Е. Г. Шульгейфер, К общей теории радикалов в категориях, *Матем. сб.*, 1960, том 51(93), номер 4, 487–500

К общей теории радикалов в категориях

Е. Г. Шульгейфер (Москва)

Введение

В настоящей работе мы хотим показать, что в категории K, подчиненной некоторым дополнительным аксиомам (общее определение категории см., например, в работе А. Г. Куроша [1], § 1, п. 1), полностью проходит вся общая теория радикалов, построенная А. Г. Курошем для колец в его работе [2]. В конце предисловия к работе [2] А. Г. Курошем было отмечено, что излагаемое им построение общей теории радикалов для колец полностью переносится «на любой класс алгебраических образований, если для них имеет смысл понятие ядра гомоморфизма с обычными свойствами». Таким образом, наша задача в основном свелась к тому, чтобы показать, что при некоторых ограничениях, налагаемых на категорию K, отображения в категории K обладают в основном теми же свойствами, какими обладают гомоморфизмы групп, колец и некоторых классов универсальных алгебр. В частности, в § 2 будет показано, что для отображений в рассматриваемой нами категории K имеет место некоторый аналог второй теоремы об изоморфизме.

Возможность построения общей теории радикалов в категориях была отмечена еще Амицуром в его работе [3], в которой он указывает, что все проводимое им построение общей теории радикалов для колец может быть перенесено на структурно упорядоченные бикатегории в смысле Маклейна [4], на которые Амицуром накладывается целый ряд дополнительных предположений. Однако большое число этих предположений и отсутствие анализа их зависимости друг от друга не позволяет считать построение теории радикалов в категориях, предложенное Амицуром, окончательным.

§ 1. Дополнительные аксиомы

Аксиома I. Для любой упорядоченной пары объектов a и b категории K в множестве $H(a, b)$ существует, и притом только одно, такое отображение ω_{ab}: $a \to b$, что $\gamma\omega_{ab} = \omega_{cb}$, $\omega_{ab}\delta = \omega_{ad}$ для любых отображений γ: $c \to a$ и δ: $b \to d$.

Отображения вида ω_{ab} мы будем называть нулевыми отображениями и всякий раз, когда это не может вызвать недоразумения, вместо ω_{ab} будем писать ω. Таким образом, для произвольного отображения γ мы можем записать: $\gamma\omega = \omega\gamma = \omega$.

Аксиома II. Каждое отображение обладает ядром (см. [1], § 2, пп. 1, 2, 3).

Из этой аксиомы вытекает существование в категории K нулевого объекта 0 (см. [1], § 1, п. 4).

Аксиома III. Каждое отображение обладает образом (см. [1], § 2, п. 5).

Замечание. Как и в работе [1], мы под образом произвольного отображения α: $a \rightarrow b$ понимаем тройку (θ, l, λ), состоящую из объекта l, эпиморфизма* θ: $a \rightarrow l$ и мономорфизма λ: $l \rightarrow b$, удовлетворяющих соотношению $\theta\lambda = \alpha$. В то же время иногда, когда это не может вызвать недоразумения, нам удобно под образом отображения α (или образом объекта a при отображении α) понимать лишь объект l.

Таким образом, произвольное отображение α: $a \rightarrow b$ можно представить в виде сквозного отображения

$$a \xrightarrow{\theta} l \xrightarrow{\lambda} b, \tag{1}$$

где l — образ отображения α, θ — эпиморфизм, λ — мономорфизм и $\theta\lambda = \alpha$. Последовательность объектов и отображений (1) отображением α определяется однозначно с точностью до эквивалентности (см. [1], § 2, п. 5), и мы будем называть ее каноническим разложением отображения α.

Легко доказывается следующая

Лемма 1.1. *Если* α: $a \rightarrow b$ — *произвольное отображение и* μ: $b \rightarrow c$ — *произвольный мономорфизм, то отображения* α *и* $\alpha\mu$ *имеют одинаковые ядра.*

Из этой леммы вытекает, что ядро произвольного отображения α: $a \rightarrow b$ является одновременно ядром эпиморфизма θ: $a \rightarrow l$ из канонического разложения (1) отображения α. Таким образом, ядро произвольного отображения является также ядром некоторого эпиморфизма. Это обстоятельство позволяет нам во многих случаях, без какого-либо ущерба для общности, вместо произвольного отображения рассматривать некоторый эпиморфизм.

Прежде, чем формулировать остальные две аксиомы, мы проведем некоторые дополнительные рассмотрения.

