Ya. S. Soibel'man, On the quantum flag manifold, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1992, Volume 26, Issue 3, 90–92

Пусть $\mathrm{sq}(V)$ — подсупералгебра Ли в $q(V)$, состоящая из операторов с нулевым нечетным следом. Обозначим через Z матрицу вида

$$\begin{pmatrix} Z_0 & Z_1 \\ Z_1 & Z_0 \end{pmatrix}, \quad Z_0=\{(v_t{}^*, v_s)\}, \quad Z_1=\{\langle v_t{}^*, v_s\rangle\}, \quad t, s\in I_{\bar 0}.$$

Через Y обозначим матрицу такого же вида с $Y_0=\{x_{ts}{}^*\}$, $Y_1=\{x_{it}{}^*\}$, i, $s\in I_{\bar 0}$, а $t\in I_{\bar 1}$. Можно показать, что для разбиения λ: $\lambda_1>\ldots>\lambda_n>0$ выражение $q_\lambda=\mathrm{otr}\,Z^{\lambda_1}\ldots\mathrm{otr}\,Z^{\lambda_n}\,\mathrm{odet}\,Y$ (где otr — нечетный след, а odet — нечетный определитель) является многочленом.

Теорема 7. *Базисным множеством инвариантов супералгебры Ли* $\mathrm{sq}(V)$ *являются*:

а) *скалярные произведения* $(v_t{}^*, v_s)$, $\langle v_t{}^*, v_s\rangle$, $t\in T^0$, $s\in S^0$;

б) *многочлены* q_λ, *где* λ *пробегает все разбиения вида* $\lambda_1>\ldots>\lambda_n>0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вейль Г.* Классические группы, их инварианты и представления.— М.: ИЛ, 1947. 2. *Лейтес Д. А.* Теория супермногообразий.— Петрозаводск, 1983. 3. *Сергеев А. Н.* // Мат. сб.— 1984.— Т. 123.— С. 422—430.

Саратовский политехнический институт, Балаковский филиал

Поступило в редакцию 15 октября 1990 г.

УДК 512.554.34-512.667.7

О КВАНТОВОМ МНОГООБРАЗИИ ФЛАГОВ

Я. С. Сойбельман

1. Квантовое многообразие флагов является интересным примером квантового G-пространства. Интерес к нему понятен, например, с точки зрения возможных приложений к (еще не построенной) «геометрической теории представлений» квантовых групп. Цель настоящей заметки — показать, что теоретико-представленческий подход из [1] переносится в квантовую ситуацию. Так же как и в других работах по квантовым многообразиям флагов (см. [5, 7, 8]), мы имеем дело с «общим» значением параметра квантования q (или, что более или менее одно и то же, с алгебрами над кольцом формальных рядов $\mathbb{C}[[h]]$). Заметим, что, в отличие от [4, 5, 7, 8], наш подход не ограничен конечномерностью квантовой группы. Но мы приводим лишь конечномерные результаты.

2. Пусть $\Lambda\in P_+$ — доминантный вес, $L(\Lambda)$ — конечномерный простой $U_q(\mathcal{G})$-модуль. Здесь $U_q(\mathcal{G})$ — квантованная универсальная обертывающая [2] конечномерной простой алгебры Ли $\mathcal{G}$. Пусть $v_\Lambda\in L(\Lambda)$ — старший вектор. Зафиксируем в $L(\Lambda)$ весовой базис $v_1=v_\Lambda$, v_2, $v_3, \ldots, v_N$, $N=\dim L(\Lambda)$. Под квантовым флаговым многообразием $\mathrm{P}\nu_\Lambda$ мы будем понимать проективизацию орбиты $\nu_\Lambda=G(\mathbb{C}v_1)$ прямой, проходящей через старший вектор [1], где G — соответствующая $\mathcal{G}$ простая группа Ли.

Определение 1. *Алгеброй регулярных функций на квантовом многообразии* ν_Λ (обозначение $\mathbb{C}[\nu_\Lambda]_q$) называется подалгебра в $\mathbb{C}[G]_q[G]$, порожденная матричными элементами вида $l(\rho_\Lambda(\xi)v_1)$, где $l\in L^*(\Lambda)$, ρ_Λ:

$U_q(\mathscr{G})\to\mathrm{End}\,L(\Lambda)$ – представление, соответствующее модулю $L(\Lambda)$, $\xi\in U_q(\mathscr{G})$.

Пусть $R\in U_q(\mathscr{G})^{\otimes 2}$ – универсальная квантовая R-матрица [2, 9, 11], $R^{\Lambda^*,\Lambda^*}=(\rho_\Lambda{}^*\otimes\rho_\Lambda{}^*)(R)\in\mathrm{End}\,L^*(\Lambda)$, $\check{R}^{\Lambda^*,\Lambda^*}=P_{\Lambda^*}R^{\Lambda^*,\Lambda^*}$, где $P_{\Lambda^*}\in\mathrm{End}\,L^*(\Lambda)$, $P_{\Lambda^*}(x\otimes y)=y\otimes x$.

