И. М. Гельфанд, Д. Б. Фукс, Когомологии алгебры Ли формальных векторных полей, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 1970, том 34, выпуск 2, 322–337

ИЗВЕСТИЯ АКАДЕМИИ НАУК СССР

Серия математическая

34 (1970), 322—337

УДК 513.88

И. М. ГЕЛЬФАНД, Д. Б. ФУКС

КОГОМОЛОГИИ АЛГЕБРЫ ЛИ ФОРМАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Вичисляются когомологии алгебры Ли формальных векторных полей в начале координат эвклидова пространства. Полученные результаты применяются к исследованию алгебры Ли касательных векторных полей на гладком многообразии.

Введение

0. 1. Под *формальным векторным полем* в точке $0=(0, \ldots, 0)$ пространства $\mathbf{R}^n$ понимается линейная комбинация вида $\sum_{i=1}^{n} p_i(x_1, \ldots, x_n) e_i$, где $e_1, \ldots, e_n$ — векторы стандартного базиса пространства $\mathbf{R}^n$, а $p_i(x_1, \ldots, x_n)$ — формальные степенные ряды с вещественными коэффициентами от координат $x_1, \ldots, x_n$ этого пространства. Множество формальных векторных полей можно определить так же, как обратный предел системы $\{S_r, \pi_r\}$, где S_r — пространство r-струй векторных полей класса C^r в точке $0=(0, \ldots, 0)$, а $\pi_r : S_r \to S_{r-1}$ — естественная проекция. Из этого определения видно, что формальные векторные поля составляют линейное топологическое пространство.

Коммутатор $[\xi', \xi'']$ формальных векторных полей

$$\xi' = \sum_{i=1}^{n} p_i'(x_1, \ldots, x_n) e_i, \quad \xi'' = \sum_{i=1}^{n} p_i''(x_1, \ldots, x_n) e_i$$

определяется формулой

$$[\xi', \xi''] = \sum_{i=1}^{n} \left[\sum_{j=1}^{n} \left(p_j' \frac{\partial p_i''}{\partial x_j} - p_j'' \frac{\partial p_i'}{\partial x_j} \right) \right] e_i.$$

Относительно операции коммутирования формальные векторные поля в точке 0 составляют топологическую алгебру Ли, которая обозначается через W_n. Предметом настоящей статьи является вычисление когомологий этой топологической алгебры Ли с коэффициентами в единичном вещественном представлении (т. е. в поле $\mathbf{R}$, снабженном тривиальным действием алгебры W_n).

0.2. Для того чтобы сформулировать окончательный результат, нам необходимо описать некоторые вспомогательные топологические пространства X_n $(n=1, 2, \ldots)$. Пусть $N \geqslant 2n$, и пусть $(E(N, n), p, G(N, n))$ — каноническое $U(n)$-расслоение над (комплексным) грассмановым многообразием $G(N, n)$. Обычное клеточное разбиение многообразия $G(N, n)$ (см., например, ([1]), стр 89) обладает тем свойством, что $2n$-й остов $(G(N, n))_{2n}$ при $N \geqslant 2n$ не зависит

от N. Полный прообраз множества $(G(N, n))_{2n}$ при отображении p мы и обозначим через X_n.

Пространство X_1 есть трехмерная сфера. Остальные пространства X_i не имеют столь же наглядного геометрического описания.

0.3. Центральным результатом статьи является следующая

ТЕОРЕМА. *Для всех q имеет место изоморфизм*

$$H^q(W_n; \mathbf{R}) = H^q(X_n; \mathbf{R}).$$

Умножение в кольце $H^*(W_n; \mathbf{R})$ (как и в кольце $H^*(X_n; \mathbf{R})$) тривиально, т. е. произведение любых двух элементов положительной размерности равняется нулю.

Когомологии пространства X_n могут быть найдены с помощью стандартных методов топологии. Значительная информация об этих когомологиях получается в процессе доказательства теоремы 0.3 (см. § 5). Например, они тривиальны при $0 < q \leqslant 2n$ и при $q > n(n+2)$.

0.4. Результаты настоящей работы тесно связаны с нашими результатами о когомологиях алгебр Ли векторных полей на многообразиях [см. (2)]. А именно, стандартный коцепной комплекс алгебры W_n представляет собой, как мы увидим в § 1 (см. 1.6), не что иное, как рассматривавшийся в (2) комплекс $\{\bigoplus_m \widetilde{P}^q_m, \widetilde{\nabla}\}$ [см. (2), §§ 4—6], и потому пространства $H^q(W_n; \mathbf{R})$ совпадают с пространствами $\widetilde{D}^q$ гомологий указанного комплекса. Это позволяет получить несколько новых следствий из предложений 7.5 и 8.5 статьи (2). Например, нами доказано, что пространства $\mathfrak{H}^q(M)$ когомологий размерности q алгебры Ли гладких векторных полей на n-мерном ориентируемом компактном многообразии M с коэффициентами в $\mathbf{R}$ тривиальны при $0 < q \leqslant n$ (теорема 6.3). Из других применений теоремы 0.3 отметим недавно опубликованное нами вычисление колец $\mathfrak{H}^*(T^n) = \Sigma_q \mathfrak{H}^q(T^n)$, где T^n — тор размерности n [см. (3)].

0.5. Эту статью, за исключением § 6, можно читать независимо от (2). При этом нужно пропустить пункт 1.6 и принять на веру (или передоказать) предложение 1.8.

0.6. Важным моментом в доказательстве теоремы 0.3 является тот факт, что когомологии унитарной группы $U(n)$ возникают в нем, как когомологии алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n; \mathbf{R})$ вещественных матриц порядка n. Этим соображением мы обязаны М. В. Лосику, которому рады выразить нашу искреннюю благодарность.

§ 1. Стандартный комплекс

1.1. Напомним, что когомологии топологической алгебры Ли $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в $\mathfrak{g}$-модуле M определяются как гомологии комплекса $\{C^q(\mathfrak{g}; M), d^q(\mathfrak{g}; M)\}$, где $C^q(\mathfrak{g}; M)$ есть пространство непрерывных кососимметрических q-линейных функционалов на $\mathfrak{g}$ со значениями в M, дифференциал $d^q(\mathfrak{g}; M): C^q(\mathfrak{g}; M) \to C^{q+1}(\mathfrak{g}; M)$ определяется формулой

$$[d^q(\mathfrak{g}; M)P](\xi_1, \ldots, \xi_{q+1}) =$$

$$= \sum_{1 \leqslant s < t \leqslant q+1} (-1)^{s+t-1} P([\xi_s, \xi_t], \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_s, \ldots, \hat{\xi}_t, \ldots, \xi_{q+1}) + \\ + \sum_{1 \leqslant s \leqslant q+1} (-1)^s \xi_s P(\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_s, \ldots, \xi_{q+1}).$$

Здесь $\xi_i \in \mathfrak{g}$, а $\xi_s P(\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_s, \ldots, \xi_{q+1})$ означает результат действия элемента $\xi_s \in \mathfrak{g}$ на $P(\xi_1, \ldots, \hat{\xi}_s, \ldots, \xi_{q+1})$ как на элементе $\mathfrak{g}$-модуля M.

Комплекс $\{C^q(\mathfrak{g}; M), d^q(\mathfrak{g}; M)\}$ называется *стандартным комплексом коцепей алгебры* $\mathfrak{g}$ *со значениями в* M.

