Ю. А. Кордюков, Формула следов для трансверсально-эллиптических операторов на римановых слоениях, *Алгебра и анализ*, 2000, том 12, выпуск 3, 81–105

Алгебра и анализ
Том 12 (2000), вып. 3

ФОРМУЛА СЛЕДОВ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ОПЕРАТОРОВ НА РИМАНОВЫХ СЛОЕНИЯХ

© Ю. А. Кордюков

Доказана формула следов типа Дюйстермаата–Гийемина для трансверсально-эллиптических операторов на многообразии со слоением.

§1. Введение

Основной целью данной работы является обобщение формулы следов Дюйстермаата–Гийемина на случай трансверсально-эллиптических операторов на компактном замкнутом многообразии со слоением. Сначала напомним вкратце содержание классической формулы.

Пусть P — положительный самосопряженный эллиптический псевдодифференциальный оператор первого порядка на замкнутом многообразии M (например, $P = \sqrt{\Delta}$, где Δ — оператор Лапласа–Бельтрами римановой метрики на M). Можно показать, что для любой функции $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ оператор $U_f = \int f(t)e^{itP}dt$ является ядерным оператором и отображение $\theta\colon f \mapsto \operatorname{tr} U_f$ является непрерывным линейным функционалом на $C_c^\infty(\mathbb{R})$. Другими словами, θ — обобщенная функция на $\mathbb{R}$. Главный символ p оператора P является гладкой функцией на симплектическом многообразии $T^*M \setminus 0$, и, по определению, бихарактеристический поток f_t оператора P есть гамильтонов поток на $T^*M\setminus 0$, определяемый функцией p.

Согласно теореме Колин де Вердье и Шазарена [1, 2], особенности функции θ содержатся в множестве периодов замкнутых траекторий бихарактеристического потока f_t. Более того, Дюйстермаат и Гийемин показали [3], что, в предположении, что бихарактеристический поток является чистым, можно выписать асимптотическое разложение для функции θ вблизи данного периода замкнутой

Ключевые слова: трансверсально-эллиптический оператор (transversally elliptic operator), формула следов (trace formula), слоение (foliation).

бихарактеристики. Формула для ведущего члена этого асимптотического разложения и есть упоминавшаяся выше формула следов Дюйстермаата-Гийемина. Она включает в себя геометрию бихарактеристического потока в виде отображения Пуанкаре и индексов Маслова и является далеко идущим обобщением классической формулы Пуассона и формулы следов Сельберга на гиперболических пространствах.

В данной работе мы доказываем формулу следов для оператора $P = \sqrt{A}$, где A — положительный самосопряженный трансверсально-эллиптический псевдодифференциальный оператор второго порядка с положительным, голономно-инвариантным трансверсальным главным символом на компактном многообразии со слоением $(M, \mathcal{F})$ (см. теорему 6). Можно рассматривать такой оператор как эллиптический оператор на сингулярном пространстве $M/\mathcal{F}$ слоев слоения $\mathcal{F}$ (это утверждение можно уточнить, используя язык некоммутативной геометрии [4]) и формулу следов, установленную в этой работе, как пример формулы следов для эллиптических операторов на сингулярных пространствах. Мы надеемся, что эта формула будет полезна при дальнейшем изучении общей формулы следов в некоммутативной геометрии (см., например, [5, 6] по поводу некоммутативной формулы следов).

Следует также отметить, что нашу формулу следов можно рассматривать как относительную версию формулы следов Дюйстермаата-Гийемина.

§2. Предварительные сведения и основные результаты

Пусть $(M, \mathcal{F})$ — компактное связное ориентированное многообразие со слоением. Будем использовать следующие обозначения: $T\mathcal{F}$ — касательное расслоение, $H\mathcal{F} = TM/T\mathcal{F}$ — нормальное расслоение и $N^*\mathcal{F}$ — конормальное расслоение к $\mathcal{F}$. Имеется короткая точная последовательность

$$0 \longrightarrow T\mathcal{F} \longrightarrow TM \longrightarrow H\mathcal{F} \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

Мы будем рассматривать линейные операторы, действующие на полуплотностях. Напомним, что α-плотностью ($\alpha \in \mathbb{R}$) на вещественном линейном пространстве V размерности n называется такое отображение $\phi\colon \Lambda^n V \to \mathbb{R}$, что $\phi(\lambda v) = |\lambda|^\alpha \phi(v)$, $v \in \Lambda^n V$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Для любого вещественного векторного расслоения E над гладким многообразием X мы будем обозначать через $|E|^\alpha$ расслоение α-плотностей на E.

Определим *трансверсальный главный символ* σ_A псевдодифференциального оператора $A \in \Psi^m(M, |TM|^{1/2})$ как ограничение его главного символа a_m на

$\widetilde{N}^*\mathcal{F} = N^*\mathcal{F} \setminus 0$. Скажем, что оператор $A \in \Psi^m(M, |TM|^{1/2})$ трансверсально-эллиптичен, если $\sigma_A(\nu) \neq 0$ для любого $\nu \in \widetilde{N}^*\mathcal{F}$.

Для любого гладкого послойного пути γ из $x \in M$ в $y \in M$ движение вдоль слоев слоения определяет отображение голономии h_γ, которое ставит в соответствие каждому ростку локальной трансверсали к слоению в точке x росток локальной трансверсали к слоению в точке y (это отображение есть естественное обобщение отображения Пуанкаре первого возвращения для потоков). Дифференциал этого отображения (отображение линейной голономии) корректно определен как линейное отображение $dh_\gamma\colon H_x\mathcal{F} \to H_y\mathcal{F}$ и кодифференциал как линейное отображение $dh_\gamma^*\colon N_y^*\mathcal{F} \to N_x^*\mathcal{F}$.

Трансверсальный главный символ σ_A оператора $A \in \Psi^m(M, |TM|^{1/2})$ назовем голономно-инвариантным, если $\sigma_A(dh_\gamma^*(\nu)) = \sigma_A(\nu)$ для любого гладкого послойного пути γ из x в y и для любого $\nu \in \widetilde{N}_y^*\mathcal{F}$.

Всюду в данной работе мы будем предполагать, что A является линейным оператором в $C^\infty(M, |TM|^{1/2})$, удовлетворяющим следующим условиям:

(A1) $A \in \Psi^2(M, |TM|^{1/2})$ — трансверсально-эллиптический оператор с положительным, голономно-инвариантным трансверсальным главным символом;

(A2) A — существенно самосопряженный положительный оператор в пространстве L^2-полуплотностей на M, $L^2(M)$ (с начальной областью определения $C^\infty(M, |TM|^{1/2})$).

Пример 1. Геометрический пример оператора, удовлетворяющего условиям (A1) и (A2), дается оператором $A = I + \Delta_H$, где Δ_H — трансверсальный лапласиан расслоенноподобной метрики на римановом слоении.

Напомним, что слоение $\mathcal{F}$ на гладком римановом многообразии (M, g_M) риманово, если оно удовлетворяет одному из следующих эквивалентных условий (см., например, [7]):

1) $(M, \mathcal{F})$ локально имеет структуру римановой субмерсии;
2) трансверсальная часть римановой метрики g_M (т. е. ее ограничение на $H = T\mathcal{F}^\perp$) голономно-инвариантна;
3) горизонтальное распределение H вполне геодезично.

В этом случае метрика g_M называется *расслоенноподобной.*

Риманова метрика g_M определяет разложение кокасательного расслоения T^*M в прямую сумму $T^*M = F^* \oplus H^*$. По отношению к этому разложению дифференциал де Рама $d\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M, T^*M)$ может быть записан в виде суммы $d = d_F + d_H$, где $d_F\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M, F^*)$ и $d_H\colon C^\infty(M) \to C^\infty(M, H^*)$.

Трансверсальный лапласиан есть трансверсально-эллиптический дифференциальный оператор второго порядка в пространстве $C^\infty(M)$, определяемый формулой

$$\Delta_H = d_H^* d_H.$$

Его главный символ a_2 задается формулой

$$a_2(x,\xi) = g_H(\xi,\xi), \quad (x,\xi) \in \widetilde{T}^*M,$$

и голономная инвариантность трансверсального главного символа σ_{Δ_H} эквивалентна предположению о том, что риманова метрика g_M расслоенноподобна.

С данного момента мы будем предполагать, что A удовлетворяет условиям (A1) и (A2). По спектральной теореме оператор $P = \sqrt{A}$ порождает строго непрерывную группу e^{itP} ограниченных операторов в $L^2(M)$. Для того чтобы определить обобщенный след оператора e^{itP}, необходима дополнительная регуляризация. Сначала введем некоторые обозначения.

Напомним, что группоидом голономии $G = G_\mathcal{F}$ слоения $\mathcal{F}$ называется множество классов эквивалентности послойных путей $\gamma\colon [0,1] \to M$ относительно отношения эквивалентности $\sim_h$, полагающего $\gamma_1 \sim_h \gamma_2$, если γ_1 и γ_2 имеют одинаковые начальные и конечные точки и одинаковые отображения голономии. G наделен отображениями $s, r\colon G \to M$, задаваемыми формулами $s(\gamma) = \gamma(0)$ и $r(\gamma) = \gamma(1)$, и имеет закон композиции, задаваемый композицией путей. Для любых $\gamma_1, \gamma_2 \in G$, композиция $\gamma_1 \circ \gamma_2$ имеет смысл тогда и только тогда, когда $r(\gamma_2) = s(\gamma_1)$. Мы будем использовать стандартные обозначения: $G^x = r^{-1}(x)$, $G_x = s^{-1}(x)$, $G_x^x = s^{-1}(x) \cap r^{-1}(x)$, $x \in M$. Для любого $x \in M$ G_x^x является группой голономии слоя L_x, проходящего через точку x, и отображения $s\colon G^x \to L_x$ и $r\colon G_x \to L_x$ являются накрывающими отображениями, ассоциированными с G_x^x. Мы будем отождествлять точку $x \in M$ с элементом в G, задаваемым постоянным путем $\gamma(t) = x, t \in [0,1]$.

