



Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Талалаев, Квантовая система Годена, *Функци. анализ и его прил.*, 2006, том 40, выпуск 1, 86–91

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским согла-

шением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.159.156.181

6 марта 2015 г., 11:58:43



УДК 51-72:530.145

Квантовая система Годена*

© 2006. Д. В. ТАЛАЛАЕВ

1. Классическая система Годена. Система Годена была построена [1, Sec. 13.2.2] как предел ХХХ-модели Гейзенберга. Она описывает одномерную цепочку взаимодействующих частиц со спином. Особенный интерес к данной системе

* Данная работа выполнялась при частичной поддержке РФФИ, грант 04-01-00702.

в последнее время вызван ролью, которую она играет в геометрическом соответствии Ленглендса [2, 3] и теории изомонодромных деформаций [4], а также ее связью с системой Хитчина [5, 6].

Напомним конструкцию Годена и принятые обозначения. Введем оператор Лакса

$$L(u) = \sum_{i=1, \dots, N} \frac{\Phi_i}{u - z_i}, \quad (1)$$

где $z_i \in \mathbb{C}$, а вычеты Φ_i определяются как $n \times n$ -матрицы с элементами из прямой суммы алгебр Ли $\mathfrak{gl}_n \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}_n$ (N экземпляров) таким образом, что (k, l) -й матричный элемент в Φ_i равен (k, l) -му генератору e_{kl} i -го экземпляра алгебры Ли \mathfrak{gl}_n в рассматриваемой прямой сумме. Выражения $I_k(u) = \text{Tr } L^k(u)$ являются рациональными функциями по параметру u со значениями в симметрической алгебре $\mathcal{A}_{cl} = S(\mathfrak{gl}_n) \otimes \dots \otimes S(\mathfrak{gl}_n)$, которая совпадает с алгеброй полиномиальных функций на $\mathfrak{gl}_n^* \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}_n^*$, где \mathfrak{gl}_n^* — двойственное пространство к алгебре Ли \mathfrak{gl}_n . Алгебра \mathcal{A}_{cl} оснащена пуассоновой структурой, определяемой скобкой Кириллова на \mathfrak{gl}_n^* , относительно которой выражения $I_k(u)$ при разных значениях параметров находятся в инволюции:

$$\{I_k(u), I_m(v)\} = 0; \quad (2)$$

$I_k(u)$ рассматривают как производящие функции коммутирующих элементов в \mathcal{A}_{cl} , в частности, $I_2(u)$ представляется в виде

$$\text{Tr } L^2(u) = \sum_i \frac{\text{Tr } \Phi_i^2}{(u - z_i)^2} + \sum_k \frac{1}{u - z_k} \left(\sum_{j \neq k} \frac{2 \text{Tr } \Phi_k \Phi_j}{z_k - z_j} \right). \quad (3)$$

Из формулы (2) следует, что выражения

$$H_{2,k} = \sum_{j \neq k} \frac{2 \text{Tr } \Phi_k \Phi_j}{z_k - z_j} \in \mathcal{A}_{cl}, \quad (4)$$

называемые квадратичными гамильтонианами системы Годена, также находятся в инволюции. Остальные классические гамильтонианы Годена получаются как коэффициенты разложения функции $I_k(u)$ в полюсах.

Непосредственно классическая система Годена определяется следующим образом: рассмотрим прямое произведение

$$\mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_N \subset \mathfrak{gl}_n^* \oplus \dots \oplus \mathfrak{gl}_n^*$$

коприсоединенных орбит алгебры Ли \mathfrak{gl}_n ; гамильтонианы Годена ограничиваются на данное симплектическое подмногообразие и, кроме того, являются инвариантными относительно диагонального действия группы GL_n . Фазовым пространством системы Годена называется результат

$$\mathcal{M} = \mathcal{O}_1 \times \dots \times \mathcal{O}_N // GL_n$$

проведения гамильтоновой редукции по диагональному действию группы с нулевым уровнем момента. Гамильтонианы Годена определяют интегрируемую систему на \mathcal{M} .

Задача квантования системы Годена заключается в отыскании коммутативного семейства операторов в $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$, которое в классическом пределе переходит в семейство классических гамильтонианов. В данном случае классический предел состоит в переходе к ассоциированной градуированной алгебре

$Gr(U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}) = S(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$ относительно РВВ-фильтрации. Теорема существования такого семейства доказана в [7]; кроме того, известно, что выражения для квадратичных гамильтонианов Годена (4), в которых генераторы алгебры Ли \mathfrak{gl}_n заменены на соответствующие генераторы универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{gl}_n)$, удовлетворяют условию квантования, т. е. они коммутируют и в классическом пределе переходят в классические выражения. В данной работе предлагается явная конструкция полного семейства квантовых гамильтонианов для системы Годена.