1.2. Обозначим для краткости пространство $\mathbf{R}^n$ через T, алгебру Ли W_n — через W. Стандартный комплекс коцепей алгебры W со значениями в $\mathbf{R}$ мы будем обозначать просто через $\{C^q, d^q\}$. Таким образом, C^q — пространство непрерывных кососимметрических q-линейных вещественных функционалов на W, а $d^q: C^q \to C^{q+1}$ — гомоморфизм, действующий по формуле

$$(d^q P)(\xi_1, \ldots, \xi_{q+1}) = \\ = \sum_{1 \leqslant s < t \leqslant q+1} (-1)^{s+t-1} P([\xi_s, \xi_t], \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_s, \ldots, \hat{\xi}_t, \ldots, \xi_{q+1}). \quad (1)$$

Всякий непрерывный линейный функционал на W единственным образом представляется как конечная сумма функционалов вида

$$\Sigma_i p_i e_i \to \nu_0 (D (\Sigma_i \alpha (e_i) p_i)),$$

где α — функционал на пространстве T, D — дифференциальный оператор, ν_0 — функционал, относящий каждому степенному ряду его свободный член. Пространство дифференциальных операторов в пространстве степенных рядов есть не что иное, как $S^*T = \oplus_m S^m T$ — сумма всех симметрических степеней пространства T. Таким образом, пространство W', сопряженное с W, канонически изоморфно $S^*T \otimes T'$. Наконец, пространство непрерывных кососимметрических q-линейных функционалов на W есть, очевидно, $\Lambda^q(W')$ — внешняя q-я степень пространства W'. Окончательно имеем:

$$C^q = \Lambda^q (S^*T \otimes T'). \quad (2)$$

1.3. Элементы пространства C^q мы иногда будем рассматривать как функционалы на пространстве, сопряженном с C^q, т. е. как функции от $2q$ векторных аргументов $\alpha_1, \ldots, \alpha_q \in T'$, $\beta_1, \ldots, \beta_q \in T$, полиномиально зависящие от координат ковекторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$, полилинейные по $\beta_1, \ldots, \beta_q$ и меняющие знак при одновременной перестановке α_i с α_j, β_i с β_j. В такой записи дифференциал $d = d^q: C^q \to C^{q+1}$ задается формулой

$$(dP)(\alpha_1, \ldots, \alpha_{q+1}; \beta_1, \ldots, \beta_{q+1}) = \\ = \sum_{1 \leqslant s < t \leqslant q+1} (-1)^{s+t-1} P(\alpha_s + \alpha_t, \alpha_1, \ldots, \hat{\alpha}_s, \ldots, \hat{\alpha}_t, \ldots, \alpha_{q+1}; \\ \beta(s, t), \beta_1, \ldots, \hat{\beta}_s, \ldots, \hat{\beta}_t, \ldots, \beta_{q+1}), \quad (3)$$

где $\beta(s, t) = (\alpha_t, \beta_s)\beta_t - (\alpha_s, \beta_t)\beta_s$.

1.4. Стандартный комплекс коцепей алгебры Ли $\mathfrak{g}$ со значениями в $\mathbf{R}$ наделяется канонической мультипликативной структурой: умножение $C^q(\mathfrak{g};\ \mathbf{R}) \otimes C^r(\mathfrak{g};\ \mathbf{R}) \to C^{q+r}(\mathfrak{g};\ \mathbf{R})$ определяется формулой

$$(PQ)(\xi_1, \ldots, \xi_{q+r}) =$$
$$= \sum (-1)^{i_1+\ldots+i_q-q(q+1)/2} P(\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_q})\, Q(\xi_{j_1}, \ldots, \xi_{j_r}),$$

где суммирование производится по всем разбиениям множества $\{1, \ldots, q+r\}$ на непересекающиеся подмножества $\{i_1, \ldots, i_q\}$, $\{j_1, \ldots, j_r\}$, причем $i_1 < \ldots < i_q$, $j_1 < \ldots < j_r$.

Это умножение связано с дифференциалом $d = d(\mathfrak{g};\ \mathbf{R})$ обычной формулой $d(PQ) = (dP)\,Q + (-1)^{\dim P} P(dQ)$ и определяет в пространстве $H^*(\mathfrak{g};\ \mathbf{R}) = \sum_q H^q(\mathfrak{g};\ \mathbf{R})$ структуру алгебры над полем $\mathbf{R}$.

В случае $\mathfrak{g} = W$ умножение коцепей выражается на языке 1.3 формулой

$$(PQ)(\alpha_1, \ldots, \alpha_{q+r};\ \beta_1, \ldots, \beta_{q+r}) =$$
$$= \sum (-1)^{i_1+\ldots+i_q-q(q+1)/2} P(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_q};\ \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_q}) \times$$
$$\times Q(\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_r};\ \beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_r}). \tag{4}$$

1.5. Как это ясно из формулы (2), имеются канонические представления группы $GL(n,\ \mathbf{R})$ в пространствах C^q. На языке 1.3 эти представления описываются формулой

$$(gP)(\alpha_1, \ldots, \alpha_q;\ \beta_1, \ldots, \beta_q) = P(\alpha_1 g', \ldots, \alpha_q g';\ g\beta_1, \ldots, g\beta_q). \tag{5}$$

Из формул (3) и (4) видно, что дифференциал d и умножение $C^q \otimes C^r \to C^{q+r}$ согласованы с этими представлениями.

Рассмотренные представления индуцируют представления алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n,\ \mathbf{R})$ в пространствах C^q. Формулы, описывающие эти представления, можно получить, используя стандартный базис $\{A_{kl}\}$ в $\mathfrak{gl}(n,\ \mathbf{R})$ (здесь $A_{kl} = \|a_{ij}(k, l)\|$, где $a_{ij}(k, l) = \delta_{ik}\delta_{jl}$). Элемент $A_{kl} \in \mathfrak{gl}(n,\ \mathbf{R})$ действует в C^q по формуле

$$(A_{kl}P)(\alpha_1, \ldots, \alpha_q;\ \beta_1, \ldots, \beta_q) =$$
$$= \sum_{i=1}^{q} \Big[P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q;\ \beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, A_{kl}\beta_i, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_q) -$$
$$- x_{ik} \frac{\partial P}{\partial x_{il}} (\alpha_1, \ldots, \alpha_q;\ \beta_1, \ldots, \beta_q) \Big]; \tag{6}$$

здесь $x_{ij} = (\alpha_i, e_j)$ — j-я координата ковектора α_i.

1.6. Пусть F — некоторый элемент из C^q, и пусть τ — набор неотрицательных целых чисел $\tau_1, \ldots, \tau_n$ с $\tau_1 + \ldots + \tau_n = q$. Формула

$$P^\tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) = P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q;\ \underbrace{e_1, \ldots, e_1}_{\tau_1}, \ldots, \underbrace{e_n, \ldots, e_n}_{\tau_n})$$

определяет многочлен P^τ от координат ковекторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ такой, что если $\tau_1 + \ldots + \tau_{s-1} < i < j \leqslant \tau_1 + \ldots + \tau_s$, где $1 \leqslant s \leqslant n$, то

$$P^\tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_q) = -P^\tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_j, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_i, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_q).$$

Ясно, что задание элемента $P \in C^q$ равносильно заданию для всех τ многочленов P^τ с указанным свойством, т. е. что пространство C^q совпадает с пространством $\oplus_m \widetilde{P}^q_m$ из ([2]) [см. ([2]), 4.1]. Легко убедиться в том, что и дифференциал $d: C^q \to C^{q+1}$ совпадает с отображением $\widetilde{\nabla}: \oplus_m \widetilde{P}^q_m \to \oplus_m \widetilde{P}^{q+1}_m$, определенным в п. 5.1 статьи ([2]), и, таким образом, пространства $\widetilde{D}^q = \oplus_m \widetilde{D}^q_m$ из ([2]) совпадают с изучаемыми пространствами $H^q(W_n; \mathbf{R})$.

