

Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Г. Дринфельд, О структуре квазитреугольных квазихопфовых алгебр, *Функци. анализ и его прил.*, 1992, том 26, выпуск 1, 78–80

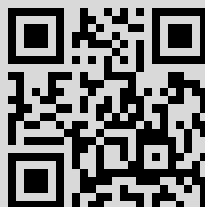
Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.90.198.182

7 марта 2015 г., 00:34:37



совым разложением. Например, для группы $GL(n, \mathbb{C})$ такой базис представления с центральным зарядом m и старшим весом $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ ($m \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$) нумеруется набором целых чисел a_{ij} ($-\infty < i \leq n, 1 \leq j \leq m, j \leq \lambda_i$ при $i > 0$) таким, что $a_{i,j} \geq a_{i-1,j}$ для любых i и j , $a_{i,j} \geq a_{i,j-1}$ при $j > 1$, $a_{i,1} \geq a_{i-n,m} + n$ и для некоторых целых чисел M и N верно, что $i < N$ влечет $a_{ij} = i + M$ для любого j .

Из других приложений отметим возможность построения резольвенты неприводимого $\widehat{G}_{\tau_i}^{(i)}$ -модуля, члены которой суть весовые подпространства $V_{N,q}$ относительно $\widehat{G}_{\tau_{2-i}}^{(2-i)}$ [6].

Применению теоремы к изучению векторных инвариантов группы $Sp(2n, \mathbb{C}[[t]])$ будет посвящена отдельная работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Прессаи Э., Сигал Г. Группы петель. — М.: Мир, 1990. 2. Кас В. G. Infinite dimensional Lie algebras. — Boston: Birkhauser, 1984. 3. Frenkel I. B. // J. Funct. Anal. — 1981. — V. 44. — P. 259—327. 4. Frenkel I. B. // Lecture Notes in Math. — 1982. — V. 933. — P. 71—110. 5. Frenkel I. B. // Appl. Math. — 1985. — V. 21. — P. 325—353. 6. Зельвинский А. В. // Функцион. анализ и его прил. — 1987. — Т. 24, вып. 2. — С. 74—75.

НИИ системных исследований
АН СССР

Поступило в редакцию
17 декабря 1990 г

УДК 512.554 3+512.667 7

О СТРУКТУРЕ КВАЗИТРЕУГОЛЬНЫХ КВАЗИХОПФОВЫХ АЛГЕБР

В. Г. Дринфельд

Понятие квазитреугольной квазихопфовой алгебры (сокращенно $qtqH$ -алгебры) было введено в [1], чтобы в какой-то мере объяснить связь между квантовыми группами и конформной теорией поля. Каждой паре (\mathfrak{g}, t) , где \mathfrak{g} — алгебра Ли над $\mathbb{C}[[h]]$, а $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ — симметричный инвариантный тензор, в работе [2] сопоставлена $qtqH$ -алгебра (при этом используются возникшие в конформной теории поля уравнения Книжника — Замолодчикова). Оказывается, что с точностью до некоторых калибровочных преобразований эта конструкция дает все $qtqH$ -алгебры над $\mathbb{C}[[h]]$, являющиеся деформациями универсальных обертывающих алгебр. Соответствующая теорема доказана в [2] с помощью некоторых результатов из [1]. Цель настоящей работы — дать прямое и простое доказательство этой теоремы.

Вместо $\mathbb{C}[[h]]$ мы предпочитаем иметь дело с коммутативным локальным кольцом L характеристики 0 таким, что $m^n = 0$ для некоторого n , где m — максимальный идеал L (чтобы получить утверждение для $\mathbb{C}[[h]]$, надо положить $L = \mathbb{C}[[h]]/(h^n)$ и устремить n к ∞). По определению, $qtqH$ -алгебра над L — это набор $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$, где A — ассоциативная алгебра с единицей над L , $\Delta: A \rightarrow A \otimes A$ и $\varepsilon: A \rightarrow L$ — гомоморфизмы алгебр с единицей, а $\Phi \in A \otimes A \otimes A$, и $R \in A \otimes A$ — обратимые элементы такие, что $(\text{id} \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi \cdot (\Delta \otimes \text{id})(\Delta(a)) \cdot \Phi^{-1}$ при $a \in A$, $\Delta'(a) = R \cdot \Delta(a) \cdot R^{-1}$ при $a \in A$, $(\varepsilon \otimes \text{id}) \circ \Delta = \text{id} \cdot (\text{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta$, выполнены равенства

