Д. Б. Фукс, Слоения, *Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом.*, 1981, том 18, 151–213

УДК 515.168.3

СЛОЕНИЯ

Д. Б. Фукс

§ 1. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ

Теория слоений существует как самостоятельная математическая дисциплина около 30 лет. Первой крупной работой в этой области является диссертация Жоржа Риба [302], содержащая, наряду с основными определениями, ряд глубоких теорем. В 50-е и 60-е годы количество работ по теории слоений было относительно небольшим, но некоторые из этих работ оказались очень важными, как, например, работы Хефлигера [137], С. П. Новикова [19], Вуда [388]. В 70-е годы интерес к слоениям значительно возрос; главными стимулами явились возникшая в 1971 г. теория характеристических классов слоений и работы Тэрстона 1974—1976 годов о существовании и классификации слоений. Начиная с 1970 г., в РЖ «Математика» прореферировано около 400 работ по теории слоений; на базе этих работ и написан настоящий обзор. В числе этих работ специально посвященная слоениям книга Тамуры [355], недавно вышедшая в русском переводе, обзорная статья [211], более узкие обзорные статьи [24, 27, 47, 120, 173, 187, 311, 320, 354] и популярные статьи [69, 341, 385]. Из других работ общего характера отметим рассказ об истоках и основных проблемах теории слоений, написанный ее основателем [303], и список проблем, составленный Швейцером [329].

1. Основные понятия. Пусть X — гладкое (гладкость всюду, где не оговорено противное, понимается как принадлежность классу C^∞) n-мерное многообразие без края, и пусть $0\leqslant p\leqslant n$. Говорят, что на X задано гладкое слоение размерности p, если X наделено разбиением на (линейно) связные подмножества F_α, обладающие следующим свойством: каждая точка $x\in X$ покрывается картой $\varphi: U\to\mathbb{R}^n$ из структурного атласа многообразия X, такой, что компоненты (по отношению к линейной связности) пересечений $U\cap F_\alpha$ отображаются посредством φ на p-мерные плоскости пространства $\mathbb{R}^n$, параллельные плоскости

первых p координатных осей. Множества F_α называются слоями слоения, само X называется его тотальным многообразием. Число $n-p$ называется коразмерностью слоения; коразмерность слоения $\mathcal{F}$ обозначается через $\operatorname{codim}\mathcal{F}$.

Эти определения (как и большинство дальнейших определений) имеют очевидный комплексный вариант. Их можно распространить и на многообразия с краем, причем здесь имеются две конкурирующие возможности: можно потребовать, чтобы слои были трансверсальны краю, а можно потребовать, чтобы компоненты края были слоями. В первом случае слоение называют трансверсальным краю, во втором случае (в котором коразмерность слоения должна равняться 1) — тривиальным на крае.

2. Примеры. Примерам слоений будет посвящен § 2; здесь мы ограничиваемся минимальным запасом примеров, полезных для понимания дальнейших определений.

Тривиальные примеры слоений доставляют гладкие расслоения: если X — тотальное многообразие гладкого расслоения с $(n-p)$-мерной базой ($n=\dim X$), то разбиение многообразия X на компоненты слоев расслоения есть p-мерное слоение. Следующий по сложности пример — обмотка тора, т. е. разбиение тора $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ на образы прямых $y=\lambda x+c$ с фиксированным λ. Если λ рационально, то слоение относится к предыдущему классу, в случае же иррационального λ каждый слой плотен в торе.

Следующий пример слоения коразмерности 1 в S^3 принадлежит Рибу [302]; это — один из важнейших примеров слоения. Положим $\varphi(t)=e^{-1/t^2}$ и рассмотрим двумерное слоение в цилиндре $\{(x, y, z)\in\mathbf{R}^3 \mid x^2+y^2\leqslant 1\}$, слоями которого служат граница цилиндра и поверхности $z=\varphi^{-1}(\sqrt{1-x^2-y^2})+c$ (это слоение тривиально на крае). Очевидно, это слоение инвариантно отно-

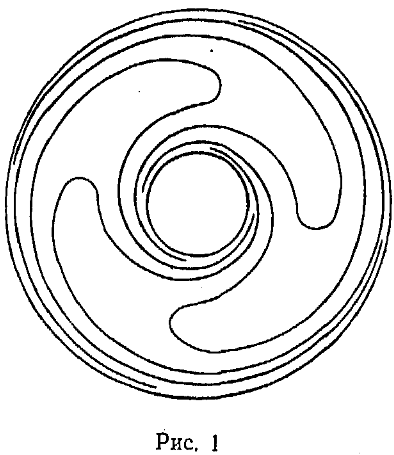

Рис. 1

сительно параллельных переносов вдоль оси цилиндра. Обычная проекция цилиндра на полноторий $S^1 \times D^2$ превращает это слоение в слоение в полнотории. Последнее называется рибовской компонентой; его осевое сечение изображено на рис. 1. Слоение Риба в S^3 получается при обычном склеивании сферы S^3 из двух полноториев.

3. Отношения эквивалентности между слоениями. Очевидный смысл имеет диффеоморфизм гладких слоений. Рассматривают еще три отношения эквивалентности между слоениями: гомотопность, кобордантность и конкордантность. Гладкие слоения $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ одной размерности на замкнутом многообразии X называются гомотопными, если существует семейство гладких слоений $\{\mathcal{F}_t\}_{0<t<1}$ той же размерности на X, такое, что семейство $\{\mathcal{F}_t\}_0$ не прерывно по отношению к очевидной C^∞-топологии в множестве всех гладких слоений на X. (Кстати, если речь идет не о C^∞-слоениях, а о C^r-слоениях с $1 \leqslant r < \infty$,то правильное определение топологии в множестве слоений не столь очевидно — см. [98].) Гладкие слоения $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ одной размерности на замкнутых многообразиях X_0, X_1 одной размерности называются кобордантными, если существует компактное многообразие Y с $\partial Y = X_0 \cup X_1$ и трансверсальное краю слоение $\mathcal{H}$ на Y той же коразмерности, что $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$, такое, что слои слоений $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ совпадают с компонентами пересечения слоев слоения $\mathcal{H}$ с X_0 и X_1. Если в предыдущем определении $X_1 = X_0$ и $Y = X_0 \times I$, то слоения $\mathcal{F}_0$ и $\mathcal{F}_1$ называются конкордантными. О конкордантности слоений говорят иногда и в случае, когда тотальное многообразие некомпактно.

Подчеркнем, что гомотопность и конкордантность — совсем разные понятия. Например, попытка доказать конкордантность гомотопных слоений, составив слоение в цилиндре $X \times I$ из слоев слоений $\mathcal{F}_t$ в $X \times t$, как правило, ни к чему не приводит. Это особенно ясно видно на примере гомотопии, соединяющей обмотки тора с разным углом наклона (она составлена из обмоток с промежуточными углами наклона). Заметим, что обмотки тора с разными углами все же конкордантны. Чтобы построить слоение $\mathcal{H}$ в $S^1 \times S^1 \times I$, осуществляющее конкордантность между обмотками тора с разными углами, умножим слоение в полосе $\mathbf{R} \times I$, изображенное на рис. 2, на прямую; получится слоение в $\mathbf{R}^2 \times I$, одним из слоев которого будет плоскость. Повернем части, на которые $\mathbf{R}^2 \times I$ разрезается этой плоскостью, вокруг прямой, перпендикулярной этой плоскости — каждую

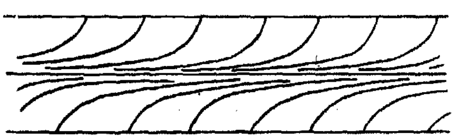

Рис. 2

на свой угол. Получится новое слоение в $\mathbf{R}^2 \times I$, попрежнему инвариантное относительно параллельных переносов в $\mathbf{R}^2$. Профакторизовав $\mathbf{R}^2 \times I$ по группе $\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$, составленной из таких переносов, мы получим слоение в цилиндре над тором; это и есть $\mathscr{H}$.

Примеры гомотопных, но не конкордантных слоений появятся в § 5. Простейший пример конкордантных, но не гомотопных слоений доставляют слоения в $\mathbf{R}^2 \setminus 0$, слоями первого из которых служат окружности с центром 0, слоями второго — две половины оси OX и прямые, параллельные этой оси.

4. Топология слоев и базы. Трансверсальная геометрия слоений. Слои слоения целесообразно наделять не индуцированной топологией, а топологией, базу которой составляют компоненты пересечений с открытыми подмножествами тотального многообразия. По отношению к этой топологии слои p-мерного слоения являются p-мерными многообразиями; слои гладкого слоения имеют очевидную структуру гладких многообразий. Например, слои обмотки тора диффеоморфны окружностям или прямым, слои слоения Риба, кроме одного, диффеоморфны плоскостям, а один слой — тору.

Факторпространство тотального многообразия по его разбиению на слои, которое естественно было бы считать базой слоения, обычно бывает устроено очень плохо. Например, «база» иррациональной обмотки тора вообще не имеет собственных открытых подмножеств, «база» слоения Риба состоит из двух окружностей и точки, которая входит в замыкание любого непустого подмножества каждой из этих окружностей. Таким образом определяемая база слоения употребляется чрезвычайно редко: она оказывается полезной лишь при изучении слоений весьма специального вида (см., например, [53, 54, 55, 103, 104, 278, 279, 342]).

Чаще роль базы принимает на себя совокупность трансверсалей к слоению. Пусть на многообразии X задано гладкое слоение коразмерности q. Трансверсалью (к слоению) называется иммерсия $\varphi: Y \to X$ q-мерного многообразия в X, трансверсальная к каждому слою слоения. Если $\varphi_1: Y_1 \to X$ и $\varphi_2: Y_2 \to X$ — две трансверсали к одному слоению, $y_1 \in Y_1$, $y_2 \in Y_2$ — такие точки, что $\varphi_1(y_1)$, $\varphi_2(y_2)$ лежат на одном слое F, и $s: I \to F$ — путь, соединяющий $\varphi_1(y_1)$ с $\varphi_2(y_2)$, то для всякой достаточно близкой к y_1 точки $y_1' \in Y_1$ существует путь $s': I \to X$, близкий к s в топологии X, начинающийся в $\varphi_1(y_1')$, идущий по одному слою и кончающийся на $\varphi_2(Y_2)$. Близкая к y_2 точка $y_2' \in Y_2$, такая, что $\varphi_2(y_2')$ — конец пути s', определяется (при фиксированном s) точкой y_1', и сопоставление $y_1' \to y_2'$ определяет росток диффеоморфизма $(Y_s, y_1) \to (Y_2, y_2)$. Этот росток называется преобразованием голономии. Очевидно, он не меняется при замене пути s гомотопным. Трансверсали и преобразования голономии составляют агрегат, похожий на атлас гладкого мно-

гообразия (из них легко составить топос Гротендика), и для этого агрегата имеют смысл многие определения дифференциальной топологии. Например, можно потребовать, чтобы всякой трансверсали $\varphi: Y \to X$ некоторого слоения соответствовала ориентация многообразия Y и чтобы преобразования голономии эту ориентацию сохраняли; такое соответствие называется (трансверсальной) ориентацией слоения. Подобным же образом слоение может быть (трансверсально) почти комплексным, комплексно аналитическим, симплектическим, контактным, римановым и т. д.: нужно, чтобы все трансверсали были наделены соответствующей структурой и чтобы преобразования голономии эту структуру сохраняли. Аналогично обогащаются понятия, введенные в п. 3: слоения, наделенные той или иной трансверсальной структурой, могут быть гомотопны, кобордантны или конкордантны в классе слоений с этой структурой.

Заметим, что тотальное многообразие слоения с той или иной из перечисленных структур подобной структуры иметь не обязано; так комплексно аналитическое слоение может быть задано на вещественном (даже нечетномерном) многообразии, ориентированное слоение — на неориентируемом многообразии. (Пример: слоение бутылки Клейна, определяемое ее каноническим расслоением над окружностью, трансверсально ориентируемо.)

Пусть X — многообразие со слоением коразмерности q и φ: $\mathbf{R}^q \to X$ — трансверсаль. Пусть, далее, F — слой, проходящий через точку $\varphi(0)$. Соответствие между гомотопическими классами петель слоя F с началом в точке $\varphi(0)$ и преобразованиями голономии определяет гомоморфизм группы $\pi_1(F, \varphi(0))$ в группу ростков диффеоморфизмов $(\mathbf{R}^q, 0) \to (\mathbf{R}^q, 0)$. Образ этого гомоморфизма, с точностью до сопряженности, определяется слоем F (т. е. не зависит от выбора трансверсали φ с $\varphi(0) \in F$). Этот образ называется группой голономий слоя F. Поучительный пример доставляет слоение Риба (п. 2). Группа голономий торического слоя F этого слоения изоморфна $\pi_1(F) \cong \mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ и порождается ростками диффеоморфизмов, графики которых показаны на рис. 3.

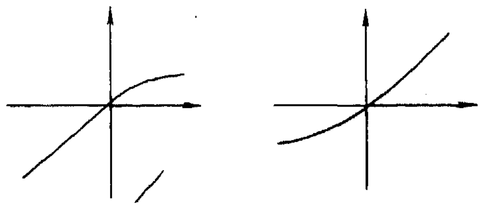

Рис. 3

Очевидно, эти диффеоморфизмы не могут быть аналитическими; это — причина, по которой слоение Риба, хотя и принадлежит классу C^∞, не является аналитическим. (На S^3 вооб-

ще не бывает аналитических слоений коразмерности 1 — см. [137]).

Трансверсальной геометрии слоений посвящены статьи [254 и 373].

5. Касательное и нормальное расслоение. Индуцированное слоение. Теорема Ботта о тривиальности классов Понтрягина. Векторы, касающиеся слоев гладкого слоения $\mathscr{F}$, составляют подрасслоение касательного расслоения тотального многообразия. Это подрасслоение называется касательным расслоением слоения и обозначается через $\tau(\mathscr{F})$, а соответствующее фактор-расслоение называется нормальным расслоением к слоению и обозначается через $\nu(\mathscr{F})$. Очевидно, если $\varphi: Y \to X$ — трансверсаль к слоению $\mathscr{F}$, заданному на многообразии X, то $\varphi^*\nu(\mathscr{F})$ есть касательное расслоение многообразия Y. Ясно также, что ориентации слоения соответствуют ориентациям его нормального расслоения и что трансверсальные почти комплексные структуры слоения соответствуют комплексным структурам нормального расслоения. Добавим к этому, что если нормальное расслоение тривиально и наделено определенной тривиализацией, то слоение называется оснащенным. В очевидном смысле можно говорить об оснащенно кобордантных и оснащенно конкордантных слоениях.

Пусть f — гладкое отображение гладкого многообразия Y без края в тотальное многообразие X некоторого слоения $\mathscr{F}$. Если f трансверсально $\mathscr{F}$ (т. е. трансверсально каждому слою $\mathscr{F}$), то компоненты прообразов слоев слоения $\mathscr{F}$ составляют слоение многообразия Y. Последнее слоение называется индуцированным $\mathscr{F}$ посредством f и обозначается через $f^*\mathscr{F}$. Ясно, что $\operatorname{codim} f^*\mathscr{F} = \operatorname{codim}\mathscr{F}$ и $\nu(f^*\mathscr{F}) = f^*(\nu(\mathscr{F}))$. Ясно также, что если φ — трансверсаль к $f^*\mathscr{F}$, то $f \circ \varphi$ — трансверсаль к $\mathscr{F}$. Вследствие этого слоение, индуцированное ориентируемым, оснащенным, почти комплексным, комплексным и т. д. слоением, в очевидном смысле является ориентированным, оснащенным и т. д.

Всякое одномерное подрасслоение касательного расслоения многообразия является касательным расслоением некоторого одномерного слоения на этом многообразии; для подрасслоения размерности $\geqslant 1$ подобное неверно. Употребительна такая терминология: подрасслоения касательного расслоения называются распределениями, а подрасслоения, служащие касательными расслоениями слоений — интегрируемыми распределениями. Таким образом, не всякое распределение размерности $\geqslant 1$ интегрируемо. Следующая теорема Ботта показывает, что не всякое распределение размерности $\geqslant 1$ гомотопно интегрируемому.

Теорема. Полиномы от вещественных классов Понтрягина нормального расслоения слоения коразмерности q, имеющие степень $2q$, равны нулю.

Эта теорема доказана в [46]. Ее изложению посвящена статья [140]. Примыкает к теореме Ботта результат Гольдмана [131], доказавшего, что тривиальны все вещественные классы Понтрягина нормального расслоения к слою слоения. Шульман [336] показал, что тривиальны и произведения Масси классов Понтрягина нормального расслоения к слоению, имеющие достаточно большую размерность. В статье [51] показано, что утверждение, аналогичное теореме Ботта, не имеет места для целочисленных классов Понтрягина. Дополнения к теореме Ботта содержат статьи [34, 35, 227, 236, 247, 291].

Мы еще дважды в этом обзоре вернемся к теореме Ботта: в § 5, где будет выявлена связь между этой теоремой и характеристическими классами слоений, и в § 6, где будет показано, что для некоторых специальных типов слоений заключение теоремы Ботта может быть значительно усилено.

6. Определяющая система форм. Критерий интегрируемости. В этом и следующем пунктах описываются два употребительных способа задания слоений.

Пусть $\mathcal{F}$ — гладкое слоение коразмерности q на многообразии X. Определяющая система форм слоения $\mathcal{F}$ в открытом множестве $U \subset X$ — это набор $\omega_1, \ldots, \omega_q$ гладких 1-форм, заданных в U и обладающих двумя свойствами: (i) формы $\omega_1, \ldots, \omega_q$ линейно независимы в каждой точке множества U; (ii) сужение каждой из этих форм на любую компоненту пересечения любого слоя с U тривиально. Очевидно, для задания слоения достаточно задать определяющие системы форм в открытых множествах, составляющих покрытие тотального многообразия. Ясно также, что если $(\omega_1, \ldots, \omega_q)$, $(\omega'_1, \ldots, \omega'_q)$ — определяющие системы форм в U, U', то (в $U \cap U'$) $\omega'_i = \Sigma_j \varphi_{ij} \omega_j$, где φ_{ij} — гладкие функции, у которых $\det \| \varphi_{ij} \|$ не обращается в 0 ни в одной точке.

Если $U = X$, то мы имеет дело с глобальной определяющей системой форм. Очевидно, для существования глобальной определяющей системы форм необходимо и достаточно, чтобы было тривиально нормальное расслоение к слоению, и задание глобальной определяющей системы форм приводит к выбору определенного гомотопического класса оснащения этого слоения.

Подчеркнем, что система $\omega_1, \ldots, \omega_q$ гладких 1-форм, заданных в открытом множестве $U \subset X$ может не быть определяющей системой форм ни для какого слоения коразмерности q, даже если она удовлетворяет условию (i): требуется еще, чтобы был выполнен критерий интегрируемости. (Этот факт уже упоминался в п. 5, где он был выражен словами: не всякое распределение интегрируемо.) Последний формулируется так: при каждом i дифференциал $d\omega_i$ должен представляться в виде $\Sigma_j \omega_j \wedge \eta_j$, где η_j — некоторые гладкие 1-формы. Равносильная [если выполняется (i)] формулировка: $\omega_1 \wedge \ldots \wedge \omega_q \wedge$

$\wedge d\omega_i=0$ при $i=1, \ldots, q$. Что этот критерий выполняется для любой определяющей системы форм слоения, очевидно: можно считать, что предложенная система задана в пределах карты, описанной в определении слоения (п. 1), а в локальных координатах $x_1, \ldots, x_n$ такой карты всякая определяющая система форм имеет вид $\sum_{j=1}^{q} f_{ij}dx_{p+j}$, $i=1, \ldots, q$ (с $\det\|f_{ij}\|\neq 0$). Обратное утверждение, доказательство которого более длинно, представляет собой хорошо известную теорему анализа. (В анализе эта теорема формулируется так: пусть $\omega_1, \ldots, \omega_q$ — система гладких 1-форм, определенных в окрестности точки $0\in\mathbb{R}^n$ и линейно независимых в каждой точке этой окрестности; если $\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_q\wedge d\omega_i=0$ при $i=1, \ldots, q$, то существуют гладкие функции f_{ij}, g_j $(i, j=1, \ldots, q)$ с $\det\|f_{ij}\|\neq 0$ и $\omega_j=$ $=\Sigma_j f_{ij}dg_j$.)

В важном случае $q=1$ сказанное принимает такой вид. Слоение коразмерности 1 локально задается гладкой 1-формой, не обращающейся в нуль; эта форма ω должна удовлетворять условию интегрируемости $\omega\wedge d\omega=0$ (или $d\omega=\omega\wedge\eta$ с некоторой гладкой 1-формой η). Слоение коразмерности 1 определяется 1-формой глобально в том и только в том случае, если оно ориентируемо, и выбор глобально определяющей слоение 1-формы приводит к выбору определенной ориентации.

7. Атлас слоения. Открытое покрытие $\{U_i\}$ гладкого многообразия X без края, элементы которого наделены субмерсиями $\varphi_i : U_i\to\mathbb{R}^q$, называется атласом слоения коразмерности q, если выполняется следующее условие: для каждой точки $x\in U_i\cap U_j$ (с любыми i, j) существует диффеоморфизм ψ_x окрестности точки $\varphi_j(x)$ (в $\mathbb{R}^q$) на окрестность точки $\varphi_i(x)$, переводящий $\varphi_j(x)$ в $\varphi_i(x)$ и такой что $\varphi_i(y)=\psi_x(\varphi_j(y))$ для всякой точки y из некоторой окрестности точки x. Два атласа называются эквивалентными, если их объединение является атласом. Очевидно, задание на многообразии X класса эквивалентных атласов равносильно заданию на этом многообразии гладкого слоения коразмерности q: чтобы построить по слоению атлас, нужно взять достаточно мелкое покрытие тотального многообразия и произвольные субмерсии элементов этого покрытия в $\mathbb{R}^q$, локально постоянные на слоях, а чтобы восстановить по атласу слоение, нужно в качестве слоев взять максимальные связные множества, на компонентах пересечений которых с U_i субмерсии φ_i постоянны. Если атлас определяет слоение $\mathcal{F}$, то говорят, что это — атлас слоения $\mathcal{F}$. Если диффеоморфизмы ψ_x сохраняют ориентацию или являются комплексно аналитическими, каноническими или контактными преобразованиями, то определяемое атласом слоение оказывается ориентированным, комплексно аналитическим, симплектическим или контактным.

Добавим, что с помощью атласов совсем просто описываются нормальное расслоение и операция индуцирования. Если

$\{U_i,\ \varphi_i\}$ — атлас слоения, то отображения $U_i \cup U_j \to GL(q, \mathbf{R})$, относящие точке x матрицу дифференциала отображения ψ_x в точке $\varphi_i(x)$ определяют q-мерное векторное расслоение с базой X; это — не что иное, как нормальное расслоение слоения, определяемого атласом. Если $f: X \to Y$ — отображение, трансверсальное слоению $\mathscr{F}$, задаваемому атласом $\{U_i,\ \varphi_i\}$, то множества $f^{-1}(U_i)$ и отображения $f^{-1}(U_i) \to \mathbf{R}^q$, определяемые формулой $y \mapsto \varphi_i(f(y))$, составляют на Y атлас слоения, именно, слоения $f^*\mathscr{F}$.

§ 2. ЯВНЫЕ КОНСТРУКЦИИ СЛОЕНИЙ

На протяжении первых 15 лет существования теории слоений пример Риба (п. 1.2) оставался единственным геометрически содержательным примером слоения, которым располагала эта теория. Лишь во второй половине 60-х годов появились новые примеры слоений, и на протяжении следующего десятилетия их было построено изрядное количество. Это были почти исключительно слоения коразмерности 1 на замкнутых многообразиях (исключение составляет работа Аррота [36], построившего двумерное слоение на семимерной сфере). Целью построения обычно было доказательство существования слоения коразмерности 1 на том или ином многообразии. Проблема существования слоений коразмерности 1 в настоящее время полностью решена: на открытом многообразии такое слоение всегда существует (это доказано в 1970 г. Хефлигером [138] и будет обсуждаться ниже в § 4), а в случае замкнутого многообразия равенство нулю эйлеровой характеристики этого многообразия, очевидно, необходимое для существования слоения коразмерности 1 (оно необходимо уже для существования подрасслоения касательного расслоения коразмерности 1), является для него и достаточным. Последний факт доказан Тэрстоном [365] (см. снова § 4); однако доказательство Тэрстона трудно назвать геометрически наглядным, так что явные конструкции слоений не утратили своего значения.

Все слоения, которые строятся в пп. 2—4 этого параграфа, принадлежат классу C^∞, но не являются аналитическими. Это не удивительно: согласно доказанной 25 лет назад теореме Хефлигера [137] (см. также [168]) замкнутое многообразие с конечной фундаментальной группой не может иметь аналитического слоения коразмерности 1 (ср. замечание в конце п. 1.4). Впрочем, теория аналитических слоений коразмерности 1 вполне содержательна; способ построения таких слоений, важный для теории характеристических классов слоений, описан в п. 5.

1. Метод Лоусона — Тамуры построения слоений. Проще всего построить слоение коразмерности 1 на замкнутом многообразии, которое гладко расслаивается над окружностью: компоненты слоев расслоения составляют слоение (ср. п. 1.2). Это

наблюдение следующим образом обобщается: если компактное многообразие X, вообще говоря, имеющее край, гладко расслаивается над окружностью (подразумевается, что слои расслоения трансверсальны краю), то X обладает гладким слоением, тривиальным на крае (см. п. 1.1). Для доказательства достаточно построить гладкую функцию $X \to \mathbf{R}_+$, равную нулю на ∂X, положительную в $\operatorname{int} X$ и не имеющую критических значений, меньших 1. Эта функция составляет с проекцией $X \to S^1$ гладкое отображение $X \to S^1 \times \mathbf{R}_+$, трансверсальное слоению, изображенному на рис. 4 [в $S^1 \times (1, \infty)$ слои этого слоения совпадают с прямыми $t \times (1, \infty)$, $t \in S^1$]. Индуцируемое в X слоение и будет требуемым.