Пусть $s^*(|T\mathcal{F}|^{1/2})$ и $r^*(|T\mathcal{F}|^{1/2})$ — подъемы векторного расслоения послойных полуплотностей $|T\mathcal{F}|^{1/2}$ до векторных расслоений на G при помощи отображений s и r соответственно и $|T\mathcal{G}|^{1/2} = r^*(|T\mathcal{F}|^{1/2}) \otimes s^*(|T\mathcal{F}|^{1/2})$. Линейное расслоение $|T\mathcal{G}|^{1/2}$ является расслоением послойных полуплотностей на G по отношению к естественному слоению $\mathcal{G}$ [8].

Пространство $C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$ имеет структуру инволютивной алгебры (см., например, [8]). Существует естественное $*$-представление R инволютивной алгебры $C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$ в $L^2(M)$. Для любого $k \in C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$ оператор $R(k)$ в

$L^2(M)$ определяется следующим образом. Согласно короткой точной последовательности (2.1), векторное расслоение полуплотностей $|TM|^{1/2}$ можно разложить в виде

$$|TM|^{1/2} \cong |T\mathcal{F}|^{1/2} \otimes |H\mathcal{F}|^{1/2}.$$

Для любого $\gamma \in G$, $s(\gamma) = x$, $r(\gamma) = y$ соответствующее отображение линейной голономии определяет отображение

$$dh_\gamma^* \colon |H_y\mathcal{F}|^{1/2} \to |H_x\mathcal{F}|^{1/2}.$$

Для данного $u \in L^2(M)$ вида $u = u_1 \otimes u_2$, $u_1 \in L^2(M, |T\mathcal{F}|^{1/2})$, $u_2 \in L^2(M, |H\mathcal{F}|^{1/2})$, $R(k)u \in L^2(M)$ определяется по формуле

$$R(k)u(x) = \int\limits_{G^x} k(\gamma)s^*u_1(\gamma) \otimes dh_{\gamma^{-1}}^*[u_2(s(\gamma))], \quad x \in M.$$

Предложение 2. *Для любых $k \in C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$ и $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ оператор $R(k)\int f(t)e^{itP}dt$ является ядерным оператором. Более того, для любого $k \in C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$ формула*

$$\langle \theta_k, f \rangle = \operatorname{tr} R(k) \int f(t)e^{itP}dt, \quad f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$$

определяет обобщенную функцию θ_k на вещественной прямой $\mathbb{R}$, $\theta_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Пусть $\mathcal{F}_N$ — слоение на $\widetilde{N}^*\mathcal{F}$, которое является горизонтальным слоением для естественной послойно плоской связности в $\widetilde{N}^*\mathcal{F}$ (связности Ботта). Слоем слоения $\mathcal{F}_N$, проходящим через точку $\nu \in \widetilde{N}^*\mathcal{F}$, является множество всех $dh_\gamma^*(\nu) \in \widetilde{N}^*\mathcal{F}$ таких, что $\gamma \in G$, $r(\gamma) = \pi(\nu)$, где $\pi \colon N^*\mathcal{F} \to M$ — естественная проекция.

Обозначим через $H\mathcal{F}_N$ нормальное расслоение к $\mathcal{F}_N$, $H\mathcal{F}_N = T(N^*\mathcal{F})/T\mathcal{F}_N$. Для любого $\nu \in N^*\mathcal{F}$ пространство $T_\nu N^*\mathcal{F}$ есть коизотропное подпространство пространства $T_\nu T^*M$, наделенного канонической симплектической структурой, и $T_\nu\mathcal{F}_N$ есть его косоортогональным дополнение, поэтому нормальное расслоение $H_\nu\mathcal{F}_N$ имеет естественную симплектическую структуру (см., например, [9]).

Для данного оператора A, удовлетворяющего условиям (A1) и (A2), с главным символом a пусть $\widetilde{p}$ — такая гладкая функция на $\widetilde{T}^*M$, однородная степени один, что $\widetilde{p}(\xi) \neq 0$ для $\xi \in \widetilde{T}^*M$, которая равна $p = a^{1/2}$ в некоторой конической окрестности $N^*\mathcal{F}$, и $\widetilde{f}_t$ — гамильтонов поток функции $\widetilde{p}$. Определим σ_P как ограничение p на $N^*\mathcal{F}$: $\sigma_P = \sigma_A^{1/2}$. Функция σ_P совпадает с трансверсальным главным символом любого оператора $P_1 \in \Psi^1(M, |TM|^{1/2})$ такого, что главные символы P_1^2 и A равны на $N^*\mathcal{F}$.

Из условия голономной инвариантности для σ_A следует, что

$$d\widetilde{p}(\nu)(X) = 0, \quad \nu \in \widetilde{N}^*\mathcal{F}, \ X \in T_\nu\mathcal{F}_N. \tag{2.2}$$

Используя (2.2) и тот факт, что $\widetilde{f}_t$ сохраняет симплектическую структуру на T^*M, можно легко проверить, что гамильтонов поток $\widetilde{f}_t$ можно ограничить на $N^*\mathcal{F}$. Получающийся поток будет обозначаться через f_t. По определению поток f_t зависит только от 1-струи главного символа a на $N^*\mathcal{F}$, поэтому он не зависит от выбора $\widetilde{p}$ и может быть естественно назван трансверсальным бихарактеристическим потоком оператора A.

Поскольку $\widetilde{f}_t$ сохраняет симплектическую структуру в T^*M и $T\mathcal{F}_N$ есть кососоортогональное дополнение к $TN^*\mathcal{F}$, f_t отображает слои слоения $\mathcal{F}_N$ в слои. В частности, дифференциал df_t определяет отображение $T_\nu\mathcal{F}_N \to T_{f_t(\nu)}\mathcal{F}_N$ и симлектическое отображение $H_\nu\mathcal{F}_N \to H_{f_t(\nu)}\mathcal{F}_N$.

Скажем, что точка $\nu \in \widetilde{N}^*\mathcal{F}$ есть относительная неподвижная точка диффеоморфизма $f_t\colon \widetilde{N}^*\mathcal{F} \to \widetilde{N}^*\mathcal{F}$ (по отношению к слоению $\mathcal{F}_N$), если существует такой $\gamma \in G$, что $r(\gamma) = \pi(\nu)$ и $f_{-t}\ dh_\gamma^*(\nu) = \nu$.

Для любого $t \in \mathbb{R}$ обозначим через Z_t множество относительных неподвижных точек для f_t. Введем также соответствующее множество в косферическом расслоении $SN^*\mathcal{F} = \{\nu \in N^*\mathcal{F} : \sigma_P(\nu) = 1\}$: $SZ_t = Z_t \cap SN^*\mathcal{F}$. Это множество может быть незамкнуто, но для любого $k \in C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2}))$ соответствующая часть

$$SZ_{t,k} = \{\nu \in SN^*\mathcal{F} : (\exists \gamma \in \operatorname{supp} k, r(\gamma) = \pi(\nu)) f_{-t}\ dh_\gamma^*(\nu) = \nu\}$$

замкнута. Поскольку σ_A трансверсально-эллиптичен, поток f_t трансверсален к $\mathcal{F}_N$, поэтому множество относительных периодов $\mathcal{T}_k = \{t \in \mathbb{R} : SZ_{t,k} \neq \varnothing\}$ является дискретным подмножеством в $\mathbb{R}$.

Следующая теорема была доказана в [10], но мы дадим независимое доказательство.

Теорема 3. *Для данного оператора A, удовлетворяющего условиям* (A1) *и* (A2), *и $k \in C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$, обобщенная функция θ_k является гладкой вне множества относительных периодов $\mathcal{T}_k$ трансверсального бихарактеристического потока f_t.*

Пусть $G_{\mathcal{F}_N}$ обозначает группоид голономии слоения $\mathcal{F}_N$. $G_{\mathcal{F}_N}$ состоит из всех таких пар $(\gamma, \nu) \in G_{\mathcal{F}} \times \widetilde{N}^*\mathcal{F}$, что $r(\gamma) = \pi(\nu)$, с отображением источника $s_N \colon G_{\mathcal{F}_N} \to \widetilde{N}^*\mathcal{F}$, $s_N(\gamma, \nu) = dh_\gamma^*(\nu)$, и отображением образа $r_N \colon G_{\mathcal{F}_N} \to \widetilde{N}^*\mathcal{F}$, $r_N(\gamma, \nu) = \nu$. Имеется проекция $\pi_G \colon G_{\mathcal{F}_N} \to G_{\mathcal{F}}$, задаваемая формулой $\pi_G(\gamma, \nu) = \gamma$. Положим также $G_{SN^*\mathcal{F}} = G_{\mathcal{F}_N} \cap r_N^{-1}(SN^*\mathcal{F})$.

Для любого $(\gamma, \nu) \in G_{\mathcal{F}_N}$ обозначим через $dH_{(\gamma,\nu)}$ соответствующее отображение линейной голономии

$$dH_{(\gamma,\nu)} : H_{dh_\gamma^*(\nu)}\mathcal{F}_N \to H_\nu \mathcal{F}_N.$$

Легко видеть, что $dH_{(\gamma,\nu)}$ сохраняет симплектическую структуру в $H\mathcal{F}_N$.

Обозначим через $Q \colon TN^*\mathcal{F} \to H\mathcal{F}_N$ отображение проекции. Дифференциал отображения $(r_N, s_N) \colon G_{\mathcal{F}_N} \to \widetilde{N}^*\mathcal{F} \times \widetilde{N}^*\mathcal{F}$ определяет изоморфизм касательного пространства $T_{(\gamma,\nu)}G_{\mathcal{F}_N}$ с множеством всех таких $(v_1, v_2) \in T_\nu N^*\mathcal{F} \oplus T_{dh_\gamma^*(\nu)}N^*\mathcal{F}$, что нормальные компоненты v_1 и v_2 связаны отображением голономии: $Q(v_1) = dH_{(\gamma,\nu)}(Q(v_2))$.