Пусть a и u — некоторые объекты категории K, и пусть существует некоторый мономорфизм σ: $u \rightarrow a$. Тогда пару (u, σ) мы будем называть подобъектом объекта a. Очевидно, что если $u \sim u'$ (ξ, ξ^{-1}) (обозначение см. в [1], § 1, п. 1), то пара $(u', \xi^{-1}\sigma)$ также является подобъектом объекта a. Такие два подобъекта (u, σ) и $(u', \xi^{-1}\sigma)$ мы будем называть эквивалентными подобъектами объекта a.**

Если (v, γ) и (u, σ) — два подобъекта некоторого объекта a, то мы будем говорить, что подобъект (v, γ) меньше подобъекта (u, σ) и писать $(v, \gamma) \leqslant (u, \sigma)$, если существует по крайней мере один такой мономорфизм δ: $v \rightarrow u$, что $\gamma = \delta\sigma$ (очевидно, что мономорфизм δ последним соотношением определяется однозначно). Наряду с выражением «подобъект (v, γ) меньше подобъекта (u, σ)» мы будем пользоваться также выражением

---

* В этой работе мы пользуемся понятиями мономорфизма и эпиморфизма в той форме, как они определены в § 2 работы А. Г. Куроша [1]. Отметим, однако, что, как было замечено А. Г. Курошем, отображения, которые в работе [1] называются эпиморфизмами, естественнее называть нормальными эпиморфизмами.

** Примечание при корректуре. Оказалось более правильным под подобъектом объекта a понимать совокупность всех попарно эквивалентных в этом смысле пар (k, μ).

«подобъект (v, γ) содержится в подобъекте (u, σ)». Очевидно, что определенное нами отношение $\leqslant$ между некоторыми подобъектами данного объекта является рефлексивным и транзитивным. Легко также проверить, что если $(v, \gamma) \leqslant (u, \sigma)$ и $v \sim v' (\xi, \xi^{-1})$, $u \sim u' (\rho, \rho^{-1})$, то $(v', \xi^{-1}\gamma) \leqslant \leqslant (u', \rho^{-1}\sigma)$.

Лемма 1.2. *Для двух подобъектов (u, σ) и (u', σ') некоторого объекта a тогда и только тогда одновременно выполняются соотношения $(u, \sigma) \leqslant (u', \sigma')$ и $(u', \sigma') \leqslant (u, \sigma)$, когда эти подобъекты между собой эквивалентны.*

Доказательство. Достаточность непосредственно следует из сделанных выше замечаний. Предположим, что $(u, \sigma) \leqslant (u', \sigma')$ и $(u', \sigma') \leqslant (u, \sigma)$. Тогда, по определению, существуют такие мономорфизмы $\xi\colon u \to u'$ и $\eta\colon u' \to u$, что $\sigma = \xi\sigma'$ и $\sigma' = \eta\sigma$. Но в таком случае $\sigma = \xi\eta\sigma$ и $\sigma' = \eta\xi\sigma'$, а отсюда, поскольку σ и σ' являются мономорфизмами, следует, что $\xi\eta = \varepsilon_u$ и $\eta\xi = \varepsilon_{u'}$ (через ε_u мы обозначаем тождественное отображение объекта u). Таким образом, $u \sim u' (\xi, \eta)$, $\sigma' = \eta\sigma$ и, значит, подобъекты (u, σ) и (u', σ') эквивалентны.

Если для двух подобъектов (v, γ) и (u, σ) некоторого объекта a имеет место соотношение $(v, \gamma) \leqslant (u, \sigma)$ и эти подобъекты между собой не эквивалентны, то мы будем писать $(v, \gamma) < (u, \sigma)$. Из леммы 1.2 и сделанных перед ней замечаний вытекает, что класс всех подобъектов данного объекта a с точностью до эквивалентности является частично упорядоченным. Отметим, что в этом классе подобъектов имеются наибольший подобъект (a, ε_a) и наименьший подобъект $(0, \omega)$.

Пусть (u, σ) — произвольный подобъект объекта a, и пусть $\alpha\colon a \to b$ — произвольное отображение. Тогда определено отображение $\sigma\alpha\colon u \to b$ которое, согласно аксиоме III, обладает каноническим разложением $u \xrightarrow{\tau} m \xrightarrow{\chi} b$. Пара (m, χ) является подобъектом объекта b, и этот подобъект мы будем называть образом подобъекта (u, σ) при отображении α. Отметим, что, поскольку образ произвольного отображения определяется однозначно с точностью до эквивалентности, любой подобъект (m', χ') объекта b, эквивалентный подобъекту (m, χ), также является образом подобъекта (u, σ) при отображении α.

