вариации есть морфизм смешанных структур Ходжа. [101, § 7]. Таким образом, взаимно однозначное соответствие получается из свойства жёсткости (теорема 7.12).

§ 8. Группы монодромии

В § 7 мы видели, что допустимые вариации смешанной структуры Ходжа обладают свойством жёсткости (теорема 7.12): если зафиксировать фильтрованную локальную систему A-модулей на многообразии X и смешанную структуру Ходжа на слое над одной точкой (с данной весовой фильтрацией), то число допустимых вариаций A-смешанной структуры Ходжа, продолжающих эти данные, равно нулю или единице. В этом параграфе мы обсудим недавние результаты, полученные в этом направлении, а именно, результаты об условиях, при которых данная локальная система допускает какую-либо вариацию (смешанной) структуры Ходжа. При $A = \mathbf{Z}$ это является расширенной трактовкой вопроса: каковы глобальные группы монодромии семейств алгебраических многообразий? (Напомним, что задание локальной системы $\mathbf{V}$ эквивалентно заданию её представления монодромии

$$\rho : \pi_1(X, x) \to \mathrm{Gl}(V_x)).$$

Для унипотентных представлений ответ дает теорема 7.18. Множество допустимых унипотентных вариаций на $\mathbf{V}$ параметризовано множеством смешанных структур Ходжа на V_x, совместимых с нильпотентным пополнением $\pi_1(X, x)$. Делинь сообщил нам, что существует обобщение этого факта на случай,

когда чистые подфакторы $\mathbf{V}$ имеют конечную монодромию. Сейчас начали появляться общие результаты.

Начиная с этого места, мы будем рассматривать только «чистый» случай. Во-первых, удобно опустить условие вещественности ($\overline{V^{p,q}}=V^{q,p}$) из определения 2.1:

Определение 8.1 (См. [61, (1.1)], [193, (4.6)]). Пусть A — подкольцо $\mathbf{C}$, устойчивое относительно комплексного сопряжения. *Комплексная вариация A-структуры Ходжа* веса m на X состоит из локальной системы $\mathbf{V}_A$ A-модулей конечного ранга вместе со следующими объектами:

(1) семейством C^∞-подрасслоений $\mathcal{V}^{p,q}$ расслоения $\mathcal{V}=\mathcal{O}_X\otimes_A\mathbf{V}_A$ для пар целых (p, q) с $p+q=m$, таких, что $\mathcal{V}$ C^∞-изоморфно их прямой сумме;

(2) плоской $(-1)^m$-эрмитовой формы $S:\mathbf{V}_A\times\mathbf{V}_A\to A(-m)$, удовлетворяющей условиям:

(a) для любого r расслоение $\bigoplus\limits_{p\geqslant r}\mathcal{V}^{p,q}$ определяет голоморфное подрасслоение $\mathcal{F}^p$ и $\bigoplus\limits_{q\geqslant s}\mathcal{V}^{p,q}$ определяет антиголоморфное подрасслоение $\overline{\mathcal{F}}^q$;

(b) $\nabla(\mathcal{F}^p)\subset\Omega^1_X\otimes_{\mathcal{O}_X}\mathcal{F}^{p-1}$ и это же выполнено для антиголоморфных объектов:

$$\nabla(\overline{\mathcal{F}}^q)\subset\overline{\Omega}^1_X\otimes_{\overline{\mathcal{O}}_X}\overline{\mathcal{F}}^{q-1};$$

(c) для любого $x\in X$ форма S_x на A-модуле $\mathcal{V}_{A,x}$ удовлетворяет условию $(2\pi i)^m S_x(w, C_x w)>0$ для $w\neq 0$, где C_x — *оператор Вейля* — прямая сумма i^{p-q} на $V_x^{p,q}=F_x^p\cap\overline{F}_x^q$.

Замечание 8.2. *Сопряженная* к комплексной вариации $\mathcal{V}$ определяется комплексным сопряжением, то есть двойственным образом в 8.1 (2), локальной системой $\mathbf{V}$ с слагаемыми $\overline{\mathcal{V}}^{p,q}=\overline{\mathcal{V}^{p,q}}$. Поляризованная вариация $\mathbf{R}$-структуры Ходжа (2.1) есть комплексная вариация, изоморфная ее сопряженной. Более того, для любой комплексной вариации $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}\oplus\overline{\mathcal{V}}$ — вещественная вариация.

Следующая теорема Делиня показывает, что условие, что вариация является объемлющей для ходжевой структуры, накладывает сильное требование на локальную систему:

Теорема 8.3 [61, теорема 0.5]. Фиксируем многообразие X и положительное целое d. Тогда существует не более конечного числа классов изоморфных представлений монодромии для локальных систем ранга d, объемлющих комплексные вариации $\mathbf{Z}$-структуры Ходжа на X.

Основной момент доказательства состоит в том, что существование вариации дает (элементарные) оценки следа моно-

дромии. Достаточно много следов определяют представление с точностью до изоморфизма.

Замечание 8.4. Случаи вариации структуры Ходжа веса единица и типов Ходжа (1,0), (0,1) (семейства абелевых многообразий) явно рассмотрен в [79].

Недавние работы Симпсона [173]—[176] пролили свет на исходный вопрос. Допустим, что локальная система $\mathbf{V}$ на X — объемлющая для комплексной вариации структуры Ходжа. Тогда векторное расслоение $\mathscr{V}$ является, конечно, C^∞-изоморфным расслоению

$$\mathscr{E}=\bigoplus_p(\mathscr{F}^p/\mathscr{F}^{p+1}).$$

Более того, последнее допускает эндоморфизмо-значную 1-форму θ, представимую в виде прямой суммы «линейных частей плоской связности» то есть

$$(\mathscr{F}^p/\mathscr{F}^{p+1})\to\Omega^1_X\otimes(\mathscr{F}^{p-1}/\mathscr{F}^p)$$

(см. (3.9)). Это дает пример для следующего объекта.

