И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, Гамильтоновы операторы и бесконечномерные алгебры Ли, *Функц. анализ и его прил.*, 1981, том 15, выпуск 3, 23–40

Функциональный анализ и его приложения,
т. 15, вып. 3, 1981, 23—40.

УДК 519.46

ГАМИЛЬТОНОВЫ ОПЕРАТОРЫ И БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман

§ 1. Постановка задачи и формулировка результатов

1. Пусть A — кольцо многочленов от $u_k^{(l)}$, где k пробегает некоторое множество I, конечное или бесконечное, $l = 0, 1, 2, \ldots$ Рассматривается пространство функционалов $\tilde{f} = \int f\,dx$, $f \in A$. Наша цель — ввести связанные с этим пространством симплектические структуры. Это можно сделать двумя равноценными способами: 1) рассмотреть скобки Пуассона любых функционалов; 2) задать замкнутую 2-форму ω.

Оба эти способа удобно рассмотреть, вводя операторы, которые мы назовем гамильтоновыми. Их мы будем задавать следующим образом. Обозначим через $\bar{A}$ пространство последовательностей $\xi = \{\xi_i\}$, $\xi_i \in A$, $i \in I$, таких, что $\xi_i \neq 0$ лишь для конечного набора индексов. Далее, через A^I обозначим пространство всех последовательностей $h = \{h_i\}$, $h_i \in A$, $i \in I$. Набор дифференциальных операторов

$$H_{ij} = \sum_{m=0}^{M(i,\,j)} a_{ijm}\left(\frac{d}{dx}\right)^m, \qquad a_{ijm} \in A, \quad i, j \in I, \tag{1.1}$$

определяет линейный оператор $H : \bar{A} \to A^I$. В § 3 данной работы будут определены гамильтоновы операторы. Условия гамильтоновости оператора H состоят в его косой симметрии и в обращении в нуль так называемой скобки Схоутена $[H, H]$ (точный смысл этих понятий будет определен в § 3, см. также работы [1], [2]; для конечномерного случая связь между гамильтоновостью и обращением в нуль скобки Схоутена установлена в [13]).

Теперь скобка Пуассона функционалов $\tilde{f} = \int f\,dx$, $\tilde{g} = \int g\,dx$ есть функционал $\{\tilde{f}, \tilde{g}\}_H$, задаваемый формулой

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\}_H = \int \left(H_{ij}\frac{\delta \tilde{f}}{\delta u_j}\right)\frac{\delta \tilde{g}}{\delta u_i}\,dx, \tag{1.2}$$

где $\delta\tilde{f}/\delta u_j$, $\delta\tilde{g}/\delta u_i$ — вариационные производные функционалов (см. § 3).

Прежде чем задать симплектическую структуру вторым способом, через замкнутую 2-форму, следует определить векторные поля. Мы называем векторными полями элементы A^I, т. е. последовательности $h = \{h_i\}$, $h_i \in A$, $i \in I$; коммутатор $k = [h, g]$ векторных полей h и g определяется формулой

$$k_l = \sum_{\alpha,\, i}\left(h_\alpha^{(i)}\frac{\partial g_l}{\partial u_\alpha^{(i)}} - g_\alpha^{(i)}\frac{\partial h_l}{\partial u_\alpha^{(i)}}\right), \qquad l \in I. \tag{1.3}$$

Этот коммутатор был введен в работе [3]. Нам понадобится также действие векторного поля $h \in A^I$ на функционал $\tilde{f}$. Оно задается следующим

образом:

$$h\tilde{f} = \int \sum_i h_i \frac{\delta \tilde{f}}{\delta u_i}\, dx.$$

Как нетрудно проверить, это действие согласовано со структурой коммутатора (1.3). Мотивировка этих определений имеется как в данной работе (§ 3), так и в работах [1] — [3].

Перейдем к определению симплектической формы. Пусть задан оператор H согласно формулам (1.1), и пусть h, g — два векторных поля, принадлежащие образу оператора H. Симплектическая форма будет кососимметричной функцией, ставящей в соответствие паре векторных полей функционал. Мы зададим ее формулой

$$\omega(h, g) = \int \sum_i h_i (H^{-1}g)_i\, dx,$$

где H — гамильтонов оператор.

Условия гамильтоновости оператора H гарантируют: 1) что скобка Пуассона, определенная формулой (1.2), удовлетворяет тождеству Якоби, 2) что ω является корректно определенной на образе оператора H, замкнутой и кососимметричной 2-формой. Отметим, что само по себе выполнение тождества Якоби недостаточно для построения гамильтонова формализма — правильным условием является условие замкнутости 2-формы ω.

2. В данной работе авторы ставят задачу описания всех симплектических структур, в которых оператор H линейно зависит от $u_k^{(l)}$, т. е. имеет вид

$$H_{ij} = \sum a^k_{ijlm} u_k^{(l)} \left(\frac{d}{dx}\right)^m, \tag{1.4}$$

где a^k_{ijlm} — константы *).

Вместо коэффициентов a^k_{ijlm}, входящих в формулу (1.4), удобно ввести коэффициенты $c^k_{ij\alpha\beta}$ следующим образом. Напишем

$$(H\xi, \eta) \overset{\text{def}}{=} \int (H_{ij}\xi_j)\, \eta_i\, dx, \qquad \xi, \eta \in \bar{A}.$$

Очевидно, для оператора H вида (1.4) можно записать $(H\xi, \eta)$ в виде

$$(H\xi, \eta) = \int \sum_k u_k \Big(\sum_{i, j, \alpha, \beta} c^k_{ij\alpha\beta} \xi_i^{(\alpha)} \eta_j^{(\beta)} \Big)\, dx,$$

где $\xi_j^{(\alpha)} \equiv (d/dx)^\alpha \xi_i$, $\eta_j^{(\beta)} \equiv (d/dx)^\beta \eta_j$. Как нетрудно видеть,

$$c^k_{ij\alpha\beta} = \sum_q a^k_{ji,\, \beta+q,\, \alpha-q} (-1)^{\beta+q} \binom{\beta+q}{q}. \tag{1.5}$$

Замечание. Наиболее естественно коэффициенты $c^k_{ij\alpha\beta}$ возникают, если записать операторы H_{ij} в форме (1.11).

Теорема 1.1. *Введем в пространство $\bar{A}$ бинарную операцию $[\xi, \eta] = \zeta$, где*

$$\zeta_k = \sum c^k_{ij\alpha\beta} \xi_i^{(\alpha)} \eta_j^{(\beta)}. \tag{1.6}$$

Оператор H гамильтонов в том и только том случае, когда $\bar{A}$ является алгеброй Ли относительно введенной операции.

*) Подчеркнем, что линейно от $u_k^{(l)}$ зависит оператор H, а не симплектическая форма ω.

Разумеется, оператор H может быть задан не только в форме (1.4), а и в других формах, и тогда можно указать формулы перехода, аналогичные формуле (1.5). Приведем в качестве примеров несколько таких формул перехода.

а) Пусть $H = K - K^*$, где операторы K, K^* определяются так:

$$K_{ij} = \sum b^k_{ijlm} u^{(l)}_k \left(\frac{d}{dx}\right)^m, \qquad (K^*)_{ij} \overset{\text{def}}{=} (K_{ji})^* = \sum b^k_{jilm} \left(-\frac{d}{dx}\right)^m \circ u^{(l)}_k. \tag{1.7}$$

Тогда

$$c^k_{ij\alpha\beta} = \sum_{q=0}^{\alpha} b^k_{ji,\ \beta+q,\ \alpha-q} (-1)^{\beta+q} \binom{\beta+q}{\beta} - \sum_{q=0}^{\beta} b^k_{ij,\ \alpha+q,\ \beta-q} (-1)^{\alpha+q} \binom{\alpha+q}{\alpha}. \tag{1.8}$$

б) Пусть оператор H записан в так называемой вейлевской форме

$$H_{ij} = \sum_m \frac{1}{2^m} \sum_{p=0}^{m} \binom{m}{p} w^k_{ijlm} \left(\frac{d}{dx}\right)^p \circ u^{(l)}_k \circ \left(\frac{d}{dx}\right)^{m-p}. \tag{1.9}$$

Тогда

$$c^k_{ij\alpha\beta} = \sum_{r\leqslant\beta,\ q\leqslant\alpha} w^k_{ji,\ \beta-r+q,\ \alpha+r-q} \frac{(-1)^{\beta+q}}{2^{\alpha+r-q}} \binom{\beta-r+q}{q} \binom{\alpha+r-q}{r}. \tag{1.10}$$

в) Для оператора H, записанного в форме

$$H_{ij} = \sum d^k_{ij\alpha\beta} \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha \circ u_k \circ \left(\frac{d}{dx}\right)^\beta, \tag{1.11}$$

имеем

$$c^k_{ij\alpha\beta} = (-1)^\alpha d^k_{ji\beta\alpha}. \tag{1.12}$$

Ниже будет указан способ, позволяющий записать формулы (1.5), (1.8), (1.10), (1.12) и другие подобные формулы в свернутом виде (см. формулы (1.24) — (1.26)).

Во второй основной теореме мы строим алгебры Ли, отвечающие гамильтоновым операторам, используя мотивы теории весов Картана.