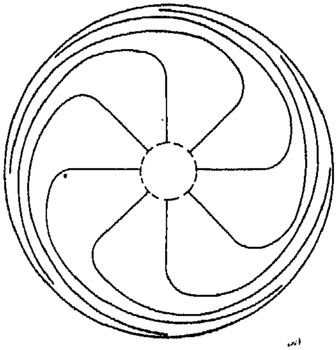

Рис. 4

Предположим теперь, что замкнутое гладкое многообразие X разрезается своим подмногообразием Y коразмерности 1 на два куска, X_1 и X_2, каждый из которых гладко расслаивается над окружностью. Тогда X обладает гладким слоением коразмерности 1: оно составляется из слоений, возникающих, согласно сказанному в X_1 и X_2. В этом и заключается сущность метода Лоусона — Тамуры. Пример: S^3 разрезается стандартно вложенным тором на два полнотория, каждый из которых очевидным образом расслаивается над окружностью; полученное слоение есть слоение Риба (см. п. 1.2).

[Стоит заметить, что, хотя проблема существования слоений коразмерности 1 решена, остается открытым естественный, ввиду сказанного, вопрос: какие многообразия разрезаются подмногообразиями на куски, расслаивающиеся над окружностью? Очевидно, эйлерова характеристика разрезаемого таким образом многообразия равна нулю, но никаких других необходимых условий разрезаемости не видно; в то же время уже для семимерной сферы существование такого разрезания представляется сомнительным (по поводу пятимерной сферы см. п. 2).]

Фактически метод Лоусона — Тамуры не сводится к описанному приему. Тамура использует в своих работах понятие

«вращательной структуры» ([351, 354]): на замкнутом гладком многообразии X задана вращательная структура, если в X фиксированы подмногообразие A коразмерности 2 с тривиальным нормальным расслоением (называемое «осью»), трубчатая окрестность U многообразия A и расслоение $X—\operatorname{int} U \to S^1$ (его слой называется «образующей»), согласованное на границе с проекцией $U \to D^2$. Лоусон использует специальный вид вращательных структур, называемый им разложением Александера [209—211]: гладкое отображение $f: X \to \mathbf{C}$ с регулярным значением 0 такое, что отображение $\arg f: X—f^{-1}(0) \to S^1$ есть субмерсия; если f определяет разложение Александера, то $f^{-1}(0)$ и $\arg f | (X—f^{-1}(|z| < \varepsilon))$ при малом положительном ε составляют вращательную структуру. Вращательные структуры, под названием «open book structures» рассматривались также Винкельнкемпером [387]; он доказал, что если X односвязно и $\dim X = 2k+1$, $k \geqslant 3$, то X обладает вращательной структурой, у которой образующая имеет гомотопический тип k-мерного клеточного пространства и вложение образующей в X есть гомотопическая k-эквивалентность.

Вращательная структура на X сама по себе не дает слоения. Она доставляет разбиение $X = U \cup (X—\operatorname{int} U)$, и $X—\operatorname{int} U$ расслаивается над окружностью. Для применимости предыдущей конструкции необходимо, чтобы над окружностью расслаивалось U, т. е. A. Однако, иногда удается обойтись и без расслоения $A \to S^1$; достаточно, например, чтобы существовало гладкое расслоение многообразия A над некоторым многообразием B, таким что для $B \times D^2$ уже доказано существование слоения, тривиального на крае. Тогда проекция $A \times D^2 \to B \times D^2$ позволяет построить тривиальное на крае слоение в $A \times D^2$, а это — все, что нам нужно. С примером такого построения мы познакомимся в п. 3.

2. Слоения коразмерности 1 на замкнутых трехмерных многообразиях. Такие слоения рассматриваются в § 3, здесь мы скажем только о явных конструкциях. Еще в 1923 г. Александер доказал, что всякое замкнутое ориентируемое трехмерное многообразие обладает разложением Александера. Осью служит объединение окружностей, а так как на $S^1 \times D^2$ имеется тривиальное на крае слоение (рибовская компонента), то сказанное в п. 1 позволяет построить по этому разложению Александера гладкое слоение коразмерности 1. Эта конструкция слоений на ориентируемых трехмерных многообразиях предшествовала работам Лоусона и Тамуры; она принадлежит С. П. Новикову, Цишангу и Ликоришу (см. [19]). Впоследствии Вуд ([388, 389, 390]) построил слоения коразмерности 1 и на неориентируемых замкнутых трехмерных многообразиях.

3. Слоения коразмерности 1 на нечетномерных сферах. Примером слоения коразмерности 1 на S^3 служит слоение Риба. Слоение коразмерности 1 на S^5 впервые построил Лоусон (см.

[210], а также [243]). Это слоение строится по разложению Александера, определяемому отображением $S^5 \to \mathbf{C}$, действующим по формуле $(z_1, z_2, z_3) \mapsto z_1^3 + z_2^3 + z_3^3$. Ось этого разложения Александера расслаивается над неособой кубической кривой в $\mathbf{C}P^2$, диффеоморфной тору, т. е. расслаивается над S^1. Построение слоений коразмерности 1 на нечетномерных сферах размерности $\geqslant 7$ основано на следующих двух леммах Лоусона — Тамуры — Дэрфи.

Лемма 1. Если $k \geqslant 1$, то на сфере S^{4k-1} существует разложение Александера с осью, гладко расслаивающейся над S^{2k-1}; если $k \geqslant 2$, то на сфере S^{4k+1} существует разложение Александера с осью $S^{2k} \times S^{2k-1}$.

Первое разложение Александера определяется отображением $S^{4k-1} \to \mathbf{C}$, действующим по формуле $(z_1, \ldots, z_{2k}) \mapsto z_1^2 + \ldots + z_{2k}^2$; его осью служит многообразие единичных касательных векторов $(2k-1)$-мерной сферы. Второе разложение Александера определяется как связная сумма двух разложений Александера, задаваемых отображениями $S^{4k+1} \to \mathbf{C}$, действующими по формулам

$$(z_0, z_1, \ldots, z_{2k}) \mapsto (z_0 + z_1^2)(z_0^2 + z_1^5) + \sum_{i=2}^{2k} z_i^2,$$

$$(z_0, z_1, \ldots, z_{2k}) \mapsto z_0^5 + z_1^3 + \sum_{i=2}^{2k} z_i^2;$$

осями этих разложений служат многообразия $(S^{2k} \times S^{2k-1}) \# \# \Sigma^{4k-1}$ и $-\Sigma^{4k-1}$, где Σ^{4k-1} — экзотическая сфера Милнора.

(Первое утверждение леммы доказано Лоусоном [210]; второе утверждение независимо доказано Дэрфи [90] и Тамурой [352]. Приведенное здесь доказательство принадлежит Дэрфи; доказательство Тамуры отличается от доказательства Дэрфи, но и в нем приходится «сокращать» милноровскую сферу. Употребляемое в доказательстве связное суммирование разложений Александера введено Лоусоном и Дэрфи [91]. Впоследствии Тамура доказал, что S^{4k-1} обладает вращательной структурой с осью $S^{2k-1} \times S^{2k-2}$ [354], и Муцутани доказал, что S^5 обладает вращательной структурой с осью $S^1 \times S^2$ [245].)

Лемма 2. (См. [209].) Если на сфере S^m с $m > 3$ имеется гладкое слоение коразмерности 1, то произведение $S^{m-2} \times D^2$ обладает гладким слоением, тривиальным на крае.

В самом деле, построим на S^m замкнутую гладкую кривую, трансверсальную слоению (такая, очевидно, существует для любого слоения коразмерности 1 на замкнутом многообразии). Неравенство $m > 3$ позволяет считать, что кривая несамопересекающаяся и незаузленная, так что дополнение к ее окрестности диффеоморфно $S^{m-2} \times D^2$. Изменим слоение в окрестности кривой как показано на рис. 5 и выбросим часть сферы, расположенную внутри пунктирного слоя F. Мы получаем требуемое.

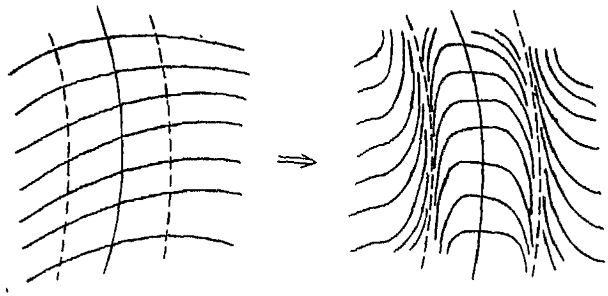

Рис. 5

Эти леммы позволяют завершить построение слоений индукцией по размерности сферы. Пусть $k \geqslant 4$, и пусть на сферах S^{2j-1} с $j<k$ гладкое слоение коразмерности 1 уже построено. Согласно лемме 1 сфера S^{2k-1} обладает разложением Александера, ось которого расслаивается над сферой размерности $l=2\left[\frac{k}{2}\right]-1$, а в силу леммы 2 и неравенства $l+2<2k-1$ произведение $S^l \times D^2$ обладает слоением, тривиальным на крае. В силу сказанного в п. 1, этого достаточно для построения гладкого слоения коразмерности 1 на S^{2k-1}. (Заметим, что отдельное построение слоения коразмерности 1 на S^5 является необходимым шагом этой индукции.) В заключение упомянем статью Тамуры и Мицутани [356], содержащую построение гладкого слоения на S^{4k-1}, кобордантного нулю, статью Мицутани [245] в которой построено слоение на S^{4k+1}, не кобордантное нулю, но делающееся таковым после удвоения, и обзорные статьи [123] и [311], специально посвященные слоениям на сферах.

4. Слоения коразмерности 1 на других многообразиях. А'Кампо ([30, 31, 32]) и несколько позже Фукуи [113] построили гладкое слоение коразмерности 1 на произвольном односвязном пятимерном многообразии; их построение использует методы, близкие к описанным выше, а также некоторые структурные теоремы.

Впоследствии Тамура ([353, 354]) построил слоения коразмерности 1 на произвольных замкнутых $(k-1)$-связных $(2k+1)$-мерных многообразиях с $k \geqslant 3$; его построение не опирается ни на какие структурные теоремы, а используют только доказанные им и Винкельнкемпером ([351, 387]) свойства вращательных структур; в более специальной ситуации это построение было ранее проведено Дэрфи и Лоусоном [91].

Мицутани [245] построил гладкое слоение коразмерности 1 на произвольном $(k-2)$-связном $2k$-мерном многообразии с тривиальной эйлеровой характеристикой, с тривиальной сигнатурой и с $k \geqslant 3$. Несколько лет оставался открытым вопрос о возможности построения гладких слоений коразмерности 1 на

многообразии с ненулевой сигнатурой; особенную известность этой задаче придала опубликованная в 1967 г. ошибочная работа Рейнхарта. Пример гладкого слоения коразмерности 1 на $CP^3 \# CP^2 \# (S^1 \times S^3) \# (S^1 \times S^3)$ привел Мицутани [244]; независимо от него примеры гладких слоений коразмерности 1 на многообразиях с ненулевой сигнатурой построил Линингер [226].

В заключение скажем о нескольких работах, содержащих явное построение кобордизмов между слоениями. (Некоторые результаты этого направления уже упоминались в п. 3.) Довольно значительных усилий потребовала проблема кобордантности нулю слоения Риба на S^3. Сначала Мицутани [244] доказал, что кобордантно нулю слоение, аналогичное слоению Риба, но имеющее вместо торического слоя целый цилиндр $(S^1 \times \times S^1) \times I$, составленный из торических слоев $(S^1 \times S^1) \times t$. Лишь три года спустя Сержерэрту [334] удалось доказать кобордантность нулю настоящего слоения Риба, а также слоений, которые получатся, если функцию φ в определении слоения Риба заменить произвольной плоской функцией. (В промежутке Н. М. Мишачев доказал кобордантность нулю классического слоения Риба, но его работа осталась неопубликованной.) Теорема Сержерэрта была обобщена Фукуи [115] и Осикири [277], независимо доказавшими следующую теорему: пусть одно слоеное трехмерное многообразие получается из другого слоеного трехмерного многообразия перестройкой вдоль замкнутой трансверсали (слоение изменяется вдоль трансверсали наподобие рис. 5 и в приклеиваемой ручке доопределяется рибовской компонентой); тогда эти слоеные многообразия могут быть связаны слоеным кобордизмом.

5. Локально однородные слоения. Конструкции слоений, описанные в пп. 2—4, обобщают конструкцию Риба. Теперь мы опишем слоения, обобщающие обмотку тора. В отличие от слоений, построенных выше, эти слоения аналитичны. Идея рассматривать такие слоения принадлежит, вероятно, Руссари (см. [128, 47]). Они оказываются очень полезными для теории характеристических классов слоений (см. § 5).

Пусть G — группа Ли, H — ее связная подгруппа, Γ — ее дискретная подгруппа. Правые смежные классы gH составляют в G слоение, инвариантое относительно левого канонического действия Γ в G ($g \mapsto \gamma g$, $g \in G$, $\gamma \in \Gamma$). Вследствие этого образы множеств gH при проекции $G \to G/\Gamma$ составляют в G/Γ слоение размерности $\dim H$. Это слоение обозначается через $\mathscr{F}(G, H, \Gamma)$ и называется локально однородным слоением. Слои этого слоения диффеоморфны факторпространствам $H/(g\Gamma g^{-1} \cap H)$. Нормальное расслоение этого слоения тривиально и получает каноническую тривиализацию, если выбран базис в пространстве $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, где $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ — алгебры Ли групп G, H. Действительно, левые сдвиги группы G определяют изоморфизмы между каса-

тельными пространствами этой группы и пространством $\mathfrak{g}$ и между касательными пространствами смежных классов gH и пространством $\mathfrak{h}$; вследствие этого они определяют изоморфизмы между слоями нормального расслоения слоения $\{gH\}$ группы G и пространством $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$; эти изоморфизмы согласуются с действием группы Γ и превращаются в изоморфизмы между слоями нормального расслоения слоения $\mathcal{F}(G, H, \Gamma)$ и $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.

Если $G=\mathbf{R}\oplus\mathbf{R}$, $H\cong\mathbf{R}$ и $\Gamma=\mathbf{Z}\oplus\mathbf{Z}$, то $\mathcal{F}(G, H, \Gamma)$ есть обмотка тора. Если $G=SL(2, \mathbf{R})$, H есть подгруппа, составленная из верхних треугольных матриц с положительными диагональными элементами и Γ — дискретная подгруппа с компактным $SL(2, \mathbf{R})/\Gamma$, содержащая матрицу $-E$, то $\mathrm{SL}(2, \mathbf{R})/\Gamma$ есть многообразие единичных касательных векторов замкнутой поверхности постоянной отрицательной кривизны и $\mathcal{F}(G, H, \Gamma)$ есть «орициклическое слоение». (Два касательных вектора многообразия отрицательной кривизны принадлежат одному орициклу, если определяемые ими геодезические асимптотически сходятся; например, векторы, касающиеся одной и той же геодезической в одном направлении, принадлежат одному орициклу.) Подобное описание допускают и многие другие слоения $\mathcal{F}(G, H, \Gamma)$.

§ 3. КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ СЛОЕНИЙ

В этом параграфе речь пойдет о том, какими могут быть слои слоения (в основном, коразмерности 1) и как они могут подходить друг к другу. Излагаемые здесь работы имеют многочисленные взаимные связи, и разбиение параграфа на пункты носит приблизительный характер.

1. Теорема Риба об устойчивости. Так называется следующее предложение, доказанное в основополагающей работе Риба [302]:

Теорема. Пусть $\mathcal{F}$ — гладкое слоение коразмерности q, и пусть F — замкнутый слой слоения $\mathcal{F}$, фундаментальная группа которого конечна. Тогда всякая трубчатая окрестность слоя F содержит меньшую окрестность, составленную из целых слоев слоения $\mathcal{F}$ (или, как говорят, «насыщенную»), и слои, содержащиеся в этой окрестности, являются (по отношению к проекции трубчатой окрестности) конечнолистными накрывающими слоя F. В частности, если $\pi_1(F)=1$, то F обладает насыщенной окрестностью, слоение в которой диффеоморфно слоению $\{F\times t\}$ произведения $F\times D^q$.

Обобщение этой теоремы с компактных слоев на собственные слои (определение см. в п. 5) содержится в работе Инаба [167]. Следующее усиление теоремы Риба принадлежит Тэрстону [361]:

Теорема. Пусть $\mathcal{F}$ — гладкое слоение коразмерности q, и пусть F — его замкнутый слой. Если линейная голономия $\pi_1(F)\to GL(q, \mathbf{R})$ тривиальна и $H^1(F; \mathbf{R})=0$, то F обладает на-

сыщенной окрестностью, в которой слоение тривиально (сводится к расслоению).

Сакстедер [321] показал, что условие $H^1(F; \mathbf{R})=0$ не может быть выброшено из формулировки этой теоремы. Лангевин и Розенберг [206] показали, что условия, налагаемые теоремой Тэрстона на слоение, устойчивы по отношению к C^1-возмущениям слоения, и вывели из этого следующий факт.

Теорема. Пусть $E \to B$ — гладкое расслоение со слоем F, причем многообразия E, B, F замкнуты. Чтобы слоение, определяемое этим расслоением было C^1-устойчиво, необходимо и достаточно, чтобы $H^1(F; \mathbf{R})=0$.

Кстати, слово «устойчивый» в теории слоений имеет два смысла: (структурно) устойчивое слоение — это слоение, диффеоморфное всякому достаточно близкому к нему слоению, а устойчивый компактный слой — это слой, обладающий сколь угодно малой насыщенной окрестностью. Устойчивым в первом смысле слоениям посвящены статьи Руссари [319] и Розенберга — Руссари [316]. В каждой из них со своей стороны показано, что (структурно) устойчивые гладкие слоения коразмерности 1 на трехмерных многообразиях — явление довольно редкое. В [316] предлагается модифицированное определение устойчивости, при котором, напротив, почти все ориентируемые слоения коразмерности 1 оказываются устойчивыми.

2. Теорема Новикова о замкнутом слое. Следующая теорема доказана С. П. Новиковым [19].

Теорема. Пусть X — замкнутое трехмерное многообразие с гладким слоением $\mathcal{F}$ коразмерности 1. Предположим, что выполнено одно из следующих условий: (1) группа $\pi_1(X)$ конечна; (2) $\pi_2(X)\neq 0$; (3) существует замкнутая трансверсаль (замкнутая кривая в X, трансверсальная $\mathcal{F}$), гомотопная нулю; (4) у слоения $\mathcal{F}$ имеется такой слой F, что гомоморфизм включения $\pi_1(F)\to\pi_1(X)$ имеет нетривиальное ядро. Тогда $\mathcal{F}$ имеет замкнутый слой. Более того, во всех случаях, кроме (2), $\mathcal{F}$ включает рибовскую компоненту, а в случае (2) либо $\mathcal{F}$ включает рибовскую компоненту, либо все слои замкнуты и диффеоморфны S^2 или $\mathbf{R}P^2$.

Изложению теоремы Новикова посвящены статьи [174, 262, 263]. Ее доказательство имеется также в книге [355].

Было сделано несколько попыток перенести теорему Новикова на слоения с особенностями. Вагнер [381] (см. также [382]) рассмотрел слоения коразмерности 1 с морсовскими особенностями (т. е. локально устроенными как множества линий уровня функции с морсовскими особенностями) на S^3. Морсовские особенности бывают «сферическими» и «коническими». Пусть слоение имеет s сферических особенностей и c конических. Если $s=c$, слоение включает рибовскую компоненту. Если $s>c$, то $s=c+2$ и у такого слоения общего положения все неособые слои диффеоморфны S^2. В случае же $s<c$ слоение мо-

жет не иметь компактных слоев (такой пример привел Розенберг). Впоследствии Раймонд [299] доказал, что всякое замкнутое трехмерное многообразие обладает гладким слоением коразмерности 1 с особенностями, не имеющим компактных слоев.

Что касается слоений коразмерности >1 и слоений на многообразиях размерности >3, то информация о компактных слоях исчерпывается пока отрицательными результатами Швейцера.

Теорема. Если $\dim X \geqslant 5$ и X обладает гладким слоением коразмерности 1, то X обладает C^0-слоением коразмерности 1 без компактных слоев.

(Эта теорема анонсирована в статьях [325, 326, 327, 328]; ее доказательство, насколько мне известно, не опубликовано. Дополнение к этой теореме имеется в работе Раймонда [299] — см. ниже п. 5).

Теорема [324]. Если на гладком многообразии имеется какое-нибудь C^r-слоение коразмерности 2 с $r=0$, 1, то на нем имеется C^r-слоение коразмерности 2 без компактных слоев. Если на гладком многообразии имеется какое-нибудь C^r-слоение коразмерности $q \geqslant 3$ с $0 \leqslant r \leqslant \infty$, то на нем имеется C^r-слоение коразмерности q без компактных слоев.

К этим теоремам примыкает другой результат Швейцера, именно, пример одномерного слоения на S^3, не имеющего компактных слоев (см. [324], а также [312]); слои этого слоения имеют класс C^∞, но само оно имеет только класс C^1. Этот пример опровергает, в своем классе гладкости, известную гипотезу Зейферта.

Заметим еще, что проблема существования компактных слоев у комплексных алгебраических слоений рассматривается в статье Жуанолу [172].

3. Слоения коразмерности 1 на трехмерных многообразиях. Общая теория. Двумерные слоения на трехмерных многообразиях составляют классический предмет теории слоений; им посвящено особенно много работ. Результаты об этих слоениях собраны в этом пункте, последующих пунктах этого параграфа, а также в пп. 1.2, 2.2.

Мы уже упоминали о работах Вуда [388, 389, 390], завершившего начатое С. П. Новиковым, Ликоришем и Цишангом построение слоений коразмерности 1 на замкнутых трехмерных многообразиях. Кроме теоремы существования слоений, Вуд доказал также, что всякое трансверсально ориентируемое поле двумерных касательных плоскостей на трехмерном многообразии гомотопно интегрируемому полю. Эта теорема была частично распространена на случай слоений с особенностями. Именно, в статье [293] показано, что если ξ — гладкое векторное поле на компактном трехмерном многообразии X с морсовскими особенностями $a_1, \ldots, a_k$, среди которых сферических не больше, чем конических (ср. со сказанным о статье [381] в п. 2), то

поле ξ ∂X-гомотопно в классе полей с морсовскими особенностями в тех же точках полю η, для которого существует гладкая I-форма ω, удовлетворяющая условию интегрируемости $\omega\wedge d\omega=0$ и такая что $\omega(\eta)>0$ в $X\setminus(a_1,\ldots,a_k)$.

В 1975 г. Тэрстон [363] показал, что всякое (не обязательно трансверсально ориентируемое) поле двумерных плоскостей на замкнутом трехмерном многообразии гомотопно интегрируемому полю. Он показал также, что всякое одномерное слоение на крае компактного трехмерного многообразия продолжается до гладкого слоения коразмерности 1 во всем многообразии, трансверсального краю, и что компактное трехмерное многообразие, компоненты края которого отличны от S^2 и $\mathbf{R}P^2$, обладает гладким слоением, тривиальным на крае (ограничение на край происходит из теоремы Риба об устойчивости — см. п. 1).

4. **Топология слоев.** Параллельно с доказательством существования слоений на различных многообразиях специалисты по теории слоений пытались выяснить, какие многообразия могут быть слоями таких слоений и каким может быть взаимное расположение этих слоев. (Иногда это делалось в тех же работах; например, статья Мицутани [245], о которой шла речь в п. 1.4, содержит также перечисление топологических типов слоев построенных там слоений). Сначала эти вопросы задавались для трехмерных многообразий. В статье Лауденбаха и Руссари [208] построен пример гладкого слоения на S^3 с тремя рибовскими компонентами, осевые окружности которых попарно не зацеплены, но составляют нетривиальное зацепление; это слоение имеет слой, гомеоморфный плоскости с тремя выколотыми точками В работе Розерберга и Руссари [314] (см. также [317, 318]) доказано, что гладкое двумерное ориентируемое слоение на $S^1\times S^1\times$ $\times S^1$, все слои которого гомеоморфны $\mathbf{R}^2$, гомеоморфно двумерной обмотке тора. В работе тех же авторов [313] изучаются тривиальные на крае гладкие двумерные слоения на компактном трехмерном многообразии X, слои которого гомеоморфны плоскостям и торам (такие слоения авторы называют слоениями Риба; этот термин употребляется и в некоторых более поздних работах). Основные результаты: если каждая компонента края ∂X есть тор, и слои, лежащие внутри X, гомеоморфны $\mathbf{R}^2$, то X есть $S^1\times S^1\times S^1$, $S^1\times S^1\times I$ или $S\times D^2$ (при этом все такие слоения в $S\times D^2$ гомеоморфны между собой, а такие слоения в $S^1\times S^1\times I$ расклассифицированы в [66]); если все слои — плоскости и торы, то X есть $S^1\times D^2$, объединение двух полноториев, склеенных по краю, или пространство расслоения над S^1 или I со слоем $S^1\times S^1$. Жубер и Муссю [175] показали, что если замкнутое четырехмерное многообразие X обладает гладким слоением, все слои которого диффеоморфны $\mathbf{R}^3$, то X диффеоморфно $S^1\times S^1\times S^1\times S^1$. Впоследствии Расмуссен частично перенес эти результаты на многообразия старших размерностей

[296] (см. также [295]): он доказал, что если замкнутое многообразие размерности $n \geqslant 6$ обладает гладким слоением коразмерности 1, все слои которого диффеоморфны $\mathbf{R}^{n-1}$ или $(S^1)^i \times \times S^{n-i-1}$ с некоторым i, то это многообразие обладает подмногообразием, диффеоморфным $(S^1)^i \times S^{n-i-1}$ и разбивающим его на части, диффеоморфные $(S^1)^i \times D^{n-i}$.