Группоид голономии $G_{\mathcal{F}_N}$ имеет естественное слоение $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}$ такое, что касательное расслоение $T_{(\gamma,\nu)}\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}$ соответствует $T_\nu\mathcal{F}_N \oplus T_{dh_\gamma^*(\nu)}\mathcal{F}_N$ при описанном выше изоморфизме. Нормальное пространство $H_{(\gamma,\nu)}\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}$ к $\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}$ изоморфно множеству всех таких $(v_1, v_2) \in H_\nu\mathcal{F}_N \oplus H_{dh_\gamma^*(\nu)}\mathcal{F}_N$, что $v_1 = dH_{(\gamma,\nu)}(v_2)$, и поэтому отображения dr_N (ds_N) определяют изоморфизмы $H_{(\gamma,\nu)}\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}$ с $H_\nu\mathcal{F}_N$ $(H_{dh_\gamma^*(\nu)}\mathcal{F}_N)$ соответственно.

Лемма 4. *Множество Z_t является насыщенным подмножеством в $N^*\mathcal{F}$, т. е. оно является объединением слоев слоения $\mathcal{F}_N$.*

Доказательство. Из голономной инвариантности p следует, что гамильтоново векторное поле Ξ_p с гамильтонианом p удовлетворяет тождеству

$$dH_{(\gamma,\nu)}(Q(\Xi_p(dh_\gamma^*(\nu)))) = Q(\Xi_p(\nu)), \quad \nu \in \widetilde{N}^*\mathcal{F}, \ \gamma \in G, \ r(\gamma) = \pi(\nu),$$

поэтому существует такое векторное поле $\widehat{\Xi}_p$ на $G_{\mathcal{F}_N}$, что

$$ds_N(\widehat{\Xi}_p(\gamma,\nu)) = \Xi_p(dh_\gamma^*(\nu)), \ dr_N(\widehat{\Xi}_p(\gamma,\nu)) = \Xi_p(\nu), \quad (\gamma,\nu) \in G_{\mathcal{F}_N}. \tag{2.3}$$

Пусть $\widehat{F}_t$ — поток на $G_{\mathcal{F}_N}$, порожденный $\widehat{\Xi}_p$. Согласно (2.3), мы имеем

$$f_t \circ r_N = r_N \circ \widehat{F}_t, \quad f_t \circ s_N = s_N \circ \widehat{F}_t$$

или, если мы запишем $\widehat{F}_t \colon G_{\mathcal{F}_N} \to G_{\mathcal{F}_N}$ в виде $\widehat{F}_t(\gamma,\nu) = (F_t(\gamma,\nu), f_t(\nu))$,

$$f_t(dh^*_\gamma(\nu)) = dh^*_{F_t(\gamma,\nu)}(f_t(\nu)). \tag{2.4}$$

Возьмем любое $\nu \in Z_t$ с соответствующим $\gamma \in G$ таким, что $r(\gamma) = \pi(\nu), f_{-t}\ dh^*_\gamma(\nu) = \nu$. Пусть $(\gamma_1,\nu) \in G_{\mathcal{F}_N}$. Тогда имеем

$$\begin{aligned} f_t(dh^*_{\gamma_1}(\nu)) &= dh^*_{F_t(\gamma_1,\nu)}(f_t(\nu)) \quad (\text{согласно } (2.4)) \\ &= dh^*_{F_t(\gamma_1,\nu)}(dh^*_\gamma(\nu)) \\ &= (dh^*_{F_t(\gamma_1,\nu)} \circ dh^*_\gamma \circ dh^*_{\gamma_1^{-1}})(dh^*_{\gamma_1}(\nu)) \\ &= dh^*_{\gamma'}(dh^*_{\gamma_1}(\nu)), \end{aligned}$$

где $\gamma' = \gamma_1^{-1} \circ \gamma \circ F_t(\gamma_1,\nu)$, откуда следует, что $dh^*_{\gamma_1}(\nu) \in Z_t$. •

Множества относительных периодов Z_t можно естественным образом поднять в группоид голономии $G_{\mathcal{F}_N}$:

$$\mathcal{Z}_t = \{(\gamma,\nu) \in G_{\mathcal{F}_N} : f_{-t}\ dh^*_\gamma(\nu) = \nu\}, \quad S\mathcal{Z}_t = \mathcal{Z}_t \cap G_{SN^*\mathcal{F}}.$$

Согласно лемме 4, $Z_t = r_N(\mathcal{Z}_t) = s_N(\mathcal{Z}_t)$.

Предположим, что $\mathcal{Z}_t$ является гладким подмногообразием в $G_{\mathcal{F}_N}$. Согласно лемме 4, касательное пространство к $\mathcal{Z}_t$ в точке $(\gamma,\nu) \in \mathcal{Z}_t$ содержит подпространство $F_{(\gamma,\nu)}\mathcal{Z}_t$, которое есть график линейного отображения $df_t(\nu) \colon T_\nu\mathcal{F}_N \to T_{dh^*_\gamma(\nu)}\mathcal{F}_N = T_{f_t(\nu)}\mathcal{F}_N$:

$$F_{(\gamma,\nu)}\mathcal{Z}_t = \{(v_1,v_2) \in T_\nu\mathcal{F}_N \times T_{dh^*_\gamma(\nu)}\mathcal{F}_N : v_2 = df_t(\nu)(v_1)\}.$$

Пусть

$$H_{(\gamma,\nu)}\mathcal{Z}_t = T_{(\gamma,\nu)}\mathcal{Z}_t / F_{(\gamma,\nu)}\mathcal{Z}_t, \quad H_{(\gamma,\nu)}S\mathcal{Z}_t = T_{(\gamma,\nu)}S\mathcal{Z}_t / F_{(\gamma,\nu)}\mathcal{Z}_t.$$

Определение 5. Пусть $t \in \mathbb{R}$ — относительный период потока f_t. Скажем, что поток f_t является чистым на $\mathcal{Z}_t$, если:

(1) $\mathcal{Z}_t$ — гладкое подмногообразие в $G_{\mathcal{F}_N}$;

(2) нормальное пространство $H_{(\gamma,\nu)}\mathcal{Z}_t$ в любой точке $(\gamma,\nu) \in \mathcal{Z}_t$ совпадает с множеством всех таких $(v_1, v_2) \in H_{(\gamma,\nu)}\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}$, что $v_2 = df_t(\nu)(v_1)$.

Пусть $|T\mathcal{F}_N|^{1/2}$ — векторное расслоение послойных полуплотностей на $N^*\mathcal{F}$ и $s_N^*(|T\mathcal{F}_N|^{1/2})$, и $r_N^*(|T\mathcal{F}_N|^{1/2})$ — подъемы этого векторного расслоения до векторных расслоений на $G_{\mathcal{F}_N}$ при помощи отображений s_N и r_N соответственно. Пусть $|T\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}|^{1/2}$ — векторное расслоение послойных полуплотностей на $G_{\mathcal{F}_N}$:

$$|T\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}|^{1/2} = r_N^*(|T\mathcal{F}_N|^{1/2}) \otimes s_N^*(|T\mathcal{F}_N|^{1/2}).$$

Проекция $\pi_G \colon G_{\mathcal{F}_N} \to G$ определяет локальный диффеоморфизм $\pi_G \colon \mathcal{G}_{\mathcal{F}_N} \to \mathcal{G}$, который индуцирует отображение

$$\pi_G^* \colon C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2}) \to C^\infty(G_{\mathcal{F}_N}, |T\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}|^{1/2}).$$

Определим отображение ограничения

$$R_{\mathcal{Z}} \colon C_c^\infty(G_{\mathcal{F}_N}, |T\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}|^{1/2}) \to C_c^\infty(\mathcal{Z}_t, |T\mathcal{F}_N|^1)$$

следующим образом. Если $\rho = f r_N^*\rho_1 \otimes s_N^*\rho_2$, $f \in C_c^\infty(G_{\mathcal{F}_N})$, $\rho_1, \rho_2 \in C_c^\infty(M, |T\mathcal{F}_N|^{1/2})$, то

$$R_{\mathcal{Z}}\rho(\gamma,\nu) = f(\gamma,\nu)\rho_1(\gamma,\nu) df_t^*(\nu)[\rho_2(dh_\gamma^*(\nu))], \quad (\gamma,\nu) \in \mathcal{Z}_t,$$

где отображение $df_t^*(\nu) \colon |T_{f_t(\nu)}\mathcal{F}_N|^{1/2} \to |T_\nu\mathcal{F}_N|^{1/2}$ индуцировано линейным отображением $df_t(\nu) \colon T_\nu\mathcal{F}_N \to T_{f_t(\nu)}\mathcal{F}_N$.

Если поток f_t чистый, определена естественная плотность $d\mu_{\mathcal{Z}}$ на $H_{(\gamma,\nu)}\mathcal{Z}_t$, являющимся множеством неподвижных точек симплектического линейного отображения $dH_{(\gamma,\nu)} \circ df_t(\nu)$ симплектического пространства $H_\nu\mathcal{F}_N$ (см., например, [3, лемма 4.3]). Разделив $d\mu_{\mathcal{Z}}$ на $d\sigma_P$, мы получим плотность $d\mu_{S\mathcal{Z}}$ на $H_{(\gamma,\nu)}S\mathcal{Z}_t$.