Теорема 1.1. *Произвольное отображение $\alpha\colon a \to b$ сохраняет отношение порядка между подобъектами, т. е. если (u_1, σ_1) и (u_2, σ_2) — некоторые подобъекты объекта a, причем $(u_1, \sigma_1) \leqslant (u_2, \sigma_2)$, и если (m_1, χ_1) и (m_2, χ_2) — образы соответственно подобъектов (u_1, σ_1) и (u_2, σ_2) при отображении α, то $(m_1, \chi_1) \leqslant (m_2, \chi_2)$.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы, сформулируем одно утверждение, которое в дальнейшем мы будем часто использовать и которое непосредственно следует из определений.

Лемма 1.3. *Отображение $\theta\colon a \to b$ с ядром (k, μ) тогда и только тогда является эпиморфизмом, когда для любого отображения $\beta\colon a \to c$, удовлетворяющего условию $\mu\beta = \omega$, существует и притом только одно такое отображение $\beta'\colon b \to c$, что $\beta = \theta\beta'$.*

Доказательство теоремы 1.1. Так как $(u_1, \sigma_1) \leqslant (u_2, \sigma_2)$, то существует такой мономорфизм δ: $u_1 \to u_2$, что

$$\sigma_1 = \delta\sigma_2. \tag{2}$$

Пусть $u_1 \xrightarrow{\tau_1} m_1 \xrightarrow{\chi_1} b$ и $u_2 \xrightarrow{\tau_2} m_2 \xrightarrow{\chi_2} b$ — канонические разложения соответственно отображений $\sigma_1\alpha$: $u_1 \to b$ и $\sigma_2\alpha$: $u_2 \to b$. Таким образом, τ_1 и τ_2 являются эпиморфизмами, χ_1 и χ_2 — мономорфизмами и

$$\tau_1\chi_1 = \sigma_1\alpha, \tag{3}$$

$$\tau_2\chi_2 = \sigma_2\alpha. \tag{4}$$

Пусть, далее, (k_1, μ_1) — ядро эпиморфизма τ_1 и, следовательно, согласно лемме 1.1 и соотношению (3), ядро отображения $\sigma_1\alpha$. Тогда, используя соотношения (2) и (4), мы имеем:

$$\mu_1\delta\tau_2\chi_2 = \mu_1\delta\sigma_2\alpha = \mu_1\sigma_1\alpha = \omega,$$

а так как χ_2 является мономорфизмом, то $\mu_1\delta\tau_2 = \omega$. Отсюда, поскольку τ_1 является эпиморфизмом, согласно лемме 1.3, следует существование такого отображения ρ: $m_1 \to m_2$, что

$$\delta\tau_2 = \tau_1\rho. \tag{5}$$

Умножив соотношение (5) справа на χ_2 и воспользовавшись соотношениями (2), (3) и (4), мы получим соотношение $\tau_1\chi_1 = \tau_1\rho\chi_2$. Поскольку τ_1 является эпиморфизмом, отсюда следует, что $\chi_1 = \rho\chi_2$. Так как χ_1 является мономорфизмом, то из последнего соотношения вытекает, что ρ — мономорфизм (см. [1], § 2, п. 1). Отсюда следует, что $(m_1, \chi_1) \leqslant (m_2, \chi_2)$.

Из теоремы 1.1 вытекает, что если (θ, l, λ) — образ отображения $\alpha: a \to b$, то образ (m, χ) произвольного подобъекта (u, σ) объекта a при отображении α содержится в подобъекте (l, λ) объекта b. Таким образом, существует некоторый мономорфизм $\chi': m \to l$, удовлетворяющий соотношению $\chi = \chi'\lambda$, так что, в частности, (m, χ') является подобъектом объекта l. (m, χ') мы будем называть образом подобъекта (u, σ) в образе объекта a при отображении α.

Лемма 1.4. *Пусть $\alpha: a \to b$ — произвольное отображение и (θ, l, λ) — образ этого отображения. Тогда образ (m, χ') произвольного подобъекта (u, σ) объекта a в образе l объекта a при отображении α является образом подобъекта (u, σ) при эпиморфизме $\theta: a \to l$.*

Доказательство. Пусть $a \xrightarrow{\theta} l \xrightarrow{\lambda} b$ и $u \xrightarrow{\tau} m \xrightarrow{\chi} b$ — канонические разложения соответственно отображений α и $\sigma\alpha$. Таким образом, $\theta\lambda = \alpha$ и $\tau\chi = \sigma\alpha$. Используя эти соотношения, мы получаем, что $\tau\chi'\lambda = \tau\chi = \sigma\alpha = \sigma\theta\lambda$, а так как λ является мономорфизмом, то $\tau\chi' = \sigma\theta$. Тем самым показано, что (τ, m, χ') является образом отображения $\sigma\theta: u \to l$, а значит, (m, χ') является образом подобъекта (u, σ) объекта a при эпиморфизме θ.

