В. А. Гинзбург, Метод орбит в теории представлений комплексных групп Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 1981, том 15, выпуск 1, 23–37

Функциональный анализ и его приложения,
т. 15, вып. 1, 1981, 23—37.

УДК 519.46

МЕТОД ОРБИТ В ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ КОМПЛЕКСНЫХ ГРУПП ЛИ

В. А. Гинзбург

§ 1. Введение

Метод орбит (см. [2], [3], [13]) возник как способ конструирования большого запаса унитарных представлений произвольной группы Ли. Каждое представление определяется орбитой группы в пространстве, двойственном к ее алгебре Ли. По-видимому, в терминах орбиты можно дать характеристики соответствующего представления: вычислить его характер, спектр ограничения на подгруппу и т. д.

В работах французской школы алгебраический вариант метода орбит был применен для изучения обертывающих алгебр, их центров и примитивных идеалов (т. е. ядер неприводимых представлений). В частности, для разрешимых алгебр Ли удалось описать структуру тела частных обертывающей алгебры и указать все ее примитивные идеалы (см. [1], [4]). Подобные результаты доказываются индукцией по размерности алгебры Ли. Этот метод сталкивается с трудностями, если алгебра Ли неразрешима. Иногда возникающие трудности удается преодолеть, однако сложность соответствующих доказательств значительно возрастает. Предлагаемые в настоящей статье прямые методы позволяют как упростить доказательства некоторых известных теорем, так и получить новые результаты. Наш подход является промежуточным между аналитическим и алгебраическим. Он близок к теории квантования, связь которой с методом орбит была обнаружена Костантом [3].

Сформулируем вкратце основные результаты работы. Рассмотрим множество обобщенных функций, сосредоточенных в единице группы Ли G. Они образуют алгебру относительно свертки, которая есть не что иное, как обертывающая алгебра $U(\mathfrak{g})$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующей группе G. Если G есть $\mathbf{R}^n$, то преобразование Фурье устанавливает изоморфизм $U(\mathfrak{g})$ и алгебры многочленов. Оказывается, если G произвольна, то существует отображение (обозначаемое через J) алгебры $U(\mathfrak{g})$ в множество $\mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]$ полиномов на двойственном к $\mathfrak{g}$ пространстве $\mathfrak{g}^*$, играющее ту же роль, что преобразование Фурье в рассмотренном примере. Перенесем при помощи J умножение из $U(\mathfrak{g})$ в $\mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]$ (т. е. определим его формулой $\Phi \circ \Psi = J(J^{-1}\Phi * J^{-1}\Psi)$). В случае $G = \mathbf{R}^n$ эта операция является обычным произведением. В общем случае такая операция превращает пространство многочленов в алгебру H, изоморфную $U(\mathfrak{g})$. С помощью перехода от $U(\mathfrak{g})$ к H удается построить достаточно большую коммутативную подалгебру в $U(\mathfrak{g})$: соответствующая подалгебра в H состоит из всех многочленов, постоянных на определенных подмногообразиях в $\mathfrak{g}^*$.

Проиллюстрируем построение упомянутых подмногообразий на примере группы $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$. Можно проверить, что орбиты действия $G = \mathrm{SL}(2, \mathbf{R})$ в $\mathfrak{g}^*$, сопряженного к присоединенному действию в $\mathfrak{g}$,

суть гиперболоиды (или их компоненты) в трехмерном пространстве $\mathfrak{g}^*$. В подходящих декартовых координатах они задаются уравнениями $x^2 + y^2 = z^2 + c$. Рассмотрим область однополостных гиперболоидов ($c > 0$). Известно, что такой гиперболоид имеет систему линейных образующих. Она может быть выбрана двумя способами. Для каждого гиперболоида зафиксируем один из этих способов так, чтобы на близких гиперболоидах выбранные системы были согласованы. Определим A как подпространство тех многочленов, которые постоянны на каждой линейной образующей каждого гиперболоида. Оказывается, A — коммутативная подалгебра в H, причем операция в H совпадает на A с обычным умножением многочленов. Иными словами, сужение отображения J^{-1}: $\mathbf{C}[\mathfrak{g}^*] \to U(\mathfrak{g})$ на A является гомоморфизмом алгебр.

Подалгебру A, обладающую упомянутыми свойствами, можно выбрать в случае произвольной комплексной группы Ли G. В качестве следствия получаем следующий результат М. Дюфло (см. [1], [5], [8]): J есть изоморфизм центра $U(\mathfrak{g})$ на кольцо инвариантных относительно действия G многочленов на $\mathfrak{g}^*$. Для полупростых алгебр Ли этот факт открыл Хариш-Чандра.

Рассмотрим представление π_Ω алгебры Ли $\mathfrak{g}$, соответствующее орбите общего положения Ω. Продолжим его до представления алгебры $U(\mathfrak{g})$ и, отождествляя $U(\mathfrak{g})$ с H (при помощи J), будем рассматривать π_Ω как представление H. Оказывается, при этом элементы коммутативной подалгебры A перейдут в диагональные операторы. Более точно, π_Ω можно реализовать в пространстве сечений расслоения над орбитой Ω, и при этом функция $\Psi \in A$ переходит в оператор умножения на Ψ. В частности, центр $U(\mathfrak{g})$ переходит в скалярные операторы: $\pi_\Omega(z) = J(z)|_\Omega$.

Рассмотрим теперь π_Ω как унитарное представление группы G. Характер представления π_Ω есть обобщенная функция на G. Она тесно связана с δ-функцией орбиты Ω. Для орбит общего положения мы докажем, что (в соответствии с гипотезой Кириллова) $\operatorname{tr} \pi_\Omega = J^{-1}(\delta_\Omega)$.

Расположение материала в работе таково: основные определения, конструкции и теоремы (с набросками части доказательств) сосредоточены в § 2. В следующем параграфе мы доказываем главные результаты, для чего приходится «деформировать» алгебры Ли и их представления. Доказательства утверждений, касающихся поляризаций, перенесены в последний, четвертый параграф.

Основные результаты данной работы были анонсированы в [9]. Автор рад возможности поблагодарить А. А. Кириллова за стимулирующие беседы по теории представлений.

§ 2. Определения и основные результаты

Пусть G — связная комплексная группа Ли, $\mathfrak{g}$ — ее алгебра Ли. Пространство $\mathfrak{g}^*$, сопряженное к $\mathfrak{g}$, распадается на орбиты относительно действия G, двойственного к присоединенному. Каждая G-орбита является симплектическим многообразием. Напомним построение 2-формы на орбите. В соответствии с действием G в $\mathfrak{g}^*$ элементу $x \in \mathfrak{g}$ отвечает векторное поле ξ_x «инфинитезимального сдвига», касающееся орбит. Значение 2-формы на векторных полях ξ_x и ξ_y в точке f равно $f([x, y])$.

Подалгебра $\mathfrak{p}$ алгебры $\mathfrak{g}$, являющаяся в то же время максимальным изотропным подпространством формы $f([x, y])$ (определенной на $\mathfrak{g}$) называется *поляризацией* функционала f. Известно, что если орбита, проходящая через f, имеет максимальную размерность (в этом случае точка f называется *регулярной*), то поляризации функционала f существуют. Если, например, $\mathfrak{g}$ полупроста, а f — функционал, двойственный к век-

тору общего положения в картановской подалгебре, то в качестве $\mathfrak{p}$ можно взять подалгебру Бореля.

Каждая поляризация задает на орбите, содержащей f, лагранжево распределение в окрестности f. Чтобы его определить, нужно рассмотреть образ $\mathfrak{p}$ при отображении $x \mapsto \xi_x(f)$ алгебры $\mathfrak{g}$ на касательное пространство к орбите в точке f и разнести получившееся подпространство в другие точки орбиты. Можно проверить, что вблизи f результат не зависит от способа разнесения и определяет G-инвариантное интегрируемое лагранжево слоение в окрестности f. Мы получаем (локально) разбиение орбиты на слои. Другой способ получения слоя, проходящего через точку f, состоит в рассмотрении орбиты f относительно подгруппы P, соответствующей алгебре $\mathfrak{p}$.