В работах Палмейры [278, 279] изучаются гладкие слоения коразмерности 1 на n-мерных многообразиях со слоями, диффеоморфными $\mathbf{R}^{n-1}$ и замкнутыми в топологии тотального многообразия (такие слоения автор называет плоскими). Доказано, что если тотальное многообразие односвязно, то оно диффеоморфно $\mathbf{R}^n$, а слоение диффеоморфно произведению плоского слоения коразмерности 1 в плоскости на $\mathbf{R}^{n-2}$; такое слоение всегда является разбиением на траектории свободного действия группы $\mathbf{R}^{n-1}$.

Большое количество работ (стимулированных работой Новикова — см. п. 2), было посвящено изучению топологии компактных слоев слоений коразмерности 1. В работе Гудмана [132] доказано, что если $A_1, \ldots, A_r$ — попарно непересекающиеся замкнутые двумерные подмногообразия рода $\geqslant 1$ гладкого замкнутого трехмерного многообразия X и дополнение $X \setminus (A_1 \cup \ldots \cup A_r)$ связно, то $A_1, \ldots, A_r$ — слои некоторого слоения. Похожее утверждение, касающееся слоений коразмерности $\geqslant 2$ на многообразиях размерности $\geqslant 5$, доказано Голбусом [130]. Конлон и Гудман [73] показали, что если X — связное замкнутое трехмерное многообразие и k — наибольшее число элементов группы $H^1(X; \mathbf{Z})$ с нетривиальными попарными произведениями, то число различных топологических типов замкнутых слоев гладкого слоения коразмерности 1 на X не превосходит $k+1$ при $k=0$, 1 и $3k-2$ при $k \geqslant 2$. С другой стороны, те же авторы [72] доказали, что всякое гладкое слоение коразмерности 1 на замкнутом трехмерном многообразии гомотопно гладкому слоению, не имеющему компактных слоев, отличных от тора и бутылки Клейна. Далее, Гудман [133] доказал, что слои гладкого слоения коразмерности 1 в замкнутом трехмерном многообразии, не пересекаемые замкнутой трансверсалью, гомеоморфны тору или бутылке Клейна. В этой же статье приведен пример, показывающий, что слой, не пересекаемый замкнутой трансверсалью, может не разделять тотального многообразия. Слоям, разделяющим тотальное многообразие, специально посвящена другая статья Гудмана [134]. В ней доказано, что если гладкое слоение коразмерности 1 в замкнутом трехмерном многообразии обладает слоем, разделяющим тотальное многообразие, то слоение включает либо рибовскую компоненту, либо «цилиндрическую компоненту», которая определяется как слоение в многообразии с торическим краем, расслаивающееся над бутылкой Клейна со слоем I; слоями служат край и цилиндры, асимптотически приближающиеся к краю. Автор за-

мечает, что цилиндрическая компонента встречается в слоениях коразмерности 1 в трехмерных многообразиях не реже, чем рибовская компонента. Эта компонента фигурирует также в работе Эктора [149], в которой перечисляются типы гладких слоений коразмерности 1 на компактных трехмерных многообразиях, у которых не все слои компактны и все некомпактные слои гомеоморфны $S^1 \times \mathbf{R}$. Наконец, в работе Кантвелла и Конлона [58] доказано, что если F_1 и F_2 — компактные слои гладкого ориентированного слоения $\mathcal{F}$ коразмерности 1 на замкнутом трехмерном многообразии и род поверхности F_1 превосходит род поверхности F_2, то $\mathcal{F}$ обладает замкнутой трансверсалью, пересекающей F_1 и не пересекающей F_2. Из этого и из результатов Тэрстона, о которых речь пойдет в п. 4.4, выводится, что если замкнутое трехмерное многообразие X допускает неразбивающее вложение поверхности рода $g \geqslant 1$, то X обладает гладким ориентируемым слоением коразмерности 1 с замкнутым слоем рода g.

Несколько статей ([57, 59, 273, 275, 276, 343]) посвящены топологии некомпактных слоев слоений, в частности, концам этих слоев. О некоторых из этих работ будет подробнее сказано в пп. 5, 6.

Наконец, некоторые ограничения на гомотопические типы слоев слоения содержит статья Ламуро [200]. В ней рассматривается ориентируемое слоение $\mathcal{F}$ коразмерности 1 (не предполагаемое гладким) на связном многообразии X без края, не предполагаемом компактным. Доказывается, что если при некотором $k \geqslant 2$ группа $H_k(X)$ содержит нетривиальный сферический класс, то у $\mathcal{F}$ имеется слой F, такой что одна из групп $\pi_1(F)$, $H_{k-1}(F)$, $H_k(F)$ нетривиальна. Если при некотором $k \geqslant 2$ группа $\pi_k(X)$ нетривиальна, то у $\mathcal{F}$ имеется слой F, такой, что группа $\pi_l(F)$ с некоторым $l \leqslant k$ нетривиальна. Таким образом, если универсальная накрывающая над X не стягиваема, то $\mathcal{F}$ обладает нестягиваемым слоем.

5. Собственные, локально плотные и исключительные слои. Исключительные минимальные множества. Слой слоения коразмерности 1 называется собственным, если его включение в тотальное многообразие является топологическим вложением, локально плотным, если его замыкание имеет внутренние точки, и исключительным, если он не является ни собственным, ни локально плотным. В статье с полемическим названием «Исключительные слои не исключительны» [315] Розенберг и Руссари доказали, что всякое трехмерное многообразие обладает гладким слоением коразмерности 1, среди слоев которого имеются исключительные. Построению слоений, в которых типы слоев сильно перемешаны, посвящены статьи Эктора [143 и 148]. В других статьях Эктора [145 и 147] доказано, что тотальное многообразие ориентированного аналитического слоения коразмерности 1 покрывается насыщенными множествами, в кото-

рых слоение обладает одним из двух свойств: является расслоением над окружностью или составлено из плотных слоев. Наконец, в статье Эктора [144] доказано, что если A — минимальный элемент семейства подмножеств компактного многообразия, составленного из насыщений замкнутых трансверсалей ориентируемого аналитического слоения коразмерности 1, то A не содержит исключительных слоев. К этому результату примыкает теорема Муссю и Руссари [266], утверждающая, что если $\mathcal{F}$ — гладкое слоение коразмерности 1 на замкнутом многообразии X с коммутативной фундаментальной группой и включения слоев в X индуцируют мономорфизмы фундаментальных групп, то всякое замкнутое насыщенное множество либо имеет внутреннюю точку, либо содержит компактный слой. При близких предположениях Гарансон [118] доказал, что всякий слой с ненулевой группой голономий замкнут.

В работе Ламуро [192] доказано, что если гладкое слоение коразмерности 1 на открытом трехмерном многообразии обладает замкнутой трансверсалью, пересекающей все слои и представляющей в фундаментальной группе элемент конечного порядка, то слоение имеет несобственный слой, в группе голономий которого присутствует элемент бесконечного порядка. В статье [194] Ламуро получил достаточное условие (в терминах голономии) для того, чтобы данный слой слоения коразмерности 1 был собственным и его предельное множество состояло из компактных слоев. В работах Ямато [391, 392] получены достаточные условия замкнутости или плотности слоев слоения, определяемого 1-формой ω; условия касаются поведения формы ω вблизи точек, в которых $d\omega=0$.

Статьи Ламуро [195, 196, 197, 201, 202] посвящены явлению «захвата». Говорят, что слой F_1 гладкого слоения коразмерности 1 захватывает слой F_2 этого слоения, если F_2 содержит неограниченную (в одну сторону) кривую, которая в топологии тотального многообразия наматывается на замкнутую кривую, лежащую в F_1. Автором найдены различные условия, достаточные для того, чтобы всякий некомпактный собственный или исключительный слой был захваченным. Оказывается, что захват тесно связан с перечислением минимальных насыщенных замкнутых множеств (говорят короче: минимальных множеств). Например, оказывается, что если всякий исключительный слой захвачен, то слоение имеет лишь конечное число минимальных множеств.

Минимальное множество называется исключительным, если оно не совпадает с тотальным многообразием и состоит более, чем из одного слоя. Пример слоения на трехмерном многообразии с исключительным минимальным множеством привел еще в 60-е годы Сакстедер. Хирш [161] доказал, что для любого $n\geqslant3$ существует n-мерное замкнутое многообразие с C^1-устойчивым аналитическим слоением коразмерности 1, которое имеет

единственное исключительное минимальное множество и не имеет других минимальных множеств. Ряд результатов, касающихся исключительных минимальных множеств, содержит уже упоминавшаяся работа Раймонда [299]: всякое замкнутое трехмерное многообразие обладает гладким слоением коразмерности 1, имеющим исключительные минимальные множества; при любом $q \geqslant 2$ сфера S^{2q+1} обладает слоением коразмерности 1 класса C^0 без замкнутых слоев и с наперед заданным конечным ненулевым числом исключительных минимальных множеств (ср. с теоремой Швейцера из п. 2). Другие результаты об исключительных минимальных множествах приводятся в п. 6.

Упомянем также статью Нисимори [275], в которой вводится понятие глубины слоения. Так называется максимальная длина цепочки $F_1, \ldots, F_k$ попарно различных слоев с $F_1 \subset \bar{F}_2, \ldots, F_{k-1} \subset \bar{F}_k$. В статье обсуждается связь глубины с группами голономий.

Заметим в заключение, что о некоторых результатах, примыкающих к результатам этого пункта, речь пойдет в п. 6.1, посвященном слоениям без голономии.

6. Рост слоев и фундаментальных групп. Пусть F — слой гладкого слоения коразмерности 1 на замкнутом многообразии. Фиксируем риманову метрику на тотальном многообразии (она индуцирует риманову метрику на F) и точку $x \in F$. Порядок роста функции, относящей числу $t > 0$ объем шара радиуса t с центром x на F, не зависит ни от метрики, ни от x, и называется порядком роста самого слоя. В статье Планта [284] устанавливается, что если слой F не пересекается замкнутой трансверсалью, то функция, относящая числу $t > 0$ число элементов фундаментальной группы тотального многообразия, представляемых петлями длины $\leqslant t$, имеет рост, не более медленный, чем слой F.

В дальнейших работах Планта обнаружена связь между скоростью роста слоев слоения и характером его минимальных множеств. В статье [286] доказано, что все слои, содержащиеся в исключительном минимальном множестве, имеют экспоненциальный рост. В числе следствий из этого утверждения имеется такое остроумное наблюдение: если гладкое слоение коразмерности 1 на замкнутом многообразии не имеет компактных слоев и имеет два не диффеоморфных друг другу слоя, то некоторый слой этого слоения имеет экспоненциальный рост. В более ранней работе [285] Плант рассматривал слоения коразмерности 1, удовлетворяющие несколько измененному условию ограниченности роста: отношение объема границы шара на слое к объему этого шара стремится к нулю, если радиус шара стремится к бесконечности (при фиксированном центре). При этом условии и условии равенства нулю первого числа Бетти тотального многообразия доказывается, что исключительные минимальные множества отсутствуют. Связь между

ростом слоев и минимальными множествами обсуждается также в статье Муссю и Пелетье [268].

В теории групп есть свое понятие роста: скорость роста конечнопорожденной группы определяется как скорость роста функции, относящей числу n число элементов группы, представимых через фиксированную конечную систему образующих словами длины $\leqslant n$. В работе Планта и Тэрстона [290], посвященной, главным образом, этому алгебраическому понятию, доказаны и некоторые теоремы, касающиеся слоений. Например, доказано, что если ориентируемое гладкое слоение коразмерности 1 на замкнутом многообразии с фундаментальной группой полиномиального роста не имеет замкнутых трансверсалей, гомотопных нулю, то все группы голономий слоев этого слоения абелевы.

В работах Кантвелла и Конлона [59, 60, 61] изучается связь между ростом слоев и их концами. В статье [60] вводится понятие типа слоя: через $E(F)$ обозначается топологическое пространство концов слоя F, через $E_1(F)$ — множество неизолированных точек пространства $E(F)$, через $E_2(F)$ — множество неизолированных точек множества $E_1(F)$ и т. д. Говорят, что слой F имеет тип k, если множество $E_k(F)$ непусто и конечно. Авторы доказывают, что слой полиномиального роста степени $\leqslant r$ имеет тип $\leqslant r$. Это позволяет построить пример слоения, один из слоев которого имеет рост быстрее любого полиномиального, но медленнее экспоненциального. (Пример такого слоения, обладающего к тому же некоторыми дополнительными интересными свойствами, привел также Эктор [150].) В статье [61] доказано, что всякая двумерная поверхность конечного роста реализуется как слой гладкого слоения на замкнутом трехмерном многообразии (при этом можно добиться, чтобы это слоение не имело исключительных минимальных множеств). В статье [59] доказано, что поверхность, гомеоморфная $\mathbb{R}^2\setminus K$, где K — канторово множество, также может быть слоем слоения на замкнутом трехмерном многообразии, но этот слой обязательно имеет экспоненциальный рост.

7. Другие работы. Значительное количество работ посвящено «слоеным расслоениям», т. е. гладким расслоениям, наделенным слоением тотального многообразия размерности, равной размерности базы, и трансверсальным слоям расслоения. Большинство из этих работ относится к теории характеристических классов слоений, и мы познакомимся с ними в § 5. Здесь мы упомянем несколько чисто геометрических работ. В статье Планта [287] доказно, что если база, слой и тотальное пространство слоеного расслоения связаны, ориентируемы и компактны, и его слой гомологичен нулю в тотальном пространстве, то фундаментальная группа базы имеет экспоненциальный рост. В работе Хирша и Тэрстона [162] (см. также [160]) при надлежащих ограничениях на структурную группу слоеного рас-

слоения доказано, что естественное отображение когомологий базы в когомологии тотального пространства является мономорфизмом. В статье Ж. Левитта [222] приводится достаточное условие для того, чтобы гладкое слоение коразмерности 1, заданное в пространстве расслоения со слоем окружность над замкнутой двумерной поверхностью, было изотопно слоению, трансверсальному слоям расслоения. Наконец, в работе Цубоя [367] доказано, что расслоение со слоем окружность над замкнутым связным многообразием B с $H_1(B;\ \mathbf{R})\neq 0$ тогда и только тогда может быть сделано слоеным, когда оно ориентируемо и его эйлеров класс порождает группу $\mathrm{Tors}\, H^2(B;\ \mathbf{Z})$ (часть «только тогда» не требует предположения $H_1(B;\ \mathbf{R})=0$).

В статье Сулливана [345] показано, что для эйлерова класса слоеного векторного или аффинного расслоения с данной компактной базой имеется лишь конечное число возможностей.

В статье Левина и Шуба [221] показано, что в определенном смысле голономия компактного слоя слоения коразмерности 1 топологически (не дифференциально) определяет слоение вблизи этого слоя.

В статье Франкса [106] построены два интересных одномерных слоения в плоской области: C^∞-слоение, у которого каждый слой плотен, и C^1-слоение с исключительным минимальным множеством.

В статье Ламуро [203] изучается поведение слоев гладкого слоения коразмерности 1 с дополнительной структурой: задано отображение компактной двумерной поверхности в тотальное многообразие, причем компоненты края отображаются либо в замкнутые трансверсали, либо в петли, лежащие на слоях. В статьях Нисимори [274] и Икегами [165] изучается поведение слоения в окрестности компактного слоя с абелевой группой голономий. В статье Дипполито [86] предлагается конструкция, позволяющая разбить тотальное многообразие слоения коразмерности 1 на части, в которых слоение устроено более или менее стандартным образом. В статье Лангевина и Розенберга [207] доказано, что слоение, C^1-близкое к гладкому расслоению $E\to B$ со слоем F, у которого E, B, F замкнуты и $\pi_1(F)=\mathbf{Z}$, при некоторых дополнительных условиях сохраняет при C^1-возмущениях хотя бы один компактный слой (ср. с теоремой тех же авторов из п. 1). В работе Дезолно-Мули [185] аналогичная проблема рассматривается для C^1-возмущений слоения $\{y\times S^1\times S^1\}$ в произведении $S^2\times S^1\times S^1$.

В работе В. В. Солодова [22] приведены геометрические условия, необходимые и достаточные для того, чтобы гладкое слоение коразмерности 1 на замкнутом трехмерном многообразии превращалось при переходе к универсальной накрывающей в множество линий уровня регулярной функции. Доказывается также, что слоения с этим свойством могут быть перестройками вдоль трансверсалей превращены в слоение на S^3. В статьях

Дэвиса и Вилсона [83, 386] исследуется вопрос о существовании векторного поля без особенностей, касающегося слоения коразмерности 1 на трехмерном многообразии. В [83] изучаются свойства векторных полей, касающихся слоения Риба. В [386] обнаружено, что классические приемы построения гладких слоений на замкнутых трехмерных многообразиях довольно редко приводят к слоениям, имеющим касательное векторное поле без особенностей: проблема существования такого поля сводится к системе диофантовых уравнений. Вопрос о существовании на произвольном трехмерном многообразии слоения коразмерности 1 с касательным векторным полем без особенностей остается открытым.

§ 4. КЛАССИФИКАЦИЯ СЛОЕНИЙ (ТЕОРИЯ ХЕФЛИГЕРА—ТЭРСТОНА)

Алгебраизации теории слоений препятствует, прежде всего, отсутствие универсального индуцирования: индуцированное слоение $f^*\mathcal{F}$ определено только при условии, что f трансверсально $\mathcal{F}$ (см. п. 1.2). Если последнее не выполнено, конструкция индуцирования не приводит к слоению, хотя сохраняет некоторый геометрический смысл; ее результат в этом случае естественно считать слоением с особенностями. Это позволяет надеяться, что теория слоений с особенностями окажется алгебраически более благоустроенной, чем теория слоений.

Эта идея оказалась в теории слоений очень плодотворной. Она принадлежит Андрэ Хефлигеру, и появляющиеся при ее реализации «слоения с особенностями» носят название хефлигеровских структур.

1. Определение хефлигеровской структуры. Моделью для этого определения служит атлас слоения (см. п. 1.7). Переход от атласа слоения к атласу хефлигеровской структуры состоит в отбрасывании требования, чтобы отображения φ_i были субмерсиями. Правда, это отбрасывание имеет одно нежелательное последствие: пока отображения φ_i — субмерсии, диффеоморфизмы ψ_x(точнее, их ростки) по ним однозначно восстанавливаются; если же φ_i — не субмерсии, налагаемые на диффеоморфизмы ψ_x условия оставляют для них некоторую свободу выбора. Поэтому при определении хефлигеровской структуры приходится не просто требовать, чтобы диффеоморфизмы ψ_x существовали, а фиксировать их как элементы структуры, приняв их свойства за аксиомы. Чтобы сформулировать эти аксиомы, удобно привлечь группоид $\Gamma(\mathbb{R}^q)$. Это — множество ростков (C^∞)-диффеоморфизмов между открытыми подмножествами пространства $\mathbb{R}^q$, наделенное частичным умножением (компонированием) и пучковой топологией. Ясно, что пространство $\Gamma(\mathbb{R}^q)$ является q-мерным гладким нехаусдорфовым (при $q>0$) многообразием, а частичное умножение в $\Gamma(\mathbb{R}^q)$ непрерывно и

даже гладко. Имеются естественные гладкие проекции $s, t: \Gamma(\mathbf{R}^q) \to \mathbf{R}^q$ (источник и устье) и естественное гладкое вложение $\eta: \mathbf{R}^q \to \Gamma(\mathbf{R}^q)$, относящее точке пространства $\mathbf{R}^q$ росток тождественного диффеоморфизма в этой точке; образ этого вложения совпадает с множеством единиц группоида $\Gamma(\mathbf{R}^q)$.

Определение. Атлас хефлигеровской структуры коразмерности q на топологическом пространстве X — это открытое покрытие $\{U_i\}$ пространства X, наделенное непрерывными отображениями $\psi_{ij}: U_i \cap U_j \to \Gamma(\mathbf{R}^q)$ с $\psi_{ik}(x) = \psi_{ij}(x)\psi_{jk}(x)$ при $x \in U_i \cap U_j \cap U_k$. Случай $i = j$ при этом не исключается; очевидно, образ отображения $\psi_{ii}: U_i \to \Gamma(\mathbf{R}^q)$ содержится в $\eta(\mathbf{R}^q)$ и можно рассматривать ψ_{ii} как отображение в $\mathbf{R}^q$. Два атласа называются эквивалентными, если они являются податласами третьего атласа. Класс эквивалентных атласов называется хефлигеровской структурой коразмерности q на X.

Очевидная модификация этого определения дает определение гладкой хефлигеровской структуры: нужно потребовать, чтобы X было гладким многообразием и чтобы все ψ_{ij} были гладкими отображениями, а в определение эквивалентности атласов включить требование, чтобы и третий атлас был гладким. Если включить в определение атласа хефлигеровской структуры требование, чтобы образы отображений ψ_{ij} состояли из ростков сохраняющих ориентацию, комплексно аналитических, канонических, контактных и т. д. диффеоморфизмов, то получится определение ориентированной, комплексно аналитической, симплектической, контактной и т. д. хефлигеровской структуры.

Если $\{U_i, \psi_{ij}\}$ — атлас хефлигеровской структуры коразмерности q на пространстве X, то отображения $U_i \cap U_j \to GL(q, \mathbf{R})$, относящие точке $x \in U_i \cap U_j$ матрицу дифференциала $d\psi_{ij}(x)$, определяют q-мерное векторное расслоение с базой X. Это расслоение не меняется при замене атласа эквивалентным, называется нормальным расслоением хефлигеровской структуры, определяемой этим атласом, и обозначается через $\nu(\mathscr{H})$, если $\mathscr{H}$ — обозначение структуры. Для гладкой хефлигеровской структуры $\mathscr{H}$ на многообразии X имеется естественное линейное отображение касательного расслоения $\tau(X)$ многообразия X в $\nu(\mathscr{H})$: касательному вектору v, приложенному в точке $x \in X$, отвечает образ точки $(x, d\psi_{ii}(v)) \in U_i \times \mathbf{R}^q$ при каноническом вложении произведения $U_i \times \mathbf{R}^q$ в тотальное пространство расслоения $\nu(\mathscr{H})$ (мы считаем ψ_{ii} отображением в $\mathbf{R}^q$).

Очевидно, ориентированная хефлигеровская структура — это хефлигеровская структура с ориентированным нормальным расслоением. Хефлигеровская структура называется оснащенной или почти комплексной, если ее нормальное расслоение тривиализовано или наделено комплексной структурой.

Если $\{U_i, \psi_{ij}\}$ — атлас хефлигеровской структуры $\mathscr{H}$ на X и $f: Y \to X$ — непрерывное отображение, то $\{f^{-1}(U_i), y \to$

$\to\psi_{ij}(f(y))\}$ есть атлас некоторой хефлигеровской структуры той же коразмерности на Y. Последняя называется индуцированной $\mathscr{H}$ посредством f и обозначается через $f^*\mathscr{H}$; подчеркнем, что относительно f не предполагается ничего, кроме непрерывности.

Определение конкордантных хефлигеровских структур повторяет, с очевидными изменениями, определение конкордантных слоений. Очевидно, у конкордантных хефлигеровских структур нормальные расслоения эквивалентны и связаны канонической, с точностью до гомотопии, эквивалентностью. Ясно, что если $\mathscr{H}$ — хефлигеровская структура на X и f, $g: Y\to X$ — гомотопные отображения, то структуры $f^*\mathscr{H}$, $g^*\mathscr{H}$ конкордантны.

2. Связь со слоениями. Очевидно, гладкое слоение определяет гладкую хефлигеровскую структуру той же коразмерности, но не всякая, даже гладкая, хефлигеровская структура так получается. Впрочем, произвольная хефлигеровская структура сохраняет геометрическое сходство со слоением. Разбиения множеств U_i на компоненты прообразов точек при отображениях $\psi_{ii}: U_i\to\mathbb{R}^q$ согласованы в пересечениях $U_i\cap U_j$, и из них можно составить разбиение пространства X на слои. (Это разбиение и позволяет считать хефлигеровскую структуру слоением с особенностями). Однако, по этому разбиению, вообще говоря, нельзя восстановить хефлигеровскую структуру (в этом ее важное отличие от слоения). Может, например, оказаться, что образы всех отображений ψ_{ij} лежат в множестве $s^{-1}(0)\cap t^{-1}(0)$ (в группе ростков диффеоморфизмов с источником 0 и устьем 0). В этом случае, очевидно, слой один — все X, — а структура может быть нетривиальной (может быть нетривиальным даже ее нормальное расслоение). Кстати, тривиальная хефлигеровская структура определяется атласом, составленным из единственной карты (все X) и постоянного отображения $\psi_{11}: X\to\Gamma(\mathbb{R}^q)$ со значением $\eta(0)$.

Если гладкая хефлигеровская структура $\mathscr{H}$ определяется слоением $\mathscr{F}$, то нормальное расслоение $\nu(\mathscr{H})$ совпадает с $\nu(\mathscr{F})$, а проекция $\tau(X)\to\nu(\mathscr{H})$ — с канонической проекцией $\tau(X)\to\tau(X)/\tau(\mathscr{F})$. (Кстати, заметим, что для произвольной гладкой хефлигеровской структуры проекция $\tau(X)\to\nu(\mathscr{H})$, вообще говоря, не эпиморфна, и это препятствует определению касательного расслоения хефлигеровской структуры.) Ясно также, что ориентированное, оснащенное, комплексно аналитическое и т. д. слоение определяет ориентированную, оснащенную, комплексно аналитическую и т. д. хефлигеровскую структуру и что конкордантность и операция индуцирования при переходе от слоений к хефлигеровским структурам сохраняется.