1.7. Элемент $P = P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_q)$ есть многочлен от переменных x_{ij}, y_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant q, 1 \leqslant j \leqslant n)$, где $x_{i1}, \ldots, x_{in}$ — координаты ковектора α_i, а $y_{i1}, \ldots, y_{in}$ — координаты вектора β_i. Если при этом многочлен P является однородным степени m по переменным x_{ij}, то, как это ясно из формулы (3), многочлен dP является по переменным x_{ij} однородным степени $m+1$. Благодаря этому, комплекс $\{C^q, d^q\}$ разлагается в прямую сумму своих подкомплексов $\{C^q_k, d^q\}$ $(k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots)$, где C^q_k — подпространство пространства C^q, составленное из многочленов $P(x_{ij}, y_{ij})$, однородных степени $q+k$ по x_{ij}. Ясно, что это разбиение инвариантно относительно действия группы $GL(n, \mathbf{R})$ и что если $\alpha \in C^q_k$, $\beta \in C^r_l$, то $\alpha\beta \in C^{q+r}_{k+l}$. В частности, $\{C^q_0, d^q\}$ — мультипликативный подкомплекс комплекса $\{\bar{C}^q, d^q\}$, инвариантный относительно действия группы $GL(n, \mathbf{R})$.

1.8. *Включение комплекса $\{C^q_0, d^q\}$ в комплекс $\{C^q, d^q\}$ индуцирует изоморфизм гомологий.*

Для доказательства достаточно убедиться в том, что комплексы $\{C^q_k, d^q\}$ с $k \neq 0$ имеют нулевые гомологии. Но это следует из предложения 6.2 статьи ([2]).

Замечание. Процитированное предложение 6.2 позволяет выделить в комплексе $\{C^q, d^q\}$ еще меньший подкомплекс с теми же гомологиями (подкомплекс «элементов нулевой полистепени»), что и сделано в ([2]). Однако этот подкомплекс неудобен для нас тем, что он не инвариантен относительно действия группы $GL(n, \mathbf{R})$.

1.9. *Если $0 < q < n$, то $H^q(W_n; \mathbf{R}) = 0$.*

Это предложение следует из предложения 6.6 статьи ([2]). Все же мы приведем его доказательство.

Доказательство. Для каждого элемента $Q \in C^q$ определим элементы $\sigma_i Q \in C^q$ $(i = 1, \ldots, n)$ равенством

$$\sigma_i Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_q) = \\ = [Q(\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_q)](\alpha_1 + \ldots + \alpha_q, e_i).$$

Легко показать, что если $Q_1, \ldots, Q_k \in C^q$ и $\sigma_{i_1}Q_1 + \ldots + \sigma_{i_k}Q_k = 0$ ($i_1, \ldots, i_k$ попарно различны), то Q_k представляется в виде $\sigma_{i_1}R_1 + \ldots + \sigma_{i_{k-1}}R_{k-1}$, где $R_1, \ldots, R_{k-1} \in C^q$ (это следует из независимости элементов $x_{1i} + \ldots + x_{qi}$ $(i = 1, \ldots, n)$ в кольце многочленов от $\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_q$). Ясно также, что $d(\sigma_i Q) = \sigma_i dQ$ и если $Q \in C^q_k$, то $\sigma_i Q \in C^q_{k+1}$.

Пусть $P \in C^q_0$, $q < n$ и $dP = 0$. Мы покажем, что $P \in \operatorname{Im} d$.

Так как $d(\sigma_i P)=0$ для всех i и $\sigma_i P \in C_1^q$, то существуют элементы $P_i \in C_1^{q-1}$ с $dP_i = \sigma_i P$ (см. 1.8). Аналогично, для $s>1$ элементы $P_{i_1\ldots i_s} \in C_s^{q+s}$ с $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_s \leqslant n$ определяются (индуктивно по s) из равенств

$$dP_{i_1\ldots i_s} = \sum_{k=1}^{s} (-1)^{k-1} \sigma_{i_k} P_{i_1\ldots \hat{i}_k \ldots i_s}. \tag{7}$$

Конечно, эти элементы определены неоднозначно: если элементы $P_{j_1\ldots j_{s-1}}$ для всех наборов $j_1 \ldots j_{s-1}$ уже выбраны, то $P_{i_1\ldots i_s}$ определяются с точностью до слагаемых вида dR с $R \in C_s^{q-s-1}$. Так как $P_{1\ldots q+1} \in C^{-1}=0$, то $P_{1\ldots q+1}=0$ и, значит,

$$\sum_{k=1}^{q+1} (-1)^{k-1} \sigma_k P_{1\ldots \hat{k} \ldots q+1} = 0.$$

Поэтому $P_{1\ldots q} = \sum_{k=1}^{q} \sigma_k R_k$, где $R_k \in C^0$. Заменим $P_{1\ldots \hat{k} \ldots q}$ на $P_{1\ldots \hat{k} \ldots q} + (-1)^k dR_k$. Так как

$$\sum_{k=1}^{q} (-1)^{k-1} \sigma_k [P_{1\ldots \hat{k} \ldots q} + (-1)^k dR_k] = d\left(P_{1\ldots q} - \sum_{k=1}^{q} \sigma_k R_k\right) = 0,$$

то после этого за $P_{1\ldots q}$ можно взять 0. Таким образом, элементы $P_{i_1\ldots i_s}$, удовлетворяющие соотношениям (7), можно выбрать так, что $P_{1\ldots q}=0$. Последовательно проводя такие же рассуждения, мы приходим к системе элементов $P_{i_1\ldots i_s}$, удовлетворяющих соотношениям (7) и таких, что уже $P_{12}=0$. Тогда $\sigma_1 P_2 - \sigma_2 P_1 = dP_{12} = 0$, значит, $P_1 = \sigma_1 R$ для некоторого $R \in C^q$ и $\sigma_1(P - dR) = dP_1 - \sigma_1 dR = 0$. Следовательно, $P = dR$.

§ 2. Фильтрация

Цель этого параграфа — определить в комплексе $\{C_0^q, d^q\}$ фильтрацию, причем отвечающая ей спектральная последовательность будет использоваться в дальнейшем для вычисления гомологий этого комплекса*.

2.1. Каждый одночлен, входящий в многочлен $P = P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_q) = P(x_{ij}, y_{ij}) \in C_0^q$, имеет некоторые степени m_{ij} по переменным x_{ij}. Числа $m_i = \sum_{j=1}^{n} m_{ij}$ $(i=1, \ldots, q)$ мы будем называть просто *степенями* этого одночлена. Ясно, что $m_1, \ldots, m_q$ — неотрицательные целые числа и что $m_1 + \ldots + m_q = q$.

---

* Вводимая фильтрация, по существу, не отличается от фильтрации Серра — Хохшильда ([5]), построенной по подалгебре $\mathfrak{gl}(n, \ )$ алгебры W_n (вложение $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ в W_n индуцировано естественным вложением группы линейных преобразований в группу диффеоморфизмов).

Мы будем говорить, что элемент P имеет фильтрацию $\geqslant u$, если среди степеней каждого из его одночленов имеется по крайней мере u отличных от единицы. Элементы фильтрации $\geqslant u$ составляют подпространство пространства C_0^q, которое обозначается через $F^u C_0^q$. Ясно, что $F^0 C_0^q = C_0^q$, $F^u C_0^q \supset \supset F^{u'} C_0^q$ при $u \leqslant u'$ и пересечение $\bigcap\limits_{u=0}^{\infty} F^u C_0^q$ состоит из одного нуля.

2.2. *Фильтрация F согласована с дифференциалом d.*

В самом деле, при переходе от элемента P к элементу dP одночлен со степенями $m_1, \ldots, m_q$ превращается, как это ясно из формулы (3), в сумму одночленов со степенями $m_2, \ldots, m_s, \alpha, m_{s+1}, \ldots, m_{t-1}, \beta, m_t, \ldots, m_q$, где $1 \leqslant s < t \leqslant q+1$, $\alpha + \beta = m_1 + 1$. Число степеней, отличных от единицы, при этом не уменьшается: если $m_1 \neq 1$, то $m_1 + 1 \neq 2$ и, значит, или $\alpha \neq 1$, или $\beta \neq 1$. Следовательно, $d(F^u C_0^q) \subset F^u C_0^{q+1}$.