Оказывается [13], каждый слой является «плоским». Точнее, пусть $\mathfrak{p}^\perp$ — подпространство $\mathfrak{g}^*$, состоящее из функционалов, аннулирующих $\mathfrak{p}$, тогда верно

П р е д л о ж е н и е 2.1. *Слой Pf есть открытое плотное множество в линейном многообразии $f + \mathfrak{p}^\perp$, дополнение которого — алгебраическое подмногообразие в $f + \mathfrak{p}^\perp$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Во-первых, $f + \mathfrak{p}^\perp$ устойчиво относительно P, поэтому $Pf \subset f + \mathfrak{p}^\perp$. Покажем, что Pf и $f + \mathfrak{p}^\perp$ имеют одинаковые размерности. Для $l \in \mathfrak{g}^*$ рассмотрим форму $B_l(x, y) = l([x, y])$, $x, y \in \mathfrak{g}$. Положим $n = {}^1/_2 \operatorname{rank} B_f$, тогда лагранжево многообразие Pf имеет размерность n. Если размерность ядра B_f равна k, то $\dim \mathfrak{g} = 2n + k$, $\dim \mathfrak{p} = n + k$, поэтому $\dim \mathfrak{p}^\perp = \dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{p} = n$.

На самом деле слой Pf совпадает с множеством $\mathcal{F}$ тех точек $l \in f + \mathfrak{p}^\perp$, для которых $\operatorname{rank} B_l \geqslant \operatorname{rank} B_f$. Действительно, размерность поляризации падает с ростом ранга B_f, значит, $\mathfrak{p}$ есть поляризация любой точки $\mathcal{F}$. Поэтому P-орбиты разбивают $\mathcal{F}$ на открытые множества. Но $\mathcal{F}$ связно, так как его дополнение есть комплексное подмногообразие в $f + \mathfrak{p}^\perp$, задаваемое уравнением $B_l \wedge \ldots \wedge B_l = 0$ (n сомножителей). Следовательно, $\mathcal{F}$ состоит из одной орбиты Pf. ■

Впоследствии мы увидим, что почти всегда $Pf = f + \mathfrak{p}^\perp$ (теорема 2.2).

Обсудим вопрос о том, когда заданное вблизи f лагранжево распределение можно продолжить на всю орбиту. Для этого необходимо и достаточно, чтобы лагранжево подпространство в точке f было инвариантно относительно действия ее стабилизатора $G(f)$. Это значит, что подалгебра $\mathfrak{p}$ должна быть устойчива относительно присоединенного действия группы $G(f)$. Такие поляризации $\mathfrak{p}$ мы будем называть *глобальными*. (Заметим, что $\mathfrak{p}$ автоматически инвариантна относительно связной компоненты группы $G(f)$, так как ее алгебра Ли содержится в $\mathfrak{p}$. Поэтому вопрос о глобальности поляризаций возникает, только если $G(f)$ не связна.)

Рассмотрим замкнутую подгруппу $P^\#$ тех элементов G, которые переводят $f + \mathfrak{p}^\perp$ в себя. Алгебра Ли группы $P^\#$ есть $\mathfrak{p}$, поэтому группа P совпадает со связной компонентой группы $P^\#$. В частности, P замкнута. При доказательстве предложения 2.1 мы видели, что слой $\mathcal{F}$ состоит из всех точек l, для которых ранг B_l максимален. Следовательно, $P^\#$ совпадает с подгруппой элементов G, сохраняющих слой $\mathcal{F}$. Если $\mathfrak{p}$ — глобальная поляризация, то $P^\# = G(f) \cdot P$, так как P транзитивно действует на слое.

В § 4 будет доказана

Т е о р е м а 2.2. *Пусть f — точка общего положения в $\mathfrak{g}^*$.*

а) *Существует поляризация $\mathfrak{p}$, удовлетворяющая условию Пуканского*: $Pf = f + \mathfrak{p}^\perp$.

б) *Если стабилизатор $G(f)$ точки f коммутативен, то существует глобальная поляризация $\mathfrak{p}$, инвариантная относительно $G(f)$ и удовлетворяющая условию Пуканского.*

Можно показать, что если G — алгебраическая группа и f — точка общего положения в $\mathfrak{g}^*$, то для коммутативности $G(f)$ достаточно, чтобы фундаментальная группа орбиты, содержащей f, была коммутативной.

Начиная с этого момента, вплоть до конца § 3 мы будем рассматривать комплексную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ как вещественную и через $\mathfrak{g}^*$ обозначать пространство вещественных функционалов на $\mathfrak{g}$.

Перейдем к определению отображения J, переводящего функции на G в функции на $\mathfrak{g}^*$. Рассмотрим открытое множество

$$\{x \in \mathfrak{g} : |\text{ мнимые части собственных значений ad } x \,| < \pi\}$$

в $\mathfrak{g}$. Оно диффеоморфно отображается при отображении $\exp\colon \mathfrak{g} \to G$ на свой образ W. Для функции φ с носителем в W функция $J(\varphi)$ определяется так: нужно перенести φ при помощи exp на $\mathfrak{g}$, затем умножить на функцию $j(x) = \det S(\operatorname{ad} x)$, где $S(t) = \left(\frac{\exp(t/2) - \exp(-t/2)}{t}\right)^{1/2}$. Применение к получившейся функции преобразования Фурье даст нам быстро убывающую функцию $J(\varphi)$ на $\mathfrak{g}^*$. Аналогично отображение J определяется для обобщенных функций на W, при этом J переводит обобщенные функции, сосредоточенные в единице группы, в полиномы.

Выбор функции j объясняется следующим. Пусть $f \in \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{p}$ — поляризация f, $\mathcal{F}$ — слой, проходящий через f, а δ_P и $\delta_{\mathcal{F}}$ суть δ-функции многообразий P и $\mathcal{F}$, определяемые соответственно мерой Хаара на P и мерой Лебега на $f + \mathfrak{p}^{\perp}$. Рассмотрим характер χ_f группы P (корректно определенный на $P \cap W$), дифференциал которого равен $2\pi i f(x) - {}^1/_2 \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \operatorname{ad} x$. Пусть $\overline{\chi}_f$ — комплексно сопряженный характер.

Предложение 2.3 *Пусть точка $f \in \mathfrak{g}^*$ регулярна. Можно так выбрать разрешимую поляризацию $\mathfrak{p}$, что $J(\overline{\chi}_f \cdot \delta_P) = \delta_{\mathcal{F}}$ и для всякой функции φ с носителем в W имеем $\langle \chi_f \cdot \delta_P, \varphi \rangle = \langle \delta_{\mathcal{F}}, J(\varphi) \rangle$. Если алгебра $\mathfrak{g}$ алгебраическая, то в качестве $\mathfrak{p}$ можно взять любую поляризацию, удовлетворяющую условию Пуканского.*

Докажем, что $J(\overline{\chi}_f \cdot \delta_P) = \delta_{\mathcal{F}}$ (второе утверждение аналогично). При перенесении на алгебру Ли $\overline{\chi}_f \cdot \delta_P$ перейдет в

$$\exp(-2\pi i f(x) - {}^1/_2 \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \operatorname{ad} x) \cdot \mu_P(x) / \mu_G(x) \cdot \delta_{\mathfrak{p}},$$

где μ_P и μ_G — якобианы перехода от P к $\mathfrak{p}$ и от G к $\mathfrak{g}$ соответственно. Эту функцию нужно умножить на $j(x)$ и сравнить с $F^{-1}(\delta_{\mathcal{F}})$ (F — преобразование Фурье). Так как $\mathcal{F}$ — подмножество полной меры в $f + \mathfrak{p}^{\perp}$, то $F^{-1}(\delta_{\mathcal{F}})$ совпадает с $F^{-1}(\delta_{f+\mathfrak{p}^{\perp}})$, которое равно $\exp(-2\pi i f(x)) \cdot \delta_{\mathfrak{p}}$. Остается проверить, что

$$\mu_G(x) = j(x) \cdot \mu_P(x) \cdot \exp(-{}^1/_2 \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \operatorname{ad} x) \quad \text{при} \quad x \in \mathfrak{p}.$$

Воспользуемся леммой, доказательство которой будет дано в § 4.

Лемма 2.4. *Если f регулярен, то существует такая разрешимая поляризация $\mathfrak{p}$, что $\forall x \in \mathfrak{p}$ — ненулевые собственные значения оператора* ad x *в пространствах $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ противоположны по знаку (с учетом кратностей).*

Такие поляризации мы будем называть *допустимыми*.

Замечание. Смысл леммы прозрачен, если $\mathfrak{p}$ — подалгебра Бореля полупростой алгебры $\mathfrak{g}$, а x — элемент подалгебры Картана.

