V. G. Drinfeld, Degenerate affine Hecke algebras and Yangians, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1986, Volume 20, Issue 1, 69–70

Функциональный анализ и его приложения,
1986, т. 20, вып. 1, 69—70

УДК 512.552.8 + 512.667.5 + 517.986.4

ВЫРОЖДЕННЫЕ АФФИННЫЕ АЛГЕБРЫ ГЕККЕ И ЯНГИАНЫ

В. Г. Дринфельд

1. В работе [1] в связи с исследованием квантового уравнения Янга — Бакстера введен новый класс алгебр Хопфа — *янгианы*. Если $\mathfrak{a}$ — конечномерная простая алгебра Ли над $\mathbf{C}$, а $c_{\lambda\mu\nu}$ — структурные константы $\mathfrak{a}$ в базисе $\{I_\lambda\}$, ортонормированном относительно некоторого инвариантного скалярного произведения, то янгиан $\mathfrak{a}$ (обозначаемый $Y(\mathfrak{a})$) порождается как ассоциативная алгебра с единицей, алгеброй $\mathfrak{a}$ и образующими J_λ с определяющими соотношениями $[I_\lambda, J_\mu] = c_{\lambda\mu\nu} J_\nu$, $[J_\lambda, [J_\mu, J_\nu]] - [I_\lambda, [J_\mu, J_\nu]] = a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma}\{I_\alpha, I_\beta, I_\gamma\}$, $[[J_\lambda, J_\mu], [I_r, J_s]] + [[J_r, J_s], [I_\lambda, J_\mu]] = (a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma} c_{rs\nu} + a_{rs\nu\alpha\beta\gamma} c_{\lambda\mu\nu})\{I_\alpha, I_\beta, J_\gamma\}$, где

$$a_{\lambda\mu\nu\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{24} c_{\lambda\alpha i} c_{\mu\beta j} c_{\nu\gamma k} c_{ijk}, \quad \{x_1, x_2, x_3\} = \sum_{i\neq j\neq k} x_i x_j x_k.$$

Коумножение $\Delta\colon\ Y(\mathfrak{a}) \to Y(\mathfrak{a}) \otimes Y(\mathfrak{a})$ имеет вид $\Delta(I_\lambda) = I_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes I_\lambda$, $\Delta(J_\lambda) = J_\lambda \otimes 1 + 1 \otimes J_\lambda + \frac{1}{2} c_{\lambda\mu\nu} I_\nu \otimes I_\mu$. Изучение конечномерных неприводимых представлений $Y(\mathfrak{a})$ представляет большой интерес, так как каждому такому представлению соответствует квантовая R-матрица [1].

Пусть теперь $\mathfrak{a} = \mathfrak{sl}(N)$, а в качестве скалярного произведения в $\mathfrak{a}$ взято $\operatorname{Tr}(XY)$. Приведем аналог для $Y(\mathfrak{sl}(N))$ теоремы Г. Вейля о связи между представлениями $\mathfrak{sl}(N)$ и S_m. Роль S_m играет при этом алгебра Λ_m, порожденная групповой алгеброй $\mathbf{C}[S_m]$ и элементами $y_1, \ldots, y_m$ с определяющими соотношениями $g y_i = y_{g(i)} g$, $g \in S_m$, и

$$[y_i, y_j] = \frac{1}{4} \sum_{k\neq i,\, j} ((i, j, k) - (j, i, k)). \tag{1}$$

Здесь и в дальнейшем символы (i, j, k), (j, k) и т. п. обозначают циклы в S_m. Положим $W = (\mathbf{C}^N)^{\otimes m}$. Скажем, что представление $Y(\mathfrak{sl}(N))$ имеет вес m, если его ограничение на $\mathfrak{sl}(N)$ — сумма неприводимых представлений, каждое из которых входит в W. Определим $\rho_i : \mathfrak{sl}(N) \to \operatorname{End} W$ формулой $\rho_i(I_\mu)\, x_1 \otimes \ldots \otimes x_m = x_1 \otimes \ldots \otimes x_{i-1} \otimes I_\mu x_i \otimes x_{i+1} \otimes \ldots \otimes x_m$.