Определение 8.5. *Расслоением Хиггса* над X называется пара $(\mathscr{E},\theta)$, состоящая из голоморфного векторного расслоения $\mathscr{E}$ над X и сечения θ для $\Omega^1_X\otimes\mathrm{End}(\mathscr{E})$ такого, что

$$\theta\wedge\theta=0.$$

Изоморфизм расслоений Хиггса определяется очевидным образом. Существует действие $\mathbf{C}^*$ на множестве расслоений Хиггса, заданное как

$$t\cdot(\mathscr{E},\theta)=(\mathscr{E},t\theta).$$

Лемма 8.6. Для $(\mathscr{E},\theta)$ следующие утверждения эквивалентны:

(1) $\mathscr{E}$ допускает разложение $\bigoplus_p\mathscr{E}^p$ такое, что

$$\theta\mathscr{E}^p\subset\Omega^1_X\otimes\mathscr{E}^{p-1};$$

(2) $t\cdot(\mathscr{E},\theta)\simeq(\mathscr{E},\theta)$ для некоторого t бесконечного порядка в $\mathbf{C}^*$;

(3) класс изоморфизмов $(\mathscr{E},\theta)$ не меняется при $\mathbf{C}^*$-действии.

Следовательно, комплексная вариация структуры Ходжа приводит к расслоению Хиггса, которое инвариантно относительно $\mathbf{C}^*$-действия. Однако, любая локальная система $\mathbf{V}$ на компактном кэлеровом многообразии приводит к расслоению Хиггса с помощью следующей конструкции. Пусть $\nabla=\nabla'+\nabla''$ — плоская связность на C^∞-сечениях расслоения $\mathscr{V}$, где ∇' — (1, 0)-компонента, $\nabla''=\overline{\nabla}'$ — (0, 1)-компонента. Для лю-

бой эрмитовой метрики h на $\mathscr{V}$ имеем (голоморфную) метрическую связность $D_h+\nabla''$. Положим

$$\bar{\partial}=\frac{1}{2}(D_h+\nabla''),\quad \theta=(\nabla'-D_h). \tag{8.1}$$

Если метрика h *гармонична* (то есть классифицирует гармонические отображения в $\mathrm{Gl}(d, \mathbf{C})/U(d)$) — она всегда существует и единственна — то оператор в (8.1) удовлетворяет уравнению

$$(\bar{\partial}+\theta)^2=0, \tag{8.2}$$

из которого следует, что $(\mathscr{E}, \theta)$, где $\mathscr{E}$ — объемлющее C^∞-расслоение для $\mathscr{V}$ с комплексной структурой, определенной $\bar{\partial}$, определяет расслоение Хиггса. Конечно, $c(\mathscr{E})=1$ в $H(X, \mathbf{Q})$. Между прочим, если исходить из комплексной вариации, то гармоническая метрика станет метрикой Ходжа.

Обратно, локальная система получается из расслоения Хиггса $(\mathscr{E}, \theta)$ с нулевыми классами Чженя следующим образом. Мы хотим построить плоскую связность на объемлющем C^∞-расслоении для $\mathscr{E}$. Пусть h — эрмитова метрика на $\mathscr{E}$ и ∂_h — $(1, 0)$-компонента метрической связности. Обозначим через $\bar{\theta}_h$ оператор типа $(0, 1)$, сопряженный к θ относительно h. Будем использовать $\bar{\partial}+\theta$ для определения новой комплексной структуры на $\mathscr{E}$; рассмотрим связность

$$\nabla_h=(\partial_h+\bar{\theta}_h)+(\bar{\partial}+\theta). \tag{8.3}$$

Если h удовлетворяет эрмитову уравнению Янга—Миллса [173, с. 878], условие на класс Чженя даст, что она гармонична и что ∇_h — плоская.

Для дальнейшего нам потребуется понятие стабильности векторных расслоений. Пусть $\mathscr{C}$ — класс векторных расслоений, возможно, с дополнительной структурой.

Определение 8.7. Векторное расслоение $\mathscr{C}\in\mathscr{E}$ называется *полустабильным* (соответственно, *стабильным*) $\mathscr{C}$-расслоением, если функция $(\deg\mathscr{E}')/\mathrm{rk}\,\mathscr{E}'$ на ненулевом $\mathscr{C}$-подрасслоение $\mathscr{E}'$ в $\mathscr{E}$ достигает максимального (строго максимального) значения на $\mathscr{E}'=\mathscr{E}$.

Здесь степень $\mathscr{E}'$ есть $c_1(\mathscr{E}')\omega^{n-1}$, где ω^{n-1} — кэлеров класс X.

Замечание 8.8. Поскольку степень плоского расслоения равна нулю, стабильность плоских расслоений означает их неприводимость (т. е. отсутствие плоских подрасслоений); все плоские расслоения полустабильны. Основной результат состоит в следующем.

Теорема 8.9 [181, § 2]. Пусть X — компактное кэлерово многообразие. Тогда две конструкции:

$\nabla\mapsto\theta_h$: (8.1) для гармонической метрики;

$\theta\mapsto\nabla_h$: (8.3) для эрмитовой метрики Янга — Миллса

взаимно обратны и приводят к взаимно однозначному соответствию между классами изоморфных неприводимых плоских

расслоений и стабильными расслоениями Хиггса с нулевыми классами Чженя.

Эта теорема основана на работах Корлетта [52], Хитчина [105] и др. (См. [180], [181]). Она допускает прямое обобщение на случай полупростых плоских расслоений [181]. Ее немедленным следствием является следующее дополнение к лемме 8.6:

Следствие 8.10 ([181, (4.2)]). (Полупростая) локальная система — объемлющая для вариации комплексной ходжевой структуры в том и только том случае, если соответствующее расслоение Хиггса инвариантно относительно $\mathbf{C}^*$-действия.