Аналогичные операторы определим, заменив $L^*(\Lambda)$ на $L(\Lambda)$ и Λ^* – на Λ. Хорошо известно ([3], с. 39, замечание 4), что собственные значения эндоморфизма $\check{R}^{\Lambda^*,\Lambda^*}$ вещественны и сосредоточены вблизи точек 1 и -1. Пусть $T(L^*(\Lambda))=\mathbb{C}\oplus L^*(\Lambda)\oplus L^*(\Lambda)^{\otimes 2}$ – тензорная алгебра. Для любого векторного пространства $V\subset L^*(\Lambda)\otimes L^*(\Lambda)$ через $\langle V\rangle$ обозначим двусторонний идеал в $T(L^*(\Lambda))$, порожденный V.

Определение 2. *Алгеброй регулярных функций на векторном пространстве* $L(\Lambda)$ назовем $\mathbb{C}[L(\Lambda)]_q=T(L^*(\Lambda))/\langle\mathscr{L}_\Lambda\rangle$, где $\mathscr{L}_\Lambda=\bigcup_{\lambda_k<0}\mathrm{Ker}(\check{R}^{\Lambda^*,\Lambda^*}-\lambda_k)$, λ_k – собственное значение $\check{R}^{\Lambda^*,\Lambda^*}$.

Ясно, что при $q=1$ мы имеем $\mathbb{C}[L(\Lambda)]_1=\mathbb{C}[L(\Lambda)]=\mathrm{Sym}(L^*(\Lambda))$. Заметим, что при $q=1$ многообразия $L(\Lambda)$ и v_Λ являются G-пространствами.

Определение 3. Алгебра O называется *алгеброй функций на квантовом (левом) G-пространстве*, если A является (левым) $U_q(\mathscr{G})$-модулем, причем $m(\Delta(\xi)(\varphi\otimes\psi))=\xi(\varphi\psi)$, где Δ – коумножение в $U_q(\mathscr{G})$, $\varphi,\psi\in A$, $\xi\in U_q(\mathscr{G})$, m – умножение. Очевидно определяется морфизм квантовых G-пространств.

Замечание. Это определение недостаточно по ряду очевидных причин, но мы примем его в настоящей работе.

3. Пусть $L^*(\Lambda)^{\otimes k}=L^*(k\Lambda)\oplus\mathscr{I}_k{}^*$ – разложение в сумму $U_q(\mathscr{G})$-подмодулей. Здесь $L^*(\lambda)$ – дуальный к $L(\lambda)$ модуль.

Положим $\mathscr{I}^*=\bigoplus_{k\geqslant 2}\mathscr{I}_k{}^*$. Через π_1 обозначим проекцию $T(L^*(\Lambda))\to T(L^*(\Lambda))/\mathscr{I}^*=\bigoplus_{k\geqslant 0}L^*(k\Lambda)$. Векторное пространство $\bigotimes_{k\geqslant 0}L^*(k\Lambda)$ превратим в алгебру, снабдив его картановским произведением $L^*(k\Lambda)\otimes L^*(m\Lambda)\to L^*((k+m)\Lambda)$ [1].

Предложение 1. $\bigoplus_{k\geqslant 0}L^*(k\Lambda)$ *изоморфна* $\mathbb{C}[v_\Lambda]_q$ *как алгебра и как* $U_q(\mathscr{G})$*-модуль.*

Пусть $\{l_i\}_{i=1}^N$ — биортогональный к $\{v_i\}_{i=1}^N$ базис. $(\check{R}^{\Lambda,\Lambda})^2(v_i\otimes v_k)=\sum_{a,b}c_{ij}^{ab}v_a\otimes v_b$. Рассмотрим в $L^*(\Lambda)^{\otimes 2}$ векторное подпространство E_Λ, натянутое на векторы вида

$$\sum_{i,j}c_{ij}^{ab}l_i\otimes l_j-q^{2(\Lambda,\Lambda)}l_a\otimes l_b,\quad 1\leqslant a,b\leqslant N.$$

Положим $A_\Lambda=T(L^*(\Lambda))/\langle E_\Lambda\rangle$. Пусть q^C – квантовый аналог элемента Казимира C, определенный в [3, § 5], $c_\lambda=(\lambda+2\rho,\lambda)$.

Предложение 2. $\mathscr{I}_2{}^*=E_\Lambda=(q^C-q^{c_{2\Lambda}})(L^*(\Lambda)^{\otimes 2})$.

4. В случае $q=1$ основной результат о паре многообразий $L(\Lambda)$ и v_Λ состоит в том, что вложение $v_\Lambda\hookrightarrow L(\Lambda)$ является морфизмом G-пространств и ядро соответствующего эпиморфизма $\mathbb{C}[L(\Lambda)]\to\mathbb{C}[v_\Lambda]$ порождено квадратичными соотношениями Плюккера. Определим φ: $T(L^*(\Lambda))\to\mathbb{C}[v_\Lambda]_q$ формулой $(\varphi(l_1\otimes\ldots\otimes l_m)=(l_1\otimes\ldots\otimes l_m)(\rho_\Lambda{}^{\otimes m}(\xi)v_1{}^{\otimes m})$.