Используя естественный изоморфизм

$$|TS\mathcal{Z}_t| \cong |F\mathcal{Z}| \otimes |HS\mathcal{Z}_t|,$$

можно скомбинировать плотности $R_Z\pi_G^* k \in C_c^\infty(S\mathcal{Z}_t, |FS\mathcal{Z}_t|)$ и $d\mu_{SZ} \in C_c^\infty(S\mathcal{Z}_t, |HS\mathcal{Z}_t|)$ и получить гладкую плотность $R_Z\pi_G^* k\, d\mu_{SZ}$ на $S\mathcal{Z}_t$.

Пусть $\sigma_{\rm sub}(A)$ обозначает субглавный символ A. Определим $\sigma_{\rm sub}(P) = \frac{1}{2}a^{-1/2}\sigma_{\rm sub}(A)$ в некоторой конической окрестности $N^*\mathcal{F}$. Ограничение $\sigma_{\rm sub}(P)$ на $N^*\mathcal{F}$ равно ограничению на $N^*\mathcal{F}$ субглавного символа любого оператора $P_1 \in \Psi^1(M, |TM|^{1/2})$ такого, что главные символы P_1^2 и A равны $\mod S^{-\infty}$ в некоторой окрестности $N^*\mathcal{F}$.

Теорема 6. *Пусть $t \in \mathbb{R}$ — относительный период потока f_t. Предположим, что множество относительно неподвижных точек $\mathcal{Z}_t$ является чистым. Тогда для любого $k \in C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$ и для любого τ в некоторой окрестности t имеем*

$$\theta_k(\tau) = \sum_{\mathcal{Z}_j} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \alpha_j(s,k) e^{is(\tau-t)}\,ds, \tag{2.5}$$

где

1) *$\mathcal{Z}_j$ — все связные компоненты множества $S\mathcal{Z}_t$ в $G_{SN^*\mathcal{F}}$ размерностей $d_j = \dim \mathcal{Z}_j$;*
2) *α_j имеет асимптотическое разложение*

$$\alpha_j(s,k) \sim \left(\frac{s}{2\pi i}\right)^{(d_j-p-1)/2} i^{\sigma_j} \sum_{r=0}^{+\infty} \alpha_{j,r}(k) s^{-r}, \quad s \to +\infty, \tag{2.6}$$

с $\alpha_{j,0}$, задаваемыми формулой

$$\alpha_{j,0}(k) = \int\limits_{\mathcal{Z}_j} e^{i\int_0^t \sigma_{\rm sub}(P)(f_{-\tau} dh_\gamma^*(\nu))d\tau} R_Z\pi_G^* k(\gamma,\nu)\, d\mu_{SZ_j}(\gamma,\nu), \tag{2.7}$$

где σ_j обозначает индекс Маслова, ассоциированный со связной компонентой $\mathcal{Z}_j$ (см. определение ниже).

§3. Редукция к случаю, когда A эллиптичен

В этом разделе мы будем предполагать, что A — оператор, удовлетворяющий условиям (A1) и (A2). Мы будем использовать классы $\Psi^{m,-\infty}(M, \mathcal{F}, |TM|^{1/2})$ трансверсальных псевдодифференциальных операторов (см. определение в [4])

и пространства Соболева $H^s(M)$ полуплотностей на M. Положим также $\Psi^{*,-\infty}(M,\mathcal{F},|TM|^{1/2}) = \bigcup_m \Psi^{m,-\infty}(M,\mathcal{F},|TM|^{1/2})$.

Согласно [4], оператор $P = A^{1/2}$ удовлетворяет следующим условиям:

(H1) P имеет вид

$$P = P_1 + R_1,$$

где

(a) $P_1 \in \Psi^1(M,|TM|^{1/2})$ — такой трансверсально-эллиптический оператор с положительным, голономно-инвариантным трансверсальным главным символом, что полные символы P_1^2 и A равны $\mod S^{-\infty}$ в некоторой окрестности $N^*\mathcal{F}$;

(b) R_1 — ограниченный оператор из $L^2(M)$ в $H^{-1}(M)$, и для любого $K \in \Psi^{*,-\infty}(M,\mathcal{F},|TM|^{1/2})$ оператор KR_1 является сглаживающим оператором в $L^2(M)$, т. е. он определяет ограниченный оператор из $L^2(M)$ в $C^\infty(M,|TM|^{1/2})$.

(H2) P существенно самосопряжен в $L^2(M)$ (с начальной областью определения $C^\infty(M,|TM|^{1/2})$).

Лемма 7 [10]. *Любой оператор P, удовлетворяющий условиям* (H1) *и* (H2), *можно представить в виде*

$$P = P_2 + R_2, \tag{3.1}$$

где

(a) $P_2 \in \Psi^1(M,|TM|^{1/2})$ — *такой существенно самосопряженный эллиптический оператор с положительным главным символом и голономно-инвариантным трансверсальным главным символом, что полные символы P_1 и P_2 равны $\mod S^{-\infty}$ в некоторой окрестности $N^*\mathcal{F}$;*

(b) R_2 — *ограниченный оператор из $L^2(M)$ в $H^{-1}(M)$, и для любого $K \in \Psi^{*,-\infty}(M,\mathcal{F},|TM|^{1/2})$, оператор KR_2 является сглаживающим оператором в $L^2(M)$.*

Доказательство. Возьмем расслоенную координатную карту Ω на M с координатами $(x,y) \in I^p \times I^q$ (I — открытый интервал $(0,1)$) такую, что ограничение $\mathcal{F}$ на U задается множествами $y = \text{const}$. Пусть $p_1 \in S^1(I^n \times \mathbb{R}^n)$ — полный символ оператора P_1 в этой карте. Предположим, что $p_1(x,y,\xi,\eta)$ обратим для любого $(x,y,\xi,\eta) \in U, |\xi|^2 + |\eta|^2 > R^2$, где $R > 0$, U — коническая окрестность

множества $\eta = 0$. Возьмем любую функцию $\phi \in C^\infty(I^n \times \mathbb{R}^n)$, $\phi = \phi(x,y,\xi,\eta)$, $x \in I^p$, $y \in I^q$, $\xi \in \mathbb{R}^p$, $\eta \in \mathbb{R}^q$, однородную степени 0 по (ξ,η) при $|\xi|^2 + |\eta|^2 > 1$, носитель которой содержится в некоторой конической окрестности $\eta = 0$ и которая равна 1 в U, и положим

$$p_2(x,y,\xi,\eta) = \phi p_1(x,y,\xi,\eta) + (1-\phi)(1+|\xi|^2+|\eta|^2)^{1/2}.$$

Возьмем в качестве P_2 оператор $p_2(x,y,D_x,D_y)$ с полным символом p_2 (или, более точно, $p_2(x,y,D_x,D_y) + p_2(x,y,D_x,D_y)^*$, чтобы гарантировать самосопряженность) и положим $R_2 = P - P_2$. Оператор $P_1 - P_2$ имеет порядок $-\infty$ в некоторой конической окрестности $N^*\mathcal{F}$, поэтому для любого $K \in \Psi^{*,-\infty}(M,\mathcal{F},|TM|^{1/2})$ оператор $K(P_1 - P_2)$ является сглаживающим оператором [4], что немедленно завершает доказательство. •

Обозначим через $W(t) = e^{itP_2}$ волновую группу, порожденную эллиптическим оператором P_2. Хорошо известно, что $W(t)$ является интегральным оператором Фурье (см. более подробно ниже). Положим также $R(t) = e^{itP} - W(t)$.

Предложение 8. *Для любого $K \in \Psi^{*,-\infty}(M,\mathcal{F},|TM|^{1/2})$ семейство $KR(t)$, $t \in \mathbb{R}$, является гладким семейством ограниченных операторов из $L^2(M)$ в $C^\infty(M,|TM|^{1/2})$.*

Доказательство. Поскольку $P^2 = A \in \Psi^2(M,|TM|^{1/2})$, из интерполяции и двойственности следует, что P определяет ограниченный оператор из $H^1(M)$ в $L^2(M)$ и из $L^2(M)$ в $H^{-1}(M)$ и для любого натурального N P^N определяет ограниченный оператор из $H^N(M)$ в $L^2(M)$ и из $L^2(M)$ в $H^{-N}(M)$. Поскольку $R_2 = P - P_2$ и $P_2 \in \Psi^1(M,|TM|^{1/2})$, R_2 также определяет ограниченный оператор из $H^1(M)$ в $L^2(M)$ и из $L^2(M)$ в $H^{-1}(M)$.

По предположению для любого $K \in \Psi^{*,-\infty}(M,\mathcal{F},|TM|^{1/2})$ оператор KR_2 является сглаживающим оператором, поэтому оператор KR_2P^N определен как оператор из $H^N(M)$ в $C^\infty(M,|TM|^{1/2})$.

Лемма 9. *Для любого $K \in \Psi^{*,-\infty}(M,\mathcal{F},|TM|^{1/2})$ и для любого $N \in \mathbb{N}$ оператор KR_2P^N продолжается до ограниченного оператора из $L^2(M)$ в $C^\infty(M,|TM|^{1/2})$.*

Доказательство. Будем доказывать лемму индукцией по N. Для $N = 0$ утверждение справедливо по предположению. Предположим, что оно верно для некоторого N, т. е. для любого $K \in \Psi^{*,-\infty}(M,\mathcal{F},|TM|^{1/2})$ оператор KR_2P^N продолжается до ограниченного оператора из $L^2(M)$ в $C^\infty(M,|TM|^{1/2})$.

Имеем равенство $P^2 - P_2^2 = R_2P + P_2R_2$ как операторов из $H^1(M)$ в $H^{-1}(M)$, поэтому для любого $K \in \Psi^{*,-\infty}(M, \mathcal{F}, |TM|^{1/2})$

$$KR_2P^{N+1} = K(R_2P)P^N = K(P^2 - P_2^2)P^N - KP_2R_2P^N.$$

Оператор $P^2 - P_2^2 \in \Psi^2(M, |TM|^{1/2})$ имеет порядок $-\infty$ в некоторой конической окрестности $N^*\mathcal{F}$, поэтому для любого $K \in \Psi^{*,-\infty}(M, \mathcal{F}, |TM|^{1/2})$ оператор $K(P^2 - P_2^2)$ продолжается до ограниченного оператора из $H^s(M)$ в $C^\infty(M, |TM|^{1/2})$, для любого s и $K(P^2 - P_2^2)P^N$ продолжается до ограниченного оператора из $L^2(M)$ в $C^\infty(M, |TM|^{1/2})$.