Теорема [138]. Пусть $\mathscr{H}$ — хефлигеровская структура на конечном клеточном пространстве X. Тогда существует гладкое многообразие Y со слоением $\mathscr{F}$ и гомотопической эквивалентностью $f: X\to Y$, такое, что $f^*\mathscr{F}=\mathscr{H}$.

3. Классифицирующее пространство. Обозначим через Hf^q контравариантный функтор из категории клеточных пространств в категорию множеств, относящий клеточному пространству X множество классов конкордантных клеточных структур на X.

Теорема ([138, 139]). При любом $q>0$ существует клеточное пространство $B\mathrm{Hf}^q$ с хефлигеровской структурой $\mathcal{U}_q$ коразмерности q, такое что для всякого клеточного пространства X сопоставление $f \mapsto f^* \mathcal{U}_q$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством $\pi(X, B\mathrm{Hf}^q)$ гомотопических классов отображений $X \to B\mathrm{Hf}^q$ и множеством $\mathrm{Hf}^q(X)$.

Пространства $B\mathrm{Hf}^q$ называются хефлигеровскими классифицирующими пространствами. Строятся также классифицирующие пространства $B\mathrm{Hf}^q_+$, $B\mathrm{Hf}^q_{\mathrm{fr}}$ и т. д. для ориентированных, оснащенных и т. д. хефлигеровских структур. Имеются очевидные главные расслоения $B\mathrm{Hf}^q_{\mathrm{fr}} \to B\mathrm{Hf}^q_+ \to B\mathrm{Hf}^q$ со слоями $SO(q)$, $\mathbf{Z}_2$.

Явные конструкции хефлигеровского классифицирующего пространства приведены в обзорных статьях [27 и 47]. Эти конструкции, конечно, не новы: в сущности, $B\mathrm{Hf}^q$ есть классифицирующее пространство топологического группоида $\Gamma(\mathbf{R}^q)$. Кстати, в статье [333], среди прочего, доказано, что $B\mathrm{Hf}^q$ есть также классифицирующее пространство дискретного моноида гладких вложений $\mathbf{R}^q \to \mathbf{R}^q$.

4. Классификация слоений. Если на n-мерном многообразии X задано слоение $\mathcal{F}$ коразмерности q, то на X возникают хефлигеровская структура коразмерности q и $(n-q)$-мерное векторное расслоение — касательное к $\mathcal{F}$. Эти два объекта определяют гомотопический класс отображений $X \to B\mathrm{Hf}^q \times \times BO(n-q)$. Более того, диаграмма

$$\begin{tikzcd} & B\mathrm{Hf}^q \times BO(n-q) \arrow[d, "\sigma"] \\ X \arrow[ur] \arrow[r, "\tau"'] & BO(n), \end{tikzcd}$$

в которой τ определяется касательным расслоением многообразия X, а σ представляет собой композицию естественных отображений $B\mathrm{Hf}^q \times BO(n-q) \to BO(q) \times BO(n-q)$ и $BO(q) \times \times BO(n-q) \to BO(n)$, гомотопически коммутативна. Эта диаграмма может быть сделана даже коммутативной, если σ есть расслоение Серра; последнее условие мы будем считать выполненным. Итак, слоение коразмерности q на X определяет поднятие $X \to B\mathrm{Hf}^q \times BO(n-q)$ отображения $\tau: X \to BO(n)$, и ясно, что гомотопический класс такого поднятия определяется классом конкордантности слоения.

Теорема. Возникающее отображение

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{множество классов}\\ \text{конкордантных слоений}\\ \text{коразмерности } q \text{ на } X\end{array}} \to \boxed{\begin{array}{c}\text{множество гомотопических}\\ \text{классов поднятий}\\ X \to B\,\mathrm{Hf}^q \times BO(n-q)\\ \text{отображения } \tau: X \to BO(n)\end{array}}$$

является взаимно однозначным соответствием.

Эта теорема является в теории слоений одним из главных достижений последнего десятилетия. Она доказывалась в три этапа. В 1970 г. Хефлигер доказал ее для открытых многообразий [138]. Затем в 1974 г. Тэрстон распространил ее на случай замкнутых многообразий при $q \geqslant 2$ (см. [360, 362, 364]). Наконец, в 1976 г. Тэрстон завершил доказательство теоремы, показав, что ее утверждение верно и для слоений коразмерности 1 на замкнутых многообразиях (см. [365]).

Открытый случай этой теоремы является почти автоматическим следствием предложения, которое Хефлигер называет теоремой Громова — Филлипса. Последняя предполагает заданным гладкое многообразие X со слоением $\mathcal{F}$ и открытое гладкое многообразие Y. Обозначим через $\mathrm{Tr}(Y, \mathcal{F})$ пространство C^∞-отображений $Y \to X$, трансверсальных $\mathcal{F}$, и через $\mathrm{Epi}(\tau(Y), \nu(\mathcal{F}))$ пространство послойных эпиморфизмов $\tau(Y) \to \nu(\mathcal{F})$. Теорема утверждает, что естественное отображение (дифференциал) $\mathrm{Tr}(Y, \mathcal{F}) \to \mathrm{Epi}(\tau(Y), \nu(\mathcal{F}))$ является слабой гомотопической эквивалентностью. Частный случай этого утверждения доказан в 1967 г. Филлипсом (см. [282]), и значительно более общий факт установлен в 1969 г. М. Л. Громовым [12]. Укажем также на статью [121], в которой содержится C^0-версия теоремы Громова — Филлипса.

Работа Тэрстона [360] наряду с доказательством теоремы для слоений коразмерности $\geqslant 2$ содержит сильные относительные формулировки и ряд важных следствий. Например:

Теорема. Если n-мерная сфера обладает касательным полем q-мерных плоскостей с $q \leqslant n/2$, то она обладает гладким слоением коразмерности q.

Теорема. Всякое гладкое двумерное распределение на многообразии любой размерности гладко гомотопно интегрируемому распределению.

Новое, более прозрачное доказательство теоремы Тэрстона из статьи [360] содержит статья Мишачева и Элиашберга [18]. В этой статье доказывается также несколько новых теорем. Вот наиболее значительная из них. Если гладкие слоения $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ на замкнутом многообразии X конкордантны и существует такая конкордантность $\mathcal{H}$ (в $X \times I$), что дифференциалы вложений $X = X \times 0 \to X \times I$, $X = X \times 1 \to X \times I$ гомотопны в классе гомоморфизмов, трансверсальных к $\mathcal{H}$, то слоения $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ гомотопны.

В основе доказательства основной теоремы этого пункта для слоений коразмерности 1 [365] лежит более или менее явная

конструкция, использующая теорему Азимова о «круглых ручках» [37]. Относительный вариант теоремы в случае коразмерности 1 формулируется довольно сложно и не отвечает на многие естественные вопросы (как, например, на вопрос о кобордантности нулю слоения Риба — см. п. 2.4). Хорошее изложение главного следствия из теоремы Тэрстона — теоремы о существовании слоения коразмерности 1 на замкнутом многообразии с нулевой эйлеровой характеристикой — содержится в докладе Руссари на семинаре Бурбаки [320].

Некоторые части теоремы Тэрстона были независимо от него доказаны другими авторами (см., например, [129, 356]).

Следующее дополнение к теореме Тэрстона содержится в работах Кошорке [190, 191].

Теорема. Если $q \geqslant 1$ и $n \geqslant 2q-2$, то всякое поле q-мерных касательных плоскостей на замкнутом n-мерном многообразии кобордантно полю плоскостей, трансверсальному некоторому слоению коразмерности q. Если данное поле плоскостей трансверсально ориентируемо, то соответствующее условие ориентируемости может быть наложено на кобордизм.

5. Гомологические эквивалентности. В 1971 г. Мезер ([229], [231]) доказал, что пространство петель хефлигеровского классифицирующего пространства $B\mathrm{Hf}^1_+$ имеет такие же целочисленные когомологии как классифицирующее пространство группы $(\mathrm{Diff}^c\, \mathbf{R})^\delta$ финитных (т. е. тождественных вне компактного множества) диффеоморфизмов прямой, рассматриваемой как дискретная группа. Более точная формулировка такова. Пространство $B(\mathrm{Diff}^c\, \mathbf{R})^\delta$ является базой расслоения со слоем $\mathbf{R}$, задаваемым атласом, функции перехода которого принимают значения в $(\mathrm{Diff}^c\, \mathbf{R})^\delta$, т. е. локально постоянны и принимают значения в финитных диффеоморфизмах. Топологически это расслоение тривиально, а локальное постоянство функций перехода определяет в его тотальном пространстве $B(\mathrm{Diff}^c\, \mathbf{R})^\delta \times \mathbf{R}$ ориентированное слоение (точнее, ориентированную хефлигеровскую структуру) коразмерности 1, тривиальное вне некоторого компактного по каждому слою $x \times \mathbf{R}$ множества A. Тем самым определено отображение $B(\mathrm{Diff}^c\, \mathbf{R})^\delta \times \mathbf{R} \to B\mathrm{Hf}^1_+$, которое переводит A в отмеченную точку. Сужение этого отображения на слой $x \times \mathbf{R}$ определяет петлю в $B\mathrm{Hf}^1_+$ и сопоставление этой петли с x определяет некоторое отображение

$$B(\mathrm{Diff}^c\, \mathbf{R})^\delta \to \Omega B\mathrm{Hf}^1_+.$$

Теорема Мезера утверждает, что это отображение индуцирует изоморфизм в целочисленных гомологиях.

Впоследствии Тэрстон [359] обобщил эту теорему, доказав, что для любого n пространство $\Omega^n B\mathrm{Hf}^n_{fn}$ имеет такие же цело-

численные гомологии как $B(\mathrm{Diff}^c\mathbf{R}^n)^\delta$; работа Тэрстона содержит еще более общую формулировку, в которой $\mathbf{R}^n$ заменено произвольным гладким многообразием. Статья Фукса [25] содержит геометрическую интерпретацию результатов Мезера — Тэрстона, позволяющую формулировать их, не привлекая таких громоздких объектов как хефлигеровские классифицирующие пространства и классифицирующие пространства дискретных групп диффеоморфизмов. Новые доказательства части результатов Мезера — Тэрстона содержат работы Роже [310] и Солодова [21]. Изложению работ Мезера — Тэрстона посвящен доклад Сержерэрта на семинаре Бурбаки [335]. Еще некоторые гомологические эквивалентности в том же духе получены в работах Сигала [333] и Солодова [22].

Гомологические эквивалентности Мезера — Тэрстона позволяют продвинуться в вычислении гомотопических групп хефлигеровских классифицирующих пространств. Уже в статье Хефлигера [138] было доказано, что $\pi_r(B\mathrm{Hf}^n_{\mathrm{fr}})=0$ при $r\leqslant n$ (ввиду наличия расслоений $B\mathrm{Hf}^n_{\mathrm{fr}}\to B\mathrm{Hf}^n$ и $B\mathrm{Hf}^n_{\mathrm{fr}}\to B\mathrm{Hf}^n_+$ со слоями $O(n)$ и $SO(n)$, это доставляет информацию и о гомотопических группах других хефлигеровских пространств). Теоремы же Мезера — Тэрстона показывают, что группа $\pi_{n+1}(B\mathrm{Hf}^n_{\mathrm{fr}})$ совпадает с $H_1(B(\mathrm{Diff}^c\mathbf{R}^n)^\delta)$, т. е. с

$$\mathrm{Diff}^c\mathbf{R}^n/[\mathrm{Diff}^c\mathbf{R}^n, \mathrm{Diff}^c\mathbf{R}^n].$$

Вычислению этой и других подобных факторгрупп посвящены работы Мезера [232, 233, 234, 235]. Им доказано, что группа C^r-диффеоморфизмов n-мерного C^r-многообразия совпадает со своим коммутантом за исключением, возможно, случая $r=n+1$; на этот случай, насколько мне известно, теорема Мезера так и не распространена. Из этих теорем Мезера и из более ранних результатов Эпстейна [94] следует, что указанные группы диффеоморфизмов являются простыми.

Таким образом, $\pi_{n+1}(B\mathrm{Hf}^n_{\mathrm{fr}})=0$. (Заметим, что равенство $\pi_2(B\mathrm{Hf}^1_+)=0$ независимо от Мезера доказал Роже [309].) Несколькими авторами высказывалась гипотеза, что $\pi_r(B\mathrm{Hf}^n_{\mathrm{fr}})=0$ при $r\leqslant 2n$.

В другой работе Мезера [230] доказано, что у дискретной группы автогомеоморфизмов пространства $\mathbf{R}^n$ с компактными носителями тривиальны все гомологические группы и что классифицирующее пространство для C^0-слоений стягиваемо.

Гомотопические группы классифицирующего пространства для ориентированных аналитических слоений коразмерности 1 исследовались Джекелем [168, 169, 170]. Оказалось, что это пространство имеет гомотопический тип $K(G, 1)$, причем группа G совпадает со своим коммутантом. Интересно, что в рамках этого исследования Джекель получил новое доказа-

тельство теоремы Хефлигера об отсутствии аналитических слоений коразмерности 1 на замкнутом многообразии с конечной фундаментальной группой [137].

§ 5. ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ КЛАССЫ СЛОЕНИЙ

1. Общая теория. Исторически первым характеристическим классом слоений со значениями в обыкновенных когомологиях явился класс, введенный в 1971 г. Годбийоном и Веем [128]. Это — трехмерный вещественный когомологический класс тотального многообразия гладкого слоения коразмерности 1. Вот его построение. Предположим, что предложенное слоение $\mathcal{F}$ ориентируемо; тогда оно глобально определяется гладкой 1-формой ω, нигде не обращающейся в 0 и удовлетворяющей условию интегрируемости; последнее обеспечивает существование гладкой 1-формы η с $d\omega=\eta\wedge\omega$. Оказывается, что форма $\eta\wedge d\eta$ замкнута и ее (дерамовский) когомологический класс определяется слоением $\mathcal{F}$. Этот класс и называется классом Годбийона — Вея слоения $\mathcal{F}$. Простая модификация конструкции позволяет распространить его на неориентируемые слоения и на хефлигеровские структуры коразмерности 1. Класс Годбийона — Вея является естественным по отношению к индуцированию и инвариантным по отношению к конкордантности. Если слоение задано на замкнутом трехмерном многообразии, то значение класса Годбийона — Вея на фундаментальном цикле этого многообразия (вещественное число) называется числом Годбийона — Вея; число Годбийона — Вея — инвариант кобордизма.

Пример слоения с нетривиальным классом Годбийона — Вея содержится уже в первой работе Годбийона — Вея [128] и принадлежит, как там сказано, Руссари. Это — слоение $\mathcal{F}(SL(2, R), H, \Gamma)$, где H — группа матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$ с $a>0$, Γ — подгруппа группы $SL(2, \mathbb{R})$ с компактным $SL(2, \mathbb{R})/\Gamma$ (см. п. 2.5). (Вычисление характеристических классов у локально однородных слоений обсуждается ниже в п. 2.) Из других вычислений классов Годбийона — Вея упомянем теорему Эрмана — Валлета ([159, 383]) о тривиальности класса Годбийона— Вея у слоения трехмерного тора плоскостями (статья Валлета содержит более общую формулировку). Учебные вычисления класса Годбийона — Вея, в частности, доказательство его тривиальности для слоения Риба, содержатся в обзорных статьях [27, 47].

Если слоение коразмерности 1 задано на римановом многообразии, то класс Годбийона — Вея, точнее, представляющая его форма, может быть явно выражена через метрику (Рейнхарт и Вуд [307]).

Обобщение конструкции Годбийона — Вея на слоения произвольной коразмерности было проделано независимо (и зависимо) многими разными авторами. В работах И. Н. Бернштейна и Б. И. Розенфельда [1, 2] и Ботта и Хефлигера [50, 141] это обобщение достигнуто на пути, указанном в работе Годбийона — Вея: с привлечением когомологий бесконечномерных алгебр Ли, вычисленных в работах И. М. Гельфанда и Д. Б. Фукса [6, 7] см. также [125]). Именно, по гладкому оснащенному слоению (или оснащенной хефлигеровской структуре) коразмерности q канонически строится гомоморфизм кольца непрерывных вещественных когомологий алгебры Ли W_q формальных векторных полей в $\mathbf{R}^q$ в дерамовские когомологии тотального многообразия. Когомологии алгебры W_q вычислены в [7]: они изоморфны когомологиям прообраза $2q$-го остова базы в тотальном пространстве классического универсального $U(q)$-расслоения. Это и приводит к определению характеристических классов оснащенного слоения: одного для слоений коразмерности 1 (класс Годбийона — Вея), пяти для слоений коразмерности 2, семнадцати для слоений коразмерности 3 и т. д. Другая конструкция характеристических классов оснащенного слоения производит их не от когомологий алгебры W_q, а от когомологий усеченной алгебры Вейля $W(\mathfrak{gl}(q, \mathbf{R}))_q$, т. е. алгебры Вейля алгебры $\mathfrak{gl}(q, \mathbf{R})$, профакторизованной по элементам фильтрации $>q$; эта конструкция принадлежит Ботту [47]; она основана на построении связности специального вида в нормальном расслоении к слоению. (Проблема существования подобных связностей в векторных раслоениях обсуждается в работах Дюка [87, 88].) Связь между двумя конструкциями оказалась очень прямой: между когомологиями W_q и $W(\mathfrak{gl}(q, \mathbf{R}))_q$ имеется естественный изоморфизм (см., например, [125]). Заметим, что вычисление когомологий усеченных алгебр Вейля, мотивированное потребностями теории характеристических классов слоений, проделано в работах Камбера и Тондера [177, 186]. В работах Ботта, Хефлигера, Бернштейна и Розенфельда построены также характеристические классы для неоснащенных слоений, для слоений с различными трансверсальными структурами и для слоеных расслоений. Последняя теория, принадлежащая Хефлигеру, основана на когомологиях алгебр Ли векторных полей на гладком многообразии [6].

Варианты конструкции Ботта характеристических классов слоений содержатся в работах Камбера и Тондера [178, 179, 180] (см. также [181, 184]), Абе [28], Судзуки [349] и Гелорже — Жубера [136]. Более общие конструкции имеются в работах Мартине [227], построившего теорию характеристических классов распределений, удовлетворяющих условию, более слабому, чем условие интегрируемости, Лемана ([215, 216, 56]), использующего в качестве исходных данных расслоение с двумя связностями, подчиненными определенным условиям, и Мо-

лино [253], определившего характеристические классы «частичных Г-структур». В статье Габриелова, Гельфанда и Фукса [112] в рамках весьма общей теории построены характеристические классы кусочно гладких слоений. В работах Гелорже [135] и Рейнхарта [305] дано прямое построение характеристических классов слоений через формы, в духе Годбийона — Вея (оно приведено также в обзорной статье [27]). Другая работа Рейнхарта, [306], содержит обобщение метрической формулы Рейнхарта — Вуда [307] (см. выше) на характеристические классы слоений произвольной коразмерности.

В статье Вея [376] характеристический гомоморфизм $H^*(W_q) \to H^*(X)$ оснащенного слоения коразмерности q в X определяется через сходящуюся к $H^*(X)$ спектральную последовательность с начальным членом $H^*(W_q;\ H^*(X;\ C))$, где C — некоторый пучок на X, строящийся по слоению. В статье Жубера, Муссю и Тишлера [176] (см. также [267]) вычисляются характеристические классы произведения двух слоений; авторами получено необходимое условие для представимости заданного слоения в виде произведения или пересечения других слоений.

В связи с теорией характеристических классов слоений естественно возникает проблема вычисления когомологий хефлигеровских классифицирующих пространств. Конечно, всякий класс когомологий хефлигеровского классифицирующего пространства определяет характеристический класс слоений, подобно тому, как класс когомологий грассманиана определяет характеристический класс векторных расслоений. Однако когомологии хефлигеровских классифицирующих пространств необъятны (в них нетривиально действует группа аддитивных, не обязательно непрерывных, автоморфизмов поля $\mathbf{R}$) и их приходится заменять более компактными объектами, такими как когомологии W_q или $W(\mathfrak{gl}(q,\ \mathbf{R}))_q$. Конечно имеются отображения $H^*(W_q) \to H^*(B\mathrm{Hf}^q_{fr})$; в статьях [110, 111] анонсирована теорема об их мономорфности. Были сделаны также попытки «правильно определить» когомологии хефлигеровских классифицирующих пространств, сделав их более соответствующими потребностям теории характеристических классов слоений (см. [52, 63, 261, 337, 338, 339]). Эти работы основаны на идее Ботта и Хефлигера, которые предложили рассматривать, наряду с пространством $B\mathrm{Hf}^q$ классифицирующее пространство BJ^q группоида ∞-струй диффеоморфизмов в $\mathbf{R}^q$ с C^∞-топологией. Имеется непрерывное отображение $B\mathrm{Hf}^q \to BJ^q$; топология пространства BJ^q определяет некоторую топологию в множестве сингулярных симплексов пространства $B\mathrm{Hf}^q$; предлагается рассматривать только коцепи пространства $B\mathrm{Hf}^q$, непрерывные в этой топологии. Вариант этой конструкции определяет когомологии пространства $B\mathrm{Hf}^q$ с помощью «дерамовского комплекса», составленного из форм, гладких по отношению к дифференциальной

структуре пространства BJ^q. Оказывается, что так определяемые когомологии совпадают с когомологиями, используемыми при определении характеристических классов слоений.

В заключение укажем на в разной степени детализированные статьи [24, 49, 120, 127, 142, 185, 187, 219], посвященные характеристическим классам слоений.

2. Вычисления для локально однородных слоений. Локально однородные слоения (см. п. 2.5) оказались чрезвычайно удобными для вычисления характеристических классов. Уже говорилось, что нетривиальность класса Годбийона — Вея была установлена с помощью одного из этих классов (см. п. 1). Последующие работы показали, что и другие характеристические классы слоений часто оказываются нетривиальными для слоений этого вида.

Процедура вычисления характеристических классов слоения $\mathcal{F}(G, H, \Gamma)$ приведена в статье Д. Б. Фукса [26]. Каноническое действие группы G в G/H определяет гомоморфизм алгебры Ли $\mathfrak{g}$ группы G в алгебру Ли векторных полей многообразия G/H, которая, в свою очередь, естественно отображается в W_q, где $q=\dim(G/H)$. Возникает гомоморфизм

$$H^*(W_q)\to H^*(\mathfrak{g}),$$

никак не связанный с Γ. С другой стороны, коцепи алгебры Ли $\mathfrak{g}$, рассматриваемые как левоинвариантные дифференциальные формы на G, определяют дифференциальные формы на G/H; возникающему отображению коцепей в формы отвечает гомологический гомоморфизм

$$H^*(\mathfrak{g})\to H^*(G/\Gamma),$$

никак не связанный с H. Композиция этих гомоморфизмов и есть характеристический гомоморфизм $H^*(W_q)\to H^*(G/\Gamma)$, отвечающий слоению $\mathcal{F}(G, H, \Gamma)$. Если группа G полупроста, а факторпространство G/Γ компактно, то, как хорошо известно, второй гомоморфизм является мономорфизмом. Хорошо известно также, что дискретная подгруппа с компактным факторпространством имеется в любой полупростой группе G. Поэтому, если нас интересует степень нетривиальности характеристических классов локально однородных слоений, мы должны знать ядра гомоморфизмов $H^*(W_q)\to H^*(\mathfrak{g})$, индуцированных гомоморфизмами конечномерных полупростых алгебр Ли в $\mathfrak{g}$. В ряде работ ([26, 40, 41, 182, 183, 297, 393, 394]) более или менее независимо вычислен образ гомоморфизма $H^*(W_q)\to$ $\to H^*(\mathfrak{sl}(q+1, \mathbf{R}))$, отвечающего классическому вложению $\mathfrak{sl}(q+1, \mathbf{R})\to W_q$ (определяемому классическим действием группы $SL(q+1, \mathbf{R})$ в $\mathbf{R}P^q$). Как известно, кольцо $H^*(\mathfrak{sl}(q+1, \mathbf{R}))$ есть внешняя алгебра с образующими размерностей 3, 5, ..., $2q+1$; в перечисленных работах доказано, что образ гомоморфизма $\tilde{H}^*(W_q)\to\tilde{H}^*(\mathfrak{sl}(q+1, \mathbf{R}))$ совпадает с идеалом,

порожденным $(2q+1)$-мерной образующей; в частности, размерность этого образа равна 2^{q-1}, и, таким образом, у слоения $\mathcal{F}(SL(q+1, \mathbf{R}), H, \Gamma)$, где H — компонента изотропной подгруппы при действии $SL(q+1, \mathbf{R})$ в $\mathbf{R}P^q$ и Γ — дискретная подгруппа группы $SL(q+1, \mathbf{R})$ с компактным $SL(q+1, \mathbf{R})/\Gamma$, имеется ровно 2^{q-1} линейно независимых характеристических классов (сказанное обобщает доказательство Годбийона — Вея — Руссари нетривиальности класса Годбийона — Вея — см. п. 1).

В статьях [40, 41, 183 и 366] аналогичным образом вычисляются характеристические классы некоторых других локально однородных слоений.