Рассмотрим множество элементов $e_{i\lambda}$, где i пробегает множество I, а λ пробегает множество вещественных либо целых чисел. Рассмотрим, далее, пространство W, состоящее из конечных линейных комбинаций $e_{i\lambda}$ с вещественными коэффициентами. Пусть $\varphi^k_{ij}(\lambda, \mu)$ — многочлены по λ, μ, зависящие от трех индексов $i, j, k \in I$. Введем в пространство W билинейную операцию, задав ее на элементах $e_{i\lambda}$ формулой

$$[e_{i\lambda}, e_{j\mu}] \overset{\text{def}}{=} \sum_k \varphi^k_{ij}(\lambda, \mu)\, e_{k,\ \lambda+\mu}. \tag{1.13}$$

Многочлены $\varphi^k_{ij}(\lambda, \mu)$ мы будем называть *структурными функциями данной билинейной операции.*

Пусть оператор H задан формулой (1.4).

Т е о р е м а 1.2. *Оператор H гамильтонов в том и только том случае, когда структурные функции*

$$\varphi^k_{ij}(\lambda, \mu) = \sum_{\alpha,\ \beta} c^k_{ij\alpha\beta} \lambda^\alpha \mu^\beta \tag{1.14}$$

определяют на W структуру алгебры Ли, т. е. выполняются соотношения

$$\varphi^k_{ij}(\lambda, \mu) = -\varphi^k_{ji}(\mu, \lambda), \tag{1.15}$$

$$\sum_\alpha \varphi^\alpha_{ij}(\lambda, \mu)\, \varphi^l_{\alpha k}(\lambda+\mu, \nu) + \left(\textit{цикл}\ {}^{ijk}_{\lambda\mu\nu}\right) = 0\ ^*). \tag{1.16}$$

---

*) Здесь и далее обозначение (цикл ${}^{ijk}_{\lambda\mu\nu}$) есть сокращенная запись суммы по циклическим перестановкам (одновременно) i, j, k и λ, μ, ν.

Операторов вида (1.4) недостаточно для построения гамильтоновых систем уравнений. Многие из известных гамильтоновых операторов представляются в виде суммы оператора вида (1.4) и оператора с постоянными коэффициентами (простейший пример подобного рода — гамильтонов оператор $(d/dx)^3 + 2u(d/dx) + u'$, порождающий уравнения Кортевега — де Фриза). Поэтому встает следующий вопрос: при каких условиях является гамильтоновым оператор $H + K$, где H имеет вид (1.4), а K есть оператор с постоянными коэффициентами, определяемый формулой

$$K_{ij} = \sum b_{ijm}\left(\frac{d}{dx}\right)^m, \qquad i, j \in I, \tag{1.17}$$

где b_{ijm} — константы?

Построим набор многочленов

$$b_{ij}(\lambda) = \Sigma\, b_{ijm}\lambda^m, \qquad i, j \in I.$$

Ответ на поставленный вопрос дается следующей теоремой.

Теорема 1.3. *Оператор $H + K$, где H задан формулой* (1.4), *а K — формулой* (1.17), *является гамильтоновым в том и только том случае, когда*

(а) *оператор H гамильтонов, т. е. структурные функции $\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu)$ задают на W структуру алгебры Ли,*

(б) *на W дополнительно к структуре алгебры Ли имеется спаривание $\langle\ ,\ \rangle$, определенное формулой*

$$\langle e_{i\lambda}, e_{j\mu}\rangle = \begin{cases} b_{ij}(\mu), & \text{если } \lambda + \mu = 0, \\ 0, & \text{если } \lambda + \mu \neq 0, \end{cases} \tag{1.18}$$

которое удовлетворяет следующим условиям:

$$\langle e_{i\lambda}, e_{j\mu}\rangle = -\langle e_{j\mu}, e_{i\lambda}\rangle \tag{1.19}$$

и

$$\langle [e_{i\lambda}, e_{j\mu}], e_{k\nu}\rangle + \left(\text{цикл } {ijk \atop \lambda\mu\nu}\right) = 0. \tag{1.20}$$

Замечание. Пусть $a, b \in W$. Тогда $\omega(a, b) \overset{\text{def}}{=} \langle a, b\rangle$ есть 2-форма на алгебре Ли W. Условия (1.19), (1.20) означают, что ω есть 2-коцикл на W, т. е.

$$d\omega(a, b, c) \overset{\text{def}}{=} \omega([a, b], c) - \omega([a, c], b) + \omega([b, c], a) = 0.$$

Можно показать, что коцикл ω когомологичен нулю в том и только том случае, когда оператор $H + K$ получается из оператора H заменой u_k на $u_k + c_k$, где $\{c_k\}$ — произвольный набор констант. Следует, однако, иметь в виду, что в применении к интегрируемым уравнениям тривиальные коциклы также представляют интерес, поскольку замена $u \to u + \zeta$ соответствует введению спектрального параметра.

Примеры будут рассмотрены в следующем параграфе. Здесь же поясним, как выглядят эти понятия на ставшем традиционным примере КдФ. Гамильтоновым оператором, линейным по u, является оператор

$$H = u' + 2u\frac{d}{dx} \equiv u\frac{d}{dx} + \frac{d}{dx}\circ u.$$

Соответствующая ему, согласно теореме 1.1, алгебра Ли задается следующим образом. Элементами алгебры Ли являются дифференциальные полиномы (т. е. элементы кольца A), операция коммутирования задается формулой $[\xi, \eta] = \xi'\eta - \xi\eta'$. Другая алгебра Ли $(W, [\,,\,]_H)$, построен-

ная по теореме 1.2, состоит из конечных линейных комбинаций элементов e_λ, снабженных коммутатором $[e_\lambda, e_\mu] = (\lambda - \mu) e_{\lambda+\mu}$. Самый общий 2-коцикл $\omega(a, b)$ задается следующим спариванием: $\langle e_{-\lambda}, e_\lambda\rangle = \lambda^3 + \zeta\lambda$, где ζ — некоторый параметр. Соответствующий этому коциклу оператор K имеет вид

$$K = \left(\frac{d}{dx}\right)^3 + \zeta\left(\frac{d}{dx}\right).$$

Таким образом, оператор

$$H + K = \left(\frac{d}{dx}\right)^3 + (2u + \zeta)\frac{d}{dx} + u'$$

гамильтонов при любом значении ζ. Как известно, уравнения КдФ основаны на следующей паре гамильтоновых операторов: $(d/dx)^3 + 2u(d/dx) + u'$ и d/dx, соответствующей двум предельным значениям $\zeta = 0$, $\zeta = \infty$.

Рассмотрим теперь линейные комбинации e_λ с $\lambda \in \mathbf{Z}$. Тогда алгебра Ли $(W, [\ ,\ ]_H)$ есть всюду плотная подалгебра алгебры Ли векторных полей на окружности [4] и найденный здесь коцикл, естественно (ввиду единственности), совпадает с коциклом, найденным в [4] и ответственным за класс Годбийона — Вея.

Сделаем несколько замечаний по поводу теорем 1.1 и 1.2.

Ранее, независимо, М. Адлером [5] и Д. Р. Лебедевым и Ю. И. Маниным [6] была найдена структура алгебры Ли, соответствующая гамильтонову оператору, построенному И. М. Гельфандом и Л. А. Диким [7]. Для гимильтонова оператора, построенного Б. А. Купершмидтом и Ю. И. Маниным в работе [8], соответствующая структура алгебры Ли была найдена Д. Р. Лебедевым [9]. Теорема 1.1 означает, что в действительности всякому гамильтонову оператору вида (1.4) соответствует бесконечномерная алгебра Ли, и позволяет автоматически находить такую алгебру Ли. С другой стороны, эта теорема позволяет по всякой структуре алгебры Ли на $\bar{A}$ вида (1.6) построить гамильтонов оператор.

Теорема 1.2 позволяет строить соответствующие гамильтоновым операторам алгебры Ли абстрактным образом, не обращаясь к пространству $\bar{A}$. Подчеркнем еще раз, что индексы λ и μ, входящие в определение закона коммутации (1.13), можно считать как вещественными, так и целочисленными; использование целочисленных индексов в некоторых случаях является более удобным (см. § 2, п. 4).

В конечномерном случае связь между алгебрами Ли и скобками Пуассона, линейно зависящими от координат, рассматривалась в работах [11], [12].

Как мы упоминали выше, имеется удобный способ переходить от одной формы записи оператора к другой форме записи. Изложим этот способ.

Пусть оператор $H = \| H_{ij} \|$, $i, j \in I$, представлен в виде

$$H_{ij} = \sum r^k_{ij\alpha\beta\gamma} \left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha \circ u_k^{(\gamma)} \circ \left(\frac{d}{dx}\right)^\beta. \tag{1.21}$$

Сопоставим такой записи оператора производящую функцию

$$R^k_{ij}(\lambda, \mu, \tau) = \sum r^k_{ij\alpha\beta\gamma} \lambda^\alpha \mu^\beta \tau^\gamma. \tag{1.22}$$

Поскольку запись вида (1.21) неоднозначна, оператору H отвечает некоторый класс производящих функций. Чтобы описать этот класс, будем говорить, что две производящие функции $R^k_{ij}(\lambda, \mu, \tau)$ и $\widehat{R}^k_{ij}(\lambda, \mu, \tau)$ эквивалентны, если $R^k_{ij}(\lambda, \mu, \tau) = \widehat{R}^k_{ij}(\lambda, \mu, \tau)$ при условии $\lambda = \mu + \tau$ для любых $i, j, k \in I$. Можно доказать, что соответствие между операторами H и классами эквивалентности производящих функций взаимно однозначно; таким образом, двум разным записям одного и того же оператора в форме (1.21) соответствуют две разные производящие функции, совпадающие на плоскости $\lambda - \mu - \tau = 0$.