2.3. *Фильтрация F мультипликативна, т. е. если $P \in F^u C_0^q$, $Q \in F^{u'} C_0^{q'}$, то $PQ \in F^{u+u'} C_0^{q+q'}$.*

2.4. *Фильтрация F согласована с действием группы $GL(n, \mathbf{R})$, т. е. $g(F^u C_0^q) \subset F^u C_0^q$ при $g \in GL(n, \mathbf{R})$, $0 \leqslant u < \infty$.*

2.5. Положим $E_0^{u,v} = (F^u C_0^{u+v})/(F^{u+1} C_0^{u+v})$ и обозначим через $d_0^{u,v}$ гомоморфизм $E_0^{u,v} \to E_0^{u,v+1}$, получающийся факторизацией из d^{u+v}. Биградуированный комплекс $\{E_0^{u,v}, d_0^{u,v}\}$ является нулевым членом мультипликативной спектральной последовательности $\{E_r^{u,v}, d_r^{u,v} : E_r^{u,v} \to E_r^{u+r,v-r+1}\}$, предельный член которой есть кольцо, присоединенное к кольцу гомологий комплекса $\{C_0^q, d^q\}$, т. е. к $H^*(W_n; \mathbf{R})$. Группа $GL(n, \mathbf{R})$ и алгебра $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ действуют на каждом из пространств $E_r^{u,v}$, и дифференциалы $d_r^{v,v}$ согласованы с этими действиями (см. 1.4, 2.4).

Мы приступаем к изучению спектральной последовательности $\{E_r^{u,v}, d_r^{u,v}\}$.

§ 3. Нулевой член спектральной последовательности

Результаты этого параграфа можно вывести также из п.2 статьи ([5]). Мы предпочли, однако, независимое изложение, так как прямые ссылки были бы затруднительны.

3.1. Пространство $E_0^{u,v}$ можно отождествить с пространством многочленов из C_0^{u+v}, состоящих из таких одночленов, что среди их степеней v равных единице и u отличных от единицы. Каждый такой одночлен $p(\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_q)$ единственным образом представляется в виде произведения $p'(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_v}; \beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_v}) \cdot p'(\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_u}; \beta_{j_1}, \ldots, \beta_{j_u})$, в котором первый сомножитель есть полилинейная функция всех своих аргументов. Разбив таким образом каждый из одночленов, составляющих многочлен $P \in E_0^{u,v}$, и сгруппировав слагаемые, получающиеся друг из друга одновременными перестановками α_i с α_j и β_i с β_j, мы получим представление элемента P в виде конечной суммы $\sum_k P_k' P_k''$, где $P_k' \in E_0^{0,v}$, $P_k'' \in E_0^{u,0}$ (умножение понимается в смысле 1.4). Ясно, что такое представление определяет изоморфизм

$$E_0^{u,v} = E_0^{0,v} \otimes E_0^{u,0}.$$

Подчеркнем, что кольцевая структура в E_0 согласована с этим разложением, т. е. если $P \in E_0^{0,v}$, $Q \in E_0^{u,0}$, то произведение PQ равняется элементу $P \otimes Q \in E_0^{u,v}$.

3.2. Следующее предложение описывает «нулевой столбец» члена E_0.

Комплекс $\{E_0^{0,q}, d_0^{0,q}\}$ *изоморфен стандартному комплексу коцепей алгебры* $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ *со значениями в* $\mathbf{R}$ *с тривиальным действием алгебры.*

Доказательство. В силу 3.1, $E_0^{0,q}$ есть пространство функций от ковекторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$ и векторов $\beta_1, \ldots, \beta_q$, линейных по всем аргументам и меняющих знак при одновременной перестановке α_i с α_j и β_i с β_j, т. е. $E_0^{0,q} = \Lambda^q(T \otimes T')$. Пространство $(T \otimes T')' = T' \otimes T$ можно отождествить с пространством $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ линейных операторов в пространстве T (элемент $\alpha \otimes \beta$ действует в T по формуле $x \to \alpha(x)\beta$) и потому $E_0^{0,q} = \Lambda^q(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})')$. Пусть $P = P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_q) \in E_0^{0,q}$; пользуясь полилинейностью функции F, перепишем формулу (3) в виде:

$$dP(\alpha_1, \ldots, \alpha_{q+1}; \beta_1, \ldots, \beta_{q+1}) =$$

$$= \sum_{1 \leqslant s < t \leqslant q+1} (-1)^{s+t-1} [P(\alpha_s, \alpha_1, \ldots, \hat{\alpha}_s, \ldots, \hat{\alpha}_t, \ldots, \alpha_{q+1}; (\alpha_t, \beta_s)\beta_t, \beta_1, \ldots$$

$$\ldots, \hat{\beta}_s, \ldots, \hat{\beta}_t, \ldots, \beta_{q+1}) - P(\alpha_t, \alpha_1, \ldots, \hat{\alpha}_s, \ldots, \hat{\alpha}_t, \ldots, \alpha_{q+1};$$

$$(\alpha_s, \beta_t)\beta_s, \beta_1, \ldots, \hat{\beta}_s, \ldots, \hat{\beta}_t, \ldots, \beta_{q+1})] +$$

$$+ \sum_{1 \leqslant s < t \leqslant q+1} (-1)^{s+t-1} [P(\alpha_t, \alpha_1, \ldots, \hat{\alpha}_s, \ldots, \hat{\alpha}_t, \ldots, \alpha_{q+1};$$

$$(\alpha_t, \beta_s)\beta_t, \beta_1, \ldots, \hat{\beta}_s, \ldots, \hat{\beta}_t, \ldots, \beta_{q+1}) - P(\alpha_s, \alpha_1, \ldots, \hat{\alpha}_s, \ldots, \hat{\alpha}_t, \ldots, \alpha_{q+1};$$

$$(\alpha_s, \beta_t)\beta_s, \beta_1, \ldots, \hat{\beta}_s, \ldots, \hat{\beta}_t, \ldots, \beta_{q+1})].$$

Первая сумма в правой части этой фомулы есть линейная функция всех аргументов, а вторая сумма, наоборот, состоит из слагаемых, каждое из которых не линейно зависит от каждого из ковекторов $\alpha_1, \ldots, \alpha_q$. Поэтому вторая сумма принадлежит $F^1C_0^q$ и $d_0^{0,q} P$ совпадает с первой суммой. Так как коммутатор элементов $\alpha \otimes \beta$, $\alpha' \otimes \beta' \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, где $\alpha, \alpha' \in T'$, $\beta, \beta' \in T$ равен, очевидно, $(\alpha, \beta')\alpha' \otimes \beta - (\alpha', \beta)\alpha \otimes \beta'$, то дифференциал $d_0^{0,q}$ есть не что иное, как гомоморфизм $d: \Lambda^q(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})') \to \Lambda^{q+1}(\mathfrak{gl}(n, R)')$, действующий по формуле

$$dP(\xi_1, \ldots, \xi_{q+1}) =$$

$$= \sum_{1 \leqslant s < t \leqslant q+1} (-1)^{s+t-1} P([\xi_s, \xi_t], \xi_1, \ldots, \hat{\xi}_s, \ldots, \hat{\xi}_t, \ldots, \xi_{q+1}),$$

т. е. совпадает с дифференциалом стандартного комплекса алгебры $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$.

3.3. Теперь мы исследуем действие дифференциала d_0 на элементы «нулевой строки», т. е. на элементы пространств $E_0^{q,0}$. Пусть $\{A'_{kl}\}$ — базис в $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})' = T \otimes T' = E_0^{0,1}$, сопряженный с базисом $\{A_{kl}\}$ в $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) = T' \otimes T$ (отметим, что $A_{kl} = e'_l \otimes e_k$, $A'_{kl} = e_l \otimes e'_k$, где $\{e'_i\}$ — базис в T', сопряженный с базисом $\{e_i\}$ в T).