Если (k, μ) — ядро некоторого отображения $\alpha: a \to b$, то $\mu: k \to a$ является нормальным мономорфизмом (см. [1], § 2, п. 4) и, следовательно, (k, μ) является некоторым подобъектом объекта a. Такие подобъекты объекта a мы будем называть идеалами объекта a. Из результатов

работы [1] (§ 2, п. 2) вытекает, что подобъект (k', μ') объекта a, эквивалентный некоторому идеалу (k, μ) объекта a, сам является идеалом объекта a.

Лемма 1.5. *Пусть* (k, μ) — *произвольный идеал объекта* a, *являющийся ядром некоторого отображения* $\alpha: a \to b$, (u, σ) — *произвольный подобъект объекта* a, *содержащий идеал* (k, μ), *и* $\delta: k \to u$ — *мономорфизм, удовлетворяющий соотношению*

$$\mu = \delta\sigma. \tag{6}$$

Тогда (k, δ) *является идеалом объекта* u, *служащим ядром отображения* $\sigma\alpha: u \to b$.

Доказательство. В силу соотношения (6),

$$\delta\sigma\alpha = \mu\alpha = \omega.$$

Далее, пусть $\gamma: v \to u$ — произвольное отображение, удовлетворяющее соотношению $\gamma\sigma\alpha = \omega$. Тогда, поскольку ядром отображения α является (k, μ), существует такое отображение $\gamma': v \to k$, что $\gamma\sigma = \gamma'\mu$ и, значит, в силу соотношения (6), $\gamma\sigma = \gamma'\delta\sigma$. Но отсюда, поскольку σ является мономорфизмом, следует, что $\gamma = \gamma'\delta$. Тем самым показано, что (k, δ) является ядром отображения $\sigma\alpha$.

Так как для любого объекта a категории K множество $H(a, a)$ содержит тождественное отображение ε_a и нулевое отображение ω_{aa} (аксиома I), ядрами которых являются соответственно $(0, \omega)$ и (a, ε_a), то любой объект a категории K обладает по крайней мере двумя идеалами $(0, \omega)$ и (a, ε_a). Если этими и им эквивалентными идеалами исчерпываются все идеалы объекта a, то объект a называется простым объектом.

Теперь, после введения необходимых понятий и попутного рассмотрения элементарных свойств идеалов объектов, мы можем сформулировать две последние аксиомы.

Аксиома IV. Образ (m, χ) произвольного идеала (k, μ) объекта a при произвольном *эпиморфизме* $\theta: a \to b$ является идеалом объекта b.

Аксиома V. Для любой бесконечной вполне упорядоченной строго возрастающей цепочки $(k_1, \mu_1) < (k_2, \mu_2) < \ldots < (k_i, \mu_i) < \ldots$ (здесь i — произвольное трансфинитное число) идеалов произвольного объекта a категории K существует объединение, т. е. единственный с точностью до эквивалентности минимальный подобъект (k, μ) объекта a, содержащий все идеалы (k_i, μ_i). Подобъект (k, μ) является идеалом объекта a.

Легко построить примеры категорий, показывающие, что аксиома V не зависит от аксиом I—IV и что второе требование аксиомы V не вытекает из первого.

§ 2. Теорема об отображении

В этом параграфе мы будем рассматривать категорию K, удовлетворяющую аксиомам I—IV.

Лемма 2.1. *Эпиморфизм* $\theta: a \to b$ *тогда и только тогда является эквивалентностью, когда его ядро равно нулю или, иначе, когда из соотношения* $\tau\theta = \omega$ *следует, что* $\tau = \omega$.

Доказательство. Необходимость условия очевидна. Предположим, что ядром эпиморфизма θ является $(0, \omega)$. Тогда, поскольку $\omega\varepsilon_a = \omega$ и $\tau = \omega$ являются единственными отображениями, удовлетворяющими уравнению $\tau\theta = \omega$, согласно определению эпиморфизма, существует такое единственное отображение $\theta' : b \to a$, что $\varepsilon_a = \theta\theta'$. Далее, $\theta(\theta'\theta) = (\theta\theta')\theta = \varepsilon_a\theta = \theta = \theta\varepsilon_b$ и так как θ является эпиморфизмом, то отсюда следует, что $\theta'\theta = \varepsilon_b$.