Мы возьмем за основу запись оператора H в форме

$$H_{ij}=\sum c^k_{ji\beta\alpha}\left(-\frac{d}{dx}\right)^\alpha \circ u_k\circ\left(\frac{d}{dx}\right)^\beta$$

и сравним ее с другими формами записи оператора H. Положим $\varphi^k_{ij}(\lambda,\ \mu)=$ $=\sum c^k_{ij\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta$. Для рассматриваемой записи оператора производящая функция $R^k_{ij}(\lambda,\ \mu,\ \tau)$, очевидно, не зависит от τ и равна $\varphi^k_{ji}(\mu,\ -\lambda)$ для $\lambda=\mu+\tau$. Таким образом, мы имеем

$$\varphi^k_{ij}(\lambda,\ \mu)=R^k_{ij}(-\mu,\ \lambda,\ \tau),\ \text{где}\quad \lambda+\mu+\tau=0. \qquad (1.23)$$

С помощью этой формулы мы опишем теперь переход к другим видам записи оператора H.

а) Допустим, что оператор H представлен в форме

$$H_{ij}=\sum a^k_{ij\gamma\beta}u^{(\gamma)}_k\left(\frac{d}{dx}\right)^\beta.$$

Положим $a^k_{ij}(\tau,\ \mu)=\sum a^k_{ij\gamma\beta}\tau^\gamma\mu^\beta$. Тогда $R^k_{ij}(\lambda,\ \mu,\ \tau)=a^k_{ij}(\tau,\ \mu)$, где $\lambda=\mu+\tau$. Значит, согласно (1.23), для $\lambda+\mu+\tau=0$ имеем

$$\varphi^k_{ij}(\lambda,\ \mu)=R^k_{ji}(-\mu,\ \lambda,\ \tau)=a^k_{ji}(\tau,\ \lambda)=a^k_{ji}(-\lambda-\mu,\ \lambda).$$

Итак,

$$\varphi^k_{ij}(\lambda,\ \mu)=a^k_{ji}(-\lambda-\mu,\ \lambda),\qquad a^k_{ij}(\lambda,\ \mu)=\varphi^k_{ji}(\mu,\ -\lambda-\mu). \quad (1.24)$$

Аналогично, пусть оператор H представлен в форме

$$H_{ij}=\sum d^k_{ij\alpha\gamma}\left(\frac{d}{dx}\right)^\alpha\circ u^{(\gamma)}_k.$$

Положим $d^k_{ij}(\lambda,\ \tau)=\sum d^k_{ij\alpha\gamma}\lambda^\alpha\tau^\gamma$. Тогда $R^k_{ij}(\lambda,\ \mu,\ \tau)=d^k_{ij}(\lambda,\ \tau)$ для $\lambda=\mu+\tau$. Согласно (1.23), для $\lambda+\mu+\tau=0$ имеем

$$\varphi^k_{ij}(\lambda,\ \mu)=R^k_{ji}(-\mu,\ \lambda,\ \tau)=d^k_{ji}(-\mu,\ \tau)=d^k_{ji}(-\mu,\ -\lambda-\mu).$$

Таким образом,

$$\varphi^k_{ij}(\lambda,\ \mu)=d^k_{ji}(-\mu,\ -\lambda-\mu),\qquad d^k_{ij}(\lambda,\ \mu)=\varphi^k_{ji}(\lambda-\mu,\ -\lambda). \quad (1.24')$$

б) Пусть оператор H представлен в виде $H=K-K^*$, где

$$K_{ij}=\sum b^k_{ij\gamma\beta}u^{(\gamma)}_k\left(\frac{d}{dx}\right)^\beta.$$

Тогда

$$(K^*)_{ij}=\sum b^k_{ji\gamma\beta}\left(-\frac{d}{dx}\right)^\beta\circ u^{(\gamma)}_k$$

и согласно (1.24) и (1.24′) получаем

$$\varphi^k_{ij}(\lambda,\ \mu)=b^k_{ji}(-\lambda-\mu,\ \lambda)-b^k_{ij}(-\lambda-\mu,\ \mu). \qquad (1.25)$$

в) Рассмотрим вейлевское представление оператора H, т. е.

$$H_{ij}=\sum_m\frac{1}{2^m}\sum_{p=0}^m\binom{m}{p}w_{ij\gamma m}\left(\frac{d}{dx}\right)^p\circ u^{(\gamma)}_k\circ\left(\frac{d}{dx}\right)^{m-p}.$$

Положим $w^k_{ij}(\lambda,\ \mu)=\sum w^k_{ijlm}\lambda^l\mu^m$. Тогда $R^k_{ij}(\lambda,\ \mu,\ \tau)=$ $=\sum_m\frac{1}{2^m}\sum_{p=0}^m\binom{m}{p}\quad w^k_{ij\gamma m}\lambda^p\mu^{m-p}\tau^\gamma=\sum w^k_{ij\gamma m}\left(\frac{\lambda+\mu}{2}\right)^m\tau^\gamma=w^k_{ij}\left(\tau,\ \frac{\lambda+\mu}{2}\right)$ и

мы получаем с помощью (1.23) для $\lambda+\mu+\tau=0$:

$$\varphi_{ij}^{k}(\lambda,\mu)=R_{ji}^{k}(-\mu,\lambda,\tau)=w_{ji}^{k}\left(\tau,\frac{\lambda-\mu}{2}\right)=w_{ji}^{k}\left(-\lambda-\mu,\frac{\lambda-\mu}{2}\right).$$

Итак, мы имеем

$$\varphi_{ij}^{k}(\lambda,\mu)=w_{ji}^{k}\left(-\lambda-\mu,\frac{\lambda-\mu}{2}\right),\qquad w_{ij}^{k}(\lambda,\mu)=\varphi_{ji}^{k}\left(\frac{2\mu-\lambda}{2},-\frac{\lambda+2\mu}{2}\right).\quad(1.26)$$

3. В теории гамильтоновых систем уравнений бывает важно установить, когда два гамильтоновых оператора H_1 и H_2 образуют так называемую гамильтонову пару, т. е. выполнено условие $[H_1,H_2]=0$ (см. по этому поводу § 7 работы [1]). Мы сформулируем теперь соответствующие результаты.

Пусть H_1 и H_2 — два гамильтоновых оператора вида (1.4). Согласно теореме 1.2, на W возникают две структуры алгебры Ли; мы обозначим через $[\ ,\ ]_{H_1}$ и $[\ ,\ ]_{H_2}$ коммутаторы, соответствующие H_1 и H_2.

Теорема 1.4. *Два гамильтоновых оператора H_1 и H_2 вида* (1.4) *образуют гамильтонову пару в том и только том случае, когда для любых $i, j, k, \lambda, \mu, \nu$ выполняется соотношение*

$$[[e_{i\lambda},e_{j\mu}]_{H_1},e_{k\nu}]_{H_2}+[[e_{i\lambda},e_{j\mu}]_{H_2},e_{k\nu}]_{H_1}+\left(\text{цикл}\ {}^{ijk}_{\lambda\mu\nu}\right)=0.\quad(1.27)$$

Следствие. *Пусть $\mathrm{ad}_{H_1}a$ — оператор, действующий в W по правилу $(\mathrm{ad}_{H_1}a)\,b=[a,b]_{H_1}$, и соответственно $\mathrm{ad}_{H_2}a$ — оператор в W, действующий по правилу $(\mathrm{ad}_{H_2}a)\,b=[a,b]_{H_2}$. Для того чтобы гамильтоновы операторы H_1 и H_2 образовывали гамильтонову пару, достаточно, чтобы $\mathrm{ad}_{H_1}a$ был дифференцированием в алгебре Ли $(W,[\ ,\ ]_{H_2})$, а $\mathrm{ad}_{H_2}a$ — дифференцированием в алгебре Ли $(W,[\ ,\ ]_{H_1})$ для всех $a\in W$.*

Пусть теперь имеются два гамильтоновых оператора H_1+K_1 и H_2+K_2, где H_1 и H_2 имеют вид (1.4), а K_1 и K_2 — операторы с постоянными коэффициентами вида (1.17). Пусть по-прежнему $[\ ,\ ]_{H_1}$ и $[\ ,\ ]_{H_2}$ — коммутаторы, отвечающие операторам H_1 и H_2. Согласно теореме 1.3, операторам K_1 и K_2 отвечают два спаривания $\langle\ ,\ \rangle_{K_1}$ и $\langle\ ,\ \rangle_{K_2}$ на алгебрах Ли $(W,[\ ,\ ]_{H_1})$ и $(W,[\ ,\ ]_{H_2})$ соответственно.

Теорема 1.5. *Два гамильтоновых оператора H_1+K_1 и H_2+K_2 указанного вида образуют гамильтонову пару в том и только том случае, когда выполняется условие* (1.27) *и, кроме этого, еще следующее условие*:

$$\langle[e_{i\lambda},e_{j\mu}]_{H_1},e_{k\nu}\rangle_{K_2}+\langle[e_{i\lambda},e_{j\mu}]_{H_2},e_{k\nu}\rangle_{K_1}+\left(\text{цикл}\ {}^{ijk}_{\lambda\mu\nu}\right)=0.\quad(1.28)$$

Авторы приносят благодарность А. В. Алексеевскому за обсуждение изложенных здесь результатов.