Используя лемму и известные выражения для μ_G и μ_P (см. [2]), находим

$$\mu_P(x) = \prod_\lambda \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}, \quad \mu_G(x) = \prod_\lambda \frac{(1 - e^{-\lambda})}{\lambda} \cdot \frac{(e^{\lambda} - 1)}{\lambda}, \quad j(x) = \prod_\lambda \frac{e^{\lambda/2} - e^{-\lambda/2}}{\lambda},$$

где λ пробегает ненулевые собственные значения ad x в $\mathfrak{p}$. Утверждение теперь очевидно. ■

Перейдем к унитарным представлениям группы G. Пусть $P^\#$ — глобальная поляризация $f \in \mathfrak{g}^*$. Предположим, что характер χ_f продолжается (с $P \cap W$) на всю группу $P^\#$. В этом случае можно определить представление группы G, индуцированное с характера χ_f подгруппы $P^\#$, т. е. представление в пространстве функций на G, удовлетворяющих условию $s(pg) = \chi_f(p) \cdot s(g)$, $p \in P^\#$, $g \in G$. Группа G действует в этом пространстве правыми сдвигами. Соответствующее представление обозначим через π_f. Если вместо f взять другую точку той же орбиты и выбрать ее поляризацию и характер, получающиеся из $P^\#$ и χ_f сопряжением, то получившееся представление будет эквивалентно π_f. Представление π_f унитарно. Его геометрический смысл будет объяснен ниже, а сейчас вычислим характер π_f.

Пусть G — комплексная алгебраическая группа, f — точка орбиты Ω максимальной размерности и $G(f)$ — ее стабилизатор. Предположим, что функционал $2\pi i f$ на алгебре Ли группы $G(f)$ продолжается до характера $G(f)$ (так как $G(f) \subset P^\#$, то это условие необходимо для того, чтобы существовал характер χ_f группы $P^\#$). При этих условиях верна (ср. с [14])

Т е о р е м а 2.5. *Пусть $P^\#$ — глобальная поляризация f, удовлетворяющая условию Пуканского, тогда определено соответствующее представление π_f. Если φ — положительно определенная финитная функция на группе G с носителем в W и существует интеграл от ограничения $J(\varphi)$ на орбиту Ω по мере, индуцированной симплектической структурой, то оператор $\pi_f(\varphi)$ имеет след, равный*

$$\operatorname{tr} \pi_f(\varphi) = \int_\Omega J(\varphi). \tag{2.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о основано на известной формуле (см. [2]) для характеров индуцированных представлений

$$\operatorname{tr} \pi_f(\varphi) = \int_{P^\# \setminus G} \left(\int_{P^\#} \chi_f(p) \cdot \varphi(u^{-1} p u)\, dp \right) du.$$

Нетрудно показать, что $P^\# \cap W = P \cap W$, поэтому внутренний интеграл сводится к интегралу по P. Заменой $w = u^{-1} p u$ он приводится к виду $\langle \chi_{uf} \cdot \delta_{u^{-1}pu}, \varphi \rangle$, что в силу предложения 2.3 равно $\langle \delta_{u\mathcal{F}}, J(\varphi) \rangle$. Мы приходим к выражению $\int\limits_{P^\# \setminus G} \left(\int\limits_{u\mathcal{F}} J(\varphi) \right)$, в котором внутреннее интегрирование ведется по слоям, а внешнее — по множеству слоев. Этот повторный интеграл задает G-инвариантную меру на орбите, которая, следовательно, лишь множителем отличается от симплектической меры. Для вычисления множителя сравним обе меры в точке f. Отождествим касательное пространство к $P^\# \setminus G$ в точке f с $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, тогда мере, задаваемой повторным интегралом, соответствует форма объема на орбите, которая в точке f равна $\mu_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \wedge \mu_{f+\mathfrak{p}^\perp}$. Здесь $\mu_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}$ и $\mu_{f+\mathfrak{p}^\perp}$ — лебеговы формы объема, причем форма на $f + \mathfrak{p}^\perp$ получается так: нужно отождествить $\mathfrak{p}^\perp$ с пространством, сопряженным к $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$, и взять на нем форму $\mu_{\widehat{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}}$, двойственную к $\mu_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}$ (это свойство преобразования Фурье). Итак, нужно сравнить форму $\mu_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \wedge \wedge\, \mu_{\widehat{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}}$ с симплектической формой объема на касательном пространстве к орбите. Выберем $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathfrak{g}$ так, чтобы функционалы $f([x_1, \cdot]), \ldots, f([y_n, \cdot])$ образовывали симплектический базис касательного пространства. Ясно, что последние n выписанных функционалов образуют базис в $\widehat{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}$, двойственный к базису $x_1, \ldots, x_n$ в $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$. Поэтому в координатах $q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n$, отвечающих выбранному базису на касательном

пространстве, имеем $\mu_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} = dq_1 \wedge \ldots \wedge dq_n$, $\mu_{\widehat{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}} = dp_1 \wedge \ldots \wedge dp_n$; их произведение есть симплектическая форма объема.

Замечание. Фактически мы использовали не алгебраичность $\mathfrak{g}$, а допустимость поляризации $\mathfrak{p}$.

Рассмотрим малую область, состоящую из точек общего положения в $\mathfrak{g}^*$. Она распадается на орбиты, каждая из которых расслоена на слои. Выберем слоения на орбитах аналитически зависящими от орбит (в рассматриваемой области). Для этого достаточно построить аналитическое отображение $s: f \mapsto \mathfrak{p}^f$, сопоставляющее точке f ее поляризацию и согласованное с действием G: если $l = gf$, то $\mathfrak{p}^l = \mathrm{Ad}^{-1} g\,(\mathfrak{p}^f)$. Рассмотрим многообразие пар $(f, \mathfrak{p})$, где f — регулярная точка в $\mathfrak{g}^*$, а $\mathfrak{p}$ — ее (допустимая в смысле леммы 2.4) поляризация, удовлетворяющая предложению 2.3. Проекция $(f, \mathfrak{p}) \mapsto f$ этого многообразия в $\mathfrak{g}^*$ перестановочна с действием G. Для построения отображения s достаточно взять перестановочное с действием G сечение этой проекции. Ясно, что можно выбрать достаточно малую область U, над которой сечение существует. Мы получаем разбиение U на слои. Обозначим через A алгебру всех полиномов на $\mathfrak{g}^*$, которые постоянны на каждом слое в U.

Теорема 2.6. *Ограничение отображения J^{-1}: $\mathbf{C}[\mathfrak{g}^*] \to U(\mathfrak{g})$ на A есть гомоморфизм алгебр.*

Алгебра A довольно велика, она содержит все инвариантные и полуинвариантные (см. [7]) многочлены.

Следствие (см. [5], [7]). *Отображение J изоморфно отображает центр (полуцентр) алгебры $U(\mathfrak{g})$ на кольцо инвариантных (соответственно полуинвариантных) многочленов на $\mathfrak{g}^*$.*

Превратим пространство многочленов на $\mathfrak{g}^*$ в алгебру (обозначаемую H; см. § 1), перенося умножение из $U(\mathfrak{g})$ при помощи отображения J. Теорему 2.6 можно переформулировать так:

Ограничение операции в H на подпространство A совпадает с обычным умножением многочленов. В частности, A — коммутативная подалгебра в H.

Замечание. Гладкие функции на $\mathfrak{g}^*$ образуют алгебру Ли относительно скобки Пуассона (см. [6], [10]). Скобка функций Φ и Ψ определяется как функция $\{\Phi, \Psi\}$: $f \mapsto f([d\Phi_f, d\Psi_f])$ или, по-другому, ограничение функции $\{\Phi, \Psi\}$ на каждую орбиту равно скобке Пуассона (относительно симплектической структуры на орбите) ограничений Φ и Ψ. Множество функций, постоянных на слоях,— максимальная коммутативная подалгебра алгебры Ли $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$. Часть этой подалгебры, состоящая из многочленов, есть A.

Вернемся к представлениям. Действие алгебры Ли $\mathfrak{g}$ в пространстве Гординга представления π_f продолжается до представления обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$, которую мы отождествляем с H. Для всякой функции Ψ на $\mathfrak{g}^*$ обозначим через Ψ_G функцию $\Psi_G(g) = \Psi(g\,f)$ на G.

