A. B. Givental', Global properties of the Maslov index and Morse theory, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1988, Volume 22, Issue 2, 69–70

Функциональный анализ и его приложения,
1988, т. 22, вып. 2, 69—70

УДК 513.83

ГЛОБАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ИНДЕКСА МАСЛОВА И ТЕОРИЯ МОРСА

А. Б. Гивенталь

На лагранжевом подмногообразии в $T^*\mathbf{R}^n$, лагранжево изотопном нулевому сечению, определена целозначная функция, сопоставляющая точке общего положения индекс Маслова пути из этой точки на бесконечность. В работе доказано существование точки индекса нуль в каждом слое расслоения $T^*\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ (рис. 1, *а*). Я благодарен В. И. Арнольду, сообщившему мне эту гипотезу, принадлежащую В. П. Колокольцову. Доказательство опирается на одну теорему Сикорава (лемма 4) — один из глубоких результатов современной симплектической топологии.

1. Основной результат. Пусть M — связное гладкое многообразие без края, $L \subset T^*M$ — лагранжево подмногообразие, изотопное нулевому сечению в классе лагранжевых подмногообразий, совпадающих с ним вне компакта. Индексом регулярной точки проекции $L \to M$ назовем индекс Маслова [1; 2] ориентированного пути на L, соединяющего эту точку с отмеченной. В рассматриваемой ситуации индекс корректно

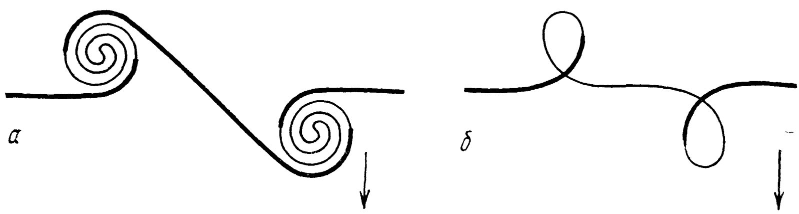

Рис. 1. Лагранжевы кривые в $T^*\mathbf{R}$. Выделены точки индекса нуль. Стрелка — направление проекции $T^*\mathbf{R} \to \mathbf{R}$

определен (не зависит от пути) с точностью до общего для всех точек слагаемого, определяемого выбором отмеченной точки.

Теорема 1. *При подходящем выборе отмеченной точки прообраз каждого регулярного значения проекции $L \to M$ содержит точку индекса нуль.*

2. Производящие семейства. Производящим семейством лагранжевой иммерсии $i : L \to T^*M$ называется гладкая функция S: $\mathbf{R}^N \times M \to \mathbf{R}$: $(x, q) \mapsto S(x, q)$ со свойствами:

1) S_x: $\mathbf{R}^N \times M \to \mathbf{R}^N$ трансверсально к $\{0\} \subset \mathbf{R}^N$;

2) $i(L) = \{(p, q)\} \in T^*M \mid \exists x \in \mathbf{R}^N$: $S_x(x, q) = 0$, $p = S_q(x, q)\}$.

Говорят, что производящее семейство квадратично на бесконечности, если выполнено

3) $\forall q \in M$ функция $S(\cdot, q) : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ совпадает вне некоторого шара с невырожденной квадратичной формой.

Теорема 2. *Если лагранжева иммерсия $L \to T^*M$ связного многообразия L задается производящим семейством, квадратичным на бесконечности, то при подходящем выборе отмеченной точки прообраз каждого регулярного значения проекции $L \to M$ содержит точку индекса нуль.*

Замечания. 1) Функция S со свойствами 1, 2) производит лагранжеву иммерсию в T^*M многообразия $L \subset \mathbf{R}^N \times M$ критических точек семейства функций $S(\cdot, q)$ (см. [3]). Индекс Маслова замкнутого пути на L равен нулю (см. лемму 1 ниже). Поэтому индексы регулярных точек корректно определены, если L связно.

2) Для произвольных лагранжевых иммерсий $\mathbf{R}^n \to T^*\mathbf{R}^n$ теорема 2 не верна (рис. 1б).

3. Доказательство теоремы 2.