Поскольку $P_2 \in \Psi^1(M, |TM|^{1/2})$ и $K \in \Psi^{*,-\infty}(M, \mathcal{F}, |TM|^{1/2})$, по теореме о композиции [4], $KP_2 \in \Psi^{*,-\infty}(M, \mathcal{F}, |TM|^{1/2})$, и, согласно предположению индукции, $KP_2R_2P^N$ продолжается до ограниченного оператора из $L^2(M)$ в $C^\infty(M, |TM|^{1/2})$. •

По формуле Дюамеля имеем

$$R(t)u = i \int_0^t e^{i\tau P_2} R_2 \, e^{i(t-\tau)P} u \, d\tau, \quad u \in H^1(M) \subset D(P),$$

поэтому для любого $K \in \Psi^{*,-\infty}(M, \mathcal{F}, |TM|^{1/2})$

$$KR(t) = i \int_0^t Ke^{i\tau P_2} R_2 \, e^{i(t-\tau)P} \, d\tau = i \int_0^t e^{i\tau P_2} e^{-i\tau P_2} K e^{i\tau P_2} R_2 \, e^{i(t-\tau)P} \, d\tau.$$

Любой оператор $K \in \Psi^{*,-\infty}(M, \mathcal{F}, |TM|^{1/2})$ является интегральным оператором Фурье (см. более подробно ниже), и, используя теорему о композиции для интегральных операторов Фурье, можно проверить, что $e^{-i\tau P_2} K e^{i\tau P_2} \in \Psi^{*,-\infty}(M, \mathcal{F}, |TM|^{1/2})$. Поэтому оператор $e^{-i\tau P_2} K e^{i\tau P_2} R_2$ продолжается до ограниченного оператора из $L^2(M)$ в $C^\infty(M, |TM|^{1/2})$. Поскольку $e^{i\tau P_2}$ отображает $C^\infty(M, |TM|^{1/2})$ в $C^\infty(M, |TM|^{1/2})$ и по спектральной теореме $e^{i(t-\tau)P}$ является ограниченным оператором в $L^2(M)$, для любого $K \in \Psi^{*,-\infty}(M, \mathcal{F}, |TM|^{1/2})$ оператор $KR(t)$ продолжается до ограниченного оператора из $L^2(M)$ в $C^\infty(M, |TM|^{1/2})$. Более того, из приведенных выше рассуждений можно легко увидеть, что функция $KR(t)$ непрерывна как функция на $\mathbb{R}$ со значениями в

пространстве $\mathcal{L}(L^2(M), C^\infty(M, |TM|^{1/2}))$ ограниченных операторов из $L^2(M)$ в $C^\infty(M, |TM|^{1/2})$.

Для любого $u \in H^1(M)$ функция $\mathbb{R} \to H \colon t \mapsto KR(t)u$ дифференцируема, и

$$\frac{d}{dt}KR(t)u = iK(Pe^{itP}u - P_2e^{itP_2}u) = i(KP_2R(t) + KR_2e^{itP})u.$$

Оператор $KP_2R(t) + KR_2e^{itP}$ продолжается до ограниченного оператора из $L^2(M)$ в $C^\infty(M, |TM|^{1/2})$, и, кроме того, функция $t \mapsto KP_2R(t) + KR_2e^{itP}$ является непрерывной функцией на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathcal{L}(L^2(M), C^\infty(M, |TM|^{1/2}))$. Используя это, можно легко увидеть, что функция $t \mapsto KR(t)$ дифференцируема как функция на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathcal{L}(L^2(M), C^\infty(M, |TM|^{1/2}))$ и

$$\frac{d}{dt}KR(t) = i(KP_2R(t) + KR_2e^{itP}).$$

Продолжим доказательство индукцией. Предположим, что для любого $K \in \Psi^{*,-\infty}(M, \mathcal{F}, |TM|^{1/2})$ и для некоторого натурального n функция $KR(t)$ n раз дифференцируема как функция на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathcal{L}(L^2(M), C^\infty(M, |TM|^{1/2}))$ и производная $KR^{(n)}(t), t \in \mathbb{R}$ удовлетворяет уравнению

$$KR^{(n)}(t) = iKP_2R^{(n-1)}(t) + i^nKR_2P^{n-1}e^{itP}. \tag{3.2}$$

Чтобы доказать, что функция $t \mapsto KR^{(n)}(t)$ дифференцируема как функция на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathcal{L}(L^2(M), C^\infty(M, |TM|^{1/2}))$, как выше, достаточно доказать, что производная $(d/dt)KR^{(n)}(t)u$ существует для любого u из плотного подпространства в $L^2(M)$ и продолжается до ограниченного оператора из $L^2(M)$ в $C^\infty(M, |TM|^{1/2})$ и ее продолжение непрерывно как функция на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathcal{L}(L^2(M), C^\infty(M, |TM|^{1/2}))$.

Можно легко увидеть из (3.2), что производная $(d/dt)KR^{(n)}(t)u$ существует для любого $u \in H^1(M)$ и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{dt}KR^{(n)}(t)u = iKP_2R^{(n)}(t)u + i^{n+1}KR_2P^ne^{itP}u. \tag{3.3}$$

Первое слагаемое в правой части (3.3) $iKP_2R^{(n)}(t)$ является ограниченным оператором из $L^2(M)$ в $C^\infty(M, |TM|^{1/2})$ по предположению индукции. По лемме 9, оператор KR_2P^n продолжается до ограниченного оператора из $L^2(M)$

в $C^\infty(M, |TM|^{1/2})$, и по спектральной теореме e^{itP} является ограниченным оператором в $L^2(M)$, поэтому второе слагаемое в правой части (3.3), оператор $i^{n+1}KR_2P^ne^{itP}$, продолжается до ограниченного оператора из $L^2(M)$ в $C^\infty(M, |TM|^{1/2})$. Ясно также, что правая часть (3.3) непрерывна как функция на $\mathbb{R}$ со значениями в $\mathcal{L}(L^2(M), C^\infty(M, |TM|^{1/2}))$. Это завершает доказательство существования производной $KR^{(n+1)}(t) = (d/dt)KR^{(n)}(t)$ и рассуждения по индукции. •

Доказательство предложения 2. Пусть $W(t)$ и $R(t)$ такие же, как в предложении 8, и $k \in C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$. Определим $\theta_k(t)$ по формуле

$$\theta_k(t) = \operatorname{tr} R(k)W(t) + \operatorname{tr} R(k)R(t).$$

Поскольку P_2 — эллиптический оператор, оператор $\int f(t)e^{itP_2}dt$ является сглаживающим оператором в $\mathcal{D}'(M)$, и след оператора $R(k)W(t)$ корректно определен как обобщенная функция на $\mathbb{R}$ [3]. Поскольку любой ограниченный оператор T в $L^2(M)$, который продолжается до ограниченного оператора из $L^2(M)$ в $H^s(M)$ с $s > n = \dim M$, является ядерным оператором, след $\operatorname{tr} R(k)R(t)$ есть корректно определенная гладкая функция на $\mathbb{R}$, согласно предложению 8. •

Следствие 10. *Для любого* $k \in C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$ *функция* $\operatorname{tr} R(k)R(t) = \theta_k(t) - \operatorname{tr} R(k)W(t)$ *является гладкой функцией на* $\mathbb{R}$.

Следует заметить, что без дополнительных предположений о рассматриваемом операторе P соответствующая обобщенная функция на $G_{\mathcal{F}_N} \times \mathbb{R}$, $k \mapsto \operatorname{tr} R(k)R(t)$ может быть очень сингулярной, но особенности обобщенной функции $k \mapsto \operatorname{tr} R(k)W(t)$ можно описать достаточно явно при условии чистого пересечения.

§4. Случай эллиптического оператора

Пусть $P_2 \in \Psi^1(M, |TM|^{1/2})$ — существенно самосопряженный эллиптический оператор с положительным главным символом и голономно-инвариантным трансверсальным главным символом и $W(t) = e^{itP_2}$. Особенности обобщенной функции $t \mapsto \operatorname{tr} R(k)W(t)$ можно изучать стандартными методами при помощи микролокального анализа.

Зафиксируем $k \in C_c^\infty(G, |T\mathcal{G}|^{1/2})$. Будем рассматривать семейство операторов $R(k)W(t)$ как один оператор $R(k)W$ из $L^2(M)$ в $L^2(\mathbb{R}\times M)$. Мы докажем, что этот оператор есть интегральный оператор Фурье. Сначала напомним хорошо известные факты о структуре операторов $R(k)$ и W.

Как выше, пусть $\widetilde{p}$ — такая гладкая функция на $\widetilde{T}^*M$, однородная степени один, что $\widetilde{p}(\xi) \neq 0$ для $\xi \in \widetilde{T}^*M$, которая равна $p = a^{1/2}$ в некоторой конической окрестности $N^*\mathcal{F}$, и $\widetilde{f}_t$ — гамильтонов поток $\widetilde{p}$. Без потери общности мы можем предположить, что $\widetilde{p}$ является главным символом оператора P_2. Пусть $\Lambda_{\widetilde{p}}$ — лагранжево подмногообразие в $\widetilde{T}^*\mathbb{R} \times \widetilde{T}^*M \times \widetilde{T}^*M$:

$$\Lambda_{\widetilde{p}} = \{((t,\tau),(x,\xi),(y,\eta)) \in \widetilde{T}^*\mathbb{R} \times \widetilde{T}^*M \times \widetilde{T}^*M \\ : \tau = \widetilde{p}(x,\xi), (x,\xi) = \widetilde{f}_{-t}(y,\eta)\}.$$

Тогда W является интегральным оператором Фурье, ассоциированным с каноническим отношением $\Lambda'_{\widetilde{p}}$, $W \in I^{-1/4}(\mathbb{R} \times M \times M, \Lambda'_{\widetilde{p}})$.