Теорема 2.7. *Если $\Psi \in A$, то оператор $\pi_f(\Psi)$ совпадает с умножением на Ψ_G.*

Следствие (см. [5]). *Если z — элемент центра обертывающей алгебры, то $\pi_f(z)$ есть оператор умножения на значение многочлена $J(z)$ в точке f.*

Идея доказательства теоремы 2.7 состоит в том, что ее справедливость нужно проверять не для полиномов, а для δ-функций отдельных слоев, так как из них «составлены» все функции, постоянные на слоях. Обобщенный оператор, отвечающий $\delta_{\mathcal{F}}$ при представлении π_f, равен (в силу предложения 2.3) $\int\limits_P \pi_f(p)\,\overline{\chi}_f(p)\,dp$. В следующем параграфе мы придадим смысл этому (расходящемуся) выражению и вычислим его.

Геометрическая конструкция представления π_f была указана Б. Костантом [3]. Рассмотрим одномерное эрмитово расслоение над орбитой Ω (содержащей f) со связностью ∇, кривизна которой равна симплектической форме на Ω, умноженной на $-2\pi i$. Определим представление $\mathfrak{g}$ в пространстве его гладких сечений, которые ковариантно постоянны вдоль слоев орбиты Ω. Для задания скалярного произведения в этом пространстве достаточно выбрать меру на множестве слоев ($\approx P^{\#} \setminus G$). Элементу $x \in \mathfrak{g}$ сопоставим косоэрмитовый оператор

$$\pi_\Omega(x) = (\nabla_{\xi_x} - \nabla^*_{\xi_x}) + 2\pi i \cdot x. \qquad (2.7)$$

Второе слагаемое есть оператор умножения на функцию, являющуюся ограничением на орбиту Ω линейного функционала на $\mathfrak{g}^*$ (соответствующего x). Далее, ξ_x — поле на орбите, отвечающее действию x, а $\nabla^*_{\xi_x}$ — дифференциальный оператор, сопряженный к ∇_{ξ_x}. Легко проверить, что π_Ω — представление $\mathfrak{g}$, причем эквивалентное π_f.

Пусть, например, $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли с базисом p, q, z, где z — центральный элемент, и $[p, q] = z$ (алгебра Гейзенберга). Орбите, задаваемой уравнением $z = 1$, соответствует представление в пространстве функций от q (расслоение в этом случае тривиально):

$$\pi(p) = \partial/\partial q, \quad \pi(q) = 2\pi i q, \quad \pi(z) = 2\pi i. \qquad (2.8)$$

Пусть $\mathfrak{g}$ произвольна и Ω — орбита в $\mathfrak{g}^*$. На пересечении Ω с малой областью U введем координаты $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ (существующие по теореме Дарбу), в которых симплектическая форма имеет канонический вид $dp \wedge dq$, причем функции $q_1, \ldots, q_n$ постоянны на слоях. Расслоение над орбитой при ограничении на малую область становится тривиальным. Поэтому представление π_Ω может быть реализовано в функциях от $q_1, \ldots, q_n$. Оказывается, при этом оператор $\pi_\Omega(x)$ задается фактически теми же формулами (2.8), что и для алгебры Гейзенберга:

Предложение 2.8. а) *Элемент $x \in \mathfrak{g}$ определяет функцию на Ω (ограничение функционала на $\mathfrak{g}^*$), которая в координатах p, q имеет первую степень по p: $x(p, q) = u(q)\, p + v(q)$.*

б) *При подходящей тривиализации расслоения оператор $\pi_\Omega(x)$ переходит в*

$$\pi_\Omega(x) = {}^1/_2\, [u(q) \cdot \partial/\partial q + \partial/\partial q \cdot u(q)] + 2\pi i v(q), \qquad (2.9)$$

т. е. получается из $x(p, q)$ заменой p на $\partial/\partial q$ и симметризацией.

В этом состоит «физическое» объяснение того, почему нужно рассматривать именно такие индуцированные представления.

Доказательство. а) Функции, постоянные на слоях, под действием группы G переходят в функции, постоянные на слоях. Поэтому, если $x \in \mathfrak{g}$, ξ_x — соответствующее поле и Ψ — функция от q, то $\xi_x \Psi$ не зависит от p. Но $\xi_x \Psi = \{x, \Psi\} = \partial x/\partial p \cdot (\partial \Psi/\partial q) - (\partial x/\partial q) \cdot (\partial \Psi/\partial p) = (\partial x/\partial p) \cdot (\partial \Psi(q)/\partial q)$. Ввиду произвольности $\Psi = \Psi(q)$ получаем, что $\partial x/\partial p$ не зависит от p.

б) Тривиализуем расслоение при помощи сечения, ковариантно постоянного вдоль слоев. Связность ∇ на поле ξ принимает вид $\nabla_\xi = \xi + \alpha(\xi)$, где дифференциал 1-формы α равен кривизне расслоения. В канонических координатах кривизна равна $-2\pi i\, dp \wedge dq$, поэтому $\nabla_\xi = \xi - 2\pi i p\, dq(\xi) + \xi\theta$, где θ — некоторая функция от q. Уничтожим θ заменой тривиализующего сечения. Запишем $x \in \mathfrak{g}$ в координатах: $x(p, q) = u(q)\, p + v(q)$, тогда $\xi_x = u(q) \cdot \partial/\partial q - \partial x/\partial q \cdot \partial/\partial p$ и $\nabla_{\xi_x} = \xi_x - 2\pi i u(q)\, p$. Легко видеть, что на функциях от q оператор (2.7) совпадает с (2.9). ■

Формула (2.9) очень важна для дальнейшего. Тот факт, что она задает представление алгебры $\mathfrak{g}$, проверяется непосредственно. Заметим, что представление π_Ω, определенное формулой (2.9), имеет смысл для любой орбиты Ω: мы не должны заботиться о существовании соответствующего индуцированного представления группы G.

Перепишем (2.9) в виде $\pi_\Omega(x) = u(q)\,\partial/\partial q + 2\pi i v(q) + {}^1/_2\cdot\mathrm{tr}\,u'(q)$. Смысл слагаемого ${}^1/_2\ \mathrm{tr}\ u'(q)$ объясняет *)

Лемма 2.9. *Если точка f имеет координаты (p_0, q_0), $\mathfrak{p}$ — ее поляризация и $x \in \mathfrak{p}$, то* $\mathrm{tr}\ u'(q_0) = -\mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}\ \mathrm{ad}\ x$.

Для доказательства отождествим $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ с фактор-пространством касательного пространства к орбите по лагранжеву подпространству. Векторы $\partial/\partial q_j$ (координатной системы p, q) образуют в нем базис. Сосчитаем след оператора $\mathrm{ad}\ x$ в этом базисе. Проверяется, что образ $\partial/\partial q_i$ под действием $\mathrm{ad}\ x$ совпадает по модулю лагранжева подпространства с коммутатором полей ξ_x и $\partial/\partial q_i$ в точке f. Выразив ξ_x в координатах p, q, получим для следа выражение $-\sum \partial u_i/\partial q_i$. ■

§ 3. Алгебра $\hat{H}$

Цель настоящего параграфа — доказать теоремы 2.6 и 2.7.

Наряду с алгеброй $\mathfrak{g}$ рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{g}_t$, получающуюся из $\mathfrak{g}$ умножением коммутатора в $\mathfrak{g}$ на число t. По алгебре $\mathfrak{g}_t$ построим группу Ли G_t, отображение J_t и ассоциативную алгебру H_t подобно тому, как это делалось для алгебры $\mathfrak{g}$. Алгебра H_t как векторное пространство есть пространство многочленов $\mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]$. При $t = 0$ алгебра Ли $\mathfrak{g}_t$ коммутативна, поэтому J_0 совпадает с преобразованием Фурье, а H_0 — с алгеброй полиномов на $\mathfrak{g}^*$. Таким образом, семейство $\{H_t\}$ есть деформация алгебры многочленов $H_0 = \mathbf{C}[\mathfrak{g}^*]$. Зависимость от t произведения двух многочленов в алгебре H_t, как мы увидим, выражается формулой

$$\Phi \circ_t \Psi = \Phi\Psi + tB_1(\Phi, \Psi) + t^2B_2(\Phi, \Psi) + \ldots, \tag{3.1}$$

где $B_i(\Phi, \Psi)$ — бидифференциальные операторы на $\mathfrak{g}^*$ (т. е. комбинации производных Φ и Ψ, линейные по Φ и по Ψ) с полиномиальными коэффициентами, причем для каждых Φ и Ψ в сумме (3.1) лишь конечное число слагаемых отлично от нуля.