Т е о р е м а 1. 1) *Пусть M — молуль над Λ_m, $V_M = M \otimes_{S_m} W$. Тогда существует гомоморфизм $\pi\colon Y(\mathfrak{sl}(N)) \to \operatorname{End} V_M$ такой, что $\pi(I_\mu)(x \otimes w) = x \otimes \sum_{i=1}^m \rho_i(I_\mu)\, w$, $\pi(J_\mu)(x \otimes w) = \sum_{i=1}^m y_i x \otimes \rho_i(I_\mu)\, w$ при $x \in M$, $w \in W$. При $N > m$ функтор $M \mapsto V_M$ является эквивалентностью между категорией Λ_m-модулей и категорией представлений $Y(\mathfrak{sl}(N))$ веса m.*

2) *Для любых l, m существует гомоморфизм $i_{l,m}\colon \Lambda_l \otimes \Lambda_m \to \Lambda_{l+m}$, индуцирующий естественное вложение $S_l \times S_m \to S_{l+m}$ и такой, что*

$$y_j \otimes 1 \mapsto y_j + \frac{1}{2} \sum_{k=l+1}^{l+m} (j, k), \quad 1 \otimes y_j \mapsto y_{j+l} - \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{l} (j, k).$$

Если P и Q — модули над Λ_l и Λ_m соответственно, а M — модуль над Λ_{l+m}, индуцированный модулем $P \otimes Q$ с помощью $i_{l,m}$, то $Y(\mathfrak{sl}(N))$-модуль V_M канонически изоморфен $V_P \otimes V_Q$ (структура $Y(\mathfrak{sl}(N))$-модуля в $V_P \otimes V_Q$ вводится с помощью Λ).

Положим $u_k = y_k - \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{m} \operatorname{sgn}(k - l) \cdot (k, l)$. Тогда $[u_i, u_j] = 0$. Кроме того, если положить $s_k = (k, k+1) \in S_m$, то $u_k s_k = s_k u_{k+1} + 1$, $u_{k+1} s_k = s_k u_k - 1$, $u_j s_k = s_k u_j$ при $j \neq k, k+1$. При этом $i_{l,m}(u_k \otimes 1) = u_k$, $i_{l,m}(1 \otimes u_k) = u_{k+l}$.

2. Обозначим через $\mathscr{H}_m$ алгебру Гекке группы $\mathrm{GL}(m, \mathbf{Q}_p)$ по отношению к подгруппе $\Gamma_0(p) = \{(a_{ij}) \in \mathrm{GL}(m, \mathbf{Z}_p) \mid a_{ij} \in p\mathbf{Z}_p \text{ при } i > j\}$. И. Н. Бернштейн и А. В. Зелевинский доказали (см. [3, 4]), что $\mathscr{H}_m$ порождается алгеброй $\mathbf{C}[x_1, x_1^{-1}, \ldots, x_m, x_m^{-1}]$ и обра-

вующими T_k, $1 \leqslant k \leqslant m-1$, с определяющими соотношениями $(T_k - p)(T_k + 1) = 0$, $T_k T_{k+1} T_k = T_{k+1} T_k T_{k+1}$, $T_k T_j = T_j T_k$ при $|k - j| > 1$, $x_k T_k = T_k x_{k+1} - (p-1) x_{k+1}$, $x_{k+1} T_k = T_k x_k + (p-1) x_{k+1}$, $x_j T_k = T_k x_j$ при $j \neq k, k+1$. Если положить $x_k = 1 - (p-1) u_k$, разделить каждое соотношение на максимально возможную степень $p - 1$, а затем формально положить $p = 1$, то получится Λ_m. Поэтому из теоремы 1 и известных утверждений о связи между представлениями $\mathscr{H}_m$ и представлениями $\mathrm{GL}(m, \mathbf{Q}_p)$ (см. [2, 5, 6]) вытекает следующая система аналогий: конечномерные представления $Y(\mathfrak{sl}(N))$ веса m аналогичны слабо разветвленным допустимым представлениям $\mathrm{GL}(m, \mathbf{Q}_p)$; «скручивание» представления $\mathrm{GL}(m, \mathbf{Q}_p)$ с помощью неразветвленного квазихарактера $\mathbf{Q}_p^*$ аналогично «скручиванию» представления $Y(\mathfrak{sl}(N))$ с помощью автоморфизма $I_\mu \mapsto I_\mu$, $J_\mu \mapsto J_\mu + aI_\mu$, $a \in \mathbf{C}$; тензорное произведение представлений $Y(\mathfrak{sl}(N))$ аналогично параболическому индуцированию; квантовая R-матрица аналогична стандартному сплетающему оператору между двумя представлениями $\mathrm{GL}(l + m, \mathbf{Q}_p)$, полученными параболическим индуцированием из представлений $\mathrm{GL}(l, \mathbf{Q}_p)$ и $\mathrm{GL}(m, \mathbf{Q}_p)$.