Оператор $R(k)$ принадлежит $\Psi^{0,-\infty}(M, \mathcal{F}, |TM|^{1/2})$, и поэтому является интегральным оператором Фурье, ассоциированным с вложенным каноническим отношением, которое есть образ $G_{\mathcal{F}_N}$ при отображении

$$(r_N, s_N)\colon G_{\mathcal{F}_N} \to T^*M \times T^*M, \quad (\gamma, \nu) \mapsto (\nu, dh^*_\gamma(\nu)),$$

задаваемым отображениями источника и образа группоида $G_{\mathcal{F}_N}$ [4]. Точнее, $R(k) \in I^{-p/2}(M \times M, G'_{\mathcal{F}_N})$.

Из трансверсальной эллиптичности $\widetilde{p}$ следует, что пересечение $\Lambda'_{\widetilde{p}}$ с $G'_{\mathcal{F}_N}$ трансверсально, и по теореме композиции интегральных операторов Фурье [11] оператор $R(k)W$ есть интегральный оператор Фурье, ассоциированный со вложенным каноническим отношением из T^*M в $T^*(\mathbb{R} \times M)$, задаваемым отображением

$$\Pi\colon \mathbb{R} \times G_{\mathcal{F}_N} \to T^*\mathbb{R} \times T^*M \times T^*M, \quad (t, \gamma, \nu) \mapsto (t, p(\nu), \nu, f_{-t} dh^*_\gamma(\nu)).$$

Точнее, $R(k)W \in I^{-p/2-1/4}(\mathbb{R} \times M \times M; \mathbb{R} \times G_{\mathcal{F}_N}, \Pi)$.

Напомним, что функционал взятия следа можно рассматривать с точки зрения микролокального анализа следующим образом [3]. Пусть $\Delta\colon \mathbb{R} \times M \to \mathbb{R} \times M \times M$ — диагональное отображение, $\Delta(t,x) = (t,x,x)$, $(t,x) \in \mathbb{R} \times M$, и $\pi\colon \mathbb{R} \times M \to M$ — отображение проекции. Тогда

$$\operatorname{tr} R(k)W = \pi_* \Delta^* W_k, \tag{4.1}$$

где $W_k \in C^\infty(\mathbb{R}\times M\times M, |T(\mathbb{R}\times M\times M)|^{1/2})$ — ядро Шварца оператора $R(k)W$, $\Delta^* : C^\infty(\mathbb{R}\times M\times M, |T(\mathbb{R}\times M\times M)|^{1/2}) \to C^\infty(\mathbb{R}, |T\mathbb{R}|^{1/2})\otimes C^\infty(M, |TM|)$ определяется формулой

$$\Delta^*(s_1\otimes s_2\otimes s_3)(t,x) = s_1(t)\otimes(s_2(x)\otimes s_3(x)), \quad t\in\mathbb{R},\ x\in M,$$

где $s_1\in C^\infty(\mathbb{R}, |T\mathbb{R}|^{1/2})$, $s_2\in C^\infty(M, |TM|^{1/2})$, $s_3\in C^\infty(M,|TM|^{1/2})$, и

$$\pi_* : C^\infty(\mathbb{R}, |T\mathbb{R}|^{1/2})\otimes C^\infty(M, |TM|) \to C^\infty(\mathbb{R}, |T\mathbb{R}|^{1/2})$$

задается интегрированием вдоль слоев проекции π.

Известно, что $\pi_*\Delta^*\in I^0(\mathbb{R}\times M\times M\times\mathbb{R}, \Gamma)$, где Γ — конормальное расслоение к диагонали в $\mathbb{R}\times M\times M\times\mathbb{R}$:

$$\Gamma = \{(t,\tau_1,\nu_1,\nu_2,t,\tau_2)\in T^*\mathbb{R}\times T^*M\times T^*M\times T^*\mathbb{R} : \nu_1 = -\nu_2, \tau_1 = -\tau_2\}.$$

Имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \Gamma & \xleftarrow{p_1} & \mathcal{Z} \\ {\scriptstyle\varphi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle p_2} \\ T^*(\mathbb{R}\times M\times M) & \xleftarrow{\Pi} & \mathbb{R}\times G_{\mathcal{F}_N} \end{array} \tag{4.2}$$

где

$$p_1(t,\gamma,\nu) = (\Pi(t,\gamma,\nu), t, -p(\nu)) = (t, p(\nu), \nu, -\nu, t, -p(\nu)), \quad (t,\gamma,\nu)\in\mathcal{Z},$$

p_2 — естественное включение, и

$$\varphi(t,\tau,\nu,-\nu,t,-\tau) = (t,\tau,\nu,-\nu), \quad (t,\tau,\nu,-\nu,t,-\tau)\in\Gamma.$$

Легко видеть, что (4.2) является диаграммой расслоенного произведения, т.е.

$$\mathcal{Z}\cong\{(x,y)\in(\mathbb{R}\times G_{\mathcal{F}_N})\times\Gamma : \Pi(x) = \varphi(y)\}.$$

Используя этот факт и функториальные свойства волновых фронтов (см., например, [12]), немедленно получаем описание особенностей обобщенной функции θ_k, данное в теореме 3.

Для того чтобы завершить доказательство теоремы 6, мы установим при предположении, что поток f_t является чистым в смысле определения 5, что $\pi_*\Delta^* W_k$ — лагранжево распределение, и вычислим его символ. Начнем с вычисления символа оператора $R(k)W$. Напомним сначала описание главного символа оператора $R(k)$.

Согласно короткой точной последовательности

$$0 \to T\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N} \to TG_{\mathcal{F}_N} \to H\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N} \to 0,$$

векторное расслоение полуплотностей на $G_{\mathcal{F}_N}$ можно разложить в виде

$$|TG_{\mathcal{F}_N}|^{1/2} \cong |T\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}|^{1/2} \otimes |H\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}|^{1/2},$$

где $|H\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}|^{1/2}$ — расслоение трансверсальных полуплотностей на $G_{\mathcal{F}_N}$: $|H_{(\gamma,\nu)}\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}|^{1/2} \cong |H_\nu\mathcal{F}_N|^{1/2} \cong |H_{dh^*_\gamma(\nu)}\mathcal{F}_N|^{1/2}$.

Пусть $|dy \wedge d\eta|^{1/2} \in C^\infty(N^*\mathcal{F}, |H\mathcal{F}_N|^{1/2})$ задается формой Лиувилля канонической трансверсальной симплектической структуры на многообразии со слоением $(N^*\mathcal{F}, \mathcal{F}_N)$, и $r_N^*(|dy \wedge d\eta|^{1/2}) \in C^\infty(G_{\mathcal{F}_N}, |H\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}|^{1/2})$ — ее подъем при отображении $r_N \colon G_{\mathcal{F}_N} \to N^*\mathcal{F}$.

Напомним, что пространство $S^m(G_{\mathcal{F}_N}, |TG_{\mathcal{F}_N}|^{1/2})$ определяется как пространство всех гладких сечений s векторного расслоения $|TG_{\mathcal{F}_N}|^{1/2}$ на $G_{\mathcal{F}_N}$, однородных степени m таких, что $\pi_G(\operatorname{supp} s)$ — компакт в $G_{\mathcal{F}}$.

Главный символ $R(k)$, рассматриваемый как полуплотность, есть элемент из $S^0(G_{\mathcal{F}_N}, |TG_{\mathcal{F}_N}|^{1/2})$, задаваемый формулой

$$\sigma(R(k))(\gamma,\nu) = \pi_G^* k(\gamma,\nu) \otimes r_N^*(|dy \wedge d\eta|^{1/2}), \quad (\gamma,\nu) \in G_{\mathcal{F}_N}.$$

Расслоение Маслова $M(\mathbb{R} \times G_{\mathcal{F}_N}, \Pi)$ вложенного канонического отношения $(\mathbb{R} \times G_{\mathcal{F}_N}, \Pi)$, ограниченное на $t = 0$, изоморфно расслоению Маслова $M(G_{\mathcal{F}_N})$ на $G_{\mathcal{F}_N}$, поэтому оно имеет каноническое постоянное сечение, которое продолжается до глобального сечения s в $M(\mathbb{R} \times G_{\mathcal{F}_N}, \Pi)$, если потребовать, чтобы оно было постоянным вдоль каждой бихарактеристики (t, τ, ν_1, ν_2), $\nu_1 = f_{-t}(\nu_2)$, $t \in \mathbb{R}$.

Используя описание главного символа оператора $W(t)$, приведенное, например, в [3], и теорему о композиции интегральных операторов Фурье, мы немедленно получим, что главный символ оператора $R(k)W$ есть элемент $S^0(\mathbb{R} \times G_{\mathcal{F}_N}, M(\mathbb{R} \times G_{\mathcal{F}_N}, \Pi) \otimes |T(\mathbb{R} \times G_{\mathcal{F}_N})|^{1/2})$, значение которого в точке $(t, \gamma, \nu) \in \mathbb{R} \times G_{\mathcal{F}_N}$ задается формулой

$$\begin{aligned}&\sigma(R(k)W)(t,\gamma,\nu)\\&= e^{i\int_0^t \sigma_{\mathrm{sub}}(P)(f_{-s} dh^*_\gamma(\nu))ds} s \otimes |dt|^{1/2} \otimes \pi^*_G k(\gamma,\nu) \otimes r^*_N(|dy \wedge d\eta|^{1/2}).\end{aligned}$$

Сейчас обратимся к композиции (4.1). Сначала проверим соответствующее предположение чистоты.