Заметим, что как соответствие в теореме 8.9, так и $\mathbf{C}^*$-действие на расслоениях Хиггса функториальны для голоморфных отображений. Отсюда получаем следующий ошеломляющий результат:

Теорема 8.11 [181, (4.3)]. Пусть X и Y — компактные кэлеровы многообразия и $f: Y \to X$ — голоморфное отображение. Пусть отображение

$$f_*: \pi_1(Y, y) \to \pi_1(X, f(y))$$

сюръективно. Тогда локальная система $\mathbf{V}$ на $\mathbf{X}$ объемлющая для комплексной вариации структуры Ходжа в том (и только том) случае, если такова $f^*\mathbf{V}$.

Легко установить, когда расслоение Хиггса происходит из вещественного представления $\pi_1(X, x)$.

Предложение 8.12 ([181, (3.20)]). Расслоение Хиггса $(\mathscr{E}, \theta)$ соответствует вещественной локальной системе в том и только том случае, если существует симметричное невырожденное спаривание

$$S: \mathscr{E} \underset{O_X}{\otimes} \mathscr{E} \to \mathcal{O}_X$$

такое, что $S(\theta e, e') = S(e, \theta e')$.

С другой стороны, можно показать, что (см. [56], [61]) если неприводимая вещественная локальная система объемлет комплексную вариацию структуры Ходжа, то она — объемлющая и для вещественной. Поэтому утверждение теоремы 8.11 (и теоремы 8.16 ниже) справедливо для $\mathbf{R}$.

Далее, соответствие в теореме 8.9 может быть сделано топологическим, если привлечь грубые пространства модулей. В случае плоских расслоений их конструкция достаточно явная и зависит только от конечно порожденной группы $\pi_1(X, x)$. Пусть $\{\gamma_1, \ldots, \gamma_l\}$ — множество образующих $\pi_1(X, x)$. Представление ρ размерности d приводит к сопоставлению l обратимых $d \times d$ матриц, которые связаны между собой алгебраическими уравнениями, которые определяются соотношениями для образующих. Классы изоморфных представлений являются орбитами l-кратного присоединенного действия $\mathrm{Gl}(d, \mathbf{C})$.

Грубое пространство модулей полупростых классов изоморфных плоских векторных расслоений M_{flat} может быть построено с помощью геометрической теории инвариантов. (Здесь приво-

димое расслоение может быть представлено суммой его композиционных рядов для факторов.) M_{flat} — аффинное многообразие и имеет только квадратичные особенности [87], [175, (3.4)].

Для получения пространства модулей полустабильных расслоений Хиггса с нулевыми классами Чженя необходимо предположение о проективности X. Тогда обычный метод построения пространств модулей из алгебраической геометрии дает M_{Higgs} [174]. Рассмотрим это пространство с его классической (комплексной) топологией. Тогда справедливо

Предложение 8.13 ([174, § 5]). Соответствие теоремы 8.9 индуцирует гомеоморфизм M_{flat} и M_{Higgs}.

Замечание 8.14. i) Важно отметить, что этот гомеморфизм вещественно-аналитичен.

ii) Желательно бы было найти конструкцию M_{Higgs} пригодную для произвольного компактного кэлерова многообразия.

Хотя M_{Higgs} некомпактно, действие $\mathbf{C}^*$ продолжается до действия $\mathbf{C}$, то есть для любого $(E, \theta) \in M_{\text{Higgs}}$

$$\lim_{t \to 0} t(E, \theta)$$

существует в M_{Higgs}. Этот предел, очевидно, $\mathbf{C}^*$-инвариантен. Поэтому из следствия 8.10 и теоремы 8.13 получаем, что справедлива

Теорема 8.15. Пусть X — гладкое проективное многообразие. Тогда каждая связная компонента M_{flat} содержит плоское расслоение, объемлющее для комплексной вариации ходжевой структуры. Отсюда немедленно получается следующая

Теорема 8.16. Любое жесткое представление $\pi_1(X, x)$ есть представление монодромии комплексной вариации структуры Ходжа.

Отсюда Симссон вывел, что некоторые дискретные группы не могут быть фундаментальными группами компактных кэлеровых многообразий.

Естественно попытаться обобщить его теорию на случай некомпактных гладких многообразий. Это обобщение было осуществлено самим Симпсоном для случая кривых [176]. Соответствующие объекты в обобщении теорем 8.9 и 8.12 дают фильтрации на бесконечности.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Варченко А. Н.* Асимптотики голоморфных форм определяют смешанную структуру Ходжа // Докл. АН СССР.— 1980.— *255*, № 5.— С. 1035—1038.
2. — Асимптотическая структура Ходжа в исчезающих когомологиях // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1981.— *45*, № 3.— С. 540—591.
3. — Оценка размерности страта μ'=const снизу через смешанную структуру Ходжа // Вестн. МГУ. Мат. Мех.— 1982.— № 6.— С. 28—31.
4. — О локальном вычете и форме пересечений в исчезающих когомологиях // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1985.— *49*, № 1.— С. 32—54.