Двойственной к этой лемме является

Лемма 2.2. *Нормальный мономорфизм* $\mu : a \to b$ *тогда и только тогда является эквивалентностью, когда из соотношения* $\mu\tau = \omega$ *следует, что* $\tau = \omega$.

Доказательство этой леммы двойственно доказательству леммы 2.1.

Лемма 2.3. *Отображение* $\alpha : a \to b$ *тогда и только тогда является мономорфизмом, когда его ядро равно нулю.*

Доказательство. Необходимость этого условия была доказана в работе [1] (§ 2, п. 3). Предположим, что ядром отображения α является $(0, \omega)$. Пусть $a \xrightarrow{\theta} l \xrightarrow{\lambda} b$ — каноническое разложение отображения α. Тогда, согласно лемме 1.1, $(0, \omega)$ является также ядром эпиморфизма θ. Но в таком случае, согласно лемме 2.1, θ является эквивалентностью и, следовательно, мономорфизмом. Поэтому отображение $\alpha = \theta\lambda$, как произведение двух мономорфизмов, является мономорфизмом.

Лемма 2.4. *Если* $\theta = \theta_1\theta_2$ *и* $\theta : a \to c$ *и* $\theta_1 : a \to b$ *являются эпиморфизмами, то и* $\theta_2 : b \to c$ *является эпиморфизмом.*

Доказательство. Пусть (k, μ) и (k_2, μ_2) — ядра соответственно отображений θ и θ_2. Так как $(\mu\theta_1)\theta_2 = \mu(\theta_1\theta_2) = \mu\theta = \omega$, то существует такое отображение $\delta : k \to k_2$, что $\mu\theta_1 = \delta\mu_2$. Пусть теперь $\alpha : b \to d$ — произвольное отображение, удовлетворяющее соотношению $\mu_2\alpha = \omega$. Тогда $\delta\mu_2\alpha = \omega$ и, следовательно, $\mu\theta_1\alpha = \omega$. Отсюда, поскольку θ является эпиморфизмом согласно лемме 1.3, следует существование такого единственного отображения $\alpha' : c \to d$, что $\theta_1\alpha = \theta\alpha'$. Таким образом, $\theta_1\alpha = \theta_1\theta_2\alpha'$. Но так как θ_1 является эпиморфизмом, то отсюда следует, что $\alpha = \theta_2\alpha'$. Легко видеть, что отображение α', удовлетворяющее последнему соотношению, — единственное. Таким образом, согласно лемме 1.3, θ_2 является эпиморфизмом.

Если существует некоторый эпиморфизм $\theta : a \to b$ с ядром (k, μ), то объект b мы будем называть фактор-объектом объекта a по идеалу (k, μ). Легко видеть, что фактор-объект b определяется объектом a и его идеалом (k, μ) однозначно с точностью до эквивалентности. В силу аксиомы III и леммы 1.1 в рассматриваемой категории K для любого объекта a и любого его идеала (k, μ) существует фактор-объект.

Теорема об отображении 2.1. *Пусть* $\alpha : a \to b$ — *произвольный эпиморфизм с ядром* (k, μ). *Тогда*:

(а) *Произвольный идеал* (m, χ) *объекта* b *является образом при эпиморфизме* α *единственного с точностью до эквивалентности идеала* (p, σ) *объекта* a, *содержащего идеал* (k, μ). (Идеал (p, σ) мы будем называть полным прообразом идеала (m, χ) при эпиморфизме α.)

(б) *Если* (m, χ) — *произвольный идеал объекта* b *и* (p, σ) — *полный прообраз идеала* (m, χ) *при эпиморфизме* α, *то фактор-объект объекта* b

по идеалу (m, χ) *совпадает с фактор-объектом объекта* a *по идеалу* (p, σ).

(в) *Если* (m_1, χ_1) *и* (m_2, χ_2) — *два идеала объекта* b, *причем* $(m_1, \chi_1) < < (m_2, \chi_2)$, *а* (p_1, σ_1) *и* (p_2, σ_2) — *полные прообразы соответственно идеалов* (m_1, χ_1) *и* (m_2, χ_2) *при эпиморфизме* α, *то* $(p_1, \sigma_1) < (p_2, \sigma_2)$.