Лемма 1. *Индекс Маслова ориентированного пути на L равен разности индексов Морса критических точек функций из производящего семейства, отвечающих концам пути.*

По существу, это одно из определений индекса Маслова (см. [3]). Для лагранжевой иммерсии $L \to T^*M$ и пути на L общего положения индекс Маслова определяется как число точек складки проекции $L \to M$ на этом пути, взятых с учетом знаков. Пусть F: $(\mathbf{R}^N \times \mathbf{R}^n, 0) \to \mathbf{R}$ — росток производящего семейства ростка $(\mathbf{R}^n, 0) \to (T^*\mathbf{R}^n, 0)$ лагранжевой иммерсии в точке складки. Тогда функция $F(\cdot, 0)$ имеет в нуле вырожденную критическую точку с одномерным ядром второго дифференциала. Индекс Морса (т. е. число отрицательных квадратов второго дифференциала) критической точки функции $F(\cdot, q)$ изменяется на единицу при переходе через складку. Знак этого изменения и определяет вклад точки складки в индекс Маслова.

Теорема 2 вытекает теперь из следующего утверждения теории Морса.

Лемма 2. *Пусть $S : \mathbf{R}^N \to \mathbf{R}$ — функция Морса, совпадающая с невырожденной квадратичной формой S_∞ вне некоторого шара. Тогда S имеет критическую точку, индекс Морса которой равен индексу этой квадратичной формы.*

Действительно, группы относительных гомологий $H_*(\mathbf{R}^N, \{S \leqslant 0\})$ равны гомологиям комплекса (C_*, ∂), базисные i-мерные цепи которого биективно соответствуют критическим точкам индекса i функции Морса S (см. [4]). С другой стороны, $\mathbf{R}^N/\{\mathbf{S} \leqslant 0\} \simeq \simeq \mathbf{S}^k$, где k — индекс S_∞. Поэтому $\widetilde{H}_k(\mathbf{S}^k) = \mathbf{Z}$ влечет $C_k \neq 0$.

4. Теорема 2 $\Rightarrow$ теорема 1.

Лемма 3. *Лагранжево подмногообразие $L \subset T^*M$, лагранжево изотопное нулевому сечению, гамильтоново изотопно лагранжеву сечению.*

Под лагранжевой понимается изотопия в классе лагранжевых подмногообразий, совпадающих с нулевым сечением вне компакта. Гамильтонова изотопия задается семейством симплектоморфизмов, определяемых глобальным неавтономным гамильтонианом с компактным носителем. C^1-близкое к L лагранжево подмногообразие можно рассматривать как лагранжево сечение расслоения T^*L. Это сечение гамильтоново изотопно L, если соответствующая ему 1-форма на L точна. Пусть $i_t : M \to T^*M$ — лагранжева изотопия L в нулевое сечение: $i_0M = L$, $i_1M = M \subset T^*M$. Пусть $\alpha_t = i_t^*\alpha$, где α — каноническая 1-форма на T^*M, s_t — соответствующее α_t лагранжево сечение T^*M. Композиция i_t с послойным сдвигом в T^*M на векторы сечения $s_0 - s_t$ дает такую лагранжеву изотопию L в s_0, при которой интегралы канонической 1-формы α по циклам на L сохраняются. Поэтому L гамильтоново изотопно лагранжеву сечению s_0.

Мы можем принять это лагранжево сечение за нулевое. Поэтому теорема 1 вытекает из теоремы 2 и следующей замечательной теоремы Сикорава.

Лемма 4 [5]. *Лагранжево подмногообразие $L \subset T^*M$, совпадающее с нулевым сечением вне компакта и гамильтоново изотопное ему, можно задать производящим семейством, квадратичным на бесконечности.*

Из теоремы Сикорава следует, в частности, гипотеза Арнольда о лагранжевых пересечениях [2]. Подобно ряду других новейших достижений симплектической топологии, эта теорема доказывается конечномерной аппроксимацией «производящего семейства» функций, определенных на пространстве путей с помощью функционала действия.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Маслов В. П.* Теория возмущений и асимптотические методы.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1965. 2. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974. 3. *Арнольд В. И., Гивенталь А. Б.* // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. Т. 4. М.: ВИНИТИ, 1985. С. 5—139. 4. *Фоменко А. Т.* Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983. 5. *Sikorav J.-C.* // C. R. Acad. Sci. Ser. 1.— 1986. V. 302, № 3.— P. 119—122.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступило в редакцию
23 июня 1986 г.