Формулу (3.1) проще всего проверить, когда Φ и Ψ не многочлены, а экспоненты линейных форм на $\mathfrak{g}^*$. Каждому элементу $x \in \mathfrak{g}$ сопоставим функцию на $\mathfrak{g}^*$ вида E_x: $f \mapsto \exp 2\pi i\langle f, x\rangle$. Отображение J^{-1} переводит E_x в $j^{-1}(x)\cdot\delta_{\exp x}$ (exp: $\mathfrak{g} \to G$ — экспоненциальное отображение). Если $x, y \in \mathfrak{g}$, то свертка $\delta_{\exp x} * \delta_{\exp y}$ равна $\delta_{\exp x\cdot\exp y} = \delta_{\exp z(x, y)}$, где $z(x, y)$ — ряд Кэмпбелла—Хаусдорфа. Поэтому $E_x \circ E_y = j^{-1}(x)\cdot j^{-1}(y)\cdot j(z(x, y))\,E_{z(x, y)}$. Аналогичное соотношение верно в $\mathfrak{g}_t$. Разлагая его правую часть в ряд по степеням t, можно обнаружить, что коэффициент при фиксированной степени t есть функция на $\mathfrak{g}^*$ вида $f \mapsto P_{x,y}(f)\cdot E_{x+y}(f)$, где $P_{x,y}$ — многочлен, коэффициенты которого являются полиномами от x и y. Чтобы придать этому выражению форму (3.1), необходимо уничтожить зависимость коэффициентов $P_{x,y}$ от x и y. Для этого нужно заменить E_{x+y} на произведения подходящих производных E_x и E_y (например, моном $x^ry^sE_{x+y}$ на $\partial^rE_x/\partial f^r\cdot\partial^sE_y/\partial f^s$).

Приведенное рассуждение не является вполне строгим. Метод получения строгого доказательства (из других соображений) будет указан ниже.

*) $\mathrm{tr}\ u'(q)$ обозначает $\Sigma\ \partial u_i/\partial q_i$.

Назовем аналитической (гладкой, обобщенной и т. п.) формальной функцией на множестве X формальный степенной ряд по t, коэффициенты которого есть аналитические (соответственно гладкие, обобщенные и т. п.) функции на X. Пусть U — окрестность точки общего положения в $\mathfrak{g}^*$ и $\widehat{H}$ — пространство формальных аналитических функций на U. Правая часть формулы (3.1) как формальная функция имеет смысл для любых формальных функций Φ, $\Psi \in \widehat{H}$. Определив умножение в $\widehat{H}$ таким способом, мы получим ассоциативную алгебру. Ее можно рассматривать как деформацию алгебры аналитических функций на U.

Зафиксируем канонические координаты p, q на орбите Ω. Сопоставив аналитической функции Ψ на U оператор умножения на $\Psi(0, q)$ (здесь мы ограничиваем Ψ на Ω), мы получим представление алгебры аналитических функций в пространстве функций, постоянных на слоях орбиты Ω. Сейчас будет построено представление алгебры $\widehat{H}$, являющееся деформацией этого представления.

Сначала определим представление алгебры Ли $\mathfrak{g}_t$ (для каждого t), подправив формулу (2.9),

$$\pi_{t,\Omega}(x) = t \cdot u(q) \cdot \partial/\partial q + 2\pi i v(q) + t \cdot {}^1/_2 \operatorname{tr} u'(q). \qquad (3.2)$$

Заметим, что $\pi_{t,\Omega}(x) = 2\pi i x(0, q)$ при $t = 0$. Представление алгебры Ли $\mathfrak{g}_t$ определяет (как объяснялось в § 2) представление алгебры H_t. Обозначим его тоже $\pi_{t,\Omega}$. Покажем, что для многочлена $\Psi \in H_t$ оператор $\pi_{t,\Omega}(\Psi)$ есть многочлен от t:

$$\pi_{t,\Omega}(\Psi) = \Psi(0, q) + t \cdot \pi_1(\Psi) + t^2 \cdot \pi_2(\Psi) + \ldots, \qquad (3.3)$$

где $\pi_i(\Psi)$ есть сумма выражений вида $[P(\partial)\Psi](0, q) \cdot D$. Здесь $P(\partial)$ — дифференциальный полином на $\mathfrak{g}^*$, а D — дифференциальный оператор в пространстве функций от переменных q, не зависящий от Ψ. Эту формулу мы возьмем в качестве определения представления алгебры H, считая t формальной переменной, а Ψ формальной функцией. Переход от коммутирующих операторов $\pi_0(\Psi) = \Psi(0, q)$ к некоммутирующим операторам $\pi_t(\Psi)$ можно рассматривать как процедуру квантования. П раметр t играет роль постоянной Планка, а $\widehat{H}$ — алгебры наблюдаемых.

Докажем (3.3). Пусть многочлен $\Psi \in H_t$, тогда $J_t^{-1}(\Psi)$ сосредоточена в единице группы G_t и по определению (мы опускаем индексы t и Ω) $\pi(\Psi) = \int \pi(g) J^{-1}\Psi(g)\, dg$ (интеграл по G_t). Учитывая, что $\pi(\exp x) = \exp \pi(x)$ и $J^{-1}(\Psi) = \exp_*(j^{-1} \cdot F^{-1}\Psi)$, получим

$$\pi(\Psi) = \int_{\mathfrak{g}} \exp \pi_t(x) \cdot j_t^{-1}(x) \cdot \mu_t(x) \cdot F^{-1}\Psi(x)\, dx, \qquad (3.4)$$

где μ_t — якобиан перехода от G_t к $\mathfrak{g}$. Подынтегральные функции j_t^{-1} и μ_t разложим в степенные ряды по t. Из определения этих функций видно, что коэффициент при t^k будет многочленом от x с однородными слагаемыми степени, не меньшей k. Назовем такие ряды убывающими.

Оператор $\exp \pi_t(x)$, присутствующий в (3.4), не является убывающим рядом. Однако из него можно вынести не зависящий от t множитель $\exp 2\pi i v_x$ (функция $v_x(q)$ определяется из разложения $x = x(p, q) = u_x(q)p + v_x(q)$) так, что остаток уже будет убывающим рядом. Действительно, если $\exp \pi(x) = (\exp 2\pi i v_x) \cdot B$, где $B = \exp(-2\pi i v_x) \cdot \exp \pi(x)$, то по формуле Кэмпбелла — Хаусдорфа $B = \exp(-2\pi i v_x + \pi(x) - {}^1/_2 [2\pi i v_x, \pi(x)] + \ldots)$. Повторные коммутаторы $\pi(x)$ и $2\pi i v_x$, содержащие $2\pi i v_x(q)$ более одного раза, равны нулю, так как $\pi(x)$ есть дифференциальный оператор первого порядка. Коммутирова-

ние с $\pi(x)$ увеличивает степень по t и по x на 1, поэтому ряд под экспонентой, а значит, и сама экспонента убывающие. Выражение для $\pi(\Psi)$ принимает вид

$$\pi(\Psi) = \int\limits_{\mathfrak{g}} (\exp 2\pi i v_x)\cdot B\cdot j_t^{-1}\cdot \mu_t\cdot F^{-1}\Psi(x)\,dx. \tag{3.5}$$

Все множители, кроме первого и последнего, объединим в один убывающий ряд, который запишем, выделив зависимость от t и от x, в виде $\sum t^i P_i(x, D)$, где $P_i(x, D)$ — дифференциальный оператор в функциях от q, коэффициенты которого — многочлены от x.

Функция $(\exp 2\pi i v_x)\cdot F^{-1}\Psi(x)$ на $\mathfrak{g}$ сосредоточена в 0 и поэтому есть комбинация производных δ-функции. Применяя такую функцию к убывающему ряду, мы получим обрывающуюся сумму. Следовательно, $\pi_{t,\Omega}(\Psi)$ есть многочлен от t.

Чтобы получить (3.3), остается заменить $v_x(q)$ на $x(0, q)$ в равенстве

$$\pi(\Psi) = \sum t^k \int (\exp 2\pi i v_x)\cdot P_k(x, D)\cdot F^{-1}\Psi(x)\,dx$$

и применить формулу обращения преобразования Фурье. ■

Замечание. Аналогичным образом можно доказать формулу (3.1) для умножения в H_t.

Рассмотрим подпространство $\hat{A}$ в $\hat{H}$, состоящее из формальных функций, постоянных вдоль слоев.