Для любого элемента $P \in E_0^{q,0}$ имеет место равенство

$$d_0^{q,0} P = -\sum_{k,l} A'_{kl} \otimes (A_{kl} P) \tag{8}$$

($A_{kl}P$ — образ элемента P под действием элемента $A_{kl} \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ — см. 1.5).

Доказательство. По определению, $d_0^{q,0} P$ есть часть многочлена dP, составленная из одночленов, линейно зависящих от одного из ковекторов α, т. е.

$$(d_0^{q,0} P)(x_{ij}, y_{ij}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{q+1} \sum_{l=1}^{n} x_{il} \left[\frac{\partial}{\partial x_{il}} dP(\alpha_1, \ldots, \alpha_{q+1}; \beta_1, \ldots, \beta_{q+1}) \right]_{\alpha_i=0} =$$

$$= \sum_{i=1}^{q+1} \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} x_{il} y_{ik} \left[\frac{\partial}{\partial x_{il}} dP(\alpha_1, \ldots, \alpha_{q+1}; \beta_1, \ldots, \beta_{q+1}) \right]_{\alpha_i=0,\ \beta_i=e_k}.$$

Отсюда видно, что

$$d_0^{q,0} P = \sum_{k,l} A'_{k,l} \otimes P_{k,l},$$

где

$$P_{k,l} = (-1)^q \left[\frac{\partial}{\partial x_{q+1,l}} dP(\alpha_1, \ldots, \alpha_{q+1}; \beta_1, \ldots, \beta_q, e_k) \right]_{\alpha_{q+1}=0}.$$

Заменяем dP по формуле (3); слагаемые с $t \neq q+1$ мы при этом отбрасываем, так как степени одночленов в каждом из этих слагаемых по координатам ковектора α_{q+1} отличны от единицы и после дифференцирования по $x_{q+1,l}$ и приравнивания α_{q+1} нулю они делаются нулевыми. Получаем:

$$P_{k,l} = \frac{\partial}{\partial x_{q+1,l}} \Big[\sum_{1 \leqslant s \leqslant q} (-1)^s P(\alpha_s + \alpha_{q+1}, \alpha_1, \ldots, \hat{\alpha}_s, \ldots$$

$$\ldots, \alpha_q; (\alpha_{q+1}, \beta_s) e_k - x_{sk} \beta_s, \beta_1, \ldots, \hat{\beta}_s, \ldots, \beta_q) \Big]_{\alpha_{q+1}=0} =$$

$$= \sum_{1 \leqslant s \leqslant q} \Big[x_{sq} \frac{\partial}{\partial x_{sl}} P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_q) -$$

$$- P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_{s-1}, y_{sl} e_k, \beta_{s+1}, \ldots, \beta_q) \Big].$$

Остается заметить, что $y_{sl} e_k = A_{kl} \beta_s$ и воспользоваться формулой (6) из 1.4.

3.4. Предложения 3.2 и 3.3 позволяют получить полное описание члена E_0.

Для всех u и v имеются канонические изоморфизмы пространства $E_0^{u,v} = E_0^{0,v} \otimes E_0^{u,0}$ на пространство $\mathrm{Hom}((E_0^{0,v})', E_0^{u,0}) = \mathrm{Hom}(\Lambda^v(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})), E_0^{u,0})$, т. е. канонические изоморфизмы $E_0^{u,v} \to C^v(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); E_0^{u,0})$ (см. 1.1). Обозначим их через $\eta^{u,v}$.

Изоморфизмы $\eta^{u,v}$ определяют для каждого u изоморфизмы комплекса $\{E_0^{u,v}, d_0^{u,v}\}_{0 \leqslant v < \infty}$ на комплекс $\{C^v(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); E_0^{u,0}), d^v(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); E_0^{u,0})\}$.

Доказательство. Мы должны доказать, что для любых элементов $P \in E_0^{0,v}$, $Q \in E_0^{u,0}$ элемент $P \otimes Q \in E_0^{u,v}$ имеет одинаковые образы при гомоморфизмах

$$\eta^{u,v+1} \circ d_0^{u,v}, \quad [d^v(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); E_0^{u,0})] \circ \eta^{u,v} : E_0^{u,v} \to C^{v+1}(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); E_0^{u,0})$$

(при $u=0$ это уже доказано — см. 3.2). Согласно определению гомоморфизма $\eta^{u,v}$, значение коцепи $\eta^{u,v}(P\otimes Q)\in C^v(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); E_0^{u,0})$ на элементах $\xi_1, \dots$ $\dots, \xi_v\in\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ равняется $[(\eta^{0,v}P)(\xi_1, \dots, \xi_v)]Q\in E_0^{u,0}$. Следовательно, для любых $\xi_1, \dots, \xi_{v+1}\in\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ имеем:

$$\{[d^v(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); E_0^{u,0})](\eta^{u,v}(P\otimes Q))\}(\xi_1, \dots, \xi_{v+1}) =$$

$$= \sum_{1\leqslant s<t\leqslant v+1} (-1)^{s+t-1}[(\eta^{0,v}P)([\xi_s, \xi_t], \xi_1, \dots, \hat{\xi}_s, \dots, \hat{\xi}_t, \dots, \xi_{v+1})]Q +$$

$$+ \sum_{1\leqslant s\leqslant v+1} (-1)^s[(\eta^{0,v}P)(\xi_1, \dots, \hat{\xi}_s, \dots, \xi_{v+1})](\xi_s Q);$$

$$[\eta^{u,v+1}(d_0^{u,v}(P\otimes Q))](\xi_1, \dots, \xi_{v+1}) =$$

$$= [\eta^{u,v+1}(d_0^{0,v}P\otimes Q + (-1)^v P\otimes d_0^{u,0}Q)](\xi_1, \dots, \xi_{v+1}) =$$

$$= \sum_{1\leqslant s<t\leqslant v+1} (-1)^{s+t-1}[(\eta^{0,v}P)([\xi_s, \xi_t], \xi_1, \dots, \hat{\xi}_s, \dots, \hat{\xi}_t, \dots, \xi_{v+1})]Q -$$

$$- \sum_{1\leqslant s\leqslant v+1} (-1)^v(-1)^{v-s}\textstyle\sum_{k,l}(\eta^{0,v}P)(\xi_1, \dots, \hat{\xi}_s, \dots, \xi_{v+1})A'_{kl}(\xi_s)A_{kl}Q.$$

Остается заметить, что так как базисы $\{A'_{kl}\}$, $\{A_{kl}\}$ сопряжены, то

$$\sum_{k,l} A'_{k,l}(\xi_s)A_{k,l} = \xi_s.$$

3.5. *Для всех u, v пространство $E_1^{u,v}$ канонически изоморфно пространству $H^v(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); E_0^{u,0})$ когомологий размерности v алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ с коэффициентами в $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$-модуле $E_0^{u,0}$.*

Это следует из 3.4.

§ 4. Первый член спектральной последовательности

Задача об описании члена E_1 нашей спектральной последовательности свелась, таким образом, к изучению когомологий алгебры Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ с коэффициентами в различных представлениях; это составляет предмет данного параграфа.

Начнем с двух хорошо известных фактов из теории алгебр Ли.

4.1. Пусть M — произвольный конечномерный $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$-модуль. Обозначим через M_0 подпространство пространства M, составленное из таких элементов m, что $Am=0$ для любой матрицы $A\in\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ с $\operatorname{Tr} A=0$. Очевидно, M_0 — подмодуль $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$-модуля M: если $m\in M_0$ и $B\in\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, то для любой матрицы $A\in\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ с $\operatorname{Tr} A=0$ имеет место равенство $ABm = A(B-(\operatorname{Tr} B)E)m + (\operatorname{Tr} B)Am = 0$, так что $Bm\in M_0$.

Включение $M_0\to M$ индуцирует изоморфизм $H^*(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}), M_0) = H^*(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); M)$.