5. *Adams J.* On the cobar construction // In Colloque de topologie algébrique (Louvain, 1956).— Masson, 1957.— C. 81—87.
6. *Anderson G.* Cyclotomy and extension of the Taniyama group // Compos. Math.— 1986.— *57.*— C. 153—217.
7. *Andreotti A., Vesentini E.* Carleman estimates for Laplace-Beltrami equation on complex manifolds // Publ. Math. I. H. E. S.— 1966.— *25.*— C. 81—130.
8. *Arapura D.* Hodge theory with local coefficients and fundamental groups of varietes // Bull. Amer. Math. Soc.— 1989.— *20.*— C. 169—172.
9. *Barlet D.* Filtration de Hodge asymptotique et poles de $\int |f|^{2\lambda}$ // Pré-publ. Inst. H. Cartan.— 1988.— № 7.
10. — Symétrie de Hodge pour le polynôme de Bernstein-Sato // Lect. Notes Math.— 1987.— *1295.*— C. 1—10.
11. *Beilinson A.* Higher regulator and values of *L*-functions // J. Soviet Math.— 1985.— *30.*— C. 2036—2070.
12. — Notes on absolute Hodge cohomology // Contemp. Math.— 1986.— *55.*— C. 55—68.
13. — Height pairing between algebraic cycles // Contemp. Math.— 1987.— *67.*— C. 1—24.
14. — On the derived category of perverse sheaves // Lect. Notes Math.— *1289.*— C. 27—41.
15. —, *Bernstein I. N., Deligne P.* Faiceaux Pervers // Astérique.— 1982.— *100.*
16. —, *Ginsburg V.* Mixed categories, Ext-duality and representation (results and conjectures) // Preprint, 1988.
17. —, *MacPherson R., Schechtman V.* Notes on motivic cohomology // Duke Math. J.— 1987.— *54.*— C. 679—710.
18. *Bernstein I. N., Gel'fand S. I., Gel'fand I. M.* Differential operators on the base affine space and a study of $\mathfrak{g}$-modules // In Lie Groups and their representations.— Halsted, 1975.— C. 21—64.
19. *Bloch S.* Deligne groups info // Manuscript.— 1972 (unpubl.).
20. — Applications of the dilogarithm function in algebraic *K*-theory // In Proc. Int. Symp. Algebraic Geometry 1977. Kinokuniya Book Store.— 1978.— C. 103—114.
21. — Algebraic *K*-theory and zeta-function of elliptic curves // Proc. Int. Congr., Helsinki, 1978.— C. 511—515.
22. — The dilogarithm and extensions of Lie algebras // Lect. Notes Math.— 1981.— *854.*— C. 1—23.
23. — Height pairing beltween algebraic cycles.
24. —, *Ogus A.* Gersten's conjecture and homology of schemes // Ann. Sci. Ec. Norm. Super. Pisa. Cl. Sci.— 1984.— *7.*— C. 181—202.
25. *Bloom T., Herera M.* The de Rham cohomology of an analytic spaces. // Invent. math.— 1969.— *7.*— C. 275—296.
26. *Borel A.* Cohomologie de SL_n et valures de fonction zêta // Ann. Sc. Norm. Super.— 1974.— *7.*— C. 613—636.
27. — et all. Intersection cohomology.— Birkhauser, 1984.
28. — et all. Algebraic D-modules.— New York: Acad. Press, 1987.
29. *Bousfield A., Kan D.* Homotopy limits, completions and localizations // Lect. Notes Math.— 1972.— 304.
30. *Briescorn E.* Die Monodromie der isolierten Singularitäten von Hyperflächen // Manuscr. Math.— 1970.— *2.*— C. 103—161.
31. *Brylinski J.-L.* Cohomologie d'intersection et faisceaux pervers // Astérique.— 1982.— № 92—93.— C. 129—157.
32. — Modules holonomes à singularités régulièr et filtration de Hodge // Lect. Notes Math.— 1982.— *961.*— C. 1—21; Astérique.— 1983.— № 101—102.— C. 75—117.
33. — Transformations canoniques, dualité projective, théorie de Lefschetz, transformation de Fourier et sommes trigonométriques // Asterique.— 1986.— № 140—141.— C. 3—134.
34. *Carlson J.* Extensionsof mixed Hodge structure // Journées de Géomet-

rie Algébraique d'Angers, 1979. Sijthoff and Nordhoff, 1980.— C. 107—127.
35. — The geometry of the extension class of a mixed Hodge structure // Proc. Symp. Pure Math.— 1985.— *46*.— C. 199—222.
36. —, *Clemens H., Morgan J.* On the mixed Hodge structure associated to π_3 of a simply-connected projective manifold // Ann. Sci. Ec. Norm. Super.— 1981.— *14*.— C. 323—338.
37. —, *Hain R.* Extensions of variations of mixed Hodge structure // Astérique.— 1987.— to appear.
38. *Cattani E., Kaplan A.* On the *SL(2)-orbits in Hodge theory* (with an appedix by P. Deligne) // Preprint. I. H. E. S.— 1982.— M/82/58.
39. —, — Polarized mixed Hodge structures and the monodromy of a variation of Hodge structure // Invent. math.— 1982.— *67*.— C. 101—115.
40. —, — Degenerating variations of Hodge structures // Astérisque.— to appear.
41. —, —, *Schmid W.* Degeneration of Hodge structure // Ann. Math.— 1986.— *123*.— C. 457—535.
42. —, —, — L^2 and intersection cohomologies for a polarizable variation of Hodge structure // Invent. math.— 1987.— *87*.— C. 217—252.
43. *Cheeger J.* On the Hodge theory of Riemannian pseudomanifolds // Proc. Symp. Pure Math.— 1980.— *36*.— C. 91—146.
44. — Hodge theory on complex cones // Astérisque.— 1983.— № 101—102. — C. 118—134.
45. —, *Goresky M., MacPherson R.* L^2-cohomology and intersection homology of singular algebraic varietes.— Princetone Univ. Press, 1982.— C. 303—340.
46. —, *Simons J.* Differential characters and geometric invariants // Lect. Notes Math.— 1985.— *1167*.— C. 50—80.
47. *Chen K. T.* Reduced bar constructions on de Rahm complexes // In Algebra, Topology and Category Theory (ed. A. Heller, M. Tierny).— New York: Acad. Press., 1976.— C. 19—32.
48. — Iterated path integrals // Bull. Amer. Math. Soc.— 1977.— *83*.— C. 831—879.
49. — Circular bar construction // J. Algebra.— 1979.— *57*.— C. 466—483.
50. *Clemens C. H.* Picard-Lefschetz theorem for families of nonsingular algebraic varietes acquiring ordinary singularities // Trans. Amer. Math. Soc.— 1969.— *136*.— C. 93—108.
51. — Degeneration of Kähler manifolds // Duke Math. J.— 1977.— *44*.— C. 215—290.
52. *Corlette K.* Flat *G*-bundles with canonical metrics // J. Diff. Geom.— 1988.— *28*.— C. 361—382.
53. *Deligne P.* Théorème de Lefschetz et critères de dègènèrescence de suites spectrales // Publ. Math. I. H. E. S.— 1968.— *35*.— C. 107—126.
54. — Equations différentialles à points singuliers réguliers // Lect. Notes Math.— 1970.— *163*.
55. — Travaux de Griffiths // Lect. Notes Math.— 1971.— *180*.— C. 213—237.
56. — Théorie de Hodge, I, II, III // Actes, Congrès Intern. Math. Nice, 1970.— C. 425—430; Publ. Math. I. H. E. S.— 1971.— *40*.— C. 5—58;— 1974.— *44*.— C. 5—77.
57. — Valeurs de fonction *L* et périodes de'intégrales // Proc. Symp. Pure Math.— 1979.— *33*.— C. 313—346.
58. — La conjecture de Weil, I. II // Publ. Math. I. H. E. S.— 1974.— *43*.— C. 273—308;— 1980.— *52*.— C. 137—252.
59. — Structures de Hodge mixed réelles // Appendix to: On SL(2)-orbits in Hodge theory by E. Catani and A. Kaplan.
60. — Théorie de Hodge irrégulière // Handwritten notes.— 1984.
61. — Un théoréme de finitude pour la monodromie // In Discrete groups in geometry and analysis.— Birkhäuser, 1987.— C. 1—19.
62. —, *Griffiths P., Morgan J., Sullivan D.* Real homotopy theory on Kähler manifolds // Invent. math.— 1975.— *29*.— C. 245—274.