Доказательство. (а) Пусть идеал (m, χ) объекта b является ядром некоторого отображения $\beta: b \to c$; без ограничения общности мы можем предположить, что β является эпиморфизмом. Рассмотрим ядро (p, σ) отображения $\alpha\beta: a \to c$. Так как (k, μ) — ядро отображения α, то $\mu\alpha\beta = \omega$ и, следовательно, существует некоторое отображение $\rho: k \to p$, удовлетворяющее соотношению

$$\mu = \rho\sigma. \tag{7}$$

Из этого соотношения, поскольку μ является мономорфизмом, вытекает, что ρ — мономорфизм и, значит, $(k, \mu) \leqslant (p, \sigma)$.

Пусть (m', χ') — образ идеала (p, σ) при эпиморфизме α. Таким образом, каноническое разложение отображения $\sigma\alpha: p \to b$ имеет вид $p \xrightarrow{\tau} m' \xrightarrow{\chi'} b$, где τ — некоторый эпиморфизм и

$$\tau\chi' = \sigma\alpha. \tag{8}$$

Согласно аксиоме IV, (m', χ') является ядром некоторого отображения $\gamma: b \to d$; мы можем предположить, что γ — эпиморфизм.

Покажем, что $(m', \chi') \leqslant (m, \chi)$. Действительно, так как, согласно соотношению (8), $\tau\chi'\beta = \sigma\alpha\beta = \omega$ и так как τ является эпиморфизмом, то $\chi'\beta = \omega$. Но в таком случае, поскольку ядром отображения β является идеал (m, χ), существует такое отображение $\nu: m' \to m$, что $\chi' = \nu\chi$. Так как χ' является мономорфизмом, то и ν является мономорфизмом и, следовательно, $(m', \chi') \leqslant (m, \chi)$.

Покажем теперь, что ядром отображения $\alpha\gamma: a \to d$ является идеал (p, σ). В самом деле, согласно соотношению (8), мы имеем:

$$\sigma\alpha\gamma = \tau\chi'\gamma = \omega.$$

Далее, пусть $\varphi: f \to a$ — произвольное отображение, удовлетворяющее соотношению $\varphi\alpha\gamma = \omega$. Тогда, поскольку (m', χ') — ядро отображения γ, существует такое отображение $\varphi': f \to m'$, что $\varphi\alpha = \varphi'\chi' = \varphi'\nu\chi$ (последнее равенство имеет место согласно предыдущему абзацу). Но в таком случае $\varphi\alpha\beta = \varphi'\nu\chi\beta = \omega$ и, следовательно, поскольку (p, σ) является ядром отображения $\alpha\beta$, существует такое отображение $\varphi'': f \to p$, что $\varphi = \varphi''\sigma$.

Отображение $\alpha\gamma$ является эпиморфизмом. Действительно, пусть $\psi: a \to g$ — произвольное отображение, удовлетворяющее соотношению $\sigma\psi = \omega$. Тогда, согласно соотношению (7), $\mu\psi = \rho\sigma\psi = \omega$. Так как α — эпиморфизм с ядром (k, μ), то, согласно лемме 1.3, из последнего соотношения следует существование такого единственного отображения $\psi': b \to g$, что $\psi = \alpha\psi'$. Таким образом, $\sigma\alpha\psi' = \omega$. Воспользовавшись теперь соотношением (8), мы получаем, что $\tau\chi'\psi' = \omega$ и, следовательно, поскольку τ является эпиморфизмом, $\chi'\psi' = \omega$. Но в таком случае, поскольку (m', χ') является ядром эпиморфизма γ, согласно лемме 1.3, существует такое единственное

отображение $\psi'': d \to g$, что $\psi' = \gamma\psi''$. Поэтому $\psi = \alpha\psi' = \alpha\gamma\psi''$. Легко видеть, что отображение ψ'', удовлетворяющее последнему соотношению,— единственное. Таким образом, согласно лемме 1.3, отображение $\alpha\gamma$ является эпиморфизмом.

Мы получили, что два отображения $\alpha\beta$ и $\alpha\gamma$ имеют одно и то же ядро (p, σ) и одно из этих отображений, а именно $\alpha\gamma$, является эпиморфизмом. Пусть $a \xrightarrow{\theta} l \xrightarrow{\lambda} c$ — каноническое разложение отображения $\alpha\beta$, т. е. θ — эпиморфизм, λ — мономорфизм и $\theta\lambda = \alpha\beta$. Тогда, согласно лемме 1.1, ядром эпиморфизма θ также является идеал (p, σ). Таким образом, мы имеем два эпиморфизма $\alpha\gamma: a \to d$ и $\theta: a \to l$ с одним и тем же ядром (p, σ), т. е. d и l оба являются фактор-объектами объекта a по идеалу (p, σ). Поэтому $d \sim l$ (ξ, ξ^{-1}) и $\theta = \alpha\gamma\xi$. Но в таком случае