§ 2. Примеры

1. Пусть задан оператор $H=\|H_{ij}\|$ согласно формуле

$$H_{ij}=\sum a_{ij}^{k}u_k+b_{ij}\frac{d}{dx}.\quad(2.1)$$

Для такого оператора, очевидно, $\varphi_{ij}^{k}(\lambda,\mu)$ постоянны: $\varphi_{ij}^{k}(\lambda,\mu)=a_{ji}^{k}$ и, очевидно, $b_{ij}(\lambda)=b_{ij}\lambda$. Условия гамильтоновости оператора H, согласно теореме 1.3, сводятся в данном случае к следующему: 1) a_{ij}^{k} — структурные константы некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}$, т. е. $\mathfrak{g}$ есть совокупность линейных комбинаций элементов e_i с коммутатором $[e_i,e_j]=\Sigma a_{ij}^{k}e_k$, 2) на $\mathfrak{g}$ задано скалярное произведение $\langle e_i,e_j\rangle=b_{ij}$, являющееся симметричным и инвариантным.

2. Гамильтонов оператор $H = \| H_{ij} \|$, $i, j = 0, 1, \ldots, n-1$, вида

$$H_{ij} = \sum_{k=i+j+1}^{n} \left[\binom{k-j-1}{i} u_k \left(\frac{d}{dx}\right)^{k-i-j-1} - \binom{k-i-1}{j} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{k-i-j-1} \circ u_k \right],$$
$$\text{где } u_n \equiv 1, \qquad (2.2)$$

был впервые найден в работе И. М. Гельфанда и Л. А. Дикого [7]. По теореме 1.3 этому оператору соответствует некоторая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ и спаривание на ней. Структурные функции $\varphi_{ij}^{k}(\lambda, \mu)$, в силу формулы (1.25), имеют вид

$$\varphi_{ij}^{k}(\lambda, \mu) = \begin{cases} \binom{k-i-1}{j} \lambda^{k-i-j-1} - \binom{k-j-1}{i} \mu^{k-i-j-1}, & i+j+1 \leqslant k \leqslant n-1, \\ 0, & k < i+j+1 \text{ или} \\ & k > n-1. \end{cases} \qquad (2.3)$$

Спаривание $b_{ij}(\lambda)$ такое:

$$b_{ij}(\lambda) = \left[\binom{n-j-1}{i} - (-1)^{n-i-j-1} \binom{n-i-1}{j} \right] \lambda^{n-i-j-1}. \qquad (2.4)$$

Удобно описать алгебру Ли $\mathfrak{g}$ следующим способом. Рассмотрим интегральные операторы

$$X_{i\lambda} = \left(\frac{d}{dx}\right)^{-i-1} \circ \exp \lambda x,$$

где $i = 0, 1, \ldots, n-1$, λ — вещественное или целое. Вычислим коммутатор $[X_{i\lambda}, X_{j\mu}]$. Имеем

$$[X_{i\lambda}, X_{j\mu}] = \sum_{k=i+j+1}^{\infty} \left[\binom{k-i-1}{j} \lambda^{k-i-j-1} - \binom{k-j-1}{i} \mu^{k-i-j-1} \right] \left(\frac{d}{dx}\right)^{-k-1} \circ$$
$$\circ \exp((\lambda + \mu) x). \qquad (2.5)$$

Мы видим, что искомая алгебра Ли $\mathfrak{g}$ может быть описана как совокупность конечных линейных комбинаций операторов $X_{i\lambda}$, в которой коммутатор двух операторов $[X_{i\lambda}, X_{j\mu}]_H$ получается в результате отбрасывания в обычном коммутаторе, определяемом формулой (2.5), членов с $k \geqslant n$. Спаривание двух операторов $\langle X_{i,-\lambda}, X_{j\lambda} \rangle$ можно вычислять так: следует взять с обратным знаком член в коммутаторе (2.5), соответствующий $k = n$.

М. Адлер [5], а также Д. Р. Лебедев и Ю. И. Манин [6] для описания данного гамильтонова оператора использовали другую алгебру Ли — алгебру Ли формальных интегральных операторов с коэффициентами из кольца A. Подобный подход соответствует применению теоремы 1.1 данной работы.

3. Рассмотрим оператор $H = \| H_{ij} \|$, где

$$H_{ij} = \sum_{k=i}^{i+j} \binom{j}{k-i} \left(-\frac{d}{dx}\right)^{i+j-k} \circ u_k - \sum_{k=j}^{i+j} \binom{i}{k-j} u_k \left(\frac{d}{dx}\right)^{i+j-k}. \qquad (2.6)$$

Согласно формуле (1.25), такому оператору можно сопоставить структурные функции

$$\varphi_{ij}^{k}(\lambda, \mu) = \begin{cases} \binom{i}{k-j} \mu^{i+j-k} - \binom{j}{k-i} \lambda^{i+j-k}, & 0 \leqslant k \leqslant i+j, \\ 0, & k > i+j. \end{cases} \qquad (2.7)$$

Соответствующую этим функциям алгебраическую структуру удобно описать таким образом. Рассмотрим дифференциальные операторы

$$F_{i\lambda} = \exp \lambda x \left(\frac{d}{dx}\right)^i,$$

где $i = 0, 1, 2, \ldots$, λ — вещественное или целое. Вычислим коммутатор двух таких операторов. Имеем

$$[F_{i\lambda}, F_{j\mu}] = \sum_{k=0}^{i+j} \left[\binom{i}{k-j} \mu^{i+j-k} - \binom{j}{k-i} \lambda^{i+j-k} \right] \exp((\lambda+\mu)x) \left(\frac{d}{dx}\right)^k. \quad (2.8)$$

Мы видим, что многочлены $\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu)$, определенные формулой (2.7), являются структурными функциями алгебры Ли $\mathfrak{g}$, а именно, $\mathfrak{g}$ есть совокупность конечных линейных комбинаций операторов $F_{i\lambda}$, снабженная обычным коммутатором операторов. По теореме 1.2 рассматриваемый оператор H является гамильтоновым. Операторы такого вида, по-видимому, ранее не рассматривались.

4. В данном пункте мы построим структуру алгебры Ли на W, а затем найдем соответствующий ей гамильтонов оператор. Построим вначале некоторую вспомогательную алгебру Ли. Обозначим через $Q[x, y]$ кольцо многочленов от двух переменных x и y. Зафиксируем произвольный многочлен от одного переменного $q(x) = \sum_{i=0}^{n} q_i x^i$ и построим алгебру Ли следующим образом. Для многочленов $f(x, y)$, $g(x, y) \in Q[x, y]$ положим $[f(x, y), g(x, y)] = h(x, y)$, где

$$h(x, y) = q(x)\, y \left(\frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \right). \quad (2.9)$$

То, что введенный коммутатор удовлетворяет тождеству Якоби, можно проверить непосредственно; можно также воспользоваться следующим общим замечанием: если R — произвольное коммутативное кольцо, ∂_1 и ∂_2 — два коммутирующих дифференцирования этого кольца, то коммутатор $[a, b] = \partial_1 a \partial_2 b - \partial_1 b \partial_2 a$ определяет на R структуру алгебры Ли (в нашем случае $R = Q[x, y]$, $\partial_1 = y\partial/\partial y$, $\partial_2 = q(x)\partial/\partial x$).

Кольцо $Q[x, y]$ порождается одночленами $e_{i\lambda} = x^i y^\lambda$, $i, \lambda = 0, 1, 2, \ldots$, закон коммутирования которых, согласно (2.9), таков:

$$[e_{i\lambda}, e_{j\mu}] = (j\lambda - i\mu)\, q(x)\, x^{i+j-1} y^{\lambda+\mu} = (j\lambda - i\mu) \sum_{\alpha=0}^{n} q_\alpha e_{i+j+\alpha-1,\, \lambda+\mu}. \quad (2.10)$$

Отсюда следует, что структурные функции $\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu)$, определяемые по формуле

$$\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu) = \begin{cases} (j\lambda - i\mu)\, q_{k-i-j+1}, & i+j-1 \leqslant k \leqslant n, \\ 0, & k < i+j-1 \text{ или } k > n, \end{cases} \quad (2.11)$$

задают на W структуру алгебры Ли. По теореме 1.2 этой алгебре Ли должен отвечать некий гамильтонов оператор. Для того чтобы получить оператор сразу в форме (1.4), воспользуемся формулой перехода (1.24). Получаем

$$a_{ij}^k(\lambda, \mu) = \varphi_{ji}^k(\mu, -\lambda-\mu) =$$
$$= \begin{cases} (i\mu + j(\lambda+\mu))\, q_{k-i-j+1}, & i+j-1 \leqslant k \leqslant n, \\ 0, & k < i+j-1 \text{ или } k > n. \end{cases}$$

Гамильтонов оператор $H = \| H_{ij} \|$, таким образом, может быть построен

по любому набору вещественных чисел $q_0, q_1, \ldots, q_n$. Он имеет вид

$$H_{ij} = \sum_{k=i+j-1}^{n} \left[jq_{k-i-j+1}u_k' + (i+j)\, q_{k-i-j+1}u_k \frac{d}{dx} \right]. \tag{2.12}$$

В частности, при $q(x) \equiv 1$ мы получаем

$$H_{ij} = ju'_{i+j-1} + (i+j)\, u_{i+j-1} \frac{d}{dx}.$$

Последний оператор был найден Б. А. Купершмидтом и Ю. И. Маниным в работе [8]; этот оператор задает гамильтонову структуру так называемых уравнений Бенни в моментах. Операторы более общего вида (2.12) были найдены авторами в работе [1].