63. —, *Milne J.-S.*, *Ogus A.*, *Shih K.-Y.* Hodge cycles, motives and Shimura varietes // Lect. Notes Math.— 1982.— *900.*
64. *Du Bois P.* Complexe de de Rahm filtré d'une variété singulière // Bull. Soc. Math. France.— 1981.— *109.*— C. 41—81.
65. — Structure de Hodge mixte sur la cohomologie évanescente // Ann. Inst Fourier.— 1985.— *35.*— C. 191—213.
66. *Durfee A.* A naive guide to mixed Hodge theory // Proc. Symp. Pure Math.— 1983.— *40.*— C. 313—320.
67. —, *Hain R.* Mixed Hodge structures on the homotopy of links // Math. Ann.— 1988.— *280.*— C. 69—83.
68. —, *Saito M.* Mixed Hodge structures on intersection cohomology of links // Preprint.— 1988.
69. *El Zein F.* Complexe dualisant et applications à la classe fondamentale d'un cycle // Bull. Soc. Math. France.— 1978.— *58.*— C. 5—66.
70. — Complexe de Hodge mixte filtré // C. r. Acad. sci. Ser. 1.— 1982.— *295.*— C. 669—672.
71. — Mixed Hodge structure // Proc. Symp. Pure Math.— 1983.— *40.*— C. 345—352.
72. — Dégénérescence diagonale. I, II // C. r. Acad. sci. Ser. 1.— 1983.— *296.*— C. 51—54; C. 199—202.
73. — Mixed Hodge structure // Trans. Amer. Math. Soc.— 1983.— *275.*— C. 71—106.
74. — Suites spectrales de structures de Hodge mixtes // Astérisque.— 1985.— № 130.— C. 308—329.
75. — Théorie de Hodge à coefficients: etude locale // C. r. Acad. sci. Ser. 1.— 1988.— *307.*— C. 593—598.
76. — Théorie de Hodge des cycles évanescent // Ann. Sci. Ecole Norm. Super.— 1986.— *19.*— C. 107—194.
77. —, *Zucker S.* Extendebility of normal functions associated to algebraic cycles // In Topics in transcendental algebraic geometry. Ed. *Griffiths P.*— Princetone Univ. Press, 1986.— C. 269—288.
78. *Esnault H.*, *Viehweg E.* Deligne-Beilinson cohomology // In Beilinson's conjecture on special values of *L*-functions.— New York: Acad. Press, 1988.— C. 43—91.
79. *Faltings G.* Arakelov's theorem for abelian varietes // Invent. math.— 1983.— *73.*— C. 337—347.
80. — *p*-adic Hodge theory // J. Amer. Math. Soc.— 1988.— *1.*— C. 255—299.
81. *Friedman S.* Global smoothings of varieties with normal crossings // Ann. Math.— 1983.— *118.*— C. 75—114.
82. *Gabber O.* Pureté de la cohomologie de Goresky-MacPherson // Prebubl. I. H. E. S., 1981.
83. *Gaffney M.* A special Stokes theorem for complete Riemannian manifolds // Ann. Math.— 1954.— *60.*— C. 140—145.
84. — Hilbert space methods in the theory of harmonic integrals // Trans. Amer. Math. Soc.— 1955.— *78.*— C. 226—444.
85. *Gillet H.* Deligne homology and Abel-Jacobi maps // Bull. Amer. Math. Soc.— 1984.— *10.*— C. 284—288.
86. *Godement R.* Topologie algébrique et theorie des faisceaux.— Paris: Hermann, 1958.
87. *Goldman W.*, *Millson J.* The deformation theory of representations of fundamental groups of compact Kähler manifolds // J. Diff. Geom.— 1988.— *67.*— C. 43—96.
88. *Goresky M.*, *MacPherson R.* Intersection homology // Topology.— 1980.— *19.*— C. 77—129;— Invent. math.— 1983.— *72.*
89. *Griffiths P.* Periods of integrals on algebraic manifolds, I, II, III. // Amer. J. Math.— 1968.— *90.*— C. 568—626;— C. 805—865;— Publ. Math. I. H. E. S.— 1970.— C. 228—296.
90. — Algebraic cycles on algebraic manifolds // In Algebraic geometry.— Oxford Univ. Press, 1969.— C. 93—191.