Предложение 3. *Существует морфизм квантовых $\mathscr{G}$-пространств* Φ: $\mathbb{C}[L(\Lambda)]_q\to\mathbb{C}[v_\Lambda]_q$ *такой, что следующая диаграмма коммутативна:*

$$\begin{tikzcd} T(L^*(\Lambda)) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi_2"'] & & C[\nu_\Lambda]_q \\ & C[L(\Lambda)]_q \arrow[ur, "\Phi"'] & \end{tikzcd}$$

Здесь вертикальная стрелка π_2 — это проекция $T(L^*(\Lambda)) \to T(L^*(\Lambda))/\langle \mathscr{L}_\Lambda \rangle$.

Гипотеза. *Двусторонний идеал* $\operatorname{Ker}\Phi$ *порожден подпространством* $\pi_2(E_\Lambda)$.

Заметим, что проекция π_2 наделяет $\mathbb{C}[L(\Lambda)]_q$ градуировкой и $\pi_2(E_\Lambda)$ имеет степень 2. Это квантовый аналог соотношений Плюккера.

5. Пусть $w \in W$ — произвольный элемент группы Вейля алгебры Ли $\mathscr{G}$. Рассмотрим в $\mathbb{C}[\nu_\Lambda]_q$ двусторонний идеал I_w, натянутый на матричные элементы $l(\rho_\Lambda(\xi)v_1)$ такие, что $l(\rho_\Lambda(v_{w\Lambda}))=0$ для любого $\eta \in U_q(b_-)$. Здесь $b_+ \subset \subset \mathscr{G}$ — борелевская подалгебра, $v_{w\Lambda} \in L(\Lambda)$ — элемент весового базиса, имеющий вес $w\Lambda$.

Эквивалентное описание I_w: он порожден матричными элементами $l_\mu^{(i)}(\rho_\Lambda(\xi)v_1)$ такими, что $\mu \not\geqslant w\Lambda$, где $l_\mu^{(i)}$ — функционал веса $-\mu$, $\lambda_1 \geqslant \lambda_2$ означает, что $\lambda_1 - \lambda_2 = \sum_i m_i \alpha_i$, причем $\{\alpha_i\}$ — простые корни, $m_i \geqslant 0$.

Определение 4. Алгебра $\mathbb{C}[\nu_\Lambda]_q/I_w$ называется *однородной координатной алгеброй (обобщенного) многообразия Шуберта* X_w и обозначается $\mathbb{C}[X_w]_q$. (Заметим, что $\mathbb{C}[X_{w_0}]_q = \mathbb{C}[\nu_\Lambda]_q$, где w_0 — элемент максимальной длины.)

Предложение 4. *Для любого* w $\mathbb{C}[X_w]_q$ *является алгеброй функций на квантовом* B_-*-пространстве.*

Если $w_1 \leqslant w_2$, то имеется эпиморфизм квантовых B_+-пространств $\mathbb{C}[X_{w_2}]_q \to \mathbb{C}[X_{w_1}]_q$.

6. Заключительные замечания.

1) В работе [5] для некоторых типов $\mathscr{G}$ построены базисы в $\mathbb{C}[X_e]_q$, составленные из стандартных мономов.

2) Бесконечномерный аналог результатов этой заметки в сочетании с [10] может быть полезен при построении q-аналога КП-иерархии в духе [12, гл. 14].

3) В [5] квантовое многообразие флагов G/B рассматривается как подмногообразие в квантовом $\prod_i G/P_i$, где P_i — максимальные параболические подгруппы. У нас квантовое G/B рассматривается как подмногообразие в квантовом проективном пространстве $\mathbb{P}L(\Lambda)$, где Λ — «достаточно большой» вес.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Kac V., Peterson D.* // Progr. in Math.— 1983.— V. 36.— P. 141—166. 2. *Дринфельд В. Г.* // Зап. науч. семин. ЛОМИ.— 1986.— Т. 155.— С. 19—49. 3. *Дринфельд В. Г.* // Алгебра и анализ.— 1989.— Т. 1, № 2.— С. 30—47. 4. *Manin Yu.* // Publ. CRM. Montreal.— 1988. 5. *Lakshmibai V., Reshetikhin N* // Prepr. Harkard Univ.— 1990. 6. *Сойбельман Я. С.* // Алгебра и анализ.— 1990.— Т. 2, № 1.— С. 190—212. 7. *Demidov E., Manin Yu., Mukhin E., Zhdanovich D.* // Prepr. RIMS.—1990. No 701. 8. *Taft E., Towber J.* // Preprint.— 1989. 9. *Levendorskii S., Soibelman Ya.* // Preprint.— 1990. 10. *Levendorskii S., Soibelman Ya.* // Geom. and Phys.— 1991. 11. *Kirillov A., Reshetikhin N.* // Commun. Math. Phys.—1991. 12. *Kac V.* Infinite dimensional Lie algebras.— CUP. 1985.

Ростовский государственный
университет

Поступило в редакцию
29 августа 1990 г