$$(\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(\Phi) = (1 \otimes \Phi) \cdot (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(\Phi) \cdot (\Phi \otimes 1). \quad (1)$$

$$(\text{id} \otimes \varepsilon \otimes \text{id})(\Phi) = 1, \quad (2)$$

$$(\Delta \otimes \text{id})(R) = \Phi^{312} R^{13} (\Phi^{132})^{-1} R^{23} \Phi, \quad (\text{id} \otimes \Delta)(R) = (\Phi^{231})^{-1} R^{13} \Phi^{213} R^{12} \Phi^{-1} \quad (3)$$

и выполнена некоторая аксиома (см. [1]), которая в хопфовом случае, т. е. при $\Phi = 1$, сводится к существованию и биективности антипода. Назовем $qtqH$ -алгебру A над L деформационной, если A — свободный L -модуль, $\Phi \equiv 1 \pmod{m}$, $R \equiv 1 \pmod{m}$, а алгебра Хопфа A/mA является универсальной обертывающей некоторой алгебры Ли \mathfrak{g}_0 над L/m . Отметим, что согласно теореме 1.6 из [1] в деформационном случае упомянутая выше аксиома типа существования антипода выполнена автоматически.

Примеры деформационных $qtqH$ -алгебр доставляет следующая конструкция (см. [1, 2]). Пусть \mathfrak{g} — алгебра Ли над L , являющаяся свободным L -модулем (такие алгебры Ли будем называть деформационными), а t — симметричный инвариантный элемент $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, $t \equiv 0 \pmod{m}$. Положим $A = U\mathfrak{g}$, $R = e^{t/2}$, определим Δ , ε обычным образом и положим $\Phi = \varphi(t^{12}, t^{23})$, где $\varphi(X, Y)$ — формальный ряд над \mathbb{Q} от некоммутирующих переменных X, Y такой, что

$$\varphi(0, 0) = 1, \tag{4}$$

$$\begin{aligned} \varphi(X^{12}, X^{23} + X^{24})\varphi(X^{13} + X^{23}, X^{34}) &= \\ &= \varphi(X^{23}, X^{34})\varphi(X^{12} + X^{13}, X^{24} + X^{34})\varphi(X^{12}, X^{23}), \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \exp((X^{13} + X^{23})/2) &= \\ &= \varphi(X^{13}, X^{12})\exp(X^{13}/2)\varphi(X^{13}, X^{23})^{-1} \exp(X^{23}/2)\varphi(X^{12}, X^{23}), \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} \exp((X^{12} + X^{13})/2) &= \\ &= \varphi(X^{23}, X^{13})^{-1} \exp(X^{13}/2)\varphi(X^{12}, X^{13})\exp(X^{12}/2)\varphi(X^{12}, X^{23})^{-1}, \end{aligned} \tag{7}$$

где X^{ij} — образующие алгебры с определяющими соотношениями $[X^{ij}, X^{rl}] = 0$ при $i \neq j \neq r \neq l$, $[X^{ij} + X^{ir}, X^{jr}] = 0 = [X^{ir} + X^{jr}, X^{ij}]$ при $i < j < r$. Тогда $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ — деформационная $qtqH$ -алгебра. Отметим, что существование формального ряда φ над \mathbb{Q} , удовлетворяющего (4)–(7), доказано в § 5 из [2], а формальный ряд над \mathbb{C} , удовлетворяющий (4)–(7), строится явно с помощью уравнений Книжника — Замолодчикова (см. § 2 из [2]). Зафиксируем какое-нибудь φ и обозначим через $A_{\mathfrak{g}, t}$ построенную выше $qtqH$ -алгебру. Наша цель — доказать следующее утверждение.