91. — On the periods of certain rational integrals // Ann. Math.— 1969.— *90.*— С. 460—541.
92. — Periods of integrals on algebraic manifolds: summary of main results and discussion of open problems // Bull. Amer. Math. Soc.— 1970.— *76.*— С. 228—296.
93. —, *Schmid W.* Recent development in Hodge theory: a discussion of techniques and results // In Proc. Bombay Colloq. on Discrete subgroups of Lie Groups. Bombay, 1973.— Oxford. Univ. Press, 1975.— С. 31—127.
94. *Grothendieck A.* On the de Rham cohomology of algebraic varietes // Publ. Math. I. H. E. S.— 1966.— *29.*— С. 96—103.
95. *Guillén F., Navarro Aznar, Puerta F.* Théorie de Hodge via schémas cubiques // Preprint, 1982.
96. —, *Puerta F.* Hyperrésolutions cubiques et applications à la théorie de Hodge-Deligne // Lect. Notes Math.— 1987.— *1246.*
97. —, *Navarro Aznar, Pascual-Gainza P., Puerta F.* Hyperrésolutions cubiques et descente cohomologique // Lect. Notes Math.— 1988.— *1335.*
98. *Hain R.* The de Rham homotopy theory of complex algebraic varietes. I, II // *K*-Theory.— 1987.— *1.*— С. 271—324
99. — The geometry of the mixed Hodge structure on the fundamental group // Proc. Symp. Pure Math.— 1987.— С. 247—282.
100. —, *MacPherson R.* Higher logarithms // To appear.
101. —, *Zucker S.* Unipotent variations of mixed Hodge structure // Invent. math.— 1987.— *88.*— С. 83—124.
102. —, — A guide to unipotent variations of mixed Hodge structures // Lect. Notes Math.— 1987.— *1246.*— С. 96—106.
103. *Harris B.* Harmonic volumes // Acta Math.— 1983.— *150.*— С. 91—123.
104. *Hironaka H.* Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero // Ann. Math.— 1964.— *79.*— С. 109—326.
105. *Hitchin N.* The self-duality equation over a Riemann surfaces // Proc. London Math. Soc.— 1987.— *55.*— С. 59—126.
106. *Hodge W. V. D.* The theory and applications of harmonic integrals.— Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1941.
107. *Hsiang W.-C., Pati V.* L^2-cohomology of normal algebraic surfaces // Invent. math.— 1985.— *81.*— С. 395—412.
108. *Janssen U.* Deligne homology, Hodge-*D* conjecture and motives // In Beilinson's conjectures on special values of *L*-functions.— New York: Acad. Press, 1988.— С. 305—372.
109. *Kashivara M.* On maximally overdeterminated system of linear differential equations. I // Publ. Res. Inst. Math. Kyoto Univ.— 1974—1975.— *10.*— С. 563—579.
110. — *B*-functions and holonomic systems, rationally of roots of *b*-functions // Invent. math.— 1976.— *38.*— С. 33—53.
111. — On the holonomic systems of differential equations II // Invent. math.— 1978.— *49.*— С. 121—135.
112. — Vanishing cycles and holonomic systems of differential systems of differential equations // Lect. Notes Math.— 1983.— *1016.*— С. 134—142.
113. — The asymptotic behavior of a variation of polarized Hodge structure // Publ. RIMS. Kyoto Univ.— 1986.— *22.*— С. 991—1024.
114. — A study of a variation of mixed Hodge structure // Publ. RIMS. Kyoto Univ.— 1986.— *22.*— С. 991—1024.
115. —, *Kawai T.* Hodge structures and holonomic systems // Proc. Jap. Acad. A.— 1986.— *62.*— С. 1—4.
116. —, — On the holonomic systems of micro differential equations. III. Systems with regular singularities // Publ. RIMS. Kyoto Univ.— 1987.— *23.*— С. 345—407.
117. —, — The Poincaré lemma for variations of polirized Hodge structure // Publ. RIMS. Kyoto Univ.— 1987.— *23.*— С. 345—407.
118. *Katz N.* The regularity theorem in algebraic geometry // In Actes, Congres Intern. Math, Nice, 1970.— *1.*— С. 437—443.

119. *Landman A.* On the Picard-Lefschetz transformation for algebraic malifolds acquiring general singularities // Trans. Amer. Math. Soc.— 1973. — *181.*— C. 89—126.
120. *Laumon S.* Sur la catégorie dérivée des D-modules filtrès // Lect. Notes Math.— 1983.— *1016.*— C. 151—237.
121. *Lê D.-T.* Sur les noeuds algébriques // Compos. Math.— 1972.— *25.*— C. 281—321.
122. *Lefschetz S.* L'analysis situs et géométrie algebrique.— Paris: Gauthier-Villars, 1924.
123. *Lieberman D.* Higher Picard varietes // Amer. J. Math.— 1968.— *90.*— C. 1165—1199.
124. *Loeser F.* Evaluation d'intégrales et théorie de Hodge // Lect. Notes Math.— 1987.— *1246.*— 125—142.
125. *Looijenga E.* L^2-cohomology of locally symmetric varietes // Contemp. math.— 1988.— *67.*— C. 3—20.
126. *Malgrange B.* Polynôme de Bernstein-Sato et cohomologie évanescente // Astérisque.— 1983.— № 101—102.— C. 243—267.
127. *MacPherson R., Vilonen K.* Elementary construction of perverse sheaves // Invent. math.— 1986.— *84.*— C. 403—435.
128. *Mebkhout Z.* Une équivalence de catégories et une autre équivalence de catégories //Ark. Math.— 1984.— *50.*— C. 51—88.
129. — Le formalisme des six opérations de Grothendieck pour les D-modules cohérents.— Paris: Hermann, 1989.
130. *Milne I. S.* Cannonical models of (mixed) Shimura varieties and automorphic vector bundles // In Automorphic Forms, Shimura varietes and L-functions.— New York: Acad. Press, 1990.— C. 283—414.
131. *Morgan J.* The algebraic topology of smooth algebraic varietes // Publ. Math. I. H. E. S.— 1978.— *48.*— C. 137—204. Correction ibid,— 1986.— *64.*
132. *Nagase M.* Pure Hodge structure on the harmonic L^2-forms on singular algebraic surfaces // Publ. RIMS. Kyoto Univ.— 1988.— *24.*— C. 1005—1023.
133. — Remarks on L^2-cohomology of singular algebraic surfaces // J. Math. Soc. Japan.— 1989.— *41.*— C. 97—116.
134. *Navarro Aznar V.* Sur la théorie de Hodge des variétés algébriques à singularités isolée // Astérisque.— № 130.— C. 1985.— C. 272—307.
135. — Sur la théorie de Hodge-Deligne // Invent. math.— 1987.— *90.*— C. 11—76.
136. — Sur les structures de Hodge mixed associées aux cycles évanescents // Lect. Notes Math.— 1987.— *1246.*— C. 143—153.
137. *Ohsawa T.* On extension of Hodge theory to Kähler spaces with isolated singularities of restricted type // Publ. RIMS. Kyoto Univ.— 1988.— *24.*— C. 253—263.
138. *Pham F.* Structure de Hodge mixed associées à un germe de fonction à point singulier isolé // Asterisqué.— 1983.— № 101—102.— C. 272—307.
139. *Pulte M.* The fundamental group of a Riemann surface: mixed Hodge structures and algebraic cycles // Duke Math. J.— 1988.— *57.*— C. 721—760.
140. *Ramakrishan D.* A regulator for curves via Heisenberg group // Bull. Amer. Math. Soc.— 1981.— *5.*— C. 191—195.
141. — Valeurs de fonction *L* des surfaces d'Hilbert-Blumenthal en *s*-1. // C. r. Acad. sci. Ser. 1.— 1985.— *301.*— C. 809—812.
142. — Periods of integrals arising from *K*1 of Hilbert-Blumenthal surfaces // Preprint, 1984.
143. — Arithmetics of Hilbert-Blumenthal surfaces // In Number Theory (Monreal, 1985) CMS Conf. Proc. Amer. Math. Soc., 1987.— C. 285—370.
144. — Analogs of the Bloch-Wigner function for higher polylogarithms // In Number theory (Monreal, 1985) CMS Conf. Proc. Amer. Math. Soc., 1987.— C. 371—376.