$$\alpha\beta = \theta\lambda = \alpha\gamma\xi\lambda,$$

а отсюда, поскольку α — эпиморфизм, вытекает, что $\beta = \gamma\xi\lambda$. Заметим теперь, что так как ξ является эквивалентностью, а λ — мономорфизмом, то $\xi\lambda$ — мономорфизм. Таким образом, согласно лемме 1.1, эпиморфизмы β и γ имеют одинаковые ядра, а так как ядро произвольного отображения определяется однозначно с точностью до эквивалентности (см. [1], § 2, п. 2), то тем самым показано, что идеалы (m, χ) и (m', χ') объекта b между собой эквивалентны. Но отсюда следует, что идеал (m, χ) также является образом идеала (p, σ) объекта a при эпиморфизме α. Тем самым первая часть утверждения (а) доказана.

Предположим теперь, что $(\bar{p}, \bar{\sigma})$ — любой другой идеал объекта a, содержащий идеал (k, μ) и отображающийся при эпиморфизме α на идеал (m, χ) объекта b. Таким образом, каноническое разложение отображения $\bar{\sigma}\alpha: \bar{p} \to b$ мы можем записать в виде $\bar{p} \xrightarrow{\bar{\tau}} m \xrightarrow{\chi} b$, где $\bar{\tau}$ — некоторый эпиморфизм и

$$\bar{\tau}\chi = \bar{\sigma}\alpha. \tag{9}$$

С другой стороны, поскольку $(k, \mu) \leqslant (\bar{p}, \bar{\sigma})$, существует некоторый мономорфизм $\bar{\rho}: k \to \bar{p}$, удовлетворяющий соотношению

$$\mu = \bar{\rho}\bar{\sigma}. \tag{10}$$

Далее, из соотношения (9), принимая во внимание, что (m, χ) — ядро эпиморфизма β, мы имеем:

$$\bar{\sigma}\alpha\beta = \bar{\tau}\chi\beta = \omega.$$

Отсюда, поскольку ядром отображения $\alpha\beta$ является идеал (p, σ), следует существование такого отображения $\delta: \bar{p} \to p$, что

$$\bar{\sigma} = \delta\sigma. \tag{11}$$

Так как $\bar{\sigma}$ — мономорфизм, то и δ является мономорфизмом и, значит, $(\bar{p}, \bar{\sigma}) \leqslant (p, \sigma)$. Нам нужно показать, что δ является эквивалентностью.

Так как $(\overline{p}, \overline{\sigma})$ является идеалом объекта a и $(\overline{p}, \overline{\sigma}) \leqslant (p, \sigma)$, то согласно лемме 1.5, $(\overline{p}, \delta)$ — идеал объекта p и, следовательно, δ является нормальным мономорфизмом. Далее, подставляя соотношение (11) в (9), мы получаем, что $\overline{\tau}\chi = \delta\sigma\alpha$. Отсюда и из соотношения (8) (поскольку, как было доказано выше, идеалы (m', χ') и (m, χ) эквивалентны, мы теперь можем, чтобы не вводить дополнительных формул, считать, что $m' = m$ и $\chi' = \chi$) вытекает, что $\overline{\tau}\chi = \delta\tau\chi$ и, следовательно, поскольку χ является мономорфизмом,

$$\overline{\tau} = \delta\tau. \tag{12}$$

С другой стороны, из соотношений (7), (10) и (11) вытекает, что $\rho\sigma = \overline{\rho}\delta\sigma$ и, следовательно, поскольку σ является мономорфизмом,

$$\rho = \overline{\rho}\delta. \tag{13}$$

Покажем теперь, что из соотношения $\delta\varphi = \omega$ следует, что $\varphi = \omega$. Действительно, пусть $\varphi: p \to n$ — произвольное отображение, для которого $\delta\varphi = \omega$. Тогда, используя соотношение (13), мы получим, что $\overline{\rho}\delta\varphi = \rho\varphi = \omega$ Но, как вытекает из лемм 1.5 и 1.1, (k, ρ) является ядром отображения $\sigma\alpha$ и, следовательно, ядром эпиморфизма τ. Поэтому, согласно лемме 1.3 существует такое отображение $\varphi': m \to n$, что $\varphi = \tau\varphi'$. Используя теперь соотношение (12), мы получим: $\delta\varphi = \delta\tau\varphi' = \overline{\tau}\varphi' = \omega$, а так как $\overline{\tau}$ является эпиморфизмом, то отсюда следует, что $\varphi' = \omega$ и, значит, $\varphi = \omega$.