Алгебры W_q и $\mathfrak{sl}(q+1, \mathbf{R})$ имеют совпадающие максимальные размерности нетривиальных пространств когомологий: $q(q+2)$; однако, $\dim H^{q(q+2)}(\mathfrak{sl}(q+1, \mathbf{R}))=1$, а $\dim H^{q(q+2)}(W_q)=$ $=\mathrm{p}(q)$ — число разбиений числа q в сумму натуральных слагаемых. Поэтому гомоморфизм $H^{q(q+2)}(W_q)\to H^{q(q+2)}(\mathfrak{sl}(q+1, \mathbf{R}))$ имеет при больших q большое ядро. В [26] доказано, что характеристические классы, определяемые элементами этого ядра, тривиальны для всякого локально однородного слоения. Там же была высказана гипотеза, что подобное верно для элементов ядра гомоморфизма $H^r(W_q)\to H^r(\mathfrak{sl}(q+1, \mathbf{R}))$ с любым r. Однако, вычисления, проделанные Бейкером в [40, 41], опровергли эту гипотезу: некоторые из элементов вышеупомянутых ядер определяют характеристические классы, нетривиальные даже на слоениях $\mathcal{F}(G, H, \Gamma)$ с полупростой группой G и параболической подгруппой H. Недавно Питти [283] показал, что справедлив следующий ослабленный вариант гипотезы: в $\tilde{H}^*(W_q)$ имеется подпространство A размерности 2^{q-1} со следующим свойством: если G — полупростая группа Ли и H — ее параболическая подгруппа, то гомоморфизм $W_q\to\mathfrak{q}$, определяемый действием G в G/H, индуцирует когомологический гомоморфизм $\tilde{H}^*(W_q)\to\tilde{H}^*(\mathfrak{q})$, при котором образ пространства A совпадает с образом всего $\tilde{H}^*(W_q)$. Таким образом, можно сказать, что у слоения $\mathcal{F}(G, H, \Gamma)$ с полупростым G и параболическим H имеется 2^{q-1} линейно независимых характеристических классов положительной размерности, а остальные через них линейно выражаются (хотя коэффициенты этих линейных выражений зависят от G и H).

3. Вариации. В своей первой работе [358] Тэрстон построил пример гладкого однопараметрического семейства слоений коразмерности 1 на S^3 с непостоянным классом Годбийона — Вея. Изложения конструкции Тэрстона имеются в [27] и [355]. В последующих работах того же Тэрстона [358], Хейтша [156, 157], Морита [259] и Расмуссена [298] построены другие примеры вариации характеристических классов при гомотопиях слоений. В то же время оказалось, что варьироваться способны не все характеристические классы: Хейтш [152] показал, что характе-

ристические классы слоений, определяемые элементами образа естественного гомоморфизма $H^*(W_{q+1}) \to H^*(W_q)$ инвариантны относительно гомотопии. Эта теорема Хейтша передоказывалась и уточнялась во многих работах разных авторов (см. [2, 10, 44, 180]). В статье Гельфанда, Фейгина и Фукса [10] некоторые характеристические классы однопараметрических семейств слоений, в их числе производные по параметру обыкновенных характеристических классов слоений, определяются когомологиями алгебры Ли W_q с коэффициентами в сопряженном с ней пространстве W_q'. Проделанное в этой статье вычисление когомологий $H^*(W_q;\ W_q')$ имеет некоторые любопытные следствия, касающиеся характеристических классов слоений. Например, если на некотором многообразии задано семейство слоений, то произведение (в кольце когомологий многообразия) производной по параметру любого характеристического класса этих слоений на любой характеристический класс любого из этих слоений равна нулю. Систематическое изучение характеристических классов семейств слоений предпринято в недавней статье Хейтша [158].

4. Связь с вычетами особенностей голоморфных слоений. Еще до появления теории характеристических классов слоений в работах Ботта [45] и Баума — Ботта [43] было показано, что числа Черна комплексного многообразия можно найти, зная собственные значения линейных частей произвольного голоморфного векторного поля в его особых точках. Многомерное обобщение этого факта было независимо найдено С. М. Вишиком [4, 5] и теми же Баумом и Боттом [44, 48]. Это обобщение заключается в следующем. Пусть в n-мерном компактном комплексно аналитическом многообразии X задано голоморфное слоение коразмерности q с особенностями, т. е. почти всюду мономорфное голоморфное отображение некоторого комплексно аналитического $(n-q)$-мерного расслоения L с базой X в касательное расслоение $\tau(X)$, образ которого интегрируем на дополнении к множеству особенностей. Предположим, что множество особенностей есть объединение связных многообразий $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_m$ комплексной коразмерности $q+1$. На (голоморфных) трансверсалях к Σ_i слоение задается голоморфными векторными полями с изолированной особенностью; пусть $\lambda_{i1}, \ldots, \lambda_{i,q+1}$ — собственные значения линейной части i-го поля. Пусть, далее, c_r — классы Черна виртуального расслоения $\tau(X)-L$; σ_r — элементарные симметрические функции; $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ — неотрицательные целые числа с $\alpha_1+2\alpha_2+\ldots+q\alpha_q=q+1$. Тогда

$$D\left(c_1^{\alpha_1}\ldots c_q^{\alpha_q}\right)=\sum_{l=1}^{m}\frac{\sigma_1(\lambda_l)^{\alpha_1}\ldots\sigma_q(\alpha_l)^{\alpha_q}}{\sigma_{q+1}(\lambda_l)}\,[\Sigma_l].$$

Доказательство этой формулы опирается на теорию характеристических классов слоений: ее левая и правая части выражают-

ся через характеристические классы слоения в $X—\bigcup\Sigma_i$, и выражения оказываются одинаковыми.

Обобщение (не столь эффективное) формулы Баума — Ботта — Вишика на случай, когда множество особенностей имеет меньшую, чем это требуется выше, размерность, найдено Сенклем [64]. В статье Хейтша [155] выясняется смысл коэффициентов при $[\Sigma_i]$ в правой части формулы Баума — Ботта — Вишика в случае, когда $\alpha_1+\ldots+q\alpha_q>q+1$ (эта работа, в основном, посвящена случаю $q=n-1$). Наконец, в статье Швейцера и Уитмена [330] доказан аналог предыдущей формулы для вещественно аналитических слоений с изолированными особенностями.

5. Специальные когомологии, связанные со слоениями. Обсуждавшиеся в этом параграфе характеристические классы слоений принимают значения в обычных когомологиях тотального многообразия. Известно также несколько попыток привлечь к изучению слоения специальные когомологии, строящиеся по этому слоению. О наиболее успешной из этих попыток, приведшей к построению так называемого класса Атиа— Молино, речь пойдет в п. 6.3. Здесь мы рассмотрим другие работы этого направления.

В статье Хейтша [153] предпринято вычисление когомологий алгебры Ли векторных полей многообразия, касающихся заданного на этом многообразии слоения (это вычисление мотивируется не столько потребностями теории слоений, сколько аналогией с вычислениями, проделанными И. М. Гельфандом и Д. Б. Фуксом [6]). Когомологии оказываются, как правило, бесконечномерными. В другой статье Хейтша, [154], рассматриваются когомологи тотального многообрази слоения с коэффициентами в факторпучке пучка ростков векторных полей, сохраняющих слоение по пучку ростков векторных полей, касающихся слоения; одномерные когомологии интерпретируются как классы инфинитезимальных деформаций слоения. В статьях Кание [188] и Лихнеровича [225] вычисляются когомологии размерностей 1 и 2 алгебры Ли векторных полей, сохраняющих слоение, с различными коэффициентами. В работе Джералда Шварца [323] рассматриваются гомологии подкомплекса дерамовского комплекса, составленного из форм φ, таких, что φ и $d\varphi$ аннулируются любым векторным полем, касающимся слоения; оказывается, что эти гомологии могут быть бесконечномерными даже для слоений на замкнутых многообразиях. В работе Франкса [107] рассматриваются «голономно инвариантные» коцепи слоеного многообразия, т. е. коцепи, определенные на достаточном классе сингулярных симплексов, трансверсальных слоению, и принимающих одинаковые значения на симплексах, переводимых друг в друга голономией; доказывается, что всякий одномерный когомологический класс тотального многообразия представляется голономно инвариантным коциклом. Нако-

нец, в работе Саркария [322] рассматривается спектральная последовательность, индуцируемая естественной фильтрацией в дерамовском комплексе слоеного многообразия; указываются условия, при которых начальный член этой спектральной последовательности будет конечномерен.

§ 6. СПЕЦИАЛЬНЫЕ КЛАССЫ СЛОЕНИЙ

В этом параграфе рассматриваются слоения, подчиненные сильным дополнительным условиям, оказывающим решающее воздействие на их свойства, такие как характер слоев и минимальных множеств, характеристические классы и т. п.

1. Слоения без голономии. Работы Т. В. Локоть [13, 14, 15] посвящены топологической классификации гладких двумерных слоений без голономии на трехмерном торе и других нильмногообразиях. Указывается система топологических инвариантов таких слоений, в некоторых случаях полная, и доказывается, что на всяком трехмерном многообразии имеется континуум попарно негомеоморфных слоений без голономии. Достаточное условие отсутствия голономии у слоения коразмерности 1 на замкнутом многообразии, не имеющего компактных слоев, приведено в работе Муссю и Руссари [269]; условие касается взаимодействия фундаментальных групп слоев и объемлющего многообразия. В работе Муссю [264] приведено условие существования у слоения без голономии на компактном многообразии замкнутой трансверсали, лежащей на крае. В статье Мицутани и Цубоя [246] доказано, что всякое не имеющее голономии ориентируемое гладкое слоение коразмерности 1 получается из слоеного S^1-расслоения индуцированием посредством сечения. В статье А. Л. Брахмана [3] доказана такая теорема: пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ — трансверсальные друг другу слоения коразмерности 1 и размерности 1 на компактном многообразии, причем слоение $\mathcal{F}_1$ не имеет голономии; если каждый слой слоения $\mathcal{F}_2$ пересекает каждый слой слоения $\mathcal{F}_1$, то то же верно для индуцированных слоений на универсальной накрывающей тотального многообразия.

Слоениям без голономии посвящены несколько статей Ламуро: [193, 198, 199, 204]. Вот некоторые его результаты. Пусть $\mathcal{F}$ — гладкое слоение коразмерности 1 без голономии на связном (возможно, некомпактном) многообразии X с фундаментальной группой $\mathbf{Z}$, и пусть U — объединение слоев, пересекаемых замкнутой трансверсалью; тогда факторпространство множества U по слоению $\mathcal{F}$ пусто или гомеоморфно окружности, а факторпространство множества $X—U$ по слоению $\mathcal{F}$ представляет собой односвязное, возможно, нехаусдорфово, многообразие. Гладкое слоение коразмерности 1 без голономии на многообразии, у которого есть конечнолистная накрывающая с абе-

левой фундаментальной группой или первое число Бетти не превосходит 1, не имеет исключительных слоев.

Прадинес [292] привел пример, разрушивший гипотезу, что пространство слоев слоения без голономии является хотя бы Q-многообразием в смысле Барра.

Работа Эктора [151] посвящена слоениям «почти без голономии», т. е. слоениям, у которых голономию могут иметь только компактные слои. Он доказал, что у слоений коразмерности 1 почти без голономии группы голономий компактных слоев абелевы, отсутствуют исключительные слои и все слои имеют полиномиальный рост. Некоторые из этих результатов содержатся в более ранних работах Муссю [265] и Эктора [146].

Наконец, в статье Эпстейна, Миллета и Тишлера [99] показано, что у всякого гладкого слоения объединение слоев с тривиальной голономией есть всюду плотное множество типа G^{δ}.

2. **Компактные слоения.** Так называются слоения, все слои которых компактны. В статьях Десезаро и Нагано [84], Эпстейна [96] и [97], Милле [241], Эдвардса, Милле и Сулливана [93] речь идет о свойствах пространства слоев гладкого компактного слоения. Еще в работе Риба [302] показано, что это пространство хаусдорфово, если коразмерность слоения равна 1 и может быть нехаусдорфовым, если она больше 1. В работе [84] установлено, что хаусдорфовость пространства слоев равносильна локальной ограниченности объема слоев. Большое количество других критериев хаусдорфовости факторпространства приведено в [96] и [97]. Обзорная статья [241] кроме изложения вышеназванных результатов содержит гипотезу, что слои компактного слоения имеют конечные группы голономий, и ряд следствий из этой гипотезы. Эта гипотеза, а также равномерная ограниченность объема слоев доказаны в статье [93] в случае, когда коразмерность слоения равна 2 и тотальное многообразие компактно. (Эта теорема независимо доказана Фогтом [379]. Для одномерных слоений на трехмерных многообразиях результат принадлежит Эпстейну [95].) Условие равенства коразмерности двум может быть отброшено при дополнительном ограничении, касающемся гомологических классов слоев в тотальном многообразии. Устойчивость слоев голоморфного компактного слоения коразмерности (комплексной) 1, возможно, имеющего особенности, доказана в статье Холмана [164].

Пожалуй, самым интересным и неожиданным примером компактного слоения является пример, приведенный Сулливаном [344]. В этой работе (объемом чуть больше страницы) построено гладкое одномерное слоение на $S^3 \times S^1 \times S^1$, слои которого диффеоморфны окружностям, но имеют неограниченную длину. Каждое многообразие $S^3 \times S^1 \times t$ расслаивается при этом на окружности, причем база есть S^3 при $t \neq 0$ и $S^2 \times S^1$

при $t=0$. Этот пример усовершенствован Эпстейном и Фогтом [101], которые заменили гладкость полиномиальностью и уменьшили размерность объемлющего многообразия до 4. В статье Фогта [379] построен пример одномерного компактного слоения на компактном римановом восьмимерном многообразии со следующим свойством: существует бесконечная последовательность $B_0 \supset B_1 \supset B_2 \supset \ldots$ непустых подмножеств тотального многообразия, такая что если $\lambda : X \to \mathbf{R}$ — функция, относящая точке длину проходящего через нее слоя, то сужение $\lambda | B_i$ локально неограничено во всех точках множества B_{i+1}.

Статьи Фогта [377, 380] содержат классификацию компактных слоений коразмерности 2 на замкнутых многообразиях размерности $\leqslant 5$, удовлетворяющих некоторому дополнительному условию, касающемуся фундаментальных групп.

В статье Эпстейна и Розенберга [100] доказана структурная устойчивость компактного слоения с хаусдорфовым пространством слоев (понимаемая в смысле Эпстейна, см. [98]). В заметке Эдвардса [92] предлагается задача, касающаяся поведения слоев компактного слоения, близкого к расслоению.

В статье Каупа [189] (посвященной алгебраическому изучению группы ростков голоморфных автоморфизмов $(\mathbf{C}, 0)$) доказано, что группы голономий компактного голоморфного слоения коразмерности 1 на комплексном многообразии конечны.

3. **Слоения с трансверсально проектируемой связностью.** Трансверсально проектируемая связность — это связность в нормальном расслоении к слоению, инвариантная по отношению к диффеоморфизмам, близким к тождественному и отображающим каждый слой слоения на этот же слой. Проблеме существования трансверсально проектируемых связностей посвящены статьи Молино [248, 249, 250, 251], и Масы [228].

В статье [248] Молино привлек к этой проблеме бииндексные когомологии $H^{p,q}(X)$ тотального многообразия, естественно определяемые слоением. (Для случая коразмерности 1 эти когомологии еще в 1959 г. определил Рейнхарт [304]; есть работы, специально посвященные этим когомологиям, например, [74, 368, 369].) Молино показал, что необходимым и достаточным условием существования трансверсально проектируемой связности является тривиальность некоторого характеристического класса со значениями в $H^{1,1}$. Этот класс является вещественным аналогом класса Атиа [39], рассматривавшегося в связи с проблемой существования комплексно-аналитической связности в комплексных главных расслоениях, и он называется классом Атиа — Молино или просто классом Атиа (соотношения между конструкциями Атиа и Молино обследованы в статье Молино [252]). Стоит сказать, что указанные бииндексные когомологии обычно бывают довольно обширны, и класс Атиа — Молино мало приспособлен к конкретным вы-

числениям. В статьях Молино [249—251] доказано, что если слоение обладает трансверсально проектируемой связностью, то полиномы Понтрягина нормального расслоения размерности, большей коразмерности слоения, равны нулю (т. е. утверждение теоремы Ботта в этом случае «вдвое усиливается»). Как показано в [251], это позволяет построить для слоений с трансверсально проектируемой связностью специальную теорию характеристических классов. В [251] доказывается также, что обычные характеристические классы (§ 5) при наличии трансверсально проектируемой связности равны нулю; обобщение последней теоремы найдено Судзуки [349] (об этой работе см. также § 7).

Конструкция Атиа — Молино модифицирована в работе Масы [228]. Одним из применений этой модификации является теорема, что если замкнутое многообразие X обладает слоением коразмерности 1 с трансверсально проектируемой связностью, то $H^1(X; \mathbf{R}) \neq 0$.

Класс хефлигеровских структур, соответствующий классу слоений с трансверсально проектируемой связностью, рассмотрен в работах Медина [237, 238]. В них получены соответствующие обобщения основных результатов Молино, а также доказано, что все целочисленные классы Понтрягина могут быть у слоений с трансверсально проектируемой связностью нетривиальны (это усиливает результаты Ботта — Хейтша [51], см. п. 1.5).

(Слоения с трансверсально проектируемой связностью Медина называют аффинными. К термину «аффинное слоение» следует подходить с осторожностью. Например, в пяти статьях [9, 116, 117, 237, 345] он употребляется в пяти смыслах, попарно не имеющих ничего общего.)

4. Слоения Ли и е-слоения. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли конечной размерности >0 и X — гладкое многообразие. Предположим, что на X задана невырожденная 1-форма ω со значениями в удовлетворяющая условию Маурера — Картана $d\omega + [\omega, \omega]/2 = 0$. В силу этого условия распределение, определяемое ядрами формы ω, интегрируемо. Возникающее слоение коразмерности $\dim \mathfrak{g}$ называется слоением Ли. Это определение принадлежит Федида [104], который доказал ряд необходимых условий существования слоений Ли; например, если на замкнутом многообразии существует слоение Ли с полупростой алгеброй $\mathfrak{g}$, то третье число Бетти этого многообразия отлично от нуля. Изложению работы [104] посвящена статья Годбийона [126].

В статьях Лемана [217, 218] приведен пример слоения с трехмерной нильпотентной алгеброй $\mathfrak{g}$, которое не аппроксимируется расслоением.

Как заметил Федида в статье [105] (см. также [102]), слоения Ли, в известном смысле, двойственны действиям групп Ли на многообразиях; эта двойственность проясняет результа-

ты работы [104]. Заметим еще, что имеется аналогия (тоже типа двойственности) между слоениями Ли и гладкими (lisse) слоениями в смысле Альбера (см., например, [33]).

Слоение называется e-слоением, если оно обладает голономно-инвариантной тривиализацией нормального расслоения. Из результатов С. П. Новикова [19] вытекает, что слои e-слоения коразмерности 1 на замкнутом многообразии попарно диффеоморфны и индуцированное слоение на универсальной накрывающей представляет собой гладкое расслоение с базой $\mathbf{R}$. Конлон [70] (см. также [71]) доказал, что подобное верно и для слоений коразмерности 2, но на слоения коразмерности $\geqslant 3$ теорема не обобщается.

Молино [255] назвал e-слоение транзитивным, если множество векторных полей, параллельных по отношению к этому слоению, транзитивно. В этой статье (см. также [256]) доказывается, что замыкания слоев транизитивного e-слоения составляют гладкое расслоение и в каждом из этих замыканий слоение является слоением Ли. Связям между e-слоениями и слоениями Ли посвящена также работа Майера [239].

5. Слоения и римановы структуры. Слоение, нормальное расслоение к которому наделено голономно инвариантной евклидовой структурой, называется римановым. Такие слоения впервые рассматривал Пастернак [280], который показал, что полиномы Понтрягина нормального расслоения риманова слоения тривиальны в размерностях, больших коразмерности слоения (ср. п. 3). Позднее Роже [308] показал, что у риманова слоения тривиальны также произведения Масси надлежащих размерностей классов Понтрягина нормального расслоения, а также характеристические классы в смысле § 5. Используя усиленную теорему тривиальности полиномов Понтрягина, Лазаров и Пастернак [212] построили для римановых слоений специальную теорию характеристических классов (опять ср. п. 3); для этих классов они доказали аналог теоремы Хейтша о жесткости (см. п. 5.3). В следующей работе [213] они доказали для некоторых из этих классов нетривиальность и варьируемость.

В статье [281] Пастернак определил аналог хефлигеровского классифицирующего пространства для римановых слоений; он показал, что классифицирующее пространство для ориентированных римановых слоений коразмерности 1 есть $K(\mathbf{R}, 1)$.

Судзуки [350] обобщил теорему о тривиальности обычных характеристических классов римановых слоений на слоения, обладающие римановым подслоением.

В работах [270, 271, 272] Нисикава и Сато распространили усиленную теорему тривиальности классов Понтрягина на класс слоений, более широкий, чем класс римановых слоений; например, для справедливости этой теоремы достаточно, чтобы

преобразования голономии были не изоморфизмами, а конформными преобразованиями. Статья [272] содержит аксиоматическое описание трансверсальных структур, наличие которых обеспечивает справедливость усиленной теоремы тривиальности. В работе [260] Морита построил для слоений, рассматривавшихся Нисикава и Сато, специальную теорию характеристических классов, аналогичную теории Лазарова — Пастернака (см. выше). (Для случая конформных слоений большая часть этих результатов независимо получена Вайсманом [375].)

Несколько работ, посвященных римановым слоениям и вообще взаимодействиям слоений с римановыми структурами, носят более геометрический характер (кроме перечисляемых ниже работ см. упоминавшиеся ранее статьи [306, 307]). В недавней работе [257] Молино доказал, что если не все слои риманова слоения компактны, то оно обладает сохраняющим риманову структуру инфинитезимальным автоморфизмом, нетождественным на множестве слоев. Некоторые работы посвящены отысканию условий существования у слоеного многообразия «метрики типа метрики расслоения» (bundle-like metric). Это — риманова метрика в тотальном многообразии слоения, в которой расстояния между слоями по нормалям локально постоянны. Расмуссен [294] доказал, что в случае слоения коразмерности 1 на компактном многообразии существование такой метрики равносильно каждому из следующих условий: (i) слоение не имеет голономии и исключительных слоев; (ii) слоение может быть задано замкнутой формой. Более сложный случай коразмерности 1 обсуждается в статье А. Моргана [258].

В статье Фэрнесса [116] классифицируются слоения коразмерности 1 на замкнутых трехмерных многообразиях, наделенных такой аффинной связностью, что слоение инвариантно относительно параллельных переносов. В статьях Сулливана [347, 348] и Джонсона — Витта [171] найдены условия существования у (замкнутого) тотального многообразия слоения римановой метрики, по отношению к которой все слои являются минимальными поверхностями; условие Сулливана касается гомологий многообразия, а условие Джонсона — Витта, ограничивающихся слоениями коразмерности 1 на трехмерных многообразиях, — его фундаментальной группы. В работе Азимова [38] средняя гауссова кривизна слоев слоения коразмерности 1 на компактном n-мерном многообразии вычисляется в случае, когда кривизна многообразия постоянна и оценивается в случае, когда $n=3$. В статье Лангевина [205] рассматриваются «тугие» слоения, т. е. слоения на римановом многообразии, средняя кривизна слоев которых не превосходит средней кривизны слоев любого слоения, ему изотопного; тугими являются слоения, слои которого — минимальные поверхности, но, как показывает автор, не только они.

Работа Вайсмана [372] посвящена эрмитовым слоениям — комплексному аналогу римановых слоений.

6. Слоения с инвариантной трансверсальной мерой. Несколько работ посвящено слоениям, у которых трансверсали наделены мерой, инвариантной относительно голономии. В работе Планта [288] (см. также [289]) доказывается, что если коразмерность такого слоения равна 1 и фундаментальная группа тотального многообразия конечна, то минимальное множество, один из слоев которого не имеет экспоненциального роста, сводится к этому слою (ср. § 3); в случае произвольной коразмерности доказано гомологическое необходимое условие существования инвариантной трансверсальной меры у слоеного расслоения. В статье Лианга [224] необходимое и достаточное условие существования инвариантной трансверсальной меры формулируется в терминах форм, задающих это слоение. Важные результаты о слоениях с инвариантной трансверсальной мерой содержатся в статье Сулливана [346], посвященной, в основном, более общим материям; основной результат, касающийся слоений: для всякого ориентированного слоения существует либо инвариантная трансверсальная мера, либо замкнутая дифференциальная форма на объемлющем многообразии степени, равной размерности слоения, сужения которой на слои являются положительными формами объема.

§ 7. ДРУГИЕ РАБОТЫ

Нам осталось рассмотреть несколько разрозненных работ, не относящихся ни к одной из названных тем.

Несколько статей посвящено флагам слоений. Флаг — это цепочка слоений убывающей размерности на одном многообразии, такая что слои каждого, начиная со второго, содержатся в слоях предыдущего. Флаги встречаются уже в работах десятилетней давности (хотя само название появилось лишь в последнее время). В работе Крайовеану [80] для флага $\mathcal{F}_1 \supset \supset \mathcal{F}_2$ слоений на многообразии X найдено достаточное условие тривиальности проекции $X/\mathcal{F}_2 \to X/\mathcal{F}_1$. В работе Лианга [223] результаты Хефлигера о существовании слоений на открытых многообразиях (см. § 4) переносятся на мультислоения (флаги максимальной длины) на открытых многообразиях, а в работе Зильберстейн [340] доказывается, что мультислоением всегда обладает произведение стабильно параллелизуемого многообразия на окружность. Теорема существования флагов слоений, обобщающая теорему Тэрстона о существовании слоений (см. § 4), доказана Н. М. Мишачевым [16, 17]. В работе Фейгина [23] приведены две, возможно, неэквивалентные конструкции характеристических классов флагов слоений; одна из них обобщает конструкцию Ботта [47], другая основана на когомологиях алгебры Ли формальных векторных полей, касаю-

щихся заданного подпространства (ср. [1, 52]). Эти когомологии в [23] частично вычислены. Построенные в [23] характеристические классы позволяют привести пример слоения коразмерности 2, не конкордантного слоению, включаемому в слоение коразмерности 1. Часть результатов статьи [23] независимо получена Муссю [267] и Судзуки [349]. Связь флагов слоений с характеристическими классами обсуждается также в работе Кордеро — Гадеа [79].