Теорема 3.6. *Если $\Psi \in \hat{A}$, то $\pi_{t,\Omega}(\Psi)$ есть оператор умножения на $\Psi|_\Omega$.*

Это значит, что при подстановке функций из $\hat{A}$ в ряд (3.3) для представления $\pi_{t,\Omega}$ все члены, кроме первого, обращаются в нуль, т. е. квантовый оператор $\pi_t(\Psi)$ совпадает с классическим $\pi_0(\Psi)$. В частности, если эта функция — полином, то, полагая $t = 1$, мы получаем утверждение теоремы 2.7. (В самом деле, операторы $\pi_f(\Psi)$ и Ψ_G аналитичны и совпадают, согласно теореме 3.6, на открытом множестве — прообразе U в G.)

Для доказательства теоремы 3.6 необходимо выбрать канонические координаты на разных орбитах согласованно. Можно показать, что существуют такие аналитические координаты $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, z_1, \ldots, z_k$ в U, что

а) орбиты задаются уравнениями $z = \text{const}$,

б) слои задаются уравнениями $z = \text{const}$, $q = \text{const}$,

в) ограничения функций p и q на каждую орбиту определяют на ней канонические координаты.

В новых координатах функции, постоянные на слоях,— это функции от q и z. Представления $\pi_{t,\Omega}$ алгебры $\hat{H}$, соответствующие разным орбитам Ω, нам удобно будет «склеить» в одно представление π в пространстве формальных функций от q и z. Добавление переменных z не приводит к существенным изменениям, например в (3.3) вместо $[P(\partial)\Psi](0, q)$ теперь нужно писать $[P(\partial)\Psi](0, q, z)$.

Рассмотрим точку $f \in U$, проходящий через нее слой $\mathcal{F}$ и обобщенную функцию $\delta_{\mathcal{F}}$ на U. Пусть f имеет канонические координаты (p_0, q_0, z_0). Так как слой $\mathcal{F}$ задается уравнениями $z = z_0$, $q = q_0$, то естественно ожидать, что верна

Лемма 3.7. *В канонических координатах $\delta_{\mathcal{F}}$ пропорциональна* $\delta(q - q_0, z - z_0)$.

Введем оператор $\pi(\delta_{\mathcal{F}})$. Он задается общей формулой (3.3) и переводит гладкую функцию $s(q, z)$ в формальную обобщенную функцию на поверхности $p = 0$. Операция ограничения на эту поверхность, имеющаяся в формуле (3.3), осуществляется так: заменяем $\delta_{\mathcal{F}}$ на

const$\cdot\delta(q-q_0, z-z_0)$ (лемма 3.7) и подставляем в правую часть (3.3), тоже выраженную в координатах p, q, z; после этого полагаем $p=0$.

Сравним это определение $\pi(\delta_{\mathcal{F}})$ с эвристической формулой $\pi(\delta_{\mathcal{F}}) = \int \overline{\chi}_f(p)\pi_f(p)\,dp$ (см. идею доказательства теоремы 2.7). Рассмотрим якобиан ν_t отображения exp: $\mathfrak{p}\to P_t$ и характер $\chi_t(x) = 2\pi i f_t(x) - {}^1/_2\cdot t\cdot \mathrm{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}\,\mathrm{ad}\,x$ как формальные функции на $\mathfrak{p}$ и введем формальный оператор, символически обозначаемый через $\int \overline{\chi}(p)\,\pi(p)\,dp$. Этот оператор переводит гладкую функцию $s(q, z)$ в формальную обобщенную функцию на U. Ее значение на финитной функции $\varphi=\varphi(q, z)$ по определению равно

$$\int\limits_{\mathfrak{p}} \exp\overline{\chi}_t(x)\Big(\int\limits_U \exp\pi_t(x)\,s\cdot\varphi(q, z)\,dq\,dz\Big)\,\nu_t(x)\,dx. \qquad (3.7)$$

(Если бы можно было сначала выполнить интегрирование по $\mathfrak{p}$, то получилось бы именно $\int\overline{\chi}(p)\,\pi(p)\,dp$.)

Лемма 3.8. $\pi(\delta_{\mathcal{F}}) = \int\overline{\chi}(p)\,\pi(p)\,dp$, *в частности, интеграл* (3.7) *существует.*

Решающую роль для доказательства теоремы 3.6 играет

Лемма 3.9. $\pi(\delta_{\mathcal{F}}) = \mathrm{const}\cdot\delta_{\mathcal{F}}$.

Доказательство леммы 3.7. а) Покажем сначала, что якобиан перехода от линейных координат в $\mathfrak{g}^*$ к каноническим координатам p, q, z является функцией, не зависящей от p. Элементы группы P действуют на $\mathfrak{g}$ унимодулярными преобразованиями, так как при $x\in\mathfrak{p}$ ненулевые собственные значения оператора ad x разбиваются на пары противоположных чисел ($\mathfrak{p}$ допустима). Следовательно, элементы P сохраняют лебегову меру на $\mathfrak{g}^*$ и (как всякий элемент G) меру $dp\,dq\,dz$. Поэтому коэффициент пропорциональности этих двух мер λ постоянен на орбитах группы P и ее сопряженных. В частности, λ постоянна на слоях.

б) Обозначим функцию $\delta_{\mathcal{F}}$ в координатах p, q, z через $\delta_{\mathcal{F}}(p, q, z)$ и через φ — пробную функцию. Тогда $\langle\delta_{\mathcal{F}}(p, q, z), \varphi\rangle = \langle\delta_{\mathcal{F}}, \lambda^{-1}\varphi\rangle = \int\limits_{\mathcal{F}}\lambda^{-1}\varphi$. Заметим, что λ^{-1} постоянна на $\mathcal{F}$, а интегрирование можно вести по мере dp, которая пропорциональна лебеговой, так как p — аффинная координата. ■

Доказательство леммы 3.8 основано на формуле $\Phi(0, q, z) = \int F^{-1}\Phi(x)\cdot\exp 2\pi i x(0, q, z)\,dx$ для ограничения обобщенной функции Φ на $\mathfrak{g}^*$ на поверхность $p=0$ (см. [12]). Более подробно, если $\varphi=\varphi(q, z)$ — финитная функция, то

$$\langle\Phi(0, q, z), \varphi\rangle = \int F^{-1}\Phi(x)\,\Big(\int(\exp 2\pi i x(0, q, z))\,\varphi(q, z)\,dq\,dz\Big)\,dx. \qquad (3.8)$$

Для определения оператора $\pi(\delta_{\mathcal{F}})$ по формуле (3.3) можно воспользоваться (3.8) вместо того, чтобы переходить к координатам (p, q, z) для осуществления операции ограничения. В нашем случае $\Phi = P(\partial)\,\delta_{\mathcal{F}}$ и $F^{-1}\Phi = P(x)\cdot\exp 2\pi i\langle f, x\rangle\cdot\delta_{\mathfrak{p}}(x)$. При этом интеграл (3.8) сходится (этого и следовало ожидать: мы ведь знаем, что в координатах p, q, z ограничение существует). Действительно, внутренний интеграл в (3.8) быстро убывает вдоль $\mathfrak{p}$, так как является преобразованием Фурье функции $\delta(p)\,\varphi(q, z)$, волновой фронт которой трансверсален к $\mathfrak{p}$.