5. Будем искать структурные функции $\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu)$ в виде

$$\varphi_{ij}^k(\lambda, \mu) = (\lambda - \mu)\, c_{ij}^k, \tag{2.13}$$

где c_{ij}^k — константы.

Условия (1.15), (1.16) приводят к следующему: c_{ij}^k — структурные константы некоторого коммутативного кольца R, т. е. R есть совокупность линейных комбинаций элементов e_i с законом умножения

$$e_i \circ e_j = \sum c_{ij}^k e_k. \tag{2.14}$$

Найдем гамильтонов оператор, соответствующий согласно теореме 1.2 набору структурных констант c_{ij}^k. Согласно формуле (1.24),

$$a_{ij}^k(\lambda, \mu) = \varphi_{ji}^k(\mu, -\lambda - \mu) = (\lambda + 2\mu)\, c_{ij}^k,$$

откуда следует, что оператор $H = \|H_{ij}\|$ имеет вид

$$H_{ij} = \sum_k c_{ij}^k \left(u_k' + 2u_k \frac{d}{dx}\right). \tag{2.15}$$

Гамильтоновость таких операторов была установлена авторами в работе [1]. Алонсо Мартинес в работе [10] исследовал оператор вида (2.15) в частном случае $c_{ij}^k = \delta_{i+j+1}^k$ и показал, что он может быть представлен в виде аналога кирилловской структуры, соответствующей некоторой бесконечномерной алгебре Ли. Такое описание можно получить, если обратиться к теореме 1.1 данной работы.

Будем теперь искать спаривание $b_{ij}(\lambda)$ в виде

$$b_{ij}(\lambda) = \lambda^3 b_{ij}, \tag{2.16}$$

где b_{ij} — константы. Условия (1.19), (1.20) приводят к следующему: на R задано скалярное произведение $\langle e_i, e_j\rangle = b_{ij}$, симметричное и удовлетворяющее условию

$$\langle a \circ b, c\rangle = \langle b, a \circ c\rangle, \tag{2.17}$$

где $\circ$ — умножение в кольце R, определенное формулой (2.14). Отметим, что скалярное произведение, удовлетворяющее указанным условиям, всегда существует (для построения достаточно зафиксировать произвольным образом константы $q_0, \ldots, q_n$ и положить $b_{ij} = \Sigma c_{ij}^{\alpha} q_{\alpha}$).

Итак, если c_{ij}^k — структурные константы коммутативного кольца, на котором задано симметричное скалярное произведение с условием (2.17), то оператор $H = \|H_{ij}\|$, где

$$H_{ij} = \sum_k c_{ij}^k \left(u_k' + 2u_k \frac{d}{dx}\right) + b_{ij}\left(\frac{d}{dx}\right)^3, \tag{2.18}$$

является гамильтоновым.

6. В данном примере, принадлежащем И. М. Гельфанду и Л. А. Дикому, множество индексов I будет состоять из наборов $\{k\alpha\beta\}$, $k=0, 1, \ldots, n$, $\alpha, \beta = 0, 1, \ldots, l$. Кольцо A, таким образом, есть кольцо многочленов от $u_{k\alpha\beta}$; пространство A^I векторных полей состоит из наборов $h = \{h_{k\alpha\beta}\}$, $h_{k\alpha\beta} \in A$; пространство $\bar{A}$ 1-форм состоит из наборов $\xi = \{\xi_{k\alpha\beta}\}$, $\xi_{k\alpha\beta} \in A$. Мы условимся сопоставлять всякому векторному полю h многочлен $F_h(z)$ от некоторой переменной z согласно формуле

$$F_h(z) = \sum_0^n h_k z^k, \qquad h_k = \| h_{k\alpha\beta} \|.$$

Всякой 1-форме ξ мы условимся сопоставлять многочлен $X_\xi(z^{-1})$ от переменной z^{-1}, определяемый формулой

$$X_\xi(z) = \sum_0^n \xi_k^* z^{-k-1}, \qquad \xi_k^* = \| \xi_{k\beta\alpha} \|.$$

Мы введем теперь некоторые гамильтоновы операторы. Построим вначале кольцо $R(A)$ следующим образом:

$$R(A) = \left\{ f = \sum_{k=-M}^{N} f_k z^k,\ f_k = \| f_{k\alpha\beta} \|,\ f_{k\alpha\beta} \in A \right\}.$$

Умножение в этом кольце определяется естественным образом (как в кольце обычных матриц), коммутатор $[,]$ также естественный. Мы будем использовать следующие обозначения:

$$f_+ = \sum_0^N f_k z^k, \qquad f_- = \sum_{-M}^{-1} f_k z^k, \qquad U = \sum U_k z^k, \qquad U_k = \| u_{k\alpha\beta} \|.$$

Рассмотрим операторы H_1, K_1, H_2, K_2: $\bar{A} \to A^I$, которые определены следующими соотношениями:

$$F_{H_1\xi} = [X_\xi,\ U]_+, \qquad F_{K_1\xi} = [X_\xi,\ Cz^{n+1}]_+, \tag{2.19}$$

$$F_{H_2\xi} = z^{n+1}[X_\xi,\ U]_-, \qquad F_{K_2\xi} = z^{n+1} X'_\xi \tag{2.20}$$

(здесь C — постоянная матрица, X'_ξ — элемент с координатами $\{\xi'_{k\beta\alpha}\}$). Опишем эти операторы в терминах теорем 1.2—1.5.

Введем вначале кольцо R, состоящее из сумм $P = \sum_{-M}^{N} P_k z^k$ с естественным умножением (здесь $P_k = \| p_{k\alpha\beta} \|$ — числовые матрицы размера $l \times l$). Обозначения будут использоваться такие: $P_+ = \sum_0^N P_k z^k$, $P_- = \sum_{-M}^{-1} P_k z^k$, $\operatorname{Sp} P = \operatorname{tr} P_{-1}$. Рассмотрим подмножество $V \subset R$, состоящее из сумм вида $P = \sum_0^n P_k z^{-k-1}$.

Наше описание состоит в следующем.

а) Оператору H_1 соответствует структура алгебры Ли на пространстве V с коммутатором $[P, Q]_{H_1} = [P, Q]_n$, где $[\ ,\ ]_n$ означает, что в обычном коммутаторе (в кольце R) отбрасываются члены, содержащие z^{-n-i}, $i \geqslant 2$.

б) Оператору K_1 соответствует коцикл $\langle\ ,\ \rangle_{K_1}$ на алгебре Ли $(V, [\ ,\ ]_{H_1})$, заданный формулой $\langle P, Q\rangle_{K_1} = \operatorname{Sp}(Cz^{n+1}[P, Q])$.

в) Оператору H_2 соответствует структура алгебры Ли на пространстве V с коммутатором $[P, Q]_{H_2} = (z^{n+1}[P, Q])_-$.

г) Оператору K_2 соответствует спаривание, которое задается симметричным инвариантным скалярным произведением (см. п. 1 данного параграфа) на алгебре Ли $(V, [\ ,\ ]_{H_2})$, следующего вида: $\langle P, Q\rangle_{K_2} = \mathrm{Sp}\,(z^{n+1}PQ)$.

Нетрудно проверить, что все условия теоремы 1.5 при этом выполнены, так что операторы $H_1 + K_1$ и $H_2 + K_2$ не только сами являются гамильтоновыми, но и образуют гамильтонову пару.

§ 3. Гамильтоновы операторы

В § 1 мы вводили симплектическую структуру и скобку Пуассона через так называемые гамильтоновы операторы. Как мы уже упоминали в предшествующих работах [1], [2], мы не можем пользоваться готовым формализмом векторных полей, форм и т. д., поскольку в формальном вариационном исчислении рассматривается набор функционалов, не являющийся кольцом. Поэтому самым экономным путем является систематическое изложение всех необходимых определений. Нужные сведения имеются в работах [1], [2], однако мы излагаем их здесь, чтобы сделать статью независимой от предшествующих работ; помимо этого, предлагаемый ниже способ изложения представляется нам коротким, простым и универсальным.

1. Пусть (Ω, d) — комплекс линейных пространств, т. е. $\Omega = \Omega^0 \oplus \oplus\, \Omega^1 \oplus \ldots \oplus \Omega^q \oplus \ldots$, $d\colon\ \Omega \to \Omega$ — линейное отображение такое, что $d\Omega^q \subset \Omega^{q+1}$, $d^2 \equiv 0$. Пусть, далее, $\mathfrak{a}$ — некоторая алгебра Ли.

Определение. Назовем (Ω, d) *комплексом над алгеброй Ли* $\mathfrak{a}$ или, короче, $\mathfrak{a}$-*комплексом*, если всякому $a \in \mathfrak{a}$ сопоставлено линейное отображение $i_a\colon\Omega \to \Omega$, $i_a\Omega^q \subset \Omega^{q-1}$, $i_a\Omega^0 = \{0\}$, удовлетворяющее условиям

$$i_a i_b + i_b i_a = 0, \tag{3.1}$$

$$[i_a d + d i_a,\ i_b] = i_{[a,b]}. \tag{3.2}$$

Оператор $L_a = i_a\, d + d i_a$, переводящий Ω^q в Ω^q, назовем *производной Ли по направлению* $a \in \mathfrak{a}$.