145. — Regulators, algebraic cycles and values of L-functions // In Algebraic K-theory and algebraic number theory.— New York: Amer. Math. Soc.— 1989.— C. 183—310.
146. *Ramis J.-P.* Variations sur la théme GAGA // Lect. Notes Math.— 1978.— *694*.— C. 228—289.
147. *Rapoport M., Schappacher N., Schheider P.* Beilinson's conjecture on special values of L-function.— New York: Acad. Press, 1988.
148. —, *Zink T.* Über die lokale Zetafunktionen von Shimuravarietaten. Monodromie filtration und verschwindende Zyklen in ungleicher Charakteristik // Invent. math.— 1982.— *68*.— C. 21—101.
149. *Saito K.* Period mapping acossiated to a primitive form // Publ. RIMS. Kyoto Univ.— 1983.— *19*.— C. 1231—1264.
150. *Saito M.* Gauss-Manin systems and mixed Hodge structure // Proc. Jap. Acad. Sci. A.— 1982.— *58*.— C. 29—32. Suppl.— Astérisque.— 1983.— № 101—102.— C. 320—331.
151. — Hodge filtrations on Gauss-Manin systems // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. IA.— 1984.— *30*.— C. 489—498; Proc. Japan Acad. A.— 1983.— *59*.
152. — Hodge structure via filtered-**D**-modules // Astérisque.— 1985.— № 30.— C. 342—351.
153. — Mixed Hodge modules // Proc. Japan Acad. A.— 1986.— *62*.— C. 360—363.
154. — On the derived category of mixed Hodge modules // Proc. Japan. Acad. A.— 1986.— *62—3*.— C. 364—366.
155. — Mixed Hodge modules // Preprint.— 1986, RIMS,— 585.
156. — Introduction to mixed Hodge modules // Preprint.— 1987. RIMS,— 605.
157. — Vanishing cycles and mixed Hodge modules // Preprint, 1988.
158. — Decomposition theorem for proper Kähler morphism // Preprint.— 1988. I. H. E. S. (88) 34.
159. — Modules de Hodges polarisable // Publ. RIMS. Kyoto Univ.— 1989.— *24*.— C. 849—995.
160. — Mixed Hodge modules and admissibl variations // C. r. Acad. Sci. Ser. 1.— 1989.— 1989.— C. 351—356.
161. —, On the structure of Brieskorn lattice // Ann. Inst Fourier.— 1989.— *39*.— C. 27—72.
162. —, *Zucker S.* The kernel spectral sequence of vanishing cycles // Duke Math. J.— To appear.
163. *Saper L.* L^2-cohomology and intersection cohomology of certain algebraic varieties // Invent. math.— 1985.— *82*.— C. 207—255.
164. —, *Stern M.* L_2-cohomology of arithmetic varieties // Proc. Nat. Acad. Sci. USA.— 1.— 1987.— *84*.— C. 5516—5519.
165. *Scherk J.* A note on two local Hodge filtrations // Proc. Symp. Pure Math.— 1983.— *46*.— C. 473—477.
166. —, *Steenbrink J.* On mixed Hodge structure of the Milnor fiber // Math. Ann.— 1985.— *271*.— C. 641—665.
167. *Schmid W.* Variation of Hodge structure: the singularities of the period mapping // Invent. math.— 1973.— *22*.— C. 211—319.
168. *Schneider P.* Introduction to the Beilinson conjectures // In Beilinson's conjectures on special values of L-functions.— New York: Acad. Press, 1988.— C. 1—35.
169. Séminair de Géométrie Algebrique du Bois-Marie. Cohomologie Locale des Faiceaux Cohérents rt Théorèmes de Lefschetz Locaux et Globaux. Ed. *Grothendieck A.*— North-Holland, 1968.
170. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie. Théorie de topos et cohomologie étale des schémas (SGA 4). Ed. *Artin M., Grothendieck A., Verdier J. P.* // Lect. Notes Math. 1972.— *269*;— 1972.— *270*;— 1973.— 305.
171. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie. Groupes de monodro-