Лемма 11. *Предположение о том, что поток f_t является чистым на $\mathcal{Z}_t$ в смысле определения 5, гарантирует то, что композиция $\mathbb{R} \times G_{\mathcal{F}_N}$ с Γ является чистой.*

Доказательство. По определению композиция $\mathbb{R} \times G_{\mathcal{F}_N}$ с Γ чистая тогда и только тогда, когда $\mathcal{Z}_t$ — подмногообразие в $\mathbb{R} \times G_{\mathcal{F}_N}$ и, кроме того, диаграмма расслоенного произведения (4.2) чиста в любой точке $(t, \gamma, \nu) \in \mathcal{Z}$, т.е. линеаризованная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_{p_1(t,\gamma,\nu)}\Gamma & \xleftarrow{dp_1} & T_{(t,\gamma,\nu)}\mathcal{Z} \\ {\scriptstyle d\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle dp_2} \\ T_{(t,p(\nu),\nu,-\nu)}(T^*(\mathbb{R} \times M \times M)) & \xleftarrow{d\Pi} & T_{(t,\gamma,\nu)}(\mathbb{R} \times G_{\mathcal{F}_N}) \end{array} \tag{4.3}$$

есть диаграмма расслоенного произведения. Поскольку $T_{(t,\gamma,\nu)}\mathcal{Z}$ всегда содержится в $T_\nu N^*\mathcal{F} \oplus T_{dh^*_\gamma(\nu)} N^*\mathcal{F}$, это верно тогда и только тогда, когда диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_{p_1(t,\gamma,\nu)}(\Gamma \bigcap T^*\mathbb{R} \times N^*\mathcal{F} \times N^*\mathcal{F} \times T^*\mathbb{R}) & \xleftarrow{dp_1} & T_{(t,\gamma,\nu)}\mathcal{Z} \\ {\scriptstyle d\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle dp_2} \\ T_{(t,p(\nu),\nu,-\nu)}(T^*\mathbb{R} \times N^*\mathcal{F} \times N^*\mathcal{F}) & \xleftarrow{d\Pi} & T_{(t,\gamma,\nu)}(\mathbb{R} \times G_{\mathcal{F}_N}) \end{array} \tag{4.4}$$

является диаграммой расслоенного произведения.

Диаграмма (4.4) имеет поддиаграмму

$$\begin{array}{ccc} L_{p_1(t,\gamma,\nu)}\Gamma & \xleftarrow{dp_1} & L_{(t,\gamma,\nu)}\mathcal{Z} \\ {\scriptstyle d\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle dp_2} \\ 0 \oplus T_\nu\mathcal{F}_N \oplus T_{-\nu}\mathcal{F}_N & \xleftarrow{d\Pi} & L_{(t,\gamma,\nu)}(\mathbb{R} \times G_{\mathcal{F}_N}) \end{array} \tag{4.5}$$

где $L_{(t,\gamma,\nu)}(\mathbb{R}\times G_{\mathcal{F}_N})\subset T_{(t,\gamma,\nu)}(\mathbb{R}\times G_{\mathcal{F}_N})$ задается как

$$\begin{aligned}&L_{(t,\gamma,\nu)}(\mathbb{R}\times G_{\mathcal{F}_N})\\&\quad=\{(U,V_1,V_2,W)\in T_t(\mathbb{R})\oplus T_\nu\mathcal{F}_N\oplus T_{dh^*_\gamma(\nu)}\mathcal{F}_N\oplus H_{(\gamma,\nu)}\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad: U=0, W=0\}\\&\quad\cong T_\nu\mathcal{F}_N\oplus T_{dh^*_\gamma(\nu)}\mathcal{F}_N,\end{aligned}$$

$L_{(t,\gamma,\nu)}\mathcal{Z}\subset T_{(t,\gamma,\nu)}\mathcal{Z}$, как

$$\begin{aligned}&L_{(t,\gamma,\nu)}\mathcal{Z}\\&\quad=\{(U,V_1,V_2,W)\in T_t(\mathbb{R})\oplus T_\nu\mathcal{F}_N\oplus T_{dh^*_\gamma(\nu)}\mathcal{F}_N\oplus H_{(\gamma,\nu)}\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}\\&\qquad\qquad\qquad\qquad: U=0, V_1=-df_{-t}(dh^*_\gamma(\nu))(V_2), W=0\}\\&\quad\cong T_\nu\mathcal{F}_N,\end{aligned}$$

и $L_{p_1(t,\gamma,\nu)}\Gamma\subset T_{p_1(t,\gamma,\nu)}\Gamma$, как

$$\begin{aligned}&L_{p_1(t,\gamma,\nu)}\Gamma\\&\quad\cong\{(U_1,V_1,V_2,U_2)\in T_{(t,p(\nu))}(T^*\mathbb{R})\oplus T_\nu\mathcal{F}_N\oplus T_{-\nu}\mathcal{F}_N\oplus T_{(t,-p(\nu))}(T^*\mathbb{R})\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad: U_1=U_2=0, V_1=-V_2\},\end{aligned}$$

которая, как легко можно видеть, является диаграммой расслоенного произведения.

Поэтому диаграмма (4.4) является диаграммой расслоенного произведения в том и только том случае, если фактор-диаграмма является диаграммой расслоенного произведения:

$$\begin{array}{ccc}H_{p_1(t,\gamma,\nu)}\Gamma & \xleftarrow{dp_1} & H_{(t,\gamma,\nu)}\mathcal{Z}\\ {\scriptstyle d\varphi}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle dp_2}\\ T_{(t,p(\nu))}(T^*\mathbb{R})\oplus H_\nu\mathcal{F}_N\oplus H_{-\nu}\mathcal{F}_N & \xleftarrow{d\Pi} & H_{(t,\gamma,\nu)}(\mathbb{R}\times G_{\mathcal{F}_N}),\end{array}\qquad(4.6)$$

где

$$\begin{aligned}&H_{(t,\gamma,\nu)}(\mathbb{R}\times G_{\mathcal{F}_N})\\&\quad=\{(U,V_1,V_2,W)\in T_t(\mathbb{R})\oplus T_\nu\mathcal{F}_N\oplus T_{dh^*_\gamma(\nu)}\mathcal{F}_N\oplus H_{(\gamma,\nu)}\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N}\\&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad: V_1=0, V_2=0\}\\&\quad\cong T_t(\mathbb{R})\oplus H_{(\gamma,\nu)}\mathcal{G}_{\mathcal{F}_N},\end{aligned}$$

$$H_{(t,\gamma,\nu)}\mathcal{Z} = T_{(t,\gamma,\nu)}\mathcal{Z}/L_{(t,\gamma,\nu)}\mathcal{Z} \cong T_\nu Z_t/T_\nu\mathcal{F}_N,$$

$$\begin{aligned} &H_{p_1(t,\gamma,\nu)}\Gamma \\ &\quad\cong \{(U_1,V_1,V_2,U_2) \in T_{(t,p(\nu))}(T^*\mathbb{R}) \oplus H_\nu\mathcal{F}_N \oplus H_{-\nu}\mathcal{F}_N \oplus T_{(t,-p(\nu))}(T^*\mathbb{R}) \\ &\qquad\qquad : U_1 = -U_2, V_1 = -V_2\}. \end{aligned}$$

В свою очередь диаграмма (4.6) является диаграммой расслоенного произведения тогда и только тогда, когда поток f_t чист на $\mathcal{Z}_t$ в смысле определения 5. •

Для любой связной компоненты $\mathcal{Z}_j$ в $\mathcal{Z}_t$ эксцесс чистой диаграммы (4.2) равен d_j, размерности множества относительных неподвижных точек $S\mathcal{Z}_j$ в $G_{SN^*\mathcal{F}}$. По теореме о композиции интегральных операторов Фурье, θ_k принадлежит $\bigoplus_j I^{\frac{d_j-p}{2}-\frac{1}{4}}(\Lambda_t)$, где $\Lambda_t = \{(t,\tau) \in T^*\mathbb{R} : \tau \in \mathbb{R}_-\}$, что доказывает желаемое представление θ_k в виде (2.5) и существование асимптотического разложения (2.6) для $\alpha_j(s,k)$.[1]

Для того чтобы получить явную формулу для ведущих коэффициентов $\alpha_{j,0}$, мы вычислим главный символ θ_k, $\sigma(\theta_k)$, следуя рассуждениям в [13].

Зафиксируем связную компоненту $\mathcal{Z}_j$ в $\mathcal{Z}_t$ и $(t,\gamma,\nu) \in \mathcal{Z}_j$. Диаграмма расслоенного произведения (4.3) определяет отображение композиции [3, 11]

$$\begin{aligned} * : &|T_{p_1(t,\gamma,\nu)}\Gamma|^{1/2} \otimes |T_{(t,\gamma,\nu)}(\mathbb{R}\times G_{\mathcal{F}_N})|^{1/2} \\ &\to |T_{(t,-p(\nu))}(\Lambda_t)|^{1/2} \otimes |T_{(t,\gamma,\nu)}\mathcal{Z}_j|, \end{aligned} \tag{4.7}$$

и, согласно (4.1) и теореме о композиции интегральных операторов Фурье, значение главного символа $\sigma(\theta_k) \in |T\Lambda_t|^{1/2}$ в точке $(t,\tau) \in \Lambda_t$ дается интегрированием $\sigma(\pi_*\Delta^*) * \sigma(W_k) \in C^\infty(\Lambda_t \times \mathcal{Z}_j, |T\Lambda_t|^{1/2} \otimes |T\mathcal{Z}_j|)$ по $\mathcal{Z}_j$.