Доказательство. Прямое разложение $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) = \mathbf{R} \oplus \mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ индуцирует канонические изоморфизмы $H^*(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); M_0) = H^*(\mathbf{R}; H^*(\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}); M_0))$, $H^*(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); M) = H^*(R; H^*(\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}); M))$; гомоморфизм

$$H^*(\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}); M_0) \to H^*(\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R}); M),$$

индуцированный включением $M_0 \to M$, также является изоморфизмом в силу простоты алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ [см. ([4]), стр. 84].

4.2. *Имеет место кольцевой изоморфизм $H^*(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); \mathbf{R}) = H^*(U(n); \mathbf{R})$. Другими словами, существуют элементы $\varphi_i = \varphi_i(n) \in H^*(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); \mathbf{R})$, $i = 1, \ldots, n$, такие, что $\dim \varphi_i(n) = 2i-1$ и $H^*(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); \mathbf{R})$ есть внешняя алгебра от $\varphi_1(n), \ldots, \varphi_n(n)$ над $\mathbf{R}$* [см. ([6]), стр. 191]. *Образующие $\varphi_i(n)$ можно выбрать так, что когомологический изоморфизм, индуцированный обычным включением $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}) \to \mathfrak{gl}(m, \mathbf{R})$ $(m \geqslant n)$, переводит $\varphi_i(m)$ в $\varphi_i(n)$ при $i \leqslant n$ и в ноль при $i > n$.*

Доказательство. Комплексификации алгебр Ли $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ и $\mathfrak{u}(n)$ канонически изоморфны (обе они совпадают с $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{C})$) и потому $H^*(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); \mathbf{R}) = H^*(\mathfrak{u}(n); \mathbf{R})$. Канонический изоморфизм $H^*(\mathfrak{u}(n); \mathbf{R}) \to H^*(U(n); \mathbf{R})$ индуцируется, в силу компактности группы $U(n)$, естественным вложением стандартного комплекса алгебры $\mathfrak{u}(n)$ в комплекс де Рама группы $U(n)$. Последнее из утверждений нашего предложения очевидно.

Замечание. В качестве образующих $\varphi_i(n)$ внешней алгебры $H^*(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); \mathbf{R})$ можно взять классы когомологий коциклов $\Phi_i \in C^{2i-1}(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); \mathbf{R})$, где

$$\Phi_i(\xi_1, \ldots, \xi_{2i-1}) = \sum \varepsilon(k_1, \ldots, k_{2i-1}) \operatorname{Tr}(\xi_{k_1}, \ldots, \xi_{k_{2i-1}}),$$

причем суммирование производится по всем перестановкам $(k_1, \ldots, k_{2i-1})$ чисел $1, \ldots, 2i-1$, а $\varepsilon(k_1, \ldots, k_{2i-1}) = 1$ или -1 в зависимости от четности перестановки $(k_1, \ldots, k_{2i-1})$.

Этот факт нами в дальнейшем не используется.

4.3. Переходим к изучению члена E_1. Обозначим через K^u подпространство пространства $E_0^{u,0}$, составленное из элементов, на которых действие алгебры $\mathfrak{sl}(n, \mathbf{R})$ тривиально. Ясно, что $K^* = \sum_{u=0}^{\infty} K^u$ есть подкольцо кольца $E_0^{*,0} = \sum_{u=0}^{\infty} E_0^{u,0}$.

Мы построим *канонический изоморфизм биградуированных колец $E_1 = \sum_{u,v} E_1^{u,v}$ и $K^* \otimes H^*(U(n); \mathbf{R})$.*

Прежде всего заметим, что алгебра $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ тоже действует на K^* тривиально. Это следует из того, что равенство $e(P) = 0$, где $e \in \mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$, — единичная матрица, имеет место для всех $P \in C_0^q$ (последнее легко вывести из формулы (6), используя тот факт, что степень каждого одночлена многочлена P по совокупности переменных x_{ij} равняется q). Согласно 4.1, включение $K^u \to E_0^{u,0}$ индуцирует изоморфизм $H^*(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); K^u) = H^*(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); E_0^{u,0})$. Равенство же $H^*(\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R}); K^*) = K^* \otimes H^*(U(n); \mathbf{R})$ следует, ввиду тривиальности действия алгебры $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ на K^*, из 4.2.

4.4. *Каждый элемент пространства* C_0^q, *инвариантный относительно действия группы* $SL(n, \mathbf{R})$, *является линейной комбинацией многочленов от* $\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_q$ *вида*

$$(\alpha_{s_1}, \beta_1) \ldots (\alpha_{s_q}, \beta_q) \tag{9}$$

(*среди индексов* $s_1, \ldots, s_q$ *могут быть совпадающие*). *В частности, это верно для элементов пространства* K^*.

Доказательство. Так как степени одночленов (см. 2.1) инвариантны относительно действия группы $SL(n, \mathbf{R})$, то достаточно доказать утверждение для инвариантных коцепей $P \in C_0^q$, однородных в том смысле, что все одночлены многочлена P имеют, с точностью до порядка, одни и те же степени $m_1, \ldots, m_q$. Более того, достаточно доказать, что суммой многочленов вида (9) является многочлен $P_0(\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_q)$, составленный из одночленов многочлена P, имеющих степень m_1 по α_1, степень m_2 по $\alpha_2, \ldots$, степень m_q по α_q, где $m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_q$.

Многочлен P_0 можно рассматривать как тензор. Точнее говоря, существует единственный тензор

$$\tau = \tau(\gamma_1, \ldots, \gamma_q; \beta_1, \ldots, \beta_q) \in [(\otimes^q T') \otimes (\otimes^q T)]'$$

такой, что

$$P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_q) = \tau(\underbrace{\alpha_1, \ldots, \alpha_1}_{m_1}, \ldots, \underbrace{\alpha_q, \ldots, \alpha_q}_{m_q}; \beta_1, \ldots, \beta_q) \tag{10}$$

и симметричный относительно аргументов $\gamma_{m_1+\ldots+m_{s-1}+1}, \ldots, \gamma_{m_1+\ldots+m_s}$ при $1 \leqslant s \leqslant q$. Ясно, что тензор τ также инвариантен относительно группы $SL(n, \mathbf{R})$.

Согласно классической теореме теории инвариантов, алгебра инвариантных относительно группы $SL(n, \mathbf{R})$ тензоров порождается тензорами вида:

1) (α, β), где $\alpha \in T'$, $\beta \in T$;
2) $\det(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in T'$;
3) $\det(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, где $\beta_1, \ldots, \beta_n \in T$ [см. ([7]), теорема II 6.A]. Поскольку $\det(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cdot \det(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \det \|(\alpha_i, \beta_j)\|$, то инвариантные тензоры, зависящие от одинакового числа векторов и ковекторов, порождаются образующими только первого вида. Отсюда следует, что τ есть линейная комбинация тензоров вида $(\alpha_{i_1}, \beta_1) \ldots (\alpha_{i_q}, \beta_q)$ (индексы $i_1, \ldots, i_q$ попарно различны), откуда применяя (10), получаем требуемое утверждение.

4.5. *Обозначим через* ψ_k *элемент пространства* $E_0^{2k,0}$, *определенный равенством*

$$\psi_k(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2k}; \beta_1, \ldots, \beta_{2k}) =$$
$$= \Sigma_{(i_1, \ldots, i_{2k})} \varepsilon(i_1, \ldots, i_{2k}) (\alpha_{i_k}, \beta_{i_1}) (\alpha_{i_1}, \beta_{i_2}) \ldots (\alpha_{i_{k-1}}, \beta_{i_k}) \times$$
$$\times (\alpha_{i_1}, \beta_{i_{k+1}}) \ldots (\alpha_{i_k}, \beta_{i_{2k}})$$

(*суммирование по всем перестановкам* $(i_1, \ldots, i_{2k})$ *чисел* $1, 2, \ldots, 2k$).