2. Янгиан и подалгебра Бете.

Янгиан $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Эта алгебра Хопфа была построена в работе [8] и играет важную роль в задаче описания рациональных решений уравнения Янга–Бакстера. Она, прежде всего, является ассоциативной алгеброй, порожденной элементами $t_{ij}^{(k)}$ (в данном разделе $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, \infty$). Ее соотношения описываются в терминах производящей функции $T(u, \mathfrak{h}) \in Y(\mathfrak{gl}_n) \otimes \text{End}(\mathbb{C}^n)[[u^{-1}, \mathfrak{h}]]$,

$$T(u, \mathfrak{h}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes t_{ij}(u, \mathfrak{h}), \quad t_{ij}(u, \mathfrak{h}) = \delta_{ij} + \sum_k t_{ij}^{(k)} \mathfrak{h}^k u^{-k},$$

где E_{ij} — матрицы с 1 на (i, j) -м месте. Соотношения записываются с помощью R -матрицы Янга

$$R(u, \mathfrak{h}) = 1 - \frac{\mathfrak{h}}{u} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji}$$

и принимают следующий вид:

$$R(z - u, \mathfrak{h})T_1(z, \mathfrak{h})T_2(u, \mathfrak{h}) = T_2(u, \mathfrak{h})T_1(z, \mathfrak{h})R(z - u, \mathfrak{h}). \quad (5)$$

Обе части тождества рассматриваются как элементы из $\text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes 2} \otimes Y(\mathfrak{gl}_n)[[z^{-1}, z, u^{-1}, u, \mathfrak{h}]]$. При этом рациональная функция $1/(z-u)$ в выражении для R -матрицы разлагается в ряд,

$$\frac{1}{z - u} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{u^l}{z^{l+1}}.$$

Кроме того, приняты следующие обозначения:

$$T_1(z, \mathfrak{h}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes 1 \otimes t_{ij}(z, \mathfrak{h}),$$

$$T_2(u, \mathfrak{h}) = \sum_{i,j} 1 \otimes E_{ij} \otimes t_{ij}(u, \mathfrak{h}).$$

«Представление вычисления». Напомним конструкцию так называемого гомоморфизма «вычисления» $\rho: Y(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow U(\mathfrak{gl}_n)$. Для этого определим рациональную функцию от u, \mathfrak{h} со значениями в $\text{End}(\mathbb{C}^n) \otimes U(\mathfrak{gl}_n)$

$$T_{ev}(u, \mathfrak{h}) = 1 + \frac{\mathfrak{h}}{u} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes e_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} 1 + \frac{\mathfrak{h}\Phi}{u}, \quad (6)$$

где e_{ij} — генераторы алгебры Ли \mathfrak{gl}_n . Функция $T_{ev}(u, \mathfrak{h})$ удовлетворяет RTT -соотношению (5); следовательно, отображение $t_{ij}^{(1)} \mapsto e_{ij}$, $t_{ij}^{(k)} \mapsto 0$ при $k > 1$ определяет гомоморфизм алгебр.

Рассмотрим тензорное произведение $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\hbar, \hbar^{-1}]]$ и производящую функцию (6) для отображения вычисления в l -ю компоненту рассматриваемого тензорного произведения $T_{ev}^l(u - z_l, \hbar)$. Оказывается, что для произвольного набора комплексных чисел (z_1, \dots, z_N) выражение

$$T^\alpha(u, \hbar) = T_{ev}^1(u - z_1, \hbar)T_{ev}^2(u - z_2, \hbar) \cdots T_{ev}^k(u - z_N, \hbar), \quad (7)$$

являющееся рациональной функцией от u и \hbar со значениями в $\text{End}(\mathbb{C}^n) \otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$, определяет гомоморфизм $\rho_\alpha: Y(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\hbar, \hbar^{-1}]]$, а именно, имеет место следующая

ЛЕММА 1. *Отображение, ставящее в соответствие генератору $t_{ij}^{(k)}$ янгиана (i, j) -й матричный элемент коэффициента при u^{-k} разложения функции $T^\alpha(u, \hbar)\hbar^{-k}$ в точке $u = \infty$, определяет гомоморфизм алгебр $\rho_\alpha: Y(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\hbar, \hbar^{-1}]]$.*