Таким образом, нормальный мономорфизм δ удовлетворяет условию леммы 2.2 и, следовательно, согласно этой лемме, является эквивалентностью.

Тем самым показано, что идеал $(\overline{p}, \overline{\sigma})$ эквивалентен идеалу (p, σ).

(б) Для доказательства утверждения, что фактор-объект объекта b по идеалу (m, χ) совпадает с фактор-объектом объекта a по полному прообразу (p, σ) идеала (m, χ) при эпиморфизме α, достаточно, очевидно, показать, что если $\beta: b \to c$ — эпиморфизм с ядром (m, χ), то отображение $\alpha\beta: a \to c$ с ядром (p, σ) также является эпиморфизмом. Но это утверждение мы, по существу, уже доказали, когда при доказательстве утверждения (а) показали, что отображение $\alpha\gamma$ является эпиморфизмом.

(в) Пусть идеалы (m_1, χ_1) и (m_2, χ_2) являются ядрами эпиморфизмов $\beta_1: b \to c_1$ и $\beta_2: b \to c_2$ соответственно. Так как $(m_1, \chi_1) < (m_2, \chi_2)$, то существует такой мономорфизм $\eta: m_1 \to m_2$, что $\chi_1 = \eta\chi_2$. Отсюда, поскольку $\chi_2\beta_2 = \omega$, вытекает, что

$$\chi_1\beta_2 = \eta\chi_2\beta_2 = \omega. \tag{14}$$

Далее, как было показано при доказательстве утверждения (а), идеалы (p_1, σ_1) и (p_2, σ_2) являются ядрами соответственно отображений $\alpha\beta_1$ и $\alpha\beta_2$. В то же время, поскольку образами идеалов (p_1, σ_1) и (p_2, σ_2) при эпиморфизме α являются соответственно идеалы (m_1, χ_1) и (m_2, χ_2), отображения $\sigma_1\alpha$ и $\sigma_2\alpha$ можно представить в виде $\sigma_1\alpha = \tau_1\chi_1$ и $\sigma_2\alpha = \tau_2\chi_2$, где τ_1 и τ_2 — некоторые эпиморфизмы. Отсюда и из соотношения (14) вытекает, что

$$\sigma_1\alpha\beta_2 = \tau_1\chi_1\beta_2 = \omega,$$

и, следовательно, поскольку ядром отображения $\alpha\beta_2$ является (p_2, σ_2), существует такое отображение σ': $p_1 \to p_2$, что $\sigma_1 = \sigma'\sigma_2$. Отображение σ' является мономорфизмом и, значит, $(p_1, \sigma_1) \leqslant (p_2, \sigma_2)$. Из леммы 1.2 и теоремы 1.1 следует, что идеалы (p_1, σ_1) и (p_2, σ_2) не могут быть эквивалентными. Следовательно, $(p_1, \sigma_1) < (p_2, \sigma_2)$.

Таким образом, теорема 2.1 полностью доказана. Попутно мы доказали следующее утверждение.

Теорема 2.2. *В категории K, удовлетворяющей аксиомам* I — IV, *произведение $\theta = \theta_1\theta_2$ любых двух эпиморфизмов $\theta_1: a \to b$ и $\theta_2: b \to c$ является эпиморфизмом.*

Пусть (k_1, μ_1) и (k_2, μ_2) — любые два идеала некоторого объекта a. Мы будем говорить, что идеал (k, μ) объекта a является объединением (или суммой) идеалов (k_1, μ_1) и (k_2, μ_2), и писать $(k, \mu) = (k_1, \mu_1) \cup (k_2, \mu_2)$, если $(k_1, \mu_1) \leqslant (k, \mu)$, $(k_2, \mu_2) \leqslant (k, \mu)$ и если для любого идеала $(\bar{k}, \bar{\mu})$ объекта a из соотношений $(k_1, \mu_1) \leqslant (\bar{k}, \bar{\mu})$, $(k_2, \mu_2) \leqslant (\bar{k}, \bar{\mu}$ вытекает, что $(k, \mu) \leqslant (\bar{k}, \bar{\mu})$.

Теорема 2.3. *Для любых двух идеалов (k_1, μ_1) и (k_2, μ_2) произвольного объекта a категории K, удовлетворяющей аксиомам* I — IV, *существует объединение (k, μ).*)

Доказательство. Пусть идеал (k_1, μ_1) является ядром некоторого эпиморфизма α: $a \to b$. Согласно аксиоме IV, при эпиморфизме α идеал (k_