mie en Géométrie Algebrique (SGA 7), I, II. Ed *Grothendieck A.* // Lect. Notes Math.— 1972.— *283*;— 1973.— *340*.
172. *Serre J.-P.* Géométrie algébrique et géométrie analytique // Ann. Inst Fourier.— 1955—1956.— *6*.— C. 1—42.
173. *Simpson C.* Constructing variations of Hodge structure using Yang-Mills theory and application to uniformization // J. Amer. Math. Soc.— 1988.— *1*.— C. 867—918.
174. — Moduli of representations of the fundamental groups of a smooth projective variety // Preprint, 1989.
175. — Higgs bundles and local systems // Preprint, 1989.
176. — Harmonic bundles on non-compact curves // Preprint, 1989.
177. *Soulé C.* Régulateurs. // Astérisque.— 1966.— № 133—134.— C. 237—253.
178. — Connections et classes caractéristiques de Beilinson // Contemp. Math.— 1989.— *83*.— C. 349—376.
179. *Steenbrink J.* Limits of Hodge structures // Invent. math.— 1976.— *31*.— C. 229—257.
180. — Mixed Hodge structures on vanishing cohomology // In real and complex singularities. Sijhoff and Noordhoff.— 1977.— C. 525—563.
181. — Mixed Hodge structures associated with isolated singularities // Proc. Symp. Pure Math.— 1983.— C. 513—536.
182. — The spectrum of hypersurface singularities // Asterisque.— to appear.
183. —, *van Doorn R.* A supplement to the monodromy theorem // Abh. Math. Sem. Universität, Hamburg,— 1989.— *59*.
184. —, *Zucker S.* Variation of mixed Hodge structure, I // Invent. math.— 1985.— *80*.— C. 489—542.
185. *Sullivan D.* Infinitisimal computations in topology // Publ. Math. I. H. E. S.— 1977.— *47*.— C. 269—331.
186. *Tanisaki T.* Hodge modules, equivariant K-theory and Hecke algebras // Publ. RIMS. Kyoto Univ.— 1987.— *23*.— C. 841—879.
187. *Tate J.* Les conjectures de Stark sur les fonctions L d'Artin en $s \neq 0$, notes d'un cour à Orsay (rédigées par D. Bernardi et N. Schappacher).— Birkhäuser, 1984.
188. Topics in transcendental algebraic Geometry. Ed. *Griffiths P.*— Princeton: Princeton Univ. Press, 1984.
189. *Verdier J.-L.* Stratifications de Whitney et théorème de Bertini-Sard // Invent. math.— 1976.— *36*.— C. 295—312.
190. — Categorie dérivée, état 0 // Lect. Notes Math.— 1977.— *569*.— C. 262—311.
191. — Extension of the perverse sheaf over a closed subspace // Astérisque.— 1985.— № 130.— C. 210—217.
192. *Zucker S.* Hodge theory with degenerating coefficients: L_2-cohomology in Poincaré metric // Ann. Math.— 1979.— *109*.— C. 415—476.
193. — Locally homogeneous variation of Hodge structure // L'enseign Math. — 1981.— *27*.— C. 243—276.
194. — L^2-cohomology of warped products and arithmetic groups // Invent. math.— 1982.— *70*.— C. 169—218.
195. — Variation of mixed Hodge structure. II // Invent. math.— 1985.— *80*.— C. 543—565.
196. — Degeneration of mixed Hodge structure // Proc. Symp. Pure Math. 1987.— *46*.— C. 283—293.
197. — The Hodge structures on the intersection homology of varieties with isolated singularities // Duke Math. J.— 1987.— *55*.— C. 603—616.
198. — The Cheeger-Simons invariant as a Chern class // In Algebraic anal. geometry and number theory. Proc. JAMI Inaugural Conf.— JHU Press, 1989.— C. 397—417.

УДК 517.55+515.171

I. *С. Бэлл, Р. Нарасимхан.* Собственные голоморфные отображения комплексных пространств // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фунд. напр. / ВИНИТИ.— 1990.— С. 6—47

Рассматриваются собственные голоморфные отображения комплексных пространств. Изложены фундаментальные теоремы Реммерта о собственном отображении, Грауэрта о прямом образе. Исследованы вопросы о (собственных) вложениях и голоморфные собственные отображения ограниченных областей. Библ. 120.

УДК 512.66+512.73+515.17

II. *Ж.-Л. Брылински, С. Цукер.* Обзор последних исследований в теории Ходжа // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фунд. напр. / ВИНИТИ.— 1990.— С. 48—165

Обзор исследований по теории Ходжа. Изложены как классические результаты (теория Ходжа—Делиня), так и самые последние. Библ. 198.

УДК 512.816+515.177

III. *А. Т. Хаклберри.* Действия групп голоморфных преобразований // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фунд. напр. // ВИНИТИ.— 1990.— С. 166—221

Рассматриваются вопросы классификации однородных и почти однородных пространств, вопросы комплексного анализа и аспекты, связанные с некоторыми типами действий групп Ли. Библ. 108.

УДК 512.774+515.162.4

IV. *Ч. Оконек, А. Ван де Вен.* Стабильные расслоенияэ инстантоны и C^∞ структуры на алгебраических многообразиях // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат. Фунд. напр. / ВИНИТИ.— 1990.— С. 222—277

Обзор результатов о гладких структурах на 4-многообразиях, полученных, в основном, в работах Дональдсона. Рассмотрены также вопросы неразложимости алгебраических многообразий. Библ. 102.

УДК 512.774.6+515.179

V. *Г. Шумахер.* Теория пространств Тейхмюллера. Подход с точки зрения пространств модулей кэлеровых многообразий // Итоги науки и техн. Сер. Совр. пробл. мат.-Фунд. напр. / ВИНИТИ.— 1990.— С. 278—345

Обзор теории Тейхмюллера и новых результатов, касающихся пространств модулей (многомерных) компактных кэлеровых многообразий. Библ. 93.