Алгебра K^* порождена элементами $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Если $s_1+2s_2+\ldots+ns_n>n$, то $\psi_1^{s_1}\psi_2^{s_2}\ldots\psi_n^{s_n}=0$; указанные соотношения составляют базис в пространстве соотношений между одночленами от $\psi_1, \ldots, \psi_n$.

Доказательство. Пусть $P\in K^q$. Согласно 4.4 имеем:

$$P(\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_q)=\sum_{s_1,\ldots,s_q} a_{s_1,\ldots,s_q}(\alpha_{s_1}, \beta_1)\ldots(\alpha_{s_q}, \beta_q).$$

Предположим, что некоторый коэффициент $a_{s_1,\ldots,s_q}$ отличен от нуля. Так как $P\in E_0^{q,0}$, т. е. фильтрация элемента P равняется q, то выражение $a_{s_1,\ldots,s_q}(\alpha_{s_1}, \beta_1)\ldots(\alpha_{s_q}, \beta_q)$ не линейно ни по одному из α, а значит, среди чисел $s_1, \ldots, s_q$ ни одно не встречается только один раз; в частности, среди них не более $[q/2]$ различных. Пусть $j_1, \ldots, j_r$ — все натуральные числа, не превышающие q и не встречающиеся среди $s_1, \ldots, s_q$. Согласно сказанному выше, $r\geqslant q/2$. Но числа $s_{j_1}, \ldots, s_{j_r}$ попарно различны: если $s_{j_k}=s_{j_l}$, то произведение $(\alpha_{s_1}, \beta_1)\ldots(\alpha_{s_q}, \beta_q)$ переходит в себя при одновременной перестановке α_{j_k} с α_{j_l} и β_{j_k} с β_{j_l}, откуда $a_{s_1\ldots s_q}=-a_{s_1\ldots s_q}$; следовательно, $r\leqslant q/2$, т. е. $r=q/2$. Отсюда заключаем, что q четно и что среди индексов $s_1, \ldots, s_q$ ровно половина из чисел $1, \ldots, q$ не встречается вовсе, а остальные встречаются ровно по два раза. Пользуясь соображениями косой симметрии, получаем, что P есть линейная комбинация многочленов

$$P_\tau(\alpha_1, \ldots, \alpha_q; \beta_1, \ldots, \beta_q)=$$

$$=\Sigma_{(i_1\ldots i_q)}\varepsilon(i_1\ldots i_q)(\alpha_{\tau(i_1)}, \beta_{i_1})\ldots(\alpha_{\tau(i_r)}, \beta_{i_r})(\alpha_{i_1}, \beta_{i_{r+1}})\ldots(\alpha_{i_r}, \beta_{i_{2r}}), \qquad (11)$$

где $r=q/2$, τ — перестановка элементов $i_1, \ldots, i_r$. Так как всякая перестановка разлагается в произведение циклических, то элемент P_τ представим в виде суммы произведений элементов ψ_k.

Далее, часть суммы (11), отвечающая фиксированным значениям индексов $i_1, \ldots, i_r$, полилинейна и кососимметрична по $\beta_{i_{r+1}}, \ldots, \beta_{i_{2r}}$ — по r векторам n-мерного пространства. Поэтому если $r=q/2>n$, то $P_\tau=0$. Это означает, что $\psi_1^{s_1}\psi_2^{s_2}\ldots\psi_N^{s_N}=0$ при $s_1+2s_2+\ldots+Ns_N>n$, в частности, $\psi_i=0$ при $i>n$.

Наконец, при $r\leqslant n$ элементы P_τ линейно независимы. В самом деле, если $\Sigma a_\tau P_\tau=0$, то, полагая $\alpha_1=e_1, \ldots, \alpha_r=e_r$, $\alpha_{r+1}=\ldots=\alpha_{2r}=0$, $\beta_1=e_{\tau(1)}, \ldots$ $\ldots, \beta_r=e_{\tau(r)}$, $\beta_{r+1}=e_1, \ldots, \beta_{2r}=e_r$, получаем, что $r!\cdot a_\tau=0$.

4.6. Предложение 4.5 вместе с изоморфизмом 4.3 позволяет дать полное описание члена E_1.

Биградуированное кольцо E_1 изоморфно тензорному произведению $\Lambda(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)\otimes\{\mathbf{R}[\psi_1, \ldots, \psi_n]/I\}$, где $\varphi_k\in E_1^{0,2k-1}$, $\psi_k\in E_1^{2k,0}$, I есть идеал в кольце $\mathbf{R}[\psi_1, \ldots, \psi_n]$, порожденный одночленами $\psi_1^{s_1}\psi_n^{s_2}\ldots\psi_n^{s_n}$ с $s_1+2s_1+\ldots+ns_n>n$.

4.7. Как это следует из 4.6, $E_1^{u,v}=0$ при нечетном u. Так как $d_1^{u,v}$ есть гомоморфизм пространства $E_1^{u,v}$ в пространство $E_1^{u+1,v}$, то отсюда следует, что $d_1\equiv0$. Мы приходим к следующему предложению.

Член E_2 нашей спектральной последовательности изоморфен члену E_1.

§ 5. Дальнейшие члены спектральной последовательности

На протяжении этого параграфа мы будем обозначать одной и той же буквой элемент из $\operatorname{Ker} d_r \subset E_r$ и определяемый им элемент из E_{r+1}. Например, если $\alpha \in E_2$ и $d_2\alpha = 0$, то определен элемент $d_2\alpha \in E_3$, если $d_3\alpha = 0$, то определен элемент $d_4\alpha \in E_4$ и т. д.

5.1. *Если* $1 \leqslant k \leqslant n$, *то* $d_i^{0,2k-1}\varphi_k = 0$ *при* $i = 2, \ldots, 2k-1$ *и* $d_{2k}^{0,2k-1}\varphi_k = \psi_k$.

Доказательство. Включение $W_n \to W_m$ индуцирует гомоморфизм спектральной последовательности $\{'E_r^{u,v}, 'd_r^{u,v}\}$, отвечающей алгебре W_m, в изучаемую нами спектральную последовательность $\{E_r^{u,v}, d_r^{u,v}\}$. Кольцо $'E_r$ порождено образующими $\varphi_1', \ldots, \varphi_m'; \psi_1', \ldots, \psi_m'$ аналогичными $\varphi_1, \ldots, \varphi_n; \psi_1, \ldots, \psi_n$, и гомоморфизм $'E_r \to E_r$ переводит $\varphi_1', \ldots, \varphi_n'; \psi_1', \ldots, \psi_n'$ в $\varphi_1, \ldots, \varphi_n; \psi_1, \ldots, \psi_n$ (для ψ это очевидно из определения — см. 4.5, а для φ — следует из предложения 4.2). В силу предложения 1.9, $H^q(W_m; \mathbf{R}) = 0$ при $0 < q < m$ и потому $'E_\infty^{u,v} = 0$ при $0 < u + v < m$. Применим к спектральной последовательности $\{'E, 'd\}$ теорему Бореля [см. (6), теорема 13.1]. Получим, что если m достаточно велико, то $'d_i^{0,2k-1}\varphi_k' = 0$ и $'d_{2k}^{0,2k-1}\varphi_k' = \psi_k'$ при $i = 2, \ldots, 2k-1$ и $k = 1, \ldots, n$. Отсюда следует наше утверждение.

5.2. Предложение 5.1 и формулы, связывающие дифференциал спектральной последовательности с умножением, позволяют полностью описать нашу спектральную последовательность. Получаем такое утверждение.