Для доказательства леммы запишем $F^{-1}\Phi(x) = P(x)\,F^{-1}(\delta_{\mathcal{F}})$ и подставим (3.8) в (3.3). Получившийся ряд в точности совпадает с (3.5), если положить $\Psi = \delta_{\mathcal{F}}$. Формула (3.5) получается пребразованием равенства (3.4), которое эквивалентно (3.7). ■

Доказательство леммы 3.9. Так как подынтегральная функция в $\int\overline{\chi}(p)\,\pi(p)\,dp$ мультипликативна, то при сдвиге $p\mapsto p_1 p$ интеграл умножится на $\chi(p_1)\,\pi(p_1)$. Из инвариантности меры Хаара следует,

однако, что при сдвиге интеграл не изменится. Итак, если $s(q, z)$ — гладкая функция, то ее образ $\Phi = \pi(\delta_{\mathcal{F}})\, s$ удовлетворяет уравнению $\bar{\chi}(p_1)\, \pi(p_1)\, \Phi = \Phi$. То есть для всякого $x \in \mathfrak{p}$ (дифференцируя вдоль x) получаем $\bar{\chi}_t(x)\, \Phi + \pi_t(x)\, \Phi = 0$. Подставим для $\bar{\chi}_t$ и π_t их выражения и положим $\Phi = \Sigma t^i \Phi_i$. Приравнивая нулю коэффициенты при степенях t, получим

$$2\pi i\, [f(x) - v_x(q, z)]\, \Phi_k = [u_x(q, z) \cdot \partial/\partial q + {}^1/_2 \operatorname{tr} u'_x(q, z) - {}^1/_2 \operatorname{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \operatorname{ad} x]\, \Phi_{k-1}. \tag{3.9}$$

Для упрощения записи будем считать, что координаты точки f суть $(0, 0, 0)$. Докажем по индукции, что Φ_k пропорциональна $\delta(q, z)$. Пусть для Φ_{k-1} это верно, тогда правая часть (3.9) равна нулю. Действительно, если $x \in \mathfrak{p}$, то $\operatorname{tr}_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}} \operatorname{ad} x = -\operatorname{tr} u'_x(0, 0)$ (лемма 2.9) и $u_x \cdot \delta'(q, z) = -u'_x(q, z) \cdot \delta(q, z)$ (коэффициент при $\partial\delta/\partial q$, равный $u_x(0, 0)$, обращается в нуль). Замечая, что $f(x) = x(0, 0, 0) = v_x(0, 0)$, переписываем уравнение (3.9) в виде $[v_x(q, z) - v_x(0, 0)]\, \Phi_k = 0$ или, выделяя линейную часть, в виде $[dv_x(0,0) + o(q, z)]\, \Phi_k = 0$.

Из определения оператора $\pi(\delta_{\mathcal{F}})$ (см. (3.3)) вытекает, что Φ_k пропорциональна некоторой производной от $\delta(q, z)$. Мы должны доказать, что эта производная на самом деле нулевого порядка. Ясно, что это будет следовать из равенства $[dv_x(0, 0) + o(q, z)]\, \Phi_k = 0$, если дифференциалы $dv_x(0, 0)$, $x \in \mathfrak{p}$, порождают все пространство форм с базисом dq и dz. Пусть $x_1, \ldots, x_{n+k}$ — базис в $\mathfrak{p}$. Достаточно показать, что формы $dv_{x_i}(0, 0)$ независимы. Для этого заметим, что функционал $dx(f)$ на $\mathfrak{g}^*$ как элемент $\mathfrak{g}$ совпадает с x. Поэтому формы $dx_i(f)$ независимы, но при $x \in \mathfrak{p}$

$$dx(0, 0, 0) = \partial x/\partial p \cdot dp + \partial x/\partial q \cdot dq + \partial x/\partial z \cdot dz = dv_x(0, 0),$$

так как $\partial x/\partial p\, (0,0) = u_x(0,0)$. ■

Доказательство теоремы 3.6. В формуле (3.3) для представления π дифференциальные полиномы $P(\partial)$ перепишем в координатах p, q, z. Из леммы 3.9, очевидно, следует, что каждое слагаемое в получившемся выражении для $\pi(\Psi)$ либо содержит дифференцирование Ψ по p, либо не содержит производных Ψ вовсе. Поэтому, если Ψ не зависит от p, то $\pi(\Psi) = \Psi \cdot \sum t^i D_i$. В частности, $\pi(1) = \sum t^i D_i$. Но 1 «произошла» из единицы в обертывающей алгебре $U(\mathfrak{g}_t)$, поэтому $\pi(1) = 1$. ■

Теорема 3.10. *Ограничение умножения в $\widehat{H}$ на $\hat{A}$ совпадает с обычным умножением. В частности, $\hat{A}$ — коммутативная подалгебра в $\widehat{H}$.*

По существу утверждается, что если $\Phi, \Psi \in \hat{A}$, то в ряде (3.1) для произведения $\Phi \circ \Psi$ остается лишь первое слагаемое. Если Φ и Ψ — многочлены, то, положив $t = 1$, мы получим теорему 2.6.

Доказательство теоремы 3.10. Пусть $\Psi_1, \Psi_2 \in \hat{A}$ и $\Phi = \Psi_1 \circ \Psi_2 - \Psi_1 \Psi_2$. В силу теоремы 3.6 $\pi(\Psi_1 \circ \Psi_2) = \pi(\Psi_1)\, \pi(\Psi_2) = \Psi_1 \Psi_2 = \pi(\Psi_1 \Psi_2)$, поэтому $\pi(\Phi) = 0$. Если $\Phi = \sum t^i \Phi_i$, то коэффициент при нулевой степени t в $\pi_t(\Phi)$ равен $\pi_0(\Phi_0) = \Phi_0(0, q, z)$. Следовательно, Φ_0 обращается в нуль на поверхности $p = 0$. Так как это верно для произвольной канонической системы координат p, q, z, то $\Phi_0 = 0$. Теперь можно разделить Φ на t. Повторяя рассуждение, получим $\Phi_1 = 0$, $\Phi_2 = 0$ и т. д. Итак, $\Phi = 0$. ■

Строение алгебры $\widehat{H}$ полностью описывает

Теорема 3.11. *Отображение π есть изоморфизм алгебры $\widehat{H}$ на алгебру формальных дифференциальных операторов вида $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \Phi_i \cdot (t \cdot \partial/\partial q)^i$ (здесь Φ_i — формальные функции от q и z), при котором подалгебра $\hat{A}$ переходит в операторы нулевого порядка.*

Для доказательства эпиморфности достаточно построить такие функции $\mathscr{P}_j$, что $\pi(\mathscr{P}_j) = t\cdot\partial/\partial q_j$. Их легко подобрать в виде $\mathscr{P} = \sum\Psi_i(q, z)\circ x_i + \Phi(q, z)$, где $x_i \in \mathfrak{g}$ (тогда $\pi(\mathscr{P}) = \sum\Psi_i(q, z)\circ\pi(x_i) + \Phi(q, z)$, причем $\pi(x_i)$ — известные операторы первого порядка). Мономорфность π вытекает из утверждения (доказательство которого мы опускаем).

Предложение 3.12. а) *Если орбита Ω задается уравнением $z = z_0$, то ядро представления $\pi_{t,\Omega}$ есть идеал в $\widehat{H}$, порожденный $z - z_0$.*

б) *Пересечение ядер $\pi_{t,\Omega}$ (по всем Ω) равно нулю.* ■

§ 4. Поляризации

В этом параграфе будут доказаны различные свойства поляризаций, использованные ранее. Мы рассматриваем случай точек *общего положения*, т. е. точек, лежащих в дополнении к некоторому (зависящему от рассматриваемой задачи) подмногообразию в $\mathfrak{g}^*$. Множество таких точек открыто и плотно в $\mathfrak{g}^*$.

Доказательство теоремы 2.2 опирается на следующий важный результат.

Предложение 4.1 (см. [11]). *Если $\mathfrak{g}$ — алгебраическая алгебра Ли, радикал которой нильпотентен, то в пространстве $\mathfrak{g}^*$ существует открытое всюду плотное G-инвариантное множество, состоящее из замкнутых орбит максимальной размерности.* ■

Следствие 4.2. *Если $\mathfrak{g}$ — алгебраическая алгебра Ли, радикал которой нильпотентен, то любая поляризация точек общего положения в $\mathfrak{g}^*$ удовлетворяет условию Пуканского.*

Действительно, пусть f лежит в замкнутой орбите и $\mathfrak{p}$ — ее поляризация, тогда пересечение орбиты с $f + \mathfrak{p}^\perp$ замкнуто в $f + \mathfrak{p}^\perp$. Но это пересечение содержит слой Pf, плотный в $f + \mathfrak{p}^\perp$. ■

Доказательство первой части теоремы 2.2. Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, тогда $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ — алгебраическая алгебра Ли, радикал которой нильпотентен. Для нее теорема верна. Выберем в $\mathfrak{g}$ такую цепочку идеалов

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}_n \subset \mathfrak{g}_{n-1} \subset \ldots \subset \mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g},$$

что $\dim \mathfrak{g}_i/\mathfrak{g}_{i+1} = 1$. Пусть $f \in \mathfrak{g}^*$, f_i — ограничение f на $\mathfrak{g}_i$, причем f_n есть точка общего положения в $\mathfrak{g}_n^*$. Можно выбрать такую поляризацию $\mathfrak{p}$ точки f, что $\mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_i$ есть поляризация f_i для всех i (см. [7]). Докажем индукцией по $\dim \mathfrak{g}_i$, что поляризация $\mathfrak{p}_i = \mathfrak{p} \cap \mathfrak{g}_i$ удовлетворяет условию Пуканского.