Поскольку приведенное выше описание $\mathscr{H}_m$ обобщено И. Н. Бернштейном на произвольные расщепимые полупростые алгебраические группы над $\mathbf{Q}_p$ (см. [3, 4]), то и конструкция вырождения $\mathscr{H}_m$ обобщается на алгебры Гекке, соответствующие произвольным аффинным группам Вейля. Однако в общем случае неясно, что играет роль $Y(\mathfrak{sl}(N))$.

3. Существует гомоморфизм $f\colon \Lambda_m \to \mathbf{C}[S_m]$, тождественный на S_m и такой, что $u_k \mapsto \frac{1}{2} \sum_{j \neq k} (k, j)$ (f тесно связан с гомоморфизмом $Y(\mathfrak{sl}(N)) \to U\mathfrak{sl}(N)$, построенным в теореме 9 работы [1]). Автор не знает, можно ли получить f как предел при $p \to 1$ некоторого гомоморфизма из $\mathscr{H}_m$ в алгебру Гекке группы S_m.

4. Пусть ρ — представление конечной группы G в векторном пространстве V над $\mathbf{C}$, и пусть на V заданы кососимметричные билинейные формы a_g, $g \in G$. Рассмотрим алгебру A, порожденную алгеброй $\mathbf{C}[G]$ и пространством V с определяющими соотношениями $gvg^{-1} = \rho(g)v$, $g \in G$, $v \in V$, а также $[v_1, v_2] = \sum_{g \in G} a_g(v_1, v_2) \cdot g$, $v_1, v_2 \in V$. Любой элемент A представим в виде $\sum_{g \in G} g \cdot \varphi(b_g)$, $b_g \in \mathrm{Sym}^* V$, где φ — естественное отображение $\mathrm{Sym}^* V \to A$. Скажем, что набор $\{a_g\}$ допустим, если такое представление единственно. Нетрудно показать, что для этого необходимо и остаточно, чтобы $a_{hgh^{-1}}(\rho(h) v_1, \rho(h) v_2) = a_g(v_1, v_2)$ и чтобы из неравенств $\rho(g) \neq \mathrm{id}$, $a_g \neq 0$ следовало, что $\operatorname{Ker} a_g = V^g$ и $\operatorname{Codim} V^g = 2$, где $V^g = \{v \in V \mid \rho(g)v = v\}$. В частности, если $G = S_m$, а ρ — стандартное представление S_m в $\mathbf{C}^m$, то допустимый набор $\{a_g\}$ единствен с точностью до пропорциональности и дается формулой (1). Если G — конечная группа Кокстера, а σ — ее естественное представление, то размерность пространства допустимых наборов $\{a_g\}$ равна $\sum_L \max(0, [1/2(n(L) - 1)])$, где L пробегает множество классов G-эквивалентности подпространств коразмерности 2 в V, а $n(L)$ — число, зеркал, содержащих L.

Результаты [7] и настоящей статьи позволяют надеяться, что аналогично связи между Λ_m и $Y(\mathfrak{sl}(N))$ существует связь межу $\mathscr{H}_m$ и квантованными аффинными алгебрами Каца—Муди типа A_n^1 (квантованные алгебры Каца — Муди введены независимо в [8 и 1]).

Автор благодарит А. В. Зелевинского за ценные советы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дринфельд В. Г.*— ДАН СССР, 1985, т. 283, № 5, с. 1060—1064. 2. *Бернштейн И. Н.*, *Зелевинский А. В.*— УМН, 1976, т. 31, вып. 3, с. 5—70. 3. *Rogawski J. D.*— Invent. Math., 1985, v. 79, p. 443—465. 4. *Lusztig G.*— Trans. Amer. Math. Soc., 1983, v. 277, p. 623—653. 5. *Borel A.*— Invent. Math., 1976, v. 35, p. 233—259. 6. *Matsumoto H.*— Analyse harmonique dans les systemes de Tits bornoloques de type affine.— Lect. Notes Math., 1977, v. 590. 7. Jimbo M.— RIMS Preprint № 517, Kyoto Univ., 1985. 8. Jimbo M.— Lett. Math. Rhys., 1985, v. 10, p. 63—69.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР

Поступило в редакцию
11 июня 1985 г.