Примеры. (а) $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли векторных полей на n-мерном многообразии X, (Ω, d) — комплекс дифференциальных форм, i_a — оператор внутреннего умножения на $a \in \mathfrak{a}$, действующий по правилу $(i_a\omega)(b_1, \ldots, b_q) = \omega\,(a, b_1, \ldots, b_q)$, $\omega \in \Omega^{q+1}$.

(б) $\mathfrak{a}$ — произвольная алгебра Ли, M — левый $\mathfrak{a}$-модуль, т. е. всякой паре $a \in \mathfrak{a}$, $m \in M$ сопоставлено $am \in M$ так, что $a_1a_2m - a_2a_1m = [a_1, a_2]\,m$. Построим комплекс $C\,(\mathfrak{a}, M)$ всевозможных полилинейных кососимметричных форм $\omega\,(a_1, \ldots, a_q)$ на $\mathfrak{a}$ со значениями в M; при этом по определению полагаем $C^0\,(\mathfrak{a}, M) = M$. Дифференциал d задается формулой

$$d\omega\,(a_1, \ldots, a_{q+1}) = \sum_i (-1)^{i+1} a_i\omega\,(a_1, \ldots \hat{a}_i \ldots, a_{q+1}) + \\ + \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\omega\,([a_i, a_j], a_1, \ldots \hat{a}_i \ldots \hat{a}_j \ldots, a_{q+1}).$$

Если оператор i_a: $C^{q+1}\,(\mathfrak{a}, M) \to C^q\,(\mathfrak{a}, M)$ определить формулой

$$i_a\omega\,(a_1, \ldots, a_q) = \omega\,(a,\ a_1, \ldots, a_q), \quad \omega \in C^{q+1}\,(\mathfrak{a}, M),$$

то, как нетрудно проверить, мы получаем $\mathfrak{a}$-комплекс. Рассмотрение всего этого комплекса в конкретных приложениях неэкономно, и обычно рассматривают подпространства $C\,(\mathfrak{a}, M)$, являющиеся подкомплексами над $\mathfrak{a}$ в смысле следующего определения.

Определение. Пусть Ω — комплекс над алгеброй Ли $\mathfrak{a}$. Линейное подпространство $\Omega_1 \subset \Omega$, замкнутое относительно действия операторов d и i_a, назовем *$\mathfrak{a}$-подкомплексом* Ω.

(в) Приведем теперь обычную конструкцию комплекса де Рама кольца. Пусть A — коммутативное кольцо (в примере (*а*) это кольцо гладких функций на многообразии X), $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли его дифференцирований. Рассмотрим в качестве модуля M кольцо A. В отличие от примера (б), будем рассматривать не все полилинейные формы на $\mathfrak{a}$ со значениями в A, а лишь A-линейные, т. е. такие формы ω, которые удовлетворяют условию $\omega(a\partial_1, \partial_2, \ldots, \partial_q) = a\omega(\partial_1, \ldots, \partial_q)$, $a \in A$, $\partial_i \in \mathfrak{a}$. Возникает $\mathfrak{a}$-подкомплекс комплекса $C(\mathfrak{a}, A)$, который называется *комплексом де Рама кольца* A; мы будем обозначать его через $\Omega(A)$.

Приведенные примеры комплексов над алгебрами Ли носят предварительный характер; основные примеры будут описаны далее.

2. Мы опишем теперь важную процедуру, позволяющую по любому комплексу над алгеброй Ли построить некоторый новый комплекс.

Пусть задана алгебра Ли $\mathfrak{a}$ и в ней зафиксировано линейное подпространство $Z \subset \mathfrak{a}$. Обозначим через $\mathfrak{a}_Z$ централизатор множества Z, т. е. подалгебру $\mathfrak{a}_Z$ алгебры Ли $\mathfrak{a}$, определяемую так: $\mathfrak{a}_Z = \{a \in \mathfrak{a}: [a, Z] = 0\}$.

Определение. Пусть задан $\mathfrak{a}$-комплекс Ω. *Фактор-комплексом* этого комплекса мы назовем комплекс $\widetilde{\Omega}$ над подалгеброй Ли $\mathfrak{a}_Z$, который строится следующим образом. Будем считать $\omega \in \Omega^q$ эквивалентной 0, если существуют такие $\omega_k \in \Omega^q$ и $z_k \in Z$, что $\omega = \sum L_{z_k}\omega_k$. Совокупность форм, эквивалентных 0, обозначим через Ω_0^q и положим $\widetilde{\Omega}^q = \Omega^q/\Omega_0^q$. В $\widetilde{\Omega} = \bigoplus \widetilde{\Omega}^q$ естественным образом определено отображение d, а также отображение i_a для $a \in \mathfrak{a}_Z$.

Покажем, что d и i_a (для $a \in \mathfrak{a}_Z$) определены корректно. Действительно, из определения L_z следует, что $[L_z, d] = 0$, т. е. $d\Omega_0^q \subset \Omega_0^{q+1}$. Далее, из соотношения (3.2) вытекает, что $[L_z, i_a] \equiv i_{[z,a]} = 0$ для $z \in Z$, $a \in \mathfrak{a}_Z$, т. е. $i_a\Omega_0^q \subset \Omega_0^{q-1}$; это и требовалось проверить.

3. Построим теперь комплекс формального вариационного исчисления. Рассмотрим кольцо A многочленов от букв $u_\alpha^{(i)}$, где $i = 0, 1, 2, \ldots$, α пробегает множество I. Построим по кольцу A комплекс де Рама $\Omega(A)$. Таким образом, Ω^q состоит из всевозможных конечных сумма вида

$$\omega = \sum \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}^{i_1 \ldots i_q}\, du_{\alpha_1}^{(i_1)} \wedge \ldots \wedge du_{\alpha_q}^{(i_q)}, \qquad \omega_{\alpha_1 \ldots \alpha_q}^{i_1 \ldots i_q} \in A.$$

Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{a}$ дифференцирований кольца A. Всякое дифференцирование $\partial \in \mathfrak{a}$ имеет вид

$$\partial = \sum_{i,\alpha} h_{i\alpha} \frac{\partial}{\partial u_\alpha^{(i)}}, \qquad h_{i\alpha} \in A.$$

Имеется выделенное дифференцирование $d/dx \in \mathfrak{a}$, определенное формулой

$$\frac{d}{dx} = \sum_{i,\alpha} u_\alpha^{(i+1)} \frac{\partial}{\partial u_\alpha^{(i)}}.$$

Рассмотрим одномерное подпространство $Z \subset \mathfrak{a}$, состоящее из дифференцирований вида $\lambda\, d/dx$, и построим связанный с подпространством Z фактор-комплекс $\widetilde{\Omega}$. $\widetilde{\Omega}$ является комплексом над алгеброй Ли $\mathfrak{a}_Z$ дифференцирований, коммутирующих с d/dx. Построенный фактор-комплекс $\widetilde{\Omega}$ называется *комплексом формального вариационного исчисления*. Отобра-

жение, сопоставляющее всякому $\omega \in \Omega$ его класс эквивалентности $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$, мы будем обозначать $\int \cdot dx$; таким образом, $\tilde{\omega} = \int \omega\, dx$.

Опишем $\tilde{\Omega}$ несколько более содержательным образом. Пространство $\tilde{\Omega}^0$, очевидно, совпадает с фактор-пространством $\tilde{A} = A/(d/dx)\,A$ и состоит, таким образом, из элементов вида $\int f\, dx$, $f \in A$; такие элементы мы будем называть *функционалами*.

Алгебра Ли $\mathfrak{a}_Z$, как нетрудно видеть, состоит из дифференцирований вида

$$\partial = \sum_{i,\,\alpha} h_\alpha^{(i)} \frac{\partial}{\partial u_\alpha^{(i)}},$$

где $h_\alpha^{(i)} \overset{\text{def}}{=} (d/dx)^i h_\alpha$. Итак, мы видим, что всякое дифференцирование $\partial \in \mathfrak{a}_Z$ определяется набором элементов $\{h_\alpha\}$, $\alpha \in I$, и, обратно, по ∂ набор $\{h_\alpha\}$ может быть восстановлен: $h_\alpha = \partial u_\alpha$. Учитывая этот факт, мы в дальнейшем интерпретируем $\mathfrak{a}_Z$ как совокупность A^I всевозможных последовательностей $h = \{h_\alpha\}$, $\alpha \in I$; такие последовательности мы называем *векторными полями*. Коммутатор дифференцирований, перенесенный в пространство A^I, имеет вид (1.3).

Опишем также пространство $\tilde{\Omega}^1$. Можно проверить, что всякая 1-форма $\omega \in \Omega^1$ вида

$$\omega = \sum_{\alpha,\, i} \omega_\alpha^i\, du_\alpha^{(i)}$$

эквивалентна (по модулю пространства Ω_0^1) 1-форме $\hat{\omega} \in \Omega^1$ вида

$$\hat{\omega} = \sum_\alpha \xi_\alpha\, du_\alpha,$$

где $\xi_\alpha = \sum_i \left(-\frac{d}{dx}\right)^i \omega_\alpha^i$. Поэтому фактор-пространство $\tilde{\Omega}^1 = \Omega^1/\Omega_0^1$ можно отождествить с пространством $\bar{A}$ таких последовательностей $\xi = \{\xi_\alpha\}$, $\alpha \in I$, что $\xi_\alpha \neq 0$ лишь для конечного набора индексов α.