В статьях Гельфанда и Фукса [8] и [9] рассматривается кусочно линейный аналог слоений на триангулируемых многообразиях: аффинные PL-слоения, слои которых в симплексах триангуляции представляют собой параллельные плоскости, и проективные PL-слоения, в определении которых эта параллельность заменена параллельностью в проективном смысле. Для обоих типов слоений определяются классифицирующие пространства и частично вычисляются характеристические классы: например, у аффинного PL-слоения класс Годбийона — Вея всегда тривиален, а у проективного PL-слоения он может быть отличен от нуля. Впоследствии Роже [20] доказал, что классифицирующее пространство для аффинных PL-слоений стягиваемо.

В работах Кордеро и Прады [75—78] изучается слоение коразмерности $2q$, естественно возникающее в многообразии касательных векторов тотального многообразия слоения коразмерности q (и слоения коразмерности $(r+1)q$, возникающего в r-м многообразии касательных векторов). Главный предмет этих работ — соотношение между классами Атиа — Молино исходного и построенного слоения.

Бесконечномерный вариант теории слоений — слоения на банаховых многообразиях — строится в работах Крайовеану [81, 82].

В комплексном анализе хорошо известна задача: при каких условиях вещественное подмногообразие комплексного многообразия обладает слоением с комплексными слоями. Первые результаты об этом были получены Зоммером еще в 1959 г. Дальнейшие результаты были получены Гординым [11], Милани и Реа [240, 300, 301] и Фриманом [108, 109]. Результаты Фримана получены позже всех остальных перечисленных результатов и их покрывают. Вот его теорема. Пусть X — вещественное подмногообразие комплексного многообразия, H_zX — максимальное комплексное подпространство касательного пространства к X в точке $z \in X$ и N_z — нульпространство формы Леви в точке z. Если размерности $\dim H_zX$, $\dim N_z$ не зависят от z, то распределение N_z интегрируемо и слои возникающего слоения комплексны. Из других комплексно аналитических работ, относящихся к теории слоений, упомянем работы Холмена [163], доказавшего, что слой голоморфного слоения тогда и только тогда является аналитическим множеством, когда он замкнут,

Миникони [242], наделившего множество голоморфных слоений на комплексном пространстве структурой конечномерного комплексного пространства, и Дюшана и Калки [89], которые определили в тотальном многообразии трансверсально голоморфного слоения псевдометрику (аналог метрики Кобаяси) и доказали, что если тотальное многообразие компактно и расстояния от точек до не проходящих через них слоев положительны, то слоение компактно.

Мне осталось назвать еще несколько изолированных работ. Я их привожу в порядке, близком к хронологическому. Диссертация Годбийона [122] представляет собой попытку применить к теории слоений гомотопические методы теории расслоений. В статьях Сек и Жерара [331, 332] изучаются геометрические свойства слоев слоения, задаваемого полиномиальной формой в комплексной области. В статьях Коэна [67, 68] речь идет об аппроксимации слоений более гладкими слоениями. Работа Иманиси [166] содержит достаточное условие существования S^1-инвариантного слоения с изолированными S^1-инвариантными слоями на гладком многообразии с гладким свободным действием группы S^1. Статьи Вайсмана [370, 371] посвящены систематическому изложению специфической теории дифференциальных операторов на слоеном многообразии; основной результат — необходимое и достаточное условие существования слоеного дифференциального оператора с данным слоеным символом (определения содержатся в указанных работах; впрочем, их легко угадать). Другая работа Вайсмана, [374], содержит пример голоморфного слоения (положительной размерности и коразмерности) с жесткой комплексной структурой. В статье Лесли [220] доказано, что если тотальное многообразие слоения покрывается замыканиями конечного числа слоев, то факторгруппа группы диффеоморфизмов многообразия, сохраняющих слоение, по группе диффеоморфизмов, сохраняющих каждый слой, конечномерна. В статье Фукуи [114] рассматривается пара, состоящая из слоения и функции на тотальном многообразии, и в терминах особенностей этой пары формулируется условие, необходимое и достаточное для того, чтобы слоение было расслоением. В статье Танре [357] рассматриваются «слоеные группы», т. е. слоения, тотальные многообразия которых являются группами Ли с дополнительным свойством: если сомножители непрерывно меняются, оставаясь на одном слое, то и произведение остается на одном слое; среди прочего, доказывается, что слоеные группы не имеют голономии. В работе Баума [42] доказывается структурная теорема для особенностей голоморфного слоения. В статье Уистона [384] вычисляется моноид классов замкнутых n-мерных многообразий относительно кобордизма со слоением коразмерности 1, тривиальным на крае. В статье Фэрнесса и Федиды [117] изучается фундаментальная группа замкнутого много-

образия, несущего слоение, задаваемое 1-формой ω с $d\omega = \omega \wedge \theta$, $d\theta = 0$. Статья Шателе [65] посвящена компактным слоям слоений, определяемых локально свободным действием нильпотентной группы Ли. Наконец, в статье Лазарова и Шульмана [214] доказано, что некоторые характеристические классы слоений служат препятствием к существованию нетривиальной конечномерной алгебры Ли векторных полей, сохраняющих это слоение.

БИБЛИОГРАФИЯ

1. *Бернштейн И. Н., Розенфельд Б. И.*, О характеристических классах слоений. Функц. анализ и его прил., 1972, *6*, № 1, 68—69 (РЖМат, 1972, 6А573)
2. —, —, Однородные пространства бесконечномерных алгебр Ли и характеристические классы слоений. Успехи мат. наук, 1973, *28*, № 5, 103—138 (РЖМат, 1973, 12А534)
3. *Брахман А. Л.*, Слоения без предельных циклов. Мат. заметки, 1971, *9*, № 2, 181—191 (РЖМат, 1971, 6А600)
4. *Вишик С. М.*, О характеристических классах и особенностях слоений. Функц. анализ и его прил., 1972, *6*, № 4, 71—72 (РЖМат, 1973, 4А726)
5. —, Особенности аналитических слоений и характеристические классы. Функц. анализ и его прил., 1973, *7*, № 1, 1—15 (РЖМат, 1973, 6А655)
6. *Гельфанд И. М., Фукс Д. Б.*, Когомологии алгебры Ли касательных векторных полей гладкого многообразия. Функц. анализ и его прил., 1969, *3*, № 3, 32—52 (РЖМат, 1970, 1А517)
7. —, —, Когомологии алгебры Ли формальных векторных полей. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1970, *34*, № 2, 322—337 (РЖМат, 1970, 8А435)
8. —, —, PL-слоения. Функц. анализ и его прил., 1973, *7*, № 4, 29—37 (РЖМат, 1974, 2А526)
9. —, —, PL-слоения. II. Функц. анализ и его прил., 1974, *8*, № 3, 7—11 (РЖМат, 1974, 11А683)
10. —, *Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б.*, Когомологии алгебры Ли формальных векторных полей с коэффициентами в сопряженном с ней пространстве и вариации характеристических классов слоений. Функц. анализ и его прил., 1974, *8*, № 2, 13—29 (РЖМат, 1974, 10Б838)
11. *Гордин В. А.*, Комплексные слоения подмногообразий. Успехи мат. наук, 1972, *27*, № 5, 233—234 (РЖМат, 1973, 1А679)
12. *Громов М. Л.*, Стабильные отображения слоений в многообразия. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1969, *33*, № 4, 707—734 (РЖМат, 1970, 4А542)
13. *Локоть Т. В.*, О слоениях коразмерности 1 с тривиальной группой голономии. Успехи мат. наук, 1972, *27*, № 2, 177—178 (РЖМат, 1972, 9А450)
14. —, Топологическая классификация слоений коразмерности 1 с тривиальными группами голономий класса C^2 на трехмерном торе. Успехи мат. наук, 1972, *27*, № 3, 205 (РЖМат, 1972, 10А429)
15. —, О некоторых свойствах слоений коразмерности 1 с тривиальными группами голономий. Сб. тр. Моск. инж.-строит. ин-т, 1974, № 121, 132—139 (РЖМат, 1975, 2А616)
16. *Мишачев Н. М.*, Устранение стандартных особенностей флагов слоений. Сыктывкар. ун-т, Сыктывкар, 1978. 16 с., ил. (Рукопись деп. в ВИНИТИ 28 дек. 1978 г., № 3938—78 Деп.) (РЖМат, 1979, 5А544Деп)
17. —, Построение флагов слоений. Успехи мат. наук, 1979, *34*, № 1, 237—238 (РЖМат, 1979, 8А604)
18. —, *Элиашберг Я. М.*, Хирургия особенностей слоений. Функц. анализ и его прил., 1977, *11*, № 3, 43—53 (РЖМат, 1978, 2А581)
19. *Новиков С. П.*, Топология слоений. Тр. Моск. матем. о-ва, 1965, *14*, 248—278 (РЖМат, 1966, 8А395)

20. *Роже К.*, Гомологии аффинных групп и классифицирующие пространства полулинейных слоений. Функц. анализ и его прил., 1979, *13*, № 4, 47—52 (РЖМат, 1980, 2А617)
21. *Солодов В. В.*, Геометрическое доказательство теоремы Мазера. Успехи мат. наук, 1979, *34*, № 1, 243—244 (РЖМат, 1979, 7А652)
22. —, Об отображениях окружности в слоения. Геометрич. методы в задачах анализа и алгебры. Ярославль, 1978, 100—107 (РЖМат, 1979, 12А671)
23. *Фейгин Б. Л.*, Характеристические классы флагов слоений. Функц. анализ и его прил., 1975, *9*, № 4, 49—56 (РЖМат, 1976, 6А585)
24. *Фукс Д. Б.*, Характеристические классы слоений. Успехи мат. наук, 1973, *28*, № 2, 3—17 (РЖМат, 1973, 8А492)
25. —, Квилленизация и бордизмы. Функц. анализ и его прил., 1974, *8*, № 1, 36—42 (РЖМат, 1974, 6А686)
26. —, Конечномерные алгебры Ли формальных векторных полей и характеристические классы однородных слоений. Изв. АН СССР. Сер. мат., 1976, *40*, № 1, 57—64 (РЖМат, 1976, 6А567)
27. —, Когомологии бесконечномерных алгебр Ли и характеристические классы слоений. Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Сер. Соврем. пробл. мат., 1978, *10*, 179—285 (РЖМат, 1978, 11А639)
28. *Abe N.*, On foliations and exotic characteristic classes. Kodai Math. Semin. Repts, 1977, *28*, № 4, 324—341 (РЖМат, 1978, 6А596)
29. —, Exotic characteristic classes of certain Г-foliations. Kodai Math. J., 1979, *2*, № 2, 254—271 (РЖМат, 1980, 2А615)
30. *A'Campo N.* Un feuilletage de S^5. C. r. Acad. sci., 1971, *272*, № 23, A1504—A1506 (РЖМат, 1971, 11А529)
31. —, Feuilletages de codimension 1 sur des variétés de dimension 5. C. r. Acad. sci., 1971, *273*, № 14, A603—A604 (РЖМат, 1972, 2А772)
32. —, Feuilletages de codimension 1 sur les variétés simplement connexes de dimension 5. Comment. math. helv., 1972, *47*, № 4, 514—525 (РЖМат, 1973, 8А488)
33. *Albert C.*, Feuilletages invariants et pseudoalgebres de Lie lisses. Cah. topol. et géom. different. Ch. Ehresmann, 1972, *13*, № 3, 309—323 (РЖМат, 1973, 6А650)
34. *Apreutesei C.*, Quelques classes caractéristiques et G_T-structures. C. r. Acad. sci., 1975, *280*, № 2, A41—A44 (РЖМат, 1975, 11А617)
35. —, Algèbres $HC(;)$, $HP(;)$ et obstructions á l'intégrabilité. Atti accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1977, *62*, № 1, 17—25 (РЖМат, 1978, 9А597)
36. *Arraut J. L.*, A two-dimensional foliation on S^7. Topology, 1973, *12*, № 3, 243—245 (РЖМат, 1974, 1А587)
37. *Asimov D.*, Round handles and homotopy of nonsingular vector fields. Bull. Amer. Math. Soc., 1975, *81*, № 2, 417—419 (РЖМат, 1976, 3А609)
38. —, Average Gaussian curvature of leaves of foliations. Bull. Amer. Math. Soc., 1978, *84*, № 1, 131—133 (РЖМат, 1978, 8А599)
39. *Atiyah M. F.*, Complex analytic connections in fibre bundles. Trans. Amer. Math. Soc., 1957, *85*, № 1, 181—207 (РЖМат, 1958, 7603)
40. *Baker D.*, On a class of foliations and the evaluation of their characteristic classes. Bull. Amer. Math. Soc., 1977, *83*, № 3, 394—396 (РЖМат, 1978, 2А583)
41. —, On a class of foliations and the evaluation of their characteristic classes. Comment. math. helv., 1978, *53*, № 3, 334—363 (РЖМат, 1978, 12А981)
42. *Baum P. F.*, Structure of foliation singularities, Adv. Math., 1975, *15*, № 3, 361—374 (РЖМат, 1975, 11А618)
43. —, *Bott R.*, On the zeroes of meromorphic vector-fields. Essays Topol. and Relat. Topics. Berlin et al., 1970, 29—47 (РЖМат, 1971, 1А523)
44. —, —, Singularities of holomorphic foliations. J. Different. Geom., 1972, *7*, № 3-4, 279—342 (РЖМат, 1974, 3А423)

45. *Bott R.*, Vector fields and characteris... ...ers. Mich. math. J., 1967, *14*, № 2, 231—244 (РЖМат, 1968, 9А389)
46. —, On topological obstructions to integrability. Actes Congr. int. mathématiciens, 1970, T. 1, Paris, 1971, 27—36 (РЖМат, 1972, 6А546)
47. —, Lectures on characteristic classes and foliations. Lect. Notes Math., 1972, *279*, 1—94 (РЖМат, 1973, 2А494)
48. —, On the Lefschetz formula and exotic characteristic classes. Symp. math. Conv. 1971—1972. Vol. 10. London—New York, 1972, 95—105 (РЖМат, 1973, 7А600)
49. —, On characteristic classes in the framework of Gelfand—Fuks cohomology. Astérisque, 1976, № 32—33, 113—139 (РЖМат, 1976, 11А704)
50. —, *Haefliger A.*, On characteristic classes of Γ-foliations. Bull. Amer. Math. Soc., 1972, *78*, № 6, 1039—1044 (РЖМат, 1973, 9А578)
51. —, *Heitsch J.*, A remark on the integral cohomology of $B\Gamma_q$. Topology, 1972, *11*, № 2, 141—146 (РЖМат, 1972, 11А397)
52. —, *Shulman H.*, *Stasheff J.*, On the de Rham theory of certain classifying spaces. Adv. Math., 1976, *20*, № 1, 43—56 (РЖМат, 1976, 11А705)
53. *Bouma L. G.*, *Est W. T. van*, Manifold schemes and foliations on the 2-torus and the Klein bottle. I. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1978, *A81*, № 3, 313—325 (РЖМат, 1979, 1А696)
54. —, —, Manifold schemes and foliations on the 2-torus and the Klein bottle. II. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1978, *A81*, № 3, 326—338 (РЖМат, 1979, 1А697)
55. —, —, Manifold schemes and foliations on the 2-torus and the Klein bottle. III. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1978, *A81*, № 3, 339—347 (РЖМат, 1979, 1А698)
56. *Callenaere B.*, *Lehmann D.*, Classes exotiques universelles. Ann. Inst. Fourier, 1974, *24*, № 3, 301—306 (РЖМат, 1975, 11А601)
57. *Cantwell J.*, *Conlon L.*, Open leaves in closed 3-manifolds. Bull. Amer. Math. Soc., 1976, *82*, № 2, 256—258 (РЖМат, 1977, 2А659)
58. —, —, Closed transversals and the genus of closed leaves in foliated 3-manifolds. J. Math. Anal. and Appl., 1976, *55*, № 3, 653—657 (РЖМат, 1977, 4А607)
59. —, —, Leaves with isolated ends in foliated 3-manifolds. Topology, 1977, *16*, № 4, 311—322 (РЖМат, 1978, 9А592)
60. —, —, Growth of leaves. Comment. math. helv., 1978, *53*, № 1, 93—111 (РЖМат, 1978, 8А597)
61. —, —, Leaf prescriptions for closed 3-manifolds. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, *236*, 239—261 (РЖМат, 1978, 11А646)
62. *Cenkl B.*, Affine connections with zero torsion. Proc. Symp. Pure Math., Berkeley, Calif., 1971. Vol. 23. Providence, 1973, 375—377 (РЖМат, 1976, 8А776)
63. —, On the de Rham complex of $B\hat{\Gamma}$. Proc. Symp. Pure Math., Stanford, Calif., 1973. Vol. 27. Part 1. Providence, 265—274 (РЖМат, 1976, 8А777)
64. —, Residues of singularities of holomorphic foliations. J. Different. Geom., 1978, *13*, № 1, 11—23 (РЖМат, 1979, 9А590)
65. *Chatelet G.*, Sur les feuilletages induits par l'action de groupes de Lie nilpotents. Ann. Inst. Fourier, 1977, *27*, № 2, 161—189 (РЖМат, 1978, 7А772)
66. —, *Rosenberg H.*, Un théorème de conjugaison des feuilletages. Ann. Inst. Fourier, 1971, *21*, № 3, 95—106, X (РЖМат, 1972, 5А559)
67. *Cohen M.*, Approximation of foliations. Can. Math. Bull., 1971, *14*, № 3, 311—314 (РЖМат, 1972, 2А771)
68. —, Smoothing one-dimensional foliations on $S^1 \times S^1$. Can. Math. Bull., 1973, *16*, № 1, 43—44 (РЖМат, 1973, 9А580)
69. —, Foliations on 3-manifolds. Amer. Math. Mon., 1974, *81*, № 5, 462—473 (РЖМат, 1974, 11А679)
70. *Conlon L.*, Transversally parallelizable foliations of codimension two. Trans. Amer. Math. Soc., 1974, *194*, 79—102 (РЖМат, 1975, 3А638)

71. —, Erratum to «Transversally parallelizable foliations of codimension two». Trans. Amer. Math. Soc., 1975, *207*, 406 (РЖМат, 1976, 4А631)
72. —, *Goodman S.*, Opening closed leaves in foliated 3-manifolds. Topology, 1975, *14*, № 1, 59—61 (РЖМат, 1975, 10А482)
73. —, —, The closed leaf index of foliated manifolds. Trans. Amer. Math. Soc., 1977, *233*, 205—223 (РЖМат, 1978, 8А603)
74. *Cordero R. L. A.*, Sur une théorie de cohomologie associée aux feuilletages. C. r. Acad. sci., 1971, *272*, № 16, A1056—A1057 (РЖМат, 1971, 10А365)
75. —, The extension of *G*-foliations to tangent bundles of higher order. Nagoya math. J., 1975, *56*, 29—44 (РЖМат, 1975, 7А756)
76. —, The horisontal lift of a foliation and its exotic classes. Lect. Notes Math., 1975, *484*, 192—200 (РЖМат, 1976, 4А633)
77. —, *Prada M. A. de*, Sobre las cohomologias y metricas del fibrado tangente a una variedad foliada. Actas prim. jorn. mat. luso-esp. Publs. inst. «Jorge Juan» mat., Madrid, 1973, 255—259 (РЖМат, 1974, 5А608)
78. —, —, Foliacion en el fibrado tangente a una variedad foliada y la obstruccion de Bott a la integrabilidad. Actas prim. jorn. mat. luso-esp. Publs. inst. «Jorge Juan» mat., Madrid 1973, 269—274 (РЖМат, 1974, 5А609)
79. —, *Gadea P. M.*, Exotic caracteristic classes and subfoliations. Ann. Inst. Fourier, 1976, *26*, № 1, 225—237 (РЖМат, 1976, 12А695)
80. *Craioveanu M.*, Sur les sous-feuilletages d'une structure feuilletée. C. r. Acad. sci., 1971, *272*, № 11, A731—A733 (РЖМат, 1971, 8А431)
81. —, Variétés banachiques feuilletées. I. An. Univ. Timişoara. Ser. şti. mat., 1971, *9*, № 1, 35—48 (РЖМат, 1973, 3А623)
82. —, Variétés banachiques feuilletées. II. An. Univ. Timişoara. Sér. şti. mat., 1975 (1977), *13*, № 1, 11—12 (РЖМат, 1978, 5А542)
83. *Davis A.*, *Wilson F. W.*, Vector fields tangent to foliations. I. Reeb foliations. J. Different. Equat., 1972, *11*, № 3, 491—498 (РЖМат, 1972, 12А472)
84. *Decesaro K.*, *Nagano T.*, On compact foliations. Proc. Symp. Pure Math., Stanford, Calif., 1973. Vol. 27, Part 1. Providence, 1975, 277—281 (РЖМат, 1976, 7А767)
85. *Desolneux-Moulis N.*, Sur certaines familles à un paramètre de $T^2 \times S^2$. C. r. Acad. sci., 1978, *AB287*, № 15, A1043—A1046 (РЖМат, 1979, 8А608)
86. *Dippolito P. R.*, Codimension one foliations of closed manifolds. Ann. Math., 1978, *107*, № 3, 403—453 (РЖМат, 1978, 12А980)
87. *Duc Tong van*, Fibrés vectoriels feuilletés. Boll. Unione mat. ital., 1978, *A15*, № 1, 52—60 (РЖМат, 1978, 11А644)
88. —, Fibrés vectoriels feuilletés. Kodai Math. J., 1978, *1*, № 2, 205—212 (РЖМат, 1979, 5А542)
89. *Duchamp T.*, *Kalka M.*, Holomorphic foliations and the Kobayashi metric. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, *67*, № 1, 117—122 (РЖМат, 1978, 8А600)
90. *Durfee A. H.*, Foliations of odd-dimensional spheres. Ann. Math., 1972, *96*, № 2, 407—411 (РЖМат, 1973, 3А621)
91. —, *Lawson H. B.*, Fibered knots and foliations of highly connected manifolds. Invent. Math., 1972, *17*, № 3, 203—215 (РЖМат, 1973, 3А620)
92. *Edwards R.*, A question concerning compact foliations. Lect. Notes Math., 1975, *468*, 2—4 (РЖМат, 1976, 3А654)
93. —, *Millett K.*, *Sullivan D.*, Foliations with all leaves compact. Topology, 1977, *16*, № 1, 13—32 (РЖМат, 1977, 9А718)
94. *Epstein D. B. A.*, The simplicity of certain groups of homeomorphisms. Compos. Math., 1970, *22*, № 2, 165—173 (РЖМат, 1972, 1А916)
95. —, Periodic flows on three-dimensional manifolds. Ann. Math. 1972, *95*, № 1, 66—82 (РЖМат, 1972, 7А749)
96. —, Foliations with all leaves compact. Lect. Notes Math., 1975, *468*, 1—2 (РЖМат, 1976, 3А650)

97. —, Foliations with all leaves compact. Ann. Inst. Fourier, 1976, *26*, № 1, 265—282, VIII (РЖМат, 1976, 11А707)
98. —, A topology for the space of foliations. Lect. Notes Math., 1977, *597*, 132—150 (РЖМат, 1978, 4А511)
99. —, *Millett K., Tischler D.,* Leaves without holonomy. J. London Math. Soc., 1977, *16*, № 3, 548—552 (РЖМат, 1978, 7А769)
100. —, *Rosenberg H.,* Stability of compact foliations. Lect. Notes Math., 1977, *597*, 151—160 (РЖМат, 1978, 4А512)
101. —, *Vogt E.,* A counterexample to the periodic orbit conjecture in codimension 3. Ann. Math., 1978, *108*, № 3, 539—552 (РЖМат, 1979, 7А658)
102. *Fedida E.,* Sur les feuilletages de Lie. C. r. Acad. sci., 1971, *272*, № 15, A999—A1001 (РЖМат, 1971, 9А520)
103. —, Structures différentiables sur le branchement simple et équations différentielles dans le plan. C. r. Acad. sci., 1973, *276*, № 26, A1657—A1659 (РЖМат, 1973, 12А519)
104. —, Sur l'existence des feuilletages de Lie. C. r. Acad. sci., 1974, *A278*, № 12, 835—837 (РЖМат, 1974, 9А699)
105. —, Sur la théorie des feuilletages associée au repère mobile: cas des feuilletages de Lie. Lect. Notes Math., 1978, *652*, 183—195 (РЖМат, 1978, 12А992)
106. *Franks J. M.,* Two foliations in the plane. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *58*, 262—264 (РЖМат, 1977, 8А617)
107. —, Holonomy invariant cochains for foliations. Proc. Amer. Math. Soc., 1977, *62*, № 1, 161—164 (РЖМат, 1978, 1А570)
108. *Freeman M.,* Local complex foliation of real submanifolds. Math. Ann., 1974, *209*, № 1, 1—30 (РЖМат, 1975, 1А687)
109. —, The Levi form and local complex foliations. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *57*, № 2, 369—370 (РЖМат, 1977, 5А479)
110. *Fuchs D. B.,* Non-trivialité des classes caractéristiques de $\mathfrak{g}$-structures. Applications aux classes caractéristiques des feuilletages. C. r. Acad. sci., 1977, *284*, № 17, A1017—A1019 (РЖМат, 1977, 12А697)
111. —, Non-trivialité des classescaractéristiques de $\mathfrak{g}$-structures. Applications aux variations des classes caractéristiques de feuilletages. C. r. Acad. sci., 1977, *284*, № 18, A1105—A1107 (РЖМат, 1977, 12А698)
112. —, *Gabrielov A. M., Gel'fand I. M.,* The Gauss — Bonnet theorem and the Atiyah — Patodi — Singer functionals for the characteristic classes of foliations. Topology, 1976, *15*, № 2, 165—188 (РЖМат, 1976, 12А692)
113. *Fukui K.,* Codimension 1 foliations on simply connected 5-manifolds. Proc. Jap. Acad., 1973, *49*, № 6, 432—434 (РЖМат, 1974, 4А470)
114. —, An application of the Morse theory to foliated manifolds. Nagoya Math. J., 1974, *54*, 165—178 (РЖМат, 1975, 1А688)
115. —, On the foliated cobordisms of codimension-one foliated 3-manifolds. Кёто сангё дайгаку ронсю. Сидзен кагаку кейрэцу. Acta hum. et sci. univ. sangio Kiotiensis Nat. Sci. Ser., 1978, 7, № 4, 42—49 (РЖМат, 1979, 5А541)
116. *Furness P. M. D.,* Affine foliations of codimension one. Quart. J. Math., 1974, *25*, № 98, 151—161 (РЖМат, 1975, 2А610)
117. —, *Fedida E.,* Feuilletages transversalement affines de codimension 1. C. r. Acad. sci., 1976, *282*, № 16, A825—A827 (РЖМат, 1977, 1А561)
118. *Garançon M.,* Homotopie et holonomie de certains feuilletages de codimension 1. Ann. Inst. Fourier, 1972, *22*, № 2, 61—71, X (РЖМат, 1973, 1А583)
119. —, Feuilletages transversalement analytiques de codimension 1 admettant une transversale fermée qui coupe toutes les feuilles. Ann. Inst. Fourier, 1972, *22*, № 4, 271—287, XI (РЖМат, 1973, 6А653)
120. *Gardner R. B.,* Differential geometry and foliations: the Godbillon—Vey invariant and the Bott — Pasternack vanishing theorems. Lect. Notes Math., 1978, *652*, 75—94 (РЖМат, 1978, 12А986)
121. *Gauld D.,* Foliations on topological manifolds. Math. Chron., 1972, *2*, № 1-2, 29—41 (РЖМат, 1974, 7А710)