Подалгебра Бете. Данная подалгебра тесно связана с квантовым методом обратной задачи (КМОЗ) [9], а именно ее генераторы являются квантовыми интегралами для ХХХ-модели Гейзенберга [10, 11]. Здесь используется описание подалгебры Бете работы [12, Sec. 2.14]: рассмотрим комплекснозначную $n \times n$ -матрицу C и производящую функцию $T(u, \hbar)$ генераторов янгиана $Y(\mathfrak{gl}_n)$. Введем также обозначение A_n для матрицы антисимметризатора в пространстве $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ и следующие элементы:

$$T_m(u, \hbar) = \sum_{ij} 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes E_{ij}^m \otimes 1 \otimes \cdots \otimes 1 \otimes t_{ij}(u, \hbar) \in \text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n} \otimes Y(\mathfrak{gl}_n)[[u, u^{-1}, \hbar]].$$

Рассмотрим выражения вида

$$\tau_k(u, \hbar) = \text{Tr } A_n T_1(u, \hbar) T_2(u - \hbar, \hbar) \cdots T_k(u - \hbar(k-1), \hbar) C_{k+1} \cdots C_n, \quad k = 1, \dots, n,$$

называемые генераторами подалгебры Бете, где след вычисляется по $\text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$, а разложение в ряд для $T_m(u - \hbar(m-1), \hbar)$ вычисляется в окрестности точки $u = \infty$, т. е., например,

$$\frac{1}{u - \hbar} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\hbar^m}{u^{m+1}}.$$

Утверждается, что эти выражения лежат в $Y(\mathfrak{gl}_n)[[u, u^{-1}, \hbar]]$ и порождают коммутативное семейство в следующем смысле:

$$[\tau_i(u, \hbar), \tau_j(v, \hbar)] = 0.$$

Кроме того, данное семейство максимально, если матрица C имеет простой спектр. Далее мы будем рассматривать единичную матрицу C и образы генераторов подалгебры Бете при отображении «вычисления», которые являются мероморфными функциями от u со значениями в $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\hbar]]$. Для простоты мы будем их обозначать теми же буквами:

$$\tau_k(u, \hbar) = \text{Tr } A_n T_1^\alpha(u, \hbar) T_2^\alpha(u - \hbar, \hbar) \cdots T_k^\alpha(u - \hbar(k-1), \hbar), \quad k = 1, \dots, n. \quad (8)$$

3. Квантовая система Годена. В этом разделе для удобства используется другой базис в семействе гамильтонианов Годена, а именно вместо симметрических полиномов Ньютона от собственных чисел оператора Лакса $L(u) \in$

$\text{End}(\mathbb{C}^n) \otimes (\mathfrak{gl}_n \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}_n)[[u^{-1}]]$, определяемого формулой (1), используются коэффициенты его характеристического многочлена

$$\det(L(u) - l) n! = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} I_k^{\text{ch}}(u) l^{n-k}.$$

Напомним, что коэффициенты характеристического многочлена могут быть получены по формуле

$$I_k^{\text{ch}}(u) = \text{Tr } A_n L_1(u) L_2(u) \cdots L_k(u), \quad (9)$$

где $L_m(u) \in \text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n} \otimes (\mathfrak{gl}_n \oplus \cdots \oplus \mathfrak{gl}_n)[[u^{-1}]]$ является образом оператора Лакса при вложении $\text{End}(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ в качестве m -го сомножителя, A_n — матрица антисимметризатора в $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ и рассматривается след по $\text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$. Связь данных производящих функций и введенных ранее для малых показателей k определяется формулами

$$\begin{aligned} I_1^{\text{ch}}(u) &= I_1(u)(n-1)!, \\ I_2^{\text{ch}}(u) &= (I_1^2(u) - I_2(u))(n-2)!, \\ I_3^{\text{ch}}(u) &= (I_1^3(u) - 3I_1(u)I_2(u) + 2I_3(u))(n-3)!. \end{aligned} \quad (10)$$

Рассмотрим квантовый оператор Лакса $L^q(u) \in \text{End}(\mathbb{C}^n) \otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[u]]$, получаемый из классического оператора Лакса с помощью вложения $\mathfrak{gl}_n \hookrightarrow U(\mathfrak{gl}_n)$. Рассмотрим «квантовый характеристический многочлен»

$$\text{qchar}(u) = \text{Tr } A_n (L_1^q(u) - \partial_u) \cdots (L_n^q(u) - \partial_u),$$

который является дифференциальным оператором по переменной u с рациональными коэффициентами со значениями в $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$. Обозначения в формуле выше полностью соответствуют обозначениям предыдущего раздела, т. е. A_n — матрица антисимметризатора в $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$, $L_i^q(u) \in \text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n} \otimes U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[u]]$ получается из $L^q(u)$ при вложении $\text{End}(\mathbb{C}^n) \hookrightarrow \text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ в качестве i -го сомножителя и рассматривается след по $\text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$. Представим $\text{qchar}(u)$ в виде

$$\text{qchar}(u) = \sum_{k=0}^n C_n^k (-1)^{n-k} QI_k(u) \partial_u^{n-k}. \quad (11)$$

Основным результатом данной работы является

ТЕОРЕМА 1. *Коэффициенты $QI_k(u)$ квантового характеристического многочлена (11) определяют квантование классических гамильтонианов Годена $I_k^{\text{ch}}(u)$, т. е. они коммутируют,*

$$[QI_k(u), QI_m(v)] = 0,$$

и их классический предел в смысле перехода к ассоциированной градуированной алгебре совпадает с классическими гамильтонианами $I_k^{\text{ch}}(u)$.