Используя функториальность операции $*$ на полуплотностях по отношению к редукции [13, доказательство леммы 4.6], вычисление $*$-произведения $\sigma(\pi_*\Delta^*) * \sigma(W_k)$ можно свести к вычислению $*$-произведения, определяемого трансверсальной диаграммой расслоенного произведения (4.6):

$$\begin{aligned} *_t : &|H_{p_1(t,\gamma,\nu)}\Gamma|^{1/2} \otimes |H_{(t,\gamma,\nu)}(\mathbb{R}\times G_{\mathcal{F}_N})|^{1/2} \\ &\to |T_{(t,-p(\nu))}\Lambda_t|^{1/2} \otimes |H_{(t,\gamma,\nu)}\mathcal{Z}_j|. \end{aligned}$$

[1]Заметим, что член $-p/2$ в показателе появляется в силу того факта, что $R(k)W \in I^{-p/2-1/4}(M\times M; \mathbb{R}\times G_{\mathcal{F}_N}, \Pi)$.

Точнее, мы применим результат, сформулированный в [13, доказательство леммы 4.6] с симплектическим векторным пространством

$$\mathcal{V} = T_{(t,p(\nu),\nu,-\nu,t,-p(\nu))}(T^*\mathbb{R} \times T^*M \times T^*M \times T^*\mathbb{R}),$$

двумя лагранжевыми подпространствами в $\mathcal{V}$: $\Lambda_1 = T_{p_1(t,\gamma,\nu)}\Gamma$ и Λ_2, которое есть образ $T_{(t,\gamma,\nu)}(\mathbb{R} \times G_{\mathcal{F}_N})$ в $\mathcal{V}$, и редукцией, задаваемой коизотропным подпространством

$$\Gamma = T_{(t,p(\nu),\nu,-\nu,t,-p(\nu))}(T^*\mathbb{R} \times N^*\mathcal{F} \times N^*\mathcal{F} \times T^*\mathbb{R}).$$

Согласно этому результату, послойная компонента в $\sigma(\theta_k)$, $\sigma_l(\theta_k) \in |L_{(t,\gamma,\nu)}\mathcal{Z}_j|$ получается из послойной компоненты в $\sigma(R(k)W)$:

$$\sigma_l(R(k)W) = e^{i\int_0^t \sigma_{\mathrm{sub}}(P)(f_{-s}dh_\gamma^*(\nu))ds}\pi_G^*k,$$

применением отображения ограничения $R_{\mathcal{Z}}$:

$$\sigma_l(\theta_k) = e^{i\int_0^t \sigma_{\mathrm{sub}}(P)(f_{-s}dh_\gamma^*(\nu))ds}R_{\mathcal{Z}}\pi_G^*k,$$

и трансверсальная компонента в $\sigma(\theta_k)$, $\sigma_t(\theta_k) \in |T_{(t,-p(\nu))}(\Lambda_t)|^{1/2} \otimes |H_{(t,\gamma,\nu)}\mathcal{Z}_j|$ равна $*_t$-произведению трансверсальной компоненты $\sigma(R(k)W)$,

$$\sigma_t(R(k)W) = |dt|^{1/2} \otimes r_N^*(|dy \wedge d\eta|^{1/2}),$$

и трансверсальной компоненты $\sigma(\pi_*\Delta^*)$. Согласно [3], мы получим

$$\sigma_t(\theta_k) = |dt|^{1/2} \otimes d\mu_{\mathcal{Z}_j},$$

что завершает вычисление главного символа θ_k, рассматриваемого как полуплотность, и откуда следует формула (2.7) для ведущих коэффициентов $\alpha_{j,0}$, как в [3].

§5. Индексы Маслова

В этом параграфе мы определим множители Маслова σ, соответствующие $(\gamma, \nu) \in \mathcal{Z}_t$. Для этого мы будем использовать локальные координаты на группоиде голономии G, описанные, например, в [8, 4]. Выберем пару сравнимых расслоенных карт вблизи точек $\pi(\nu)$ и $\pi(f_t(\nu))$ с координатами (x, y) и (x', y), соответствующую $\gamma \in G$. Тогда мы имеем соответствующие координаты в $H_\nu \mathcal{F}_N = T_\nu N^*\mathcal{F}/T_\nu \mathcal{F}_N$, определяемые как $(\delta y, \delta\eta)$, и вертикальное и горизонтальное подпространства V_ν и H_ν, задаваемые уравнениями $\delta y = 0$ и $\delta\eta = 0$ соответственно. Отображение линейной голономии $dH_{(\gamma,\nu)}$ слоения $(N^*\mathcal{F}, \mathcal{F}_N)$ определяет изоморфизм симплектических пространств $H_{f_t(\nu)}\mathcal{F}_N$ и $H_\nu \mathcal{F}_N$, который сохраняет вертикальное и горизонтальное подпространства. Благодаря этому изоморфизму мы получаем замкнутую кривую $\omega_{(\gamma,\nu)}$ в лагранжевом грассманиане $\mathcal{G}$ симплектического пространства $H_\nu\mathcal{F}_N$, поднимая вертикальное подпространство в $f_t(\nu)$ при t между 0 и T при помощи df_t. Обозначим через $\kappa_{(\gamma,\nu)}$ индекс пересечения ω с горизонтальным подпространством H_ν:

$$\kappa_{(\gamma,\nu)} = [\omega_{(\gamma,\nu)} : H_\nu].$$

Пусть $\chi(t, x, y, \xi, \eta)$ — производящая функция канонического преобразования f_t в выбранных координатах. Напомним, что χ является решением задачи Коши

$$d_t\chi = p(x, y, d_x\chi, d_y\chi), \quad \chi(0, x, y, \xi, \eta) = x\xi + y\eta. \tag{5.1}$$

Из голономной инвариантности p можно легко увидеть, что $\chi(t, x, y, 0, \eta)$ не зависит от x и ξ: $\chi(t, x, y, 0, \eta) = \chi(t, y, \eta)$. Пусть

$$R_{(\gamma,\nu)} = \begin{bmatrix} d^2_{yy}\chi & d^2_{y\eta}\chi & -1 \\ d^2_{\eta y}\chi & d^2_{\eta\eta}\chi & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Мы определим множители Маслова $\sigma(\gamma, \nu)$ как

$$\sigma(\gamma, \nu) = \operatorname{sgn} R_{(\gamma,\nu)} + 2\kappa_{(\gamma,\nu)}, \quad (\gamma, \nu) \in \mathcal{Z}.$$

Ясно, что $\sigma(\gamma, \nu)$ есть локально постоянная функция на $\mathcal{Z}$.

Для того чтобы разобраться с множителями Маслова при доказательстве теоремы 6, мы запишем ядро Шварца оператора $R(k)$ в расслоенной системе координат, задаваемой парой сравнимых систем координат, в виде $k(x, x_1, y)\lambda(x_1, y)\delta(y - y_1)$, и ядро Шварца оператора $W(t)$ микролокально как осциллирующий интеграл вида

$$\int e^{i\alpha(t,x_1,y_1,x_2,y_2,\xi,\eta)} a(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \xi, \eta) d\xi d\eta,$$

где

$$\alpha(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \xi, \eta) = \chi(t, x_1, y_1, \xi, \eta) - x_2\xi - y_2\eta$$

и $\chi(t, x_1, y_1, \xi, \eta)$ — производящая функция канонического преобразования f_t, задаваемая (5.1). Тогда ядро Шварца оператора $R(k)W$ даётся формулой

$$\int e^{i\alpha(t,x_1,y_1,x_2,y_2,\xi,\eta)} k(x, x_1, y_1) a(t, x_1, y_1, x_2, y_2, \xi, \eta) \lambda(x_1, y) dx_1 d\xi d\eta,$$

откуда можно легко вывести желаемое утверждение, следуя рассуждениям в [3].

Список литературы

[1] Colin de Verdière Y., *Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. II*, Compositio Math. **27** (1973), 159–184.

[2] Chazarain J., *Formule de Poisson pour les variétés riemanniennes*, Invent. Math. **24** (1974), 65–82.

[3] Duistermaat J. J., Guillemin V. W., *The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics*, Invent. Math. **29** (1975), 39–79.

[4] Kordyukov Yu. A., *Noncommutative spectral geometry of Riemannian foliations*, Manuscripta Math. **94** (1997), 45–73.

[5] Connes A., *Trace formula in noncommutative geometry and the zeros of the Riemann zeta function*, Selecta Math. (N.S.) **5** (1999), 29–106.

[6] Golse F., Leichtnam E., *Applications of Connes' geodesic flow to trace formulas in noncommutative geometry*, J. Funct. Anal. **160** (1998), 408–436.

[7] Reinhart B. L., *Differential geometry of foliations. The fundamental integrability problem*, Ergeb. Math. Grenzgeb., vol. 90, Springer-Verlag, Berlin–New York, 1983.

[8] Connes A., *Sur la théorie non commutative de l'intégration*, Algèbres d'Opérateurs (Sém., Les Plans-sur-Bex, 1978), Lecture Notes in Math., vol. 725, Springer, Berlin, 1979, pp. 19–143.

[9] Guillemin V., Sternberg S., *Some problems in integral geometry and some related problems in microlocal analysis*, Amer. J. Math. **101** (1979), 915–955.

[10] Kordyukov Yu. A., *The transversal wave equation and the noncommutative geodesic flow in Riemannian foliations*, Preprint ETH, Zürich, 1997; dg-ga/9703015.

[11] Хермандер Л., *Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными*. Т. 4. *Интегральные операторы Фурье*, Мир, М., 1988.
[12] Гийемин В., Стернберг С., *Геометрические асимптотики*, Мир, М., 1981.
[13] Guillemin V., Uribe A., *Circular symmetry and the trace formula*, Invent. Math. **96** (1989), 385–423.

Уфимский государственный
авиационный технический университет
кафедра математики
450000 Уфа
ул. К. Маркса, 12
Россия
E-mail: yurikor@math.ugatu.ac.ru

Поступило 16 декабря 1997 г.