122. *Godbillon C.,* Feuilletages ayant la propriété du prolongement des homotopies. Thèse Doct. sci. math. Fac. sci. Univ. Strasbourg, 1967, 79 p. (РЖМат, 1970, 6А446)
123. —, Problèmes d'existence et d'homotopie dans les feuilletages. Lect. Notes Math., 1971, *244*, 167—181 (РЖМат, 1972, 5А561)
124. —, Fibrés en droites et feuilletages du plan. Enseign. math., 1972 (1973), *18*, № 3-4, 213—224 (РЖМат, 1973, 8А491)
125. —, Cohomologies d'algèbres de Lie de champs de vecteurs formels. Lect. Notes Math., 1974, *383*, 69—87 (РЖМат, 1975, 1А430)
126. —, Feuilletages de Lie. Lect. Notes Math., 1974, *392*, 10—13 (РЖМат, 1975, 1А690)
127. —, Invariants of foliations. Global Anal. and Appl. Lect. Int. Semin. Course Trieste, 1972. Vol. 2. Vienna, 1974, 215—219 (РЖМат, 1975, 6А712)
128. —, *Vey J.,* Un invariant des feuilletages de codimension 1. C. r. Acad. sci., 1971, *273*, № 2, A92—A95 (РЖМат, 1972, 1А928)
129. *Golbus B. F.,* On the singularities of foliations and of vector bundle maps. Bol. Soc. brasil. mat., 1976, *7*, № 1, 11—35 (РЖМат, 1979, 1А693)
130. —, On extending local foliations. Quart. J. Math., 1977, *28*, № 110, 163—176 (РЖМат, 1978, 3А434)
131. *Goldman R.,* The holonomy ring on the leaves of foliated manifolds. J. Different. Geom., 1976, *11*, № 9, 411—449 (РЖМат, 1977, 11А546)
132. *Goodman S.,* Closed leaves in foliated 3-manifolds. Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1974, *71*, № 11, 4414—4415 (РЖМат, 1975, 5А613)
133. —, Closed leaves in foliations of codimension one. Comment. math. helv., 1975, *50*, № 3, 383—388 (РЖМат, 1976, 4А626)
134. —, On the structure of foliated 3-manifolds separated by a compact leaf. Invent. Math., 1977, *39*, № 3, 213—221 (РЖМат, 1977, 12А699)
135. *Guelorget S.,* Algèbre de Weil du groupe lineaire. Application aux classes caractéristiques d'un feuilletage. Lect. Notes Math., 1975, *484*, 179—191 (РЖМат, 1976, 4А632)
136. —, *Joubert G.,* Algèbre de Weil et classes caractéristiques d'un feuilletage. C. r. Acad. sci., 1973, *277*, № 1, A11—A14 (РЖМат, 1973, 12А533)
137. *Haefliger A.,* Sur les feuilletages analytiques. C. r. Acad. sci. 1956, *242*, № 25, 2908—2910 (РЖМат, 1957, 8520)
138. —, Feuilletages sur les variétés ouvertes. Topology, 1970, *9*, № 2, 183—194 (РЖМат, 1971, 1А496)
139. —, Homotopy and integrability. Lect. Notes Math., 1971, *197*, 133—163 (РЖМат, 1972, 1А857К)
140. —, Teorema de Bott sobre una obstruccion topologica a la integrabilidad completa. Rev. mat. hisp.-amer., 1972, *32*, № 1-2, 21—32 (РЖМат, 1972, 10А430)
141. —, Sur les classes caractéristiques des feuilletages. Lect. Notes Math., 1973, *317*, 239—260 (РЖМат, 1973, 7А593)
142. —, Cohomology of Lie algebras and foliations. Lect. Notes Math., 1978, *652*, 1—12 (РЖМат, 1978, 12А983)
143. *Hector G.,* Sur le type des feuilletages transverses de R^3. C. r. Acad. sci., 1971, *273*, № 18, A810—A813 (РЖМат, 1972, 4А706)
144. —, Ouverts incompressibles et théorème de Denjoy — Poincaré pour les feuilletages. C. r. Acad. sci., 1972, *274*, № 2, A159—A162 (РЖМат, 1972, 8А639)
145. —, Ouverts incompressibles et structure des feuilletages de codimension 1. C. r. Acad. sci., 1972, *274*, A741—A744 (РЖМат, 1972, 8А640)
146. —, Sur les feuilletages presque sans holonomie. C. r. Acad. Sci., 1972, *274*, № 24, A1703—A1706 (РЖМат, 1973, 1А582)
147. —, Actions de groupes de diffeomorphismes de {0, 1}. Lect. Notes Math., 1974, *392*, 14—22 (РЖМат, 1975, 1А684)
148. —, Quelques exemples de feuilletages espèces rares. Ann. Inst. Fourier, 1976, *26*, № 1, 239—264, XI (РЖМат, 1976, 12А693)
149. —, Feuilletages en cylindres. Lect. Notes math., 1977, *597*, 252—270 (РЖМат, 1978, 4А516)

150. —, Leaves whose growth is neither exponential nor polynomial. Topology, 1977, *16*, № 4, 451—459 (РЖМат, 1978, 8А598)
151. —, Croissance des feuilletages presque sans holonomie. Lect. Notes Math., 1978, *652*, 141—182 (РЖМат, 1978, 12А991)
152. *Heitsch J. L.*, Deformations of secondary characteristic classes. Topology, 1973, *12*, № 4, 381—388 (РЖМат, 1974, 6А710)
153. —, A cohomology for foliated manifoids. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, *79*, № 6, 1283—1285 (РЖМат, 1974, 11А684)
154. —, A cohomology for foliated manifolds. Comment. math. helv., 1975, *50*, № 2, 197—218 (РЖМат, 1976, 2А720)
155. —, A remark on the residue theorem of Bott. Indiana Univ. Math. J., 1976, *25*, № 12, 1139—1147 (РЖМат, 1977, 8А621)
156. —, Residues and characteristic classes of foliations. Bull. Amer. Math. Soc., 1977, *83*, № 3, 397—399 (РЖМат, 1978, 3А432)
157. —, Independent variations of secondary classes. Ann. Math., 1978, *108*, № 3, 421—460 (РЖМат, 1979, 7А654)
158. —, Derivatives of secondary characteristic classes. J. Different. Geom., 1978, *13*, 311—339 (РЖМат, 1980, 6А658)
159. *Hermann M. R.*, The Godbillon — Vey invariant of foliations by planes of T^3. Lect. Notes Math., 1977, *597*, 294—307 (РЖМат, 1978, 3А433)
160. *Hirsch M.*, Foliated bundles, flat manifolds and invariant measures. Lect. Notes Math., 1975, *468*, 8—9 (РЖМат, 1976, 3А656)
161. —, A stable analytic foliation with only exceptional minimal sets. Lect. Notes Math., 1975, *468*, 9—10 (РЖМат, 1976, 3А658)
162. —, *Thurston W. P.*, Foliated bundles, invariant measures and flat manifolds. Ann. Math., 1975, *101*, № 3, 369—390 (РЖМат, 1976, 1А729)
163. *Holmann H.*, Holomorphe Blätterungen komplexen Räume. Comment. math. helv., 1972, *47*, № 2, 185—204 (РЖМат, 1973, 5А595)
164. —, On the stability of holomorphic foliations with all leaves compact. Lect. Notes Math., 1978, *683*, 217—248 (РЖМат, 1979, 7А656)
165. *Ikegami G.*, Existence of regular coverings associated with leaves of codimension one foliations. Nagoya Math. J., 1977, *67*, 15—34 (РЖМат, 1978, 4А515)
166. *Imanishi Hideki*, Sur l'existence des feuilletages S^1-invariants. J. Math. Kyoto Univ., 1972, *12*, № 2, 297—305 (РЖМат, 1973, 3А619)
167. *Inaba T.*, On stability of proper leaves of codimension one foliations. J. Math. Soc. Jap., 1977, *29*, № 4, 771—778 (РЖМат, 1978, 9А595)
168. *Jekel S.*, On two theorems of A. Haefliger concerning foliations. Topology, 1976, *15*, № 3, 267—271 (РЖМат, 1977, 3А551)
169. —, Simplicial $K(G, 1)$'s. Manuscr. math., 1977, *21*, № 2, 189—203 (РЖМат, 1978, 2А584)
170. —, A note on the perfection of the fundamental group of the classifying space for codimension one real analytic foliations. Bol. Soc. mat. mex., 1977, *22*, № 2, 58—59 (РЖМат, 1979, 11А542)
171. *Johnson D. L.*, *Witt L. B.*, Totally geodesic foliations on 3-manifolds. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *76*, № 2, 355—357 (РЖМат, 1980, 3А483)
172. *Jouanolou J. P.*, Feuilles compactes des feuilletages algébriques. Math. Ann., 1979, *241*, № 1, 69—72 (РЖМат, 1979, 12А668)
173. *Joubert G.*, Estructuras foliadas. Rev. colomb. mat., 1968, *2*, № 4, 105—116 (РЖМат, 1970, 6А445)
174. —, *Moussu R.*, El teorema de Novikov. Rev. colomb. mat., 1968, *2*, № 4, 117—123 (РЖМат, 1970, 3А674)
175. —, —, Feuilletage sans holonomie d'une variété fermée. C. r. Acad. sci., 1970, *270*, № 8, А507—А509 (РЖМат, 1970, 9А434)
176. —, —, *Tischler D.*, Sur les classes caractéristiques des feuilletages produits. C. r. Acad. sci., 1972, *275*, № 3, А171—А174 (РЖМат, 1973, 2А496)
177. *Kamber F. W.*, *Tondeur Ph.*, Cohomologie des algèbres de Weil relatives tronquées. C. r. Acad. sci., 1973, *276*, № 6, А459—А462 (РЖМат, 1973, 7А594)

178. —, —, Algèbres de Weil semi-simpliciales. C. r. Acad. sci., 1973, *276*, № 18, A1177—A1179 (РЖМат, 1973, 11A492)
C. r. Acad. sci., 1973, *276*, № 21, A1407—A1410 (РЖМат, 1973, 11A493)
179. —, —, Homomorphisme caractéristique d'un fibré principal feuilleté. C. r. Acad. sci., 1973, *276*, № 21, A1407—A1410 (РЖМат, 1973, 11A493)
180. —, —, Classes caractéristiques dérivées d'un fibré principal feuilleté. C. r. Acad. sci., 1973, *276*, № 22, A1449—A1452 (РЖМат, 1973, 11A494)
181. —, —, Characteristic invariants of foliated bundles. Manuscr. math., 1974, *11*, № 1, 51—89 (РЖМат, 1974, 5A612)
182. —, —, Classes caractéristiques généralisées des fibrés feuilletés localement homogènes. C. r. Acad. sci., 1974, *A279*, № 25, 847—850 (РЖМат, 1975, 6A716)
183. —, —, Quelques classes caractéristiques généralisées non triviales de fibrés feuilletés. C. r. Acad. sci., 1974, *A279*, № 26, 921—924 (РЖМат, 1975, 6A717)
184. —, —, Semisimplicial Weil algebras and characteristic classes for foliated bundles in Čech cohomology. «Proc. Symp. Pure Math., Stanford, Calif., 1973. Vol. 27. Part 1. Providence, 1975, 283—294 (РЖМат, 1976, 7A775)
185. —, —, Foliated bundles and characteristic classes. Lect. Notes Math., 1975, *493*, 207 pp. (РЖМат, 1976, 8A774)
186. —, —, Classes caractéristiques et suite spectrales d'Eilenberg — Moore. C. r. Acad. sci., 1976, *283*, № 12, A883—A886 (РЖМат, 1977, 8A618)
187. —, —, *G*-foliations and their characteristic classes. Bull. Amer. Math. Soc., 1978, *84*, № 6, 1086—1124 (РЖМат, 1979, 8A606)
188. *Kanie Y.*, Cohomologies of Lie algebras of vector fields with coefficients in adjoint representations. Foliated case. Publs Res. Inst. Math. Sci., 1978, *14*, № 2, 487—501 (РЖМат, 1979, 5A539)
189. *Kaup B.*, Ein geometrisches Endlichkeitskriterium für Untergruppen von Aut(**C**, 0) und holomorphe 1-codimensionale Blätterungen. Comment. math. helv., 1978, *53*, № 2, 295—299 (РЖМат, 1978, 11A647)
190. *Koschorke U.*, Singularities and bordisms of *q*-plane fields and of foliations. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, *80*, № 4, 760—765 (РЖМат, 1975, 3A639)
191. —, Line fields transversal to foliations. Proc. Symp. Pure Math. Stanford, Calif., 1973. Vol. 27. Part 1. Providence, 1975, 295—301 (РЖМат, 1976, 7A771)
192. *Lamoureux C.*, Feuilletages de codimension 1. Transversales fermées. C. r. Acad. sci., 1970, *270*, № 25, A1659—A1662 (РЖМат, 1971, 1A497)
193. —, Feuilletages de codimension 1. Holonomie et homotopie. C. r. Acad. sci., 1970, *270*, № 26, A1718—A1721 (РЖМат, 1971, 1A495)
194. —, Une condition pour qu'une feuille soit propre et ait une enveloppe composée de feuilles fermées. C. r. Acad. sci., 1972, *274*, № 1, A31—A34 (РЖМат, 1972, 6A572)
195. —, Feuilles fermées et captage; applications. C. r. Acad. sci. 1973, *277*, № 13, A579—A581 (РЖМат, 1974, 5A606)
196. —, Feuilles exceptionelles, feuilles denses, homologie et captage. C. r. Acad. sci., 1973, *277*, № 21, A1041—A1043 (РЖМат, 1974, 5A607)
197. —, Sur quelques phénomènes de captage. Ann. Inst. Fourier, 1973 (1974), *23*, № 4, 229—243, XI (РЖМат, 1974, 10A484)
198. —, The structure of foliations without holonomy on non-compact manifolds with fundamental group *Z*. Topology, 1974, 13, № 3, 219—224 (РЖМат, 1975, 2A611)
199. —, Quelques propriétés globales des feuilletages par des feuilles simplement connexes non-nécessairement bornées. C. r. Acad. sci., 1974, *A279*, № 23, 813—816 (РЖМат, 1975, 7A757)
200. —, Groupes d'homologie et d'homologie d'ordre superieur des variétés compactes ou non compactes feuilletées en codimension 1. C. r. Acad. sci., 1975, *280*, № 7, A411—A414 (РЖМат, 1975, 11A619)
201. —, Non-bounded leaves in codimension one foliations. Lect. Notes Math., 1975, *484*, 257—272 (РЖМат, 1976, 5A582)

202. —, Feuilles non captées et feuilles denses. Ann. Inst. Fourier, 1975, *25*, № 2, 285—293, XIV (РЖМат, 1976, 8A778)
203. —, Feuilletages des variétés compactes et non compactes. Ann. Inst. Fourier, 1976, *26*, № 2, 221—271, XI—XII (РЖМат, 1977, 3A553)
204. —, Holonomie et feuilles exceptionelles. Ann. Inst. Fourier, 1976, *26*, № 4, 273—300 (РЖМат, 1978, 1A569)
205. *Langevin R.*, Feuilletages tendus. Bull. Soc. Math. France, 1979, *107*, № 3, 277—281 (РЖМат, 1980, 1A714)
206. —, *Rosenberg H.*, On stability of compact leaves and fibrations. Topology, 1977, *16*, № 1, 107—111 (РЖМат, 1977, 10A431)
207. —, —, Integrable perturbations of fibrations and a theorem of Seifert. Lect. Notes Math., 1978, *652*, 122—127 (РЖМат, 1978, 12A989)
208. *Laudenbach F., Roussarie R.*, Un exemple de feuilletage sur S^3. Topology, 1970, *9*, № 1, 63—70 (РЖМат, 1970, 8A454)
209. *Lawson H. B.*, Codimension-one foliations of spheres. Bull. Amer. Math. Soc., 1971, *77*, № 3, 437—438 (РЖМат, 1971, 12A711)
210. —, Codimension-one foliations of spheres. Ann. Math., 1971, *94*, № 3, 494—503 (РЖМат, 1972, 4A704)
211. —, Foliations. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, *80*, № 3, 369—418 (РЖМат, 1975, 1A691)
212. *Lazarov C., Pasternack J. S.*, Secondary characteristic classes for Riemannian foliations. J. Different. Geom., 1976, *11*, № 3, 365—385 (РЖМат, 1977, 10A427)
213. —, —, Residues and characteristic classes for Riemannian foliations. J. Different. Geom., 1976, *11*, № 4, 599—612 (РЖМат, 1978, 4A510)
214. —, *Shulman H.*, Obstructions to foliation preserving Lie group actions. Topology, 1979, *18*, № 3, 255—256 (РЖМат, 1980, 3A482)
215. *Lehmann D.*, *I*-homotopie dans les espaces de connexions et classes exotiques de Chern — Simons. C. r. Acad. sci., 1972, *275*, № 18, A835—A838 (РЖМат, 1973, 4A655)
216. —, Classes caractéristiques exotiques et *J*-connesité des espases de connexions. Ann. Inst. Fourier, 1974, *24*, № 3, 267—300, XIV (РЖМат, 1975, 8A577)
217. —, Sur l'approximation de certains feuilletages nilpotents par des fibrations. C. r. Acad. sci., 1978, *AB286*, № 5, A251—A254 (РЖМат, 1978, 11A643)
218. —, Sur la généralization d'un théorème de Tischler à certains feuilletages nilpotents. Proc. Kon. ned. akad. wetensch., 1979, *A82*, № 2, 177—189 (РЖМат, 1980, 1A719)
219. —, *Martinez Gadea P.*, Classes caracteristicas exoticas. Tipo de homotopia racional y formas diferenciales. Gac. mat., 1974, *26*, № 5-6, 147—157 (РЖМат, 1975, 5A594)
220. *Leslie J.*, A remark on the group of automorphisms of a foliation having a dense leaf. J. Different. geom., 1972, *7*, № 3-4, 597—601 (РЖМат, 1974, 3A424)
221. *Levine H. I., Shub M.*, Stability of foliations. Trans. Amer. Math. Soc., 1973, *184*, Oct., 419—437 (РЖМат, 1974, 9A698)
222. *Levitt G.*, Feuilletages des variétés de dimension 3 qui sont des fibrés en cercles. Comment. math. helv., 1978, *53*, № 4, 572—594 (РЖМат, 1979, 5A540)
223. *Liang C.-C.*, Multifoliations on open manifolds. Math. Ann., 1976, *221*, № 2, 143—146 (РЖМат, 1976, 12A694)
224. —, On the volumepreserving foliations. Math. Ann., 1976, *223*, № 1, 13—17 (РЖМат, 1977, 3A552)
225. *Lichnerowicz A.*, Feuilletage et algèbre de Lie associées. C. r. Acad. sci., 1978, *AB286*, № 23, A1141—A1145 (РЖМат, 1979, 2A448)
226. *Lininger L.*, Codimension 1 foliations on manifolds with even index. Lect. Notes Math., 1975, *438*, 336—338 (РЖМат, 1976, 2A721)
227. *Martinet J.*, Classes caractéristiques des systèmes de Pfaff. Lect. Notes Math., 1974, *392*, 30—36 (РЖМат, 1975, 1A683)

228. *Masa X.*, Quelques propriétés des feuilletages de codimension 1 à connexion transverse projetable. C. r. Acad. sci., 1977, *284*, № 14, A811—A812 (РЖМат, 1977, 10A430)
229. *Mather J. N.*, On Haefliger's classifying space. I. Bull. Amer. Math. Soc., 1971, *77*, № 6, 1111—1115 (РЖМат, 1972, 6A574)
230. —, The vanishing of the homology of certain groups of homeomorphisms. Topology, 1971, *10*, № 4, 297—298 (РЖМат, 1972, 6A392)
231. —, Integrability in codimension 1. Comment. math. helv., 1973, *48*, № 2, 195—233 (РЖМат, 1974, 1A589)
232. —, Simplicity of certain groups of diffeomorphisms. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, *80*, № 2, 271—273 (РЖМат, 1974, 11A659)
233. —, Commutators of diffeomorphisms. Comment. math. helv., 1974, *49*, № 4, 512—528 (РЖМат, 1975, 6A703)
234. —, Commutators of diffeomorphisms. II. Comment. math. helv., 1975, *50*, № 1, 33—40 (РЖМат, 1975, 10A477)
235. —, Foliations and homology of groups of diffeomorphisms. Proc. Int. Congr. Math. Vancouver, 1974. Vol. 2. S. l., 1975, 35—37 (РЖМат, 1976, 10A373)
236. *Medina A.*, Nombres caractéristiques du fibré transverse à un feuilletage et champs de vecteurs feuilletés. C. r. Acad. sci., 1973, *276*, № 12, A863—A865 (РЖМат, 1973, 8A489)
237. —, Quelques remarques sur les feuilletages affines. C. r. Acad. sci., 1976, *282*, № 19, A1159—A1162 (РЖМат, 1977, 1A560)
238. —, Quelques remarques sur les feuilletages affines. Cah. topol. et géom. différent. Ch. Ehresmann, 1976, *17*, № 1, 59—68 (РЖМат, 1977, 4A610)
239. *Meyer J.*, *e*-foliations of codimension two. J. Different. Geom., 1977, *12*, № 4, 583—594 (РЖМат, 1979, 7A659)
240. *Milani A.*, *Rea C.*, Geometry and function algebra on pseudo-flat manifold. Ann. Suola norm. super. Pisa, Sci. fis., e mat., 1972, *26*, № 3, 695—709 (РЖМат, 1973, 5A597)
241. *Millett K.*, Compact foliations. Lect. Notes Math., 1975, *484*, 277—287 (РЖМат, 1976, 4A634)
242. *Miniconi M.*, Familles de feuilletages analytiques. C. r. Acad. sci., 1974, *A278*, № 4, 273—276 (РЖМат, 1974, 7A734)
243. *Mizutani T.*, Remarks on codimension one foliations of spheres. J. Math. Soc. Jap., 1972, *24*, № 4, 732—735 (РЖМат, 1973, 6A652)
244. —, Foliated cobordisms of S^3 and examples of foliated 4-manifolds. Topology, 1974, *13*, № 4, 353—362 (РЖМат, 1975, 6A714)
245. —, Foliations and foliated cobordisms of spheres in codimension one. J. Math. Soc. Jap., 1975, *27*, № 2, 264—280 (РЖМат, 1976, 3A652)
246. —, *Tsuboi T.*, Foliations without holonomy and foliated bundles. Sci. Repts Saitama Univ., 1979, *A9*, № 2, 45—55 (РЖМат, 1979, 12A669)
247. *Molino P.* *G*-structures plates et classes caractéristiques. C. r. Acad. sci., 1969, *269*, № 19, A917—919 (РЖМат, 1970, 7A540)
248. —, Classe d'Atiyah d'un feuilletage et connexions transverses projetables. C. r. Acad. sci., 1971, *272*, № 12, A779—A781 (РЖМат, 1971, 8A432)
249. —, Classes caractéristiques et obstruction d'Atiyah pour les fibrés principaux feuilletés. C. r. Acad. sci., 1971, *272*, № 21, A1376—A1378 (РЖМат, 1971, 11A528)
250. —, Feuilletages et classes caractéristiques. Symp. math. Conv. 1971—1972. Vol. 10. London — New York, 1972, 119—209 (РЖМат, 1973, 7A592)
251. —, Propriétés cohomologiques et propriétés topologiques des feuilletages à connexion transverse projetable. Topology, 1973, *12*, № 4, 317—325 (РЖМат, 1974, 7A727)
252. —, La classe d'Atiyah d'un feuilletage comme cocycle de deformation infinitésimale. C. r. Acad. sci., 1974, *A278*, № 10, 719—721 (РЖМат, 1974, 10A483)
253. —, Γ_q-structures partielles et classes de Bott — Haefliger. C. r. Acad. sci., 1975, *281*, № 5-8, A203—A206 (РЖМат, 1976, 4A627)