Напишем еще формулу для элемента $d\tilde{f}$, $\tilde{f} \in \tilde{A}$. Для всякого $f \in A$ имеем

$$df = \sum_{\alpha,\, i} \frac{\partial f}{\partial u_\alpha^{(i)}}\, du_\alpha^{(i)},$$

откуда видно, что 1-форма df эквивалентна (по модулю пространства Ω_0^1) 1-форме $\sum_\alpha (\delta f/\delta u_\alpha)\, du_\alpha$, где элементы $\delta f/\delta u_\alpha$ определяются таким образом:

$$\frac{\delta f}{\delta u_\alpha} \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=0}^{\infty} \left(-\frac{d}{dx}\right)^i \frac{\partial f}{\partial u_\alpha^{(i)}}.$$

Элемент $\delta f/\delta u_\alpha$ называется *частной вариационной производной* элемента $f \in A$ по переменной u_α. Из вышеизложенного следует, что класс $d\tilde{f} = \widetilde{df}$ не зависит от выбора представителя f в классе эквивалентности $\tilde{f}$; отсюда мы получаем, что частные вариационные производные $\delta f/\delta u_\alpha$ не зависят от выбора f в классе эквивалентности $\tilde{f}$. Мы можем писать, таким образом, $\delta\tilde{f}/\delta u_\alpha$ вместо $\delta f/\delta u_\alpha$. Окончательно получаем формулу

$$d\tilde{f} = \sum_\alpha \frac{\delta \tilde{f}}{\delta u_\alpha}\, du_\alpha.$$

Выпишем, наконец, действие векторного поля $h = \{h_\alpha\} \in A^I$ на функционал $\tilde{f} \in \tilde{A}$. Имеем

$$h\tilde{f} = i_h d\tilde{f} = \int \sum_\alpha \frac{\delta \tilde{f}}{\delta u_\alpha} h_\alpha \, dx,$$

что совпадает с той формулой, которая была приведена в § 1.

4. Наша цель теперь — ввести симплектические структуры. Пусть имеется произвольный $\mathfrak{a}$-комплекс Ω. Мы будем предполагать, что выполняется следующее условие невырожденности: если $a \in \mathfrak{a}$ таково, что $i_a\xi = 0$ для любого $\xi \in \Omega^1$, то $a = 0$. Для всякого $\xi \in \Omega^1$ через (ξ, a) или (a, ξ) будет обозначаться элемент $i_a\xi \in \Omega^0$.

Пусть $H\colon \Omega^1 \to \mathfrak{a}$ — линейный оператор. Мы назовем его *кососимметричным*, если $(H\xi_1, \xi_2) = -(\xi_1, H\xi_2)$, $\xi_1, \xi_2 \in \Omega^1$.

Определение. *Скобкой Схоутена* $[H, K]$ двух кососимметричных операторов H, $K\colon \Omega^1 \to \mathfrak{a}$ назовем трилинейное отображение Ω^1 в Ω^0, определенное формулой

$$[H, K](\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (KL_{H\xi_1}\xi_2, \xi_3) + (HL_{K\xi_1}\xi_2, \xi_3) + (\text{цикл}), \tag{3.3}$$

где слово (цикл) означает сумму по циклическим перестановкам индексов 1, 2, 3.

Оператор $H\colon \Omega^1 \to \mathfrak{a}$ назовем *гамильтоновым*, если он кососимметричен и $[H, H] = 0$.

Мы не останавливаемся здесь подробно на изложении гамильтонова формализма, так как он детально описан в работах [1], [2]. Сформулируем лишь основное свойство гамильтоновых операторов ([2], предложение 1): если $H\colon \Omega^1 \to \mathfrak{a}$ — гамильтонов оператор, то Ω^0 является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона, определяемой формулой

$$\{m_1, m_2\}_H = (Hdm_1, dm_2), \qquad m_1, m_2 \in \Omega^0, \tag{3.4}$$

а отображение $Hd\colon \Omega^0 \to \mathfrak{a}$ есть морфизм алгебр Ли.

5. Определения скобки Схоутена и гамильтонова оператора можно рассмотреть, в частности, для комплекса формального вариационного исчисления. Поскольку в этом случае мы условились отождествлять пространство 1-форм с $\tilde{A}$, а алгебру Ли с A^I, то гамильтонов оператор H будет действовать из $\tilde{A}$ в A^I, как это было описано в § 1. Мы ограничиваемся рассмотрением матричных дифференциальных операторов H, т. е. операторов вида (1.1). Скобка Пуассона (3.4), как нетрудно проверить, приобретает вид

$$\{\tilde{f}, \tilde{g}\}_H = \int \left(H_{ij} \frac{\delta \tilde{f}}{\delta u_j}\right) \frac{\delta \tilde{g}}{\delta u_i} \, dx, \qquad \tilde{f}, \tilde{g} \in \tilde{A}$$

(см. формулу (1.2)). Теперь основное свойство гамильтоновых операторов можно переформулировать так: если $H\colon \tilde{A} \to A^I$ — гамильтонов оператор, то пространство $\tilde{A}$ функционалов является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона (1.2), построенной по этому оператору, а отображение $H\delta/\delta u : \tilde{A} \to A^I$, которое всякому функционалу $\tilde{f} = \int f\,dx$ сопоставляет векторное поле $h \in A^I$, согласно формуле

$$h_\alpha = \sum_\beta H_{\alpha\beta} \frac{\delta \tilde{f}}{\delta u_\beta}, \qquad \alpha, \beta \in I,$$

является морфизмом алгебр Ли.

§ 4. Доказательства теорем

Введем некоторые обозначения. Через u мы будем обозначать элемент из A^I, имеющий координаты $\{u_\alpha\}$, $\alpha \in I$. Далее, для всякого $h = \{h_\alpha\} \in A^I$ через ∂_h мы обозначаем дифференцирование кольца A, соответствующее элементу $h \in A^I$ (т. е. ∂_h коммутирует с d/dx и $\partial_h u_\alpha = h_\alpha$). Линейное отображение пространства A^I в себя, состоящее в покоординатном применении дифференцирования ∂_h, будет обозначаться тем же символом ∂_h.

Мы будем опираться далее на следующий важный факт: для бинарной операции $[\xi, \eta]$ вида (1.6) выполняется равенство

$$\partial_h [\xi, \eta] = [\partial_h \xi, \eta] + [\xi, \partial_h \eta], \qquad \xi, \eta \in \bar{A}. \tag{4.1}$$

В самом деле, каждая из координат элемента $\zeta = [\xi, \eta] \in \bar{A}$ билинейным образом зависит от координат ξ_α и η_α и их производных $\xi_\alpha^{(i)} = (d/dx)^i \xi_\alpha$, $\eta_\alpha^{(i)} = (d/dx)^i \eta_\alpha$, а дифференцирование d/dx перестановочно с действием ∂_h.

Нам потребуется еще формула, позволяющая выразить производную Ли L_a через оператор ∂_a,

$$(L_a \xi, h) = (\partial_a \xi, h) + (\xi, \partial_h a), \qquad \xi \in \bar{A}, \ a, h \in A^I. \tag{4.2}$$

Эта формула вытекает непосредственно из определений.

Доказательство теоремы 1.1. Вначале проверим, что для кососимметричности оператора H вида (1.4) необходимо и достаточно, чтобы операция $[\xi, \eta]$ была кососимметрична по ξ, η. Достаточность этого условия очевидна. Докажем его необходимость. Пусть известно, что оператор H кососимметричен, т. е.

$$0 \equiv (H\xi, \eta) + (\xi, H\eta) = \int \sum_k u_k \Big(\sum_{i,\, j,\, \alpha,\, \beta} (c_{ij\alpha\beta}^k + c_{ji\beta\alpha}^k) \xi_i^{(\alpha)} \eta_j^{(\beta)} \Big) dx$$

для любых $\xi, \eta \in A^I$. Нужно проверить, что $\theta_{ij\alpha\beta}^k \overset{\text{def}}{=} c_{ij\alpha\beta}^k + c_{ji\beta\alpha}^k = 0$. Предположим противное. Для произвольного $N > 0$ построим набор $\{i_1, \ldots, i_N\} \subset I$ и элемент $\xi \in \bar{A}$ с координатами $\xi_i = u_i^{(2)}$ для $i \in \{i_1, \ldots, i_N\}$, $\xi_i = 0$ для $i \notin \{i_1, \ldots, i_N\}$. Положим $\eta = \xi$. Согласно нашему предположению, элемент $g = \sum \theta_{ij\alpha\beta}^k u_k \xi_i^{(\alpha)} \xi_j^{(\beta)}$ может быть представлен в виде $g = (d/dx) f$, где f — некоторый многочлен от $u_k^{(l)}$. Очевидно, каждый одночлен, входящий в f, обязан содержать u_k для некоторого $k \in I$, иначе многочлен g не содержал бы в каждом одночлене u_k. Отсюда следует, что многочлен $g = (d/dx) f$ содержит u_k', а это неверно. Полученное противоречие доказывает, что $\theta_{ij\alpha\beta}^k \equiv 0$. Итак, кососимметричность оператора H эквивалентна косой симметрии рассматриваемой билинейной операции.

Теперь выпишем скобку Схоутена $[H, H]$. Согласно определению скобки Схоутена (3.3), для любых $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \bar{A}$ имеем

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2} [H, H](\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (L_{H\xi_1} \xi_2, H\xi_3) + (\text{цикл}) = \\
&\qquad = (\partial_{H\xi_1} \xi_2, H\xi_3) + (\xi_2, \partial_{H\xi_3}(H\xi_1)) + (\text{цикл}) = \\
&= (\partial_{H\xi_3} \xi_1, H\xi_2) + (\xi_2, \partial_{H\xi_3}(H\xi_1)) + (\text{цикл}) = (\partial_{H\xi_3} \xi_1, H\xi_2) + \partial_{H\xi_3}(\xi_2, H\xi_1) - \\
&- (\partial_{H\xi_3} \xi_2, H\xi_1) + (\text{цикл}) = -(u, [\partial_{H\xi_3} \xi_1, \xi_2]) + \partial_{H\xi_3}(u, [\xi_1, \xi_2]) - \\
&- (u, [\xi_1, \partial_{H\xi_3} \xi_2]) + (\text{цикл}) = -(u, \partial_{H\xi_3} [\xi_1, \xi_2]) + \partial_{H\xi_3}(u, [\xi_1, \xi_2]) + \\
&+ (\text{цикл}) = (H\xi_3, [\xi_1, \xi_2]) + (\text{цикл}) = -(u, [[\xi_1, \xi_2], \xi_3]) + (\text{цикл}).
\end{aligned}
$$

В ходе наших преобразований мы воспользовались вначале соотношением (4.2), а затем формулой (4.1).

Мы имеем, таким образом,

$$\frac{1}{2}[H, H](\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (u, [(\xi_1, \xi_2], \xi_3] + (\text{цикл})). \tag{4.3}$$

Мы видим, что если для операции $[\xi, \eta]$ выполнено тождество Якоби, то оператор H является гамильтоновым. Обратное также следует из формулы (4.3); нужно лишь применить рассуждение, аналогичное тому, которое мы провели в начале доказательства данной теоремы.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть структурные функции задают на пространстве W структуру алгебры Ли. Таким образом, выполняются соотношения (1.15), (1.16), которые в развернутом виде выглядят так:

$$\sum c^k_{ij\alpha\beta}\lambda^\alpha\mu^\beta + \sum c^k_{ji\alpha\beta}\mu^\alpha\lambda^\beta = 0, \tag{4.4}$$

$$\sum c^\gamma_{ij\alpha\beta}c^l_{\gamma k\delta\varepsilon}\lambda^\alpha\mu^\beta(\lambda+\mu)^\delta\nu^\varepsilon + (\text{цикл } {}^{ijk}_{\lambda\mu\nu}) = 0. \tag{4.5}$$

Из формул (4.4), (4.5) вытекает, что для любых $\xi = \{\xi_i\} \in \bar{A}$, $\eta = \{\eta_j\} \in \bar{A}$, $\zeta = \{\zeta_k\} \in \bar{A}$ выполнены равенства

$$\sum c^k_{ij\alpha\beta}\xi_i^{(\alpha)}\eta_j^{(\beta)} + \sum c^k_{ji\alpha\beta}\eta_j^{(\alpha)}\xi_i^{(\beta)} = 0,$$

$$\sum c^\gamma_{ij\alpha\beta}c^l_{\gamma k\delta\varepsilon}(\xi_i^{(\alpha)}\eta_j^{(\beta)})^{(\delta)}\zeta_k^{(\varepsilon)} + (\text{цикл } \xi, \eta, \zeta) = 0.$$

Таким образом, бинарная операция $[\xi, \eta]$, построенная на $\bar{A}$, согласно (1.6) является кососимметричной по своим аргументам и удовлетворяет тождеству Якоби, т. е. превращает $\bar{A}$ в алгебру Ли. По теореме 1.1 отсюда следует, что оператор H является гамильтоновым. Проведенные рассуждения нетрудно обратить. Это и завершает доказательство.

Доказательство теоремы 1.3. В частном случае, когда K — оператор с постоянными коэффициентами, условие гамильтоновости оператора $H+K$, очевидно, сводится к следующему: $[H, H] + 2[H, K] = 0$. Заметим, что выражение $[H, H](\xi, \eta, \zeta)$ содержит линейные комбинации членов вида $u_r\xi_i^{(\alpha)}\eta_j^{(\beta)}\zeta_k^{(\gamma)}$, а выражение $[H, K](\xi, \eta, \zeta)$ — лишь линейные комбинации членов вида $\xi_i^{(\alpha)}\eta_j^{(\beta)}\zeta_k^{(\gamma)}$. Поскольку ξ, η, ζ можно выбирать произвольным образом, нетрудно вывести отсюда, что по отдельности обращаются в нуль скобки Схоутена $[H, H]$ и $[H, K]$, т. е. в действительности операторы H и K обязаны образовывать гамильтонову пару. Условию $[H, H] = 0$, согласно теореме 1.2, соответствует наличие на W структуры алгебры Ли; структурные функции $\varphi^k_{ij}(\lambda, \mu)$ определяются формулой (1.14). Далее, формула (1.15) очевидным образом эквивалентна кососимметричности оператора K.

Осталось выяснить, какое условие отвечает равенству $[H, K] = 0$. Выписав $[H, K](\xi, \eta, \zeta)$ для $\xi, \eta, \zeta \in \bar{A}$, мы получаем

$$[H, K](\xi, \eta, \zeta) = \int \left(\sum a^k_{ijlm}b_{krs}\xi_j^{(m)}\eta_r^{(s+l)}\zeta_i\right)dx + (\text{цикл } \xi\eta\zeta) = 0.$$

Это последнее условие, как нетрудно проверить, эквивалентно следующему условию: равенство

$$\sum a^k_{ijlm}b_{krs}\lambda^m\mu^{s+l} + (\text{цикл } {}^{jri}_{\lambda\mu\nu}) = 0$$

выполняется для всех таких троек λ, μ, ν, что $\lambda+\mu+\nu = 0$. Итак,

$$\sum a^k_{ij}(\mu, \lambda)\, b_{kr}(\mu) + (\text{цикл } {}^{jri}_{\lambda\mu\nu}) = 0.$$

Выразив $a^k_{ij}(\mu, \lambda)$ через $\varphi^k_{ij}(\lambda, \mu)$ по формуле (1.24) и учитывая определение

спаривания (1.18), мы получаем

$$\sum \varphi_{ji}^{k} (\lambda, -\mu-\lambda) \langle e_{k,-\mu}, e_{r\mu}\rangle + (\text{цикл}_{\lambda\mu\nu}^{jri}) = 0,$$

или

$$\langle [e_{j\lambda}, e_{i\nu}], e_{r\mu}\rangle + (\text{цикл}_{\lambda\mu\nu}^{jri}) = 0,$$

т. е. получена формула (1.16) и доказательство закончено.

Теоремы 1.4 и 1.5 можно легко получить из теорем 1.2 и 1.3 соответственно.

Институт прикладной математики
АН СССР

Институт химической физики
АН СССР

Поступила в редакцию
25 марта 1981 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М., Дорфман И. Я., Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры, Функц. анализ **13**, вып. 4 (1979), 13—30.
2. Гельфанд И. М., Дорфман И. Я., Скобка Схоутена и гамильтоновы операторы, Функц. анализ **14**, вып. 3 (1980), 71—74.
3. Гельфанд И. М., Дикий Л. А., Асимптотика резольвенты штурм—лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега — де Фриза, УМН **XXX**, вып. 5(1975), 67—100.
4. Гельфанд И. М., Фукс Д. Б., Когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности, Функц. анализ **2**, вып. 4 (1968), 92—93.
5. Adler M., On a trace functional for formal pseudodifferential operators and the symplectic structure of the Korteveg — de Vries equation, Invent. math. **50**, № 3 (1979), 219—248.
6. Лебедев Д. Р., Манин Ю. И., Гамильтонов оператор Гельфанда — Дикого и коприсоединенное представление группы Вольтерра, Функц. анализ **13**, вып. 4 (1979), 40—46.
7. Гельфанд И. М., Дикий Л. А., Дробные степени операторов и гамильтоновы системы, Функц. анализ **10**, вып. 4 (1976), 13—29.
8. Купершмидт Б. А., Манин Ю. И., Уравнения длинных волн со свободной поверхностью. I. Законы сохранения и решения, Функц. анализ **11**, вып. 3 (1977), 31—42; II. Гамильтонова структура и высшие уравнения, Функц. анализ **12**, вып. 1 (1978), 25—32.
9. Lebedev D. R., Benney's long waves equations. Hamiltonian formalism, препринт ИТЭФ, 1979, № 41.
10. Martines Alonso L., A new infinite-dimensional Kirillov structure related with nonlinear evolution equations (submitted to Lett. Math. Physics).
11. Березин Ф. А., Несколько замечаний об ассоциативной оболочке алгебры Ли, Функц. анализ **1**, вып. 2 (1967), 1—14.
12. Кириллов А. А, Локальные алгебры Ли, УМН **XXXI**, вып. 4 (1976), 57—76.
13. Flato M., Lichnerowicz A., Sternheimer D., Algebras de Lie attachees a une variete canonique, preprint, 1975.