Т е о р е м а. Любая деформационная $qtqH$ -алгебра $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ после скручивания посредством некоторого $F \in A \otimes A$ становится алгеброй вида $A_{\mathfrak{g}, t}$. Более того, если I — идеал в L такой, что $qtqH$ -алгебра A/IA равна $A_{\mathfrak{g}, \bar{t}}$ для некоторой деформационной алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ над L/I и некоторого симметричного инвариантного $\bar{t} \in \bar{\mathfrak{g}} \otimes \bar{\mathfrak{g}}$, то F можно выбрать сравнимым с $1 \pmod{I}$.

Напомним (см. [1]), что скручивание $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ посредством обратимого элемента $F \in A \otimes A$ такого, что $(\varepsilon \otimes \text{id})(F) = 1 = (\text{id} \otimes \varepsilon)(F)$, определяется формулами $\bar{A} = A$, $\bar{\varepsilon} = \varepsilon$, $\bar{\Delta}(a) = F \cdot \Delta(a) \cdot F^{-1}$, $\bar{\Phi} = F^{23} \times (\text{id} \otimes \Delta)(F) \times \Phi \cdot (\Delta \otimes \text{id})(F^{-1}) \cdot (F^{12})^{-1}$, $\bar{R} = F^{21} \cdot R \cdot F^{-1}$.

Для доказательства теоремы достаточно доказать ее второе утверждение в случае, когда $mI = 0$. Положим $\bar{L} = L/I$. Построение тройки (F, \mathfrak{g}, t) мы начнем с построения t как элемента $m \otimes_{\bar{L}} (\bar{\mathfrak{g}} \otimes \bar{\mathfrak{g}})$ (после того как будет построена деформационная алгебра Ли \mathfrak{g} над L такая, что $\mathfrak{g}/I\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{g}}$, можно будет отождествить $m \otimes_{\bar{L}} (\bar{\mathfrak{g}} \otimes \bar{\mathfrak{g}})$ с $m \otimes_L (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) = m (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$). Заметим, что $\ln(R^{21} \cdot R) \in m (A \otimes A) = m \otimes_{\bar{L}} (U\bar{\mathfrak{g}} \otimes U\bar{\mathfrak{g}})$. Обычное отождествление $U\bar{\mathfrak{g}}$ и симметрической алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ как \bar{L} -модулей позволяет определить оператор проектирования $U\bar{\mathfrak{g}} \rightarrow \bar{\mathfrak{g}}$. Образ $\ln(R^{21} \cdot R)$ в $m \otimes_{\bar{L}} (\bar{\mathfrak{g}} \otimes \bar{\mathfrak{g}})$ обозначим t . Так как $R^{21} \equiv R \pmod{I}$ и $R \equiv 1 \pmod{m}$, то $R^{21} \cdot R = R \cdot R^{21}$. Поэтому

t симметричен. Так как $[R^{21}, R, \Delta(a)] = 0$ при $a \in A$, то t инвариантен. Образ t в $\bar{\mathfrak{g}} \otimes \bar{\mathfrak{g}}$ равен \bar{t} .

Рассмотрим t как элемент $m \otimes_{\bar{L}} (U\bar{\mathfrak{g}} \otimes U\bar{\mathfrak{g}}) = m(A \otimes A)$ и положим $R_1 = e^{t/2}$, $\Phi_1 = \varphi(t^{12}, t^{23})$, $a = R - R_1$, $b = \Phi - \Phi_1$. Имеем $a \in I \otimes (U\mathfrak{g}_0 \otimes U\mathfrak{g}_0)$, $b \in I \otimes (U\mathfrak{g}_0 \otimes U\mathfrak{g}_0 \otimes U\mathfrak{g}_0)$, где $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}/m\mathfrak{g}$. Из (4)–(7) следует, что равенства (1)–(3) остаются справедливыми при замене R , Φ на R_1 , Φ_1 . Поэтому

$$b^{234} - (\Delta \otimes \text{id} \otimes \text{id})(b) + (\text{id} \otimes \Delta \otimes \text{id})(b) - (\text{id} \otimes \text{id} \otimes \Delta)(b) + b^{123} = 0, \quad (8)$$

$$(\text{id} \otimes \varepsilon \otimes \text{id})(b) = 0, \quad (9)$$

$$(\Delta \otimes \text{id})(a) - a^{13} - a^{23} = b^{312} - b^{132} + b, \quad (10)$$

$$(\text{id} \otimes \Delta)(a) - a^{12} - a^{13} = b^{213} - b^{231} - b. \quad (11)$$