254. —, Sur la géométrie transverse des feuilletages. Ann. Inst. Fourier, 1975, *25*, № 2, 279—284, XIV (РЖМат, 1976, 7А769)
255. —, Feuilletages transversalement parallèlizables et feuilletages de Lie. Applications. C. r. Acad. sci., 1976, *282*, № 2, A99—A101 (РЖМат, 1976, 9А534)
256. —, Etude des feuilletages transversalement complets et applications. Ann. Sci. Ecole norm. super., 1977, *10*, № 3, 289—307 (РЖМат, 1978, 8А604)
257. —, Feuilletages riemanniens sur les variétés compactes; champs de Killing transverses. C. r. Acad. sci., 1979, *AB289*, № 7, A421—A423 (РЖМат, 1980, 6А657)
258. *Morgan A.*, Holonomy and metric properties of foliations in higher codimension. Proc. Amer. Math. Soc., 1976, *58*, 255—261 (РЖМат, 1977, 8А616)
259. *Morita S.*, A remark on the continuous variations of secondary characteristic classes for foliations. J. Math. Soc. Jap., 1977, *29*, № 2, 253—260 (РЖМат, 1978, 2А582)
260. —, Cartan connections and characteristic classes of foliations. Proc. Jap. Acad., 1977, *A53*, № 7, 211—214 (РЖМат, 1978, 8А601)
261. *Mostow M.*, Variations, characteristic classes, and the obstruction to mapping smooth to continuous cohomology. Trans. Amer. Math. Soc., 1978, *240*, 163—182 (РЖМат, 1979, 2А451)
262. *Moussu R.*, Sur un théorème de Novikov. Rev. colomb. mat., 1969, *3*, № 3, 51—81 (РЖМат, 1970, 7А545)
263. —, Feuilletage sans holonomie d'une variété fermée. C. r. Acad. sci., 1970, *270*, № 20, A1308—A1311 (РЖМат, 1970, 11А422)
264. —, Feuilletage de codimension 1 transverse au bord. C. r. Acad. sci., 1970, *271*, № 1, A15—A18 (РЖМат, 1971, 1А499)
265. —, Feuilletages presque sans holonomie. C. r. Acad. sci., 1971, *272*, № 2, A114—A117 (РЖМат, 1971, 6А598)
266. —, Sur les problèmes de classification de feuilletages. Rev. colomb. mat., 1972, *6*, № 3-4, 59—68 (РЖМат, 1973, 9А583)
267. —, Sur les classes exotiques des feuilletages. Lect. Notes Math., 1974, *392*, 37—42 (РЖМат, 1975, 1А689)
268. —, *Pelletier F.*, Sur le théorème de Poincaré — Bendixson. Ann. Inst. Fourier, 1974, *24*, № 1, 131—148, X (РЖМат, 1975, 3А637)
269. —, *Roussarie R.*, Une condition suffisante pour qu'un feuilletage soit sans holonomie. C. r. Acad. sci., 1970, *271*, № 4, A240—A243 (РЖМат, 1971, 2А514)
270. *Nishikawa S.*, Residues and secondary characteristic classes for projective foliations. Proc. Jap. Acad., 1978, *A54*, № 3, 79—82 (РЖМат, 1978, 11А640)
271. —, *Sato H.*, On characteristic classes of Riemannian, conformal and projective foliations. J. Math. Soc. Jap., 1976, *28*, № 2, 224—241 (РЖМат, 1977, 2А660)
272. —, *Takeuchi M.*, Г-foliations and semisimple flat homogeneous spaces. Tohôku Math. J., 1978, *30*, № 2, 307—335 (РЖМат, 1979, 2А449)
273. *Nishimori T.*, Isolated ends of open leaves of codimension-one foliations. Quart. J. Math., 1975, *26*, № 102, 159—167 (РЖМат, 1976, 3А651)
274. —, Compact leaves with Abelian holonomy. Tôhoku Math. J., 1975, *27*, № 2, 259—272 (РЖМат, 1976, 4А628)
275. —, Behaviour of leaves of codimension one foliations. Tôhoku Math. J., 1977, *29*, № 2, 255—273 (РЖМат, 1978, 5А540)
276. —, Ends of leaves of codimension-one foliations. Tôhoku Math. J., 1979, *31*, № 1, 1—22 (РЖМат, 1979, 10А423)
277. *Oshikiri Gen-ichi*, The surgery of codimension-one foliations. Tôhoku Math. J., 1979, *31*, № 1, 63—70 (РЖМат, 1979, 10А424)
278. *Palmeira C. F. B.*, Variétés ouvertes feuilletées par plans. C. r. Acad. sci., 1976, *283*, № 5, A237—A239 (РЖМат, 1977, 4А609)
279. —, Open manifolds foliated by planes. Ann. Math., 1978, *107*, № 1, 109—131 (РЖМат, 1978, 11А642)

280. *Pasternack J. S.,* Foliations and compact Lie groups actions. Comment. math. helv., 1971, *46*, № 4, 467—477 (РЖМат, 1972, 7А503)
281. —, Classifying spaces for Riemannian foliations. Proc. Symp. Pure Math., Stanford, Calif., 1973. Vol. 27, Part 1. Providence, 1975, 303—310 (РЖМат, 1976, 7А774)
282. *Phillips A.,* Smooth maps transverse to a foliation. Bull. Amer. Math. Soc., 1970, *76*, № 4, 792—797 (РЖМат, 1971, 2А513)
283. *Pittie H. V.,* The secondary characteristic classes of parabolic foliations. Comment. math. helv., 1979, *54*, 601—614 (РЖМат, 1980, 4А644)
284. *Plante J. F.,* Asymptotic properties of foliations. Comment. math. helv., 1972, *47*, № 4, 449—456 (РЖМат, 1973, 8А487)
285. —, A generalization of the Poincaré — Bendixson theorem for foliation of codimension one. Topology, 1973, *12*, № 2, 177—181 (РЖМат, 1973, 9А581)
286. —, On the existence of exceptional minimal sets in foliations of codimension one. J. Different. Equat., 1974, *15*, № 1, 178—194 (РЖМат, 1974, 7А729)
287. —, Foliations transverse to fibers of a bundle. Proc. Amer. Math. Soc., 1974, *24*, № 2, 631—635 (РЖМат, 1975, 2А615)
288. —, Foliations with measure preserving holonomy. Lect. Notes Math., 1975, *468*, 6—7 (РЖМат, 1976, 3А655)
289. —, Foliations with measure preserving holonomy. Ann. Math. 1975, *102*, № 2, 327—361 (РЖМат, 1976, 5А583)
290. —, *Thurston W.,* Polynomial growth in holonomy groups of foliations. Comment. math. helv., 1976, *51*, № 4, 567—584 (РЖМат, 1977, 9А720)
291. *Pradines J.,* Remarque sur le théorème d'annulation de Bott — Martinet. C. r. Acad. sci., 1976, *282*, № 10, A527—A529 (РЖМат, 1976, 11А671)
292. —, Un feuilletage sans holonomie transversale, dont le quotient n'est pas une *Q*-variété. C. r. Acad. sci., 1979, *AB288*, № 4, A245—A248 (РЖМат, 1979, 8А605)
293. *Quê Ngô van,* Feuilletage à singularités de variétés de dimension 3 (théorème de J. Wood). J. Different. Geom., 1972, *6*, № 4, 473—478 (РЖМат, 1973, 7А591)
294. *Rasmussen O. H.,* Foliations with bundle-like metric. Prepr. Ser. Mat. Inst. Aarhus univ., 1971—1972, № 26, 33 pp. (РЖМат, 1972, 12А470)
295. —, Locally free R^{n-1}-actions on M^n. Prepr. Ser. Mat. inst. Aarhus univ., 1971—1972, № 32, 13 pp. (РЖМат, 1972, 12А471)
296. —, Reeb foliations. Prepr. Ser. Mat. Inst. Aarhus Univ., 1973, № 58, 8 pp. (РЖМат, 1974, 1А586)
297. —, The horocyclic foliation. Prepr. Ser. Mat. Inst. Aarhus Univ., 1975—1976, № 3, 21 pp. (РЖМат, 1976, 7А778)
298. —, Exotic characteristic classes for holomorphic foliations. Invent. math., 1978, *46*, № 2, 153—171 (РЖМат, 1978, 11А645)
299. *Raymond B.,* Ensembles de Cantor et feuilletages. Thèse doct. sci. Univ. Paris, 1976, 67 pp. (РЖМат, 1979, 4А654)
300. *Rea C.,* Levi-flat submanifolds and holomorphic extension of foliations. Ann. Suola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1972, *26*, № 3, 665—681 (РЖМат, 1973, 5А596)
301. —, Varietà pseudo-piatte. Symp. math. Ist. naz. alta mat. Conv. nov., 1971-maggio 1972, Vol. 11. London — New York, 1973, 347—354 (РЖМат, 1974, 8А482)
302. *Reeb G.,* Sur certaines propriétés topologiques des variétés feuilletées. Actualité Sci. Indust. 1183, Hermann Paris, 1952
303. —, Structures feuilletées. Lect. Notes Math., 1978, *652*, 104—113 (РЖМат, 1978, 12А988)
304. *Reinhart B. L.,* Harmonic integrals on foliated manifolds. Amer. J. Math., 1959, *81*, № 2, 529—536 (РЖМат, 1961, 2А378)
305. —, Holonomy invariants for framed foliations. Lect. Notes Math., 1974, *392*, 47—52 (РЖМат, 1975, 1А685)

306. —, The second fundamental form of a plane field., J. Different. Geom., 1977, *12*, № 4, 619—627 (РЖМат, 1979, 7А653)
307. —, *Wood J. W.*, A metric formula for the Godbillon — Vey invariant for foliations. Proc. Amer. Math. Soc., 1973, *38*, № 2, 427—430 (РЖМат, 1973, 12А535)
308. *Roger C.*, Sur les classes charactéristiques des feuilletages donnés par des isométries. C. r. Acad. sci., 1973, *276*, № 18, A1185—A1188 (РЖМат, 1973, 11А508)
309. —, Étude des Γ-structures de codimension 1 sur la sphère S^2. Ann. Inst. Fourier,1973 (1974), *23*, № 4, 213—227, XI (РЖМат, 1974, 7А728)
310. —, Méthodes homotopiques et cohomologiques en théorie des feuilletages. Thèse doct. sci. math. Univ. Paris, 1976, 142 p. (РЖМат, 1979, 12А666Д)
311. *Rosenberg H.*, Feuilletages sur des sphères (d'après H. Blaine Lawson). Lect. Notes Math., 1971, *244*, 221—232 (РЖМат, 1972, 5А562)
312. —, Un contrexemple à la conjecture de Seifert (d'après P. Schweitzer). Lect. Notes Math., 1974, *383*, 294—306 (РЖМат, 1975, 1А654)
313. —, *Roussarie R.*, Reeb foliations. Ann. Math., 1970, *91*, № 1, 1—24 (РЖМат, 1971, 1А498)
314. —, —, Topological equivalence of Reeb foliations. Topology, 1970, *9*, № 3, 231—242 (РЖМат, 1971, 3А461)
315. —, —, Les feuilles exceptionelles ne sont pas exceptionelles. Comment. Math. helv., 1970, *45*, № 4, 517—523 (РЖМат, 1971, 6А597)
316. —, —, Some remarks on stability of foliations. J. Different. Geom., 1975, *10*, № 2, 207—219 (РЖМат, 1976, 1А765)
317. *Roussarie R.*, Sur les feuilletages des variétés de dimension trois. Thèse doct. sci. math. Fac. sci. Orsay Univ. Paris, 1969, 70 p. (РЖМат, 1971, 5А630Д)
318. —, Sur les feuilletages des variétés de dimension trois. Ann. Inst. Fourier, 1971, *21*, № 3, 18—82, IX (РЖМат, 1972, 6А571)
319. —, Phénomènes de stabilité et d'instabilité dans les feuilletages. Lect. Notes Math., 1974, *392*, 53—60 (РЖМат, 1975, 2А614)
320. —, Constructions de feuilletages (d'après W. Thurston). Lect. Notes Math., 1978, *677*, 138—154 (РЖМат, 1979, 7А655)
321. *Sacksteder R.*, A remark on Thurston's stability theorem. Ann. Inst. Fourier, 1975, *25*, № 2, 219—220, VII (РЖМат, 1976, 7А773)
322. *Sarkaria K. S.*, A finiteness theorem for foliated manifolds. J. Math. Soc. Jap., 1978, *30*, № 4, 687—696 (РЖМат, 1979, 7А657)
323. *Schwartz G. W.*, On the de Rham cohomology of the leaf space of a foliation. Topology, 1974, *13*, № 2, 185—187 (РЖМат, 1974, 11А680)
324. *Schweitzer P. A.*, Counterexample to the Seifert conjecture and opening leaves of foliations. Ann. Math., 1974, *100*, № 2, 386—400 (РЖМат, 1975, 4А627)
325. —, Compact leaves of foliations. Lect. Notes Math., 1975, *468*, 4—6 (РЖМат, 1976, 3А648)
326. —, Compact leaves of codimension one foliations. Lect. Notes Math., 1975, *484*, 273—276 (РЖМат, 1976, 3А647)
327. —, Codimension one plane fields and foliations. Proc. Symp. Pure Math., Stanford, Calif., 1973. Vol. 27. Part 1. Providence, 1975, 311—312 (РЖМат, 1976, 7А770)
328. —, Compact leaves of foliations. Proc. Int. Congr. Math. Vancouver, 1974. Vol. 1. S. l., 1975, 543—546 (РЖМат, 1976, 11А706)
329. —, Some problems in foliation theory and related areas. Lect. Notes Math., 1978, *652*, 240—252 (РЖМат, 1978, 12А993)
330. —, *Whitman A. P.*, Pontryagin polynomial residues of isolated foliation singularities. Lect. Notes Math., 1978, *652*, 95—103 (РЖМат, 1978, 12А987)
331. *Sec A.*, Sur certaines equations de Pfaff completement integrables dans le champ complexe (propriétés du feuilletage associé). Lect. Notes Math., 1975, *484*, 224—233 (РЖМат, 1976, 5А584)

332. —, *Gérard R.*, Feuilletages de Painlevé et equations de Pfaff. C. r. Acad. sci., 1970, *270*, № 18, 1166—1169 (РЖМат, 1970, 10А384)
333. *Segal G.*, Classifying spaces related to foliations. Topology, 1978, *17*, № 4, 367—382 (РЖМат, 1979, 8А607)
334. *Sergeraert F.*, Feuilletages et difféomorphismes infinitement tangent à l'identité. Invent. Math., 1977, *39*, № 3, 253—275 (РЖМат, 1977, 12А700)
335. —, $B\Gamma$ (d'après Mather et Thurston). Lect. Notes Math., 1979, *710*, 300—315 (РЖМат, 1980, 1А717)
336. *Shulman H.*, Secondary obstruction to foliations, Topology, 1974, *13*, № 2, 177—183 (РЖМат, 1974, 11А681)
337. —, The double complex of Γ_k. Proc. Symp. Pure Math., Stanford, Calif., 1973. Vol. 27. Part 1. Providence, 1975, 313—314 (РЖМат, 1976, 7А703)
338. —, *Stasheff J.*, De Rham theory for $B\Gamma$. Lect. Notes Math., 1978, *652*, 62—74 (РЖМат, 1978, 12А985)
339. —, *Tischler D.*, Leaf invariants for foliations and the Van Est isomorphism. J. Different. Geom., 1976, *11*, № 4, 535—546 (РЖМат, 1978, 4А513)
340. *Silberstein E.*, Multifoliations on $M^n \times S^1$ where M^n is a stably parallelizable manifold. Proc. London Math. Soc., 1977, *35*, № 3, 463—482 (РЖМат, 1978, 7А771)
341. *Simonnet M.*, Feuilletages et sous-fibrés integrables. Esquis. math., 1977, № 28, 1—65 (РЖМат, 1979, 1А695)
342. *Smith J. W.*, Extending regular foliations. Ann. Inst. Fourier, 1969 (1970), *19*, № 2, 155—168, VI (РЖМат, 1970, 9А435)
343. *Sondow J. D.*, When is a manifold a leaf of some foliation? Bull. Amer. Math. Soc., 1975, *81*, № 3, Part 1, 622—624 (РЖМат, 1976, 3А657)
344. *Sullivan D.*, A new flow. Bull. Amer. Math. Soc., 1976, *82*, № 2, 331—332 (РЖМат, 1976, 12А683)
345. —, A generalization of Milnor's inequality concerning affine foliations and affine manifolds. Comment. math. helv., 1976, *51*, № 2, 183—189 (РЖМат, 1977, 2А661)
346. —, Cycles for the dynamical study of foliated manifolds and complex manifolds. Invent. math., 1976, *36*, 225—255 (РЖМат, 1977, 4А608)
347. —, A foliation of geodesics is characterized by having no «tangent homologies». J. Pure and Appl. Algebra, 1978, *13*, № 1, 101—104 (РЖМат, 1979, 2А450)
348. —, A homological characterization of foliations consisting of minimal surfaces. Comment. math. helv., 1979, *54*, № 2, 218—223 (РЖМат, 1979, 12А665)
349. *Suzuki H.*, Characteristic classes of foliated principal GL_r-bundle. Hokkaido Math. J., 1975, *4*, № 2, 159—168 (РЖМат, 1976, 3А649)
350. —, A property of charateristic class of an orbit foliation. London Math. Soc. Lect. Note Ser., 1977, № 26, 190—203 (РЖМат, 1978, 4А514)
351. *Tamura I.*, Spinnable structures on differentiable manifolds. Proc. Jap. Acad., 1972, *48*, № 5, 293—296 (РЖМат, 1973, 1А583)
352. —, Every odd dimensional sphere has a foliation of codimension one. Comment. math. helv., 1972, *47*, № 2, 164—170 (РЖМат, 1973, 5А592)
353. —, Foliations of total spaces of sphere bundles over spheres. J. Math. Soc. Jap., 1972, *24*, № 4, 698—700 (РЖМат, 1973, 6А651)
354. —, Foliations and spinnable structures on manifolds. Ann. Inst. Fourier, 1973, *23*, № 2, 197—214, X (РЖМат, 1973, 11А509)
355. —, The topology of foliations. Tokyo, Iwanami Shoten Publ., 1976, 228 pp. (РЖМат, 1978, 3А435К)
356. —, *Mizutani T.*, Null-cobordant codimension one foliation on S^{4n-1}. J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, 1977, Sec. 1A, *24*, № 1, 93—96 (РЖМат, 1978, 1А568)
357. *Tanre D.*, Groupes feuilletés. Esquis math., 1973, № 20, 1—35 (РЖМат, 1975, 2А613)
358. *Thurston W. P.*, Noncobordant foliations of S^3. Bull. Amer. Math. Soc., 1972, *78*, № 4, 511—514 (РЖМат, 1973, 2А495)

359. —, Foliations and groups of diffeomorphisms. Bull. Amer. Math. Soc., 1974, *80*, № 2, 304—307 (РЖМат, 1974, 11А682)
360. —, The theory of foliations of codimension greater than one. Comment. math. helv., 1974, *49*, № 2, 214—231 (РЖМат, 1975, 1А686)
361. —, A generalization of the Reeb stability theorem. Topology, 1974, *13*, № 4, 347—352 (РЖМат, 1975, 6А713)
362. —, The theory of foliations of codimension greater than one. Proc. Symp. Pure Math., Stanford, Calif., 1973. Vol. 27, Part 1. Providence, 1975, 320 (РЖМат, 1976, 7А766)
363. —, A local construction of foliations for three-manifolds. Proc. Symp. Pure Math., Stanford, Calif., 1973. Vol. 27, Part 1. Providence, 1975, 315—319 (РЖМат, 1976, 7А722)
364. —, On the construction and classification of foliations. Proc. Int. Congr. Math., Vancouver, 1974. Vol. 1. S. l., 1975, 547—549 (РЖМат, 1976, 11А708)
365. —, Existence of codimension one foliations. Ann. Math., 1976, *104*, № 2, 249—268 (РЖМат, 1977, 6А446)
366. *Ting W.-L.*, On nontrivial characteristic classes of contact foliations. Proc. Amer. Math. Soc., 1979, *75*, № 1, 131—138 (РЖМат, 1980, 1А715)
367. *Tsuboi T.*, Foliations with trivial $\mathcal{F}$-subgroups. Topology, 1979, *18*, № 3, 223—233 (РЖМат, 1980, 4А643)
368. *Vaisman I.*, Sur la cohomologie des variétés riemanniennes feuilletées. C. r. Acad. sci., 1969, *268*, № 13, A720—A723 (РЖМат, 1970, 2А534)
369. —, Sur la cohomologie des variétés analytiques complexes feuilletées. C. r. Acad. sci., 1971, *273*, № 22, A1067—A1070 (РЖМат, 1972, 5А587)
370. —, Sur l'existence des opérateurs différentiels feuilletés à symbole donné. C. r. Acad. sci., 1973, *276*, № 17, A1165—A1168 (РЖМат, 1973, 9А582)
371. —, Remarks about differential operators on foliate manifolds. An. şti. Univ. Iaşi, 1974, Sec. Ia, *20*, № 2, 327—350 (РЖМат, 1975, 10А480)
372. —, From the geometry of Hermitian foliate manifolds. Bull. math. Soc. sci. Math. RSR, 1973 (1974), *17*, № 1, 71—100 (РЖМат, 1975, 10А481)
373. —, On the differential geometry of the transverse bundle of a foliation. Rev. roum. math. pure et appl., 1975, *20*, № 1, 89—101 (РЖМат, 1976, 4А630)
374. —, A class of complex analytic foliate manifolds with rigid structure. J. Different. Geom., 1977, *12*, № 1, 119—131 (РЖМат, 1978, 11А641)
375. —, Conformal foliations. Kodai Math. J., 1979, *2*, № 1, 26—37 (РЖМат, 1979, 12А667)
376. *Vey J.*, Quelques constructions relatives aux Γ-structures. C. r. Acad. sci., 1973, *276*, № 17, A1151—A1153 (РЖМат, 1973, 9А579)
377. *Vogt E.*, Stable foliations of 4-manifolds by closed surfaces. I. Local structure and free actions of finite cyclic and dihedral groups on surfaces. Invent. math., 1973, *22*, № 3-4, 321—348 (РЖМат, 1974, 5А611)
378. —, Foliations of codimension two with all leaves compact. Manuscr. math., 1976. *18*, № 2, 187—212 (РЖМат, 1976, 10А372)
379. —, A periodic flow with infinite Epstein hierarchy. Manuscr. math., 1977, *22*, № 4, 403—412 (РЖМат, 1978, 8А596)
380. —, Foliations of codimension 2 with all leaves compact on closed 3-, 4-, and 5-manifolds. Math. Z., 1977, *157*, № 3, 201—223 (РЖМат, 1978, 9А594)
381. *Wagneur E.*, A generalization of Novikov's theorem to foliations with isolated generic singularities. «Topology and its Appl. Proc. Conf. Mem. Univ. Newfoundland. St. John's, Canada, 1973. Vol. 12». New York, 1975, 189—198 (РЖМат, 1976, 7А765)
382. —, Reduction des points singuliers des feuilletages à singularités non dégénérées de M^3. Can. Math. Bull., 1976, *19*, № 2, 221—230 (РЖМат, 1977, 8А614)
383. *Wallet G.*, Nullité de l'invariant de Godbillon — Vey d'un tore. C. r. Acad. sci., 1976, *283*, № 11, 821—823 (РЖМат, 1977, 6А445)

384. *Whiston G. S.,* Cobordism through one-codimensional foliations. J. Different. Geom., 1976, *11*, № 3, 475—478 (РЖМат, 1977, 11А545)
385. *Willmore T.*, Connexions and foliated structures, Sitzungsber. Berlin Math. Ges., 1969—1971. S. l., s. a., 14—15 (РЖМат, 1975, 4А628)
386. *Wilson F. W.*, Vector fields tangent to foliations. II. Handlebody foliations., J. Different. Equat., 1978, *27*, № 1, 46—63 (РЖМат, 1978, 9А596)
387. *Winkelnkemper H. E.,* Manifolds as open books. Bull. Amer. Math. Soc., 1973, *79*, № 1, 45—51 (РЖМат, 1973, 9А538)
388. *Wood J. W.,* Foliations on 3-manifolds. Doct. diss. Berkeley Univ. Calif., 1968, 33 p., Dissert. Abstr., 1969, *B29*, № 9, 3411—3412 (РЖМат, 1970, 5А494Д)
389. —, Foliations on 3-manifolds. Ann. Math., 1970, *89*, № 2, 336—358 (РЖМат, 1971, 2А512)
390. —, Foliations of codimension one. Bull. Amer. Math. Soc., 1970, *76*, № 5, 1107—1111 (РЖМат, 1971, 5А631)
391. *Yamato K.*, Qualitative theory of codimension-one foliations. Proc. Jap. Acad., 1972, *48*, № 6, 356—359 (РЖМат, 1973, 6А654)
392. —, Qualitative theory of codimension-one foliations. Nagoya Math. J., 1973, *49*, 155—229 (РЖМат, 1973, 8А490)
393. —, Examples of foliations with non trivial exotic characteristic classes. Proc. Jap. Acad., 1974, *50*, № 2, 127—129 (РЖМат, 1975, 10А483)
394. —, Examples of foliations with non trivial exotic characteristic classes. Osaka J. Math., 1975, *12*, № 2, 401—417 (РЖМат, 1976, 4А629)