Индуктивный переход от $\mathfrak{g}_1$ к $\mathfrak{g}$. Пусть $\pi\colon \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}_1^*$ — проекция, тогда $\pi(f) = f_1$. Так как $\mathfrak{p}_1 \subset \mathfrak{p}$, то $\pi(f + \mathfrak{p}^\perp) \subset f_1 + \mathfrak{p}_1^\perp$. Поэтому, если l — некоторая точка $f + \mathfrak{p}^\perp$, то по предположению индукции ее проекция переводится в f_1 элементом из P_1. Это значит, что существует такой элемент p, что $pl - f_{|\mathfrak{g}_1} = 0$, т. е. ($\mathfrak{g}_1$ — идеал коразмерности 1) $\chi = pl - f$ есть характер $\mathfrak{g}$, и нам нужно перевести $f + \chi$ в f.

Заметим, что элемент p переводит $f + \mathfrak{p}^\perp$ в себя, поэтому $pl \in f + \mathfrak{p}^\perp$. Значит, функционал χ обращается в нуль на $\mathfrak{p}$ и, следовательно, представим в виде $\chi(x) = f([a, x])$, где $a \in \mathfrak{p}$. (Так как $\mathfrak{p}$ — лагранжево подпространство $\mathfrak{g}$ относительно формы $x, y \mapsto f([x, y])$, то всякий функционал, обращающийся в нуль на $\mathfrak{p}$, имеет такой вид.)

Индуктивный шаг завершает

Лемма. *Пусть $a \in \mathfrak{g}$, $f \in \mathfrak{g}^*$ и $\chi(x) = f([a, x])$ есть характер $\mathfrak{g}$. Тогда* $\exp a$ *переводит f в $f + \chi$.*

Действительно, $(\exp a) f = f + af + {}^1/_2\, a^2 f + \ldots = f + \chi + {}^1/_2 a\chi + \ldots$ Так как χ — характер, то под действием алгебры Ли он переходит в нуль. Поэтому в последней сумме остаются только два слагаемых. ■

Доказательство второй части теоремы 2.2 мы не приводим ввиду его громоздкости.

Дальнейшие рассуждения основываются на следующем результате Дюфло [5].

Предложение 4.3. *Пусть P — поляризация точки $f \in \mathfrak{g}^*$. Если она удовлетворяет условию Пуканского, то любой тор (алгебраический) в P сопряжен тору, лежащему в стабилизаторе $G(f)$ точки f.*

Доказательство. Действуя на линейном многообразии $f + \mathfrak{p}^\perp$, тор T должен иметь неподвижную точку. В силу условия Пуканского существует элемент из P, переводящий эту точку в f. Поэтому ее стабилизатор, содержащий T, сопряжением переводится в $G(f)$. ■

Следствие 4.4 (см. [5]). *Пусть $\mathfrak{g}$ алгебраична, f — регулярная точка в $\mathfrak{g}^*$. Разрешимая поляризация f, удовлетворяющая условию Пуканского, допустима* (см. лемму 2.4).

Пусть P — разрешимая поляризация; ясно, что условие допустимости достаточно проверить для полупростых элементов, которые, согласно предложению 4.3, можно считать лежащими в $G(f)$. Алгебра $\mathfrak{g}(f)$ группы $G(f)$ коммутативна [1]; поэтому для $x \in \mathfrak{g}(f)$ ненулевые собственные значения $\operatorname{ad} x$ на $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}/\mathfrak{g}(f)$ совпадают. Чтобы сравнить собственные значения на $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{p}/\mathfrak{g}(f)$, заметим, что форма $x, y \mapsto f([x, y])$ задает невырожденную двойственность между этими пространствами, а оператор $\operatorname{ad} x$ при $x \in \mathfrak{g}(f)$ сохраняет эту форму. ■

Следствие 4.5. *Пусть $\mathfrak{g}$ произвольна. Любая регулярная точка в $\mathfrak{g}^*$ обладает допустимой поляризацией.*

Для доказательства рассмотрим алгебраическую оболочку $\mathfrak{g}$ алгебры $\mathfrak{g}$. Пусть $\tilde{f}$ — точка общего положения в $\tilde{\mathfrak{g}}^*$ и f — ее ограничение на $\mathfrak{g}$. При доказательстве теоремы 2.2 мы видели, что можно построить поляризацию $\mathfrak{p}$ точки $\tilde{f}$, удовлетворяющую условию Пуканского, такую, что $\mathfrak{p} = \tilde{\mathfrak{p}} \cap \mathfrak{g}$ будет поляризацией f. Тогда (см. следствие 4.4) $\forall x \in \mathfrak{p}$ — ненулевые собственные значения $\operatorname{ad} x$ в $\tilde{\mathfrak{g}}/\tilde{\mathfrak{p}}$ и $\tilde{\mathfrak{p}}$ противоположны. Но $\operatorname{ad} x$ переводит $\tilde{\mathfrak{g}}$ в $\mathfrak{g}$, поэтому можно заменить $\tilde{\mathfrak{g}}/\tilde{\mathfrak{p}}$ на $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ и $\tilde{\mathfrak{p}}$ на $\mathfrak{p}$. Таким образом, $\mathfrak{p}$ допустима.

Пусть теперь f — произвольная точка $\mathfrak{g}^*$. Существует последовательность f_i точек общего положения, сходящаяся к f. Каждая точка f_i имеет допустимую поляризацию $\mathfrak{p}_i$. Переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\mathfrak{p}_i$ сходятся к некоторой подалгебре $\mathfrak{p}$. Если f регулярен, то $\mathfrak{p}$ — поляризация f в силу соображений размерности. Пусть $x \in \mathfrak{p}$, $Q_{\mathfrak{p}}(t)$ и $Q_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}(t)$ — характеристические многочлены оператора $\operatorname{ad} x$ в $\mathfrak{p}$ и $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ соответственно. Допустимость $\mathfrak{p}$ означает, что $Q_{\mathfrak{p}}(-t) = t^r \cdot Q_{\mathfrak{g}/\mathfrak{p}}(t)$. Это свойство сохраняется при предельном переходе. ■

Московский инженерно-строительный институт им. В. В. Куйбышева

Поступила в редакцию 20 марта 1980 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Диксмье Ж., Универсальные обертывающие алгебры, М., «Мир», 1978.
2. Кириллов А. А., Элементы теории представлений, М., «Наука», 1978.
3. Костант Б., Квантование и унитарные представления, УМН **XVIII**, вып. 1 (1973), 163—225.
4. Borho W., Gabriel P., Rentschler R., Lecture Notes in Math. **357**, Springer-Verlag, Berlin, 1973.
5. Duflo M., Operateurs différentiels bi-invariants sur une group de Lie, Ann. scient. Ecole Norm. Sup. **10** (1977), 265—283.

6. V e r g n e M., La structure de Poisson sur l'algebre symmétrique d'une algèbre de Lie nilpotent, Bull. Soc. Math. France **100** (1972), 301—335.
7. R e n s c h l e r R., V e r g n e M., Sur le semi-centre du corps enveloppant d'une algèbre de Lie, Ann. scient. Ecole Norm. Sup. **6** (1973), 389—406.
8. K a s h i w a r a M., V e r g n e M., The Campbell Hausdorff formula and invariant hyperfunctions, Invent. Math. **47** (1978), 249—272.
9. Г и н з б у р г В. А., Метод орбит и теория возмущений, ДАН СССР **249**, № 3 (1979), 525—528.
10. Б е р е з и н Ф. А., Несколько замечаний об ассоциативной оболочке алгебры Ли, Функц. анализ **1**, вып. 2 (1967), 1—14.
11. D i x m i e r J., D u f l o M., V e r g n e M., Sur la représentation coadjointe d'une algèbre de Lie, Compositio Math. **29** (1975), 309—335.
12. Х ё р м а н д е р Л., Интегральные операторы Фурье, Математика **16**:2 (1972) 67—136.
13. A u s l a n d e r L., K o s t a n t B., Polarization and unitary representations of solvable Lie groups, Invent. Math. **14** (1971), 225—354.
14. L i p s m a n R., Characters of Lie groups. II, J. Anal. Math. **31** (1977), 257—286.
15. V e r g n e M., W o l f J., Existence des polarisations positives dans les algebres des Lie, C. r. sci. Acad., Paris, **274** (1972), 299—302.