Кроме того, из определения t вытекает

Л е м м а. *Проекция $a^{21} + a$ на $I \otimes (\mathfrak{g}_0 \otimes \mathfrak{g}_0)$ равна 0.* ■

Пусть $F \in A \otimes A$, $F \equiv 1 \pmod{I}$. Положим

$$f = F - 1 \in I \otimes (U\mathfrak{g}_0 \otimes U\mathfrak{g}_0).$$

Скручивание $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ посредством F не меняет t , R_1 , Φ_1 , а a и b заменяются на $\bar{a} = a + f^{21} - f$ и $\bar{b} = b + f^{23} - (\Delta \otimes \text{id})(f) + (\text{id} \otimes \Delta)(f) - f^{12}$. Из (8) и предложения 2.2 статьи [1] следует, что f можно выбрать так, чтобы $b + f^{23} - (\Delta \otimes \text{id})(f) + (\text{id} \otimes \Delta)(f) - f^{12} \in I \otimes \Lambda^3 \mathfrak{g}_0$. Тогда из (9) следует, что после замены f на $f - (\varepsilon \otimes \varepsilon)(f)$ будем иметь $(\varepsilon \otimes \text{id})(f) = 0 = (\text{id} \otimes \varepsilon)(f)$, т. е. мы имеем право скручивать посредством $F = 1 + f$. После такого скручивания будем иметь $\bar{b} \in I \otimes \Lambda^3 \mathfrak{g}_0$.

Итак, можно считать, что с самого начала $b \in I \otimes \Lambda^3 \mathfrak{g}_0$. Тогда правые части (10) и (11) кососимметричны. Так как левая часть (10) симметрична по первым двум тензорным сомножителям, а левая часть (11) — по последним двум, то обе части (10) и (11) равны 0. Итак, $b = 0$, $a \in I \otimes (\mathfrak{g}_0 \otimes \mathfrak{g}_0)$. Из леммы следует, что $a^{21} + a = 0$. Поэтому скручиванием посредством $F = 1 + a/2$ можно добиться, чтобы $\bar{a} = 0$, $\bar{b} = 0$.

Итак, можно считать, что $a = 0$, $b = 0$, т. е. $R = e^{t/2}$, $\Phi = \varphi(t^{12}, t^{23})$. Тогда из инвариантности t следует, что $[R, \Delta(a)] = 0$, $[\Phi, (\Delta \otimes \text{id})(\Delta(a))] = 0$, $a \in A$. Поэтому Δ кокоммутативно и коассоциативно, т. е. (A, Δ, ε) — алгебра Хопфа. Рассуждая, как при доказательстве предложения 3.7 из [1], получим, что $A = U\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g} = \{a \in A \mid \Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a\}$ — деформационная алгебра Ли над L . Тем самым теорема доказана.

Элемент F , о котором идет речь в теореме, определен не однозначно, но если F_1 — другой такой элемент, то существует $u \in 1 + mA$ такое, что $F_1 = (u^{-1} \otimes u^{-1}) \cdot F \cdot \Delta(u)$. Поэтому пары (\mathfrak{g}, t) и (\mathfrak{g}_1, t_1) , соответствующие F и F_1 , изоморфны; изоморфизм $\varphi: (\mathfrak{g}_1, t_1) \rightarrow (\mathfrak{g}, t)$ индуцируется автоморфизмом $\text{Ad } u: A \rightarrow A$. При заданных F и F_1 в выборе u имеется произвол, так что φ определен однозначно лишь с точностью до внутренних автоморфизмов \mathfrak{g} .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Дринфельд В. Г. // Алгебра и анализ. — 1989. — Т. 1, № 6. — С. 114—148.
2. Дринфельд В. Г. // Алгебра и анализ. — 1990. — Т. 2, № 4. — С. 149—184.