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \text{Qchar}(u, \hbar) &= \text{Tr } A_n (e^{-\hbar \partial_u} T_1(u, \hbar) - 1) (e^{-\hbar \partial_u} T_2(u, \hbar) - 1) \cdots (e^{-\hbar \partial_u} T_n(u, \hbar) - 1) \\ &= \sum_{j=0}^n \tau_j(u - \hbar, \hbar) (-1)^{n-j} C_n^j e^{-j\hbar \partial_u}, \end{aligned} \quad (12)$$

где $T(u, \hbar)$ — производящая функция для $Y(\mathfrak{gl}_n)$.

Его образ при отображении вычисления в разложении в ряд по \hbar представляется в виде

$$\rho^\alpha \text{Qchar}(u, \hbar) = \hbar^n \text{qchar}(u) + O(\hbar^{n+1}),$$

поскольку

$$e^{-\hbar \partial_u} T^\alpha(u) - 1 = \hbar(L(u) - \partial_u) + O(\hbar^2).$$

Выражение (12) может быть представлено в виде ряда по ∂_u . Поскольку генераторы подалгебры Бете коммутируют между собой, коэффициенты данного ряда, являющиеся рациональными функциями по u со значениями в $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}[[\hbar]]$, тоже коммутируют при разных значениях параметра u . Следовательно, коммутируют также их младшие коэффициенты по \hbar , которые и являются искомыми коэффициентами квантового характеристического многочлена $\text{qchar}(u)$.

Утверждение о классическом пределе коэффициентов $QI_k(u)$ следует из формулы (9).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Следует отметить, что независимость квантовых гамильтонианов Годена непосредственно вытекает из независимости их классических пределов, поскольку наличие алгебраического соотношения на построенные операторы из $U(\mathfrak{gl}_n)^{\otimes N}$ влечет за собой некоторое нетривиальное соотношение на их старшие символы. Вопрос о максимальнойности данного семейства также решается положительно исходя из максимальнойности семейства классических гамильтонианов.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Основной результат данной работы может быть интерпретирован как построение квазиклассического предела ХХХ-модели Гейзенберга.

Благодарности. Автор выражает глубокую благодарность коллективу Группы математической физики ИТЭФ, в особенности А. В. Червову и Л. Г. Рыбникову, а также С. М. Харчеву и С. М. Хорошкину. Автор признателен рецензентам за указание на ссылку [10], без которой изложение результата нельзя было считать полноценным.

ЛИТЕРАТУРА

- 1.** *Gaudin M.* La Fonction d'Onde de Bethe. Masson, Paris, 1983.
- 2.** *Frenkel E.* Affine algebras, Langlands duality and Bethe ansatz. q-alg/9506003.
- 3.** *Frenkel E.* Gaudin model and opers, math.QA/0407524.
- 4.** *Levin A. M., Olshanetsky M. A.* Classical limit of the Knizhnik–Zamolodchikov–Bernard equations as hierarchy of isomonodromic deformations. Free fields approach, hep-th/9709207.
- 5.** *Enriquez B., Rubtsov V.* Math. Res. Lett., **3**, 343–357 (1996); alg-geom/9503010.
- 6.** *Nekrasov N.* Comm. Math. Phys., **180**, 587–604 (1996); hep-th/9503157.
- 7.** *Feigin B., Frenkel E.* Int. J. Mod. Phys. A 7, Suppl. 1A, 197–215 (1992).
- 8.** *Drinfeld V. G.* Докл. АН СССР, **283**, вып. 5, 1060–1064 (1985).
- 9.** *Талалаев Л. А., Фаддеев Л. Д.* УМН, **34**, вып. 5, 13–63 (1979).
- 10.** *Kulish P. P., Sklyanin E. K.* In: Lect. Notes in Phys., Vol. 151, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1982, pp. 61–119.
- 11.** *Sklyanin E. K.* Progr. Theor. Phys. Suppl., **118**, 35–60 (1995); solv-int/9504001.
- 12.** *Molev A. I.* Yangians and their applications. math.QA/0211288.

Институт теоретической и экспериментальной физики
email: talalaev@aport.ru

Поступило в редакцию
26 мая 2004 г.