Рассмотрим элемент $P = \varphi_{i_1} \ldots \varphi_{i_k}\psi_{j_1}^{s_1} \ldots \psi_{j_l}^{s_l} \in E_2^{2(j_1s_1+\ldots+j_ls_l),2(i_1+\ldots+i_k)-k}$,

где $i_1 < \ldots < i_k$, $j_1 < \ldots < j_l$ *и все* s_i *отличны от нуля. Если* $k = 0$ *или* $i_1 > j_1$, *или* $i_1 + j_1s_1 + \ldots + j_ls_l > n$, *то* $d_rP = 0$ *при всех* r. *В остальных случаях* $d_rP = 0$ *при* $r > 2i_1$ *и* $d_{2i_1}P = \varphi_{i_2} \ldots \varphi_{i_k}\psi_{i_1}\psi_{j_1}^{s_1} \ldots \psi_{j_l}^{s_l}$.

Это предложение дает алгоритм для нахождения пространств $E_\infty^{u,v}$ и, тем самым, размерностей пространств $H^q(W_n; \mathbf{R})$.

5.3. *Если* $u \leqslant n$ *и* $u + v > 0$, *то* $E_\infty^{u,v} = 0$. *Если* $0 < u + v \leqslant 2n$, *то* $E_\infty^{u,v} = 0$.

Доказательство. Пусть $P = \varphi_{i_1} \ldots \varphi_{i_k}\psi_{j_1}^{s_1} \ldots \psi_{j_l}^{s_l} \in E_2^{u,v}$, и пусть $u + v > 0$ и либо $u \leqslant n$, либо $u + v \leqslant 2n$. Имеются две возможности. Первая состоит в том, что $i_1 > j_1$ (или $k = 0$) и тогда $2j_1 \leqslant n$; в этом случае P есть образ элемента $\varphi_{j_1}\varphi_{i_1} \ldots \varphi_{i_k}\psi_{j_1}^{s_1-1}\psi_{j_2}^{s_2} \ldots \psi_{j_l}^{s_l} \in E_2$ при дифференциале $d_2^{u-2j_1,v+2j_1-1}$. Вторая возможность состоит в том, что $i_1 \leqslant j_1$ (или $l = 0$) и тогда $i_1 + u/2 \leqslant n$; в этом случае $d_{2i_1}P \neq 0$. В обоих случаях P не остается в E_∞.

5.4. Следствие. *Если* $0 < q \leqslant 2n$, *то* $H^q(W_n; \mathbf{R})$.

5.5. Легко найти и первое нетривиальное пространство когомологий алгебры W_n. *Таковым является пространство* $H^{2n+1}(W_n; \mathbf{R})$; *его размерность* ρ_n *на единицу меньше количества представлений числа* $n+1$ *в виде суммы целых неотрицательных слагаемых (представления, различающиеся только порядком слагаемых, считаются одинаковыми)*. Доказательство мы оставляем читателю.

5.6. *Умножение в кольце $H^*(W_n; \mathbf{R})$ тривиально.*

Доказательство. Из предложения 5.3 следует, что каждый элемент из $H^*(W_n, \mathbf{R})$, имеющий положительную размерность, представляется коциклом фильтрации $>n$ и потому произведение двух таких элементов представляется коциклом фильтрации $>2n$. Так как $E_\infty^{u,v}=0$ при $u>2n$, то это произведение равняется нулю.

5.7. Теперь мы можем доказать теорему 0.3, сформулированную во введении. Второй член вещественной когомологической спектральной последовательности расслоения $(X_n, p, (G(N, n))_{2n})$, описанного во введении, есть $H^*((G(N, n))_{2n}; \mathbf{R}) \otimes H^*(U(n); \mathbf{R})$. Из теоремы 19.1 статьи ([6]) следует, что последнее тензорное произведение изоморфно, как биградуированная алгебра, члену E_2 изучавшейся нами спектральной последовательности, и из той же теоремы следует, что в этих двух спектральных последовательностях одинаково действуют дифференциалы. Значит, и предельные члены этих спектральных последовательностей одинаковы, и, таким образом, $H^q(W_n; \mathbf{R}) = H^q(X_n, \mathbf{R})$ при всех q. Это равенство, вместе с утверждением 5.6, и составляло содержание теоремы 0.3.

5.8. В заключение отметим, что предложение 5.1 можно доказать и прямым вычислением дифференциалов, без ссылки на предложение 1.9. При этом оказывается полезным замечание, сделанное нами в п. 4.2.

§ 6. Применения к алгебрам Ли гладких векторных полей на многообразиях

6.1. Пусть $\mathfrak{A}(M)$ — алгебра Ли векторных полей класса C^∞ на компактном ориентируемом n-мерном многообразии M класса C^∞. В комплексе $\mathscr{C}=\mathscr{C}(M)$ коцепей этой алгебры со значениями в $\mathbf{R}$ рассмотрим подкомплекс $\mathscr{C}_d=\mathscr{C}_d(M)$, состоящий из таких коцепей $P\in\mathscr{C}^q$, что если векторные поля $\xi_1, \ldots, \xi_q$ имеют непересекающиеся (в совокупности) носители, то $P(\xi_1, \ldots, \xi_q)=0$. В статье ([2]) этот подкомплекс назван нами диагональным. Для вычисления его когомологий (к которому свелась, в некотором смысле, задача о нахождении когомологий алгебры $\mathfrak{A}(M)$) была построена спектральная последовательность. Основное предложение об этой спектральной последовательности [см. ([2]), предложение 7.5] с учетом результатов настоящей статьи (а именно, теоремы 0.3 и предложений 1.6 и 5.4) можно сформулировать так:

Имеет место спектральная последовательность $\{E_2^{p,q}, d_2^{p,q}\}$, сходящаяся к когомологиям комплекса $\mathscr{C}_d$, такая, что $E_2^{p,q}=H_{-p}(M; \mathbf{R}) \otimes H^q(X_n; \mathbf{R})$. В частности, $E_2^{p,q}=0$ при $0<p+q\leqslant n$.

Аналогичное уточнение можно сделать и к предложению 8.5 статьи ([2]). Не напоминая здесь относящихся к этому предложению определений, скажем только, что для рассматривавшихся там пространств ${}^{(k)}E_2^{p,q}$ из результатов настоящей статьи следует, что ${}^{(k)}E_2^{p,q}=0$ при $0<u+v\leqslant kn+k-1$.

6.2. *Первое нетривиальное пространство когомологий диагонального комплекса есть $H_{n+1}(\mathscr{C}_d)$. Его размерность (над R) равна ρ_n* (см. 5.5).

Это следует из сказанного в предыдущем пункте и в пункте 5.5.

6.3. *Пространство q-мерных когомологий алгебры Ли гладких векторных полей компактного ориентируемого гладкого n-мерного многообразия M совпадает при* $q \leqslant 2n$ *с пространством q-мерных гомологий комплекса* $\mathscr{C}_d(M)$. *В частности,* $H^q(\mathfrak{A}(M); R)=0$ *при* $q \leqslant n$ *и* $\dim H^{n+1}(\mathfrak{A}(M); R) = \rho_n$.

Это следует из 6.2 и предложения 8.5 статьи ([2]).

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова

Поступило 4.XI.1969

ЛИТЕРАТУРА

1 Чжэнь Шэн-шень, Комплексные многообразия, М., ИЛ, 1961.

2 Гельфанд И. М., Фукс Д. Б., Когомологии алгебры Ли касательных векторных полей гладкого многообразия, Функц. анализ и его прил., т. 3, вып. 3 (1969), 32—52.

3 Гельфанд И. М., Фукс Д. Б., О когомологиях алгебры Ли гладких векторных полей, Докл. АН СССР, т. 190, № 6 (1969).

4 Теория алгебр Ли. Топология групп Ли, Семинар «Софус Ли», М., ИЛ, 1962.

5 Hochschild G., Serre J.-P., Cohomology of Lie algebras, Ann. Math., 57 (1953), 591—603.

6 Борель А., О когомологиях главных расслоенных пространств и однородных пространств компактных групп Ли, Сборник «Расслоенные пространства и их приложения», М., ИЛ, 1958.

7 Вейль Г., Классические группы, их инварианты и представления. М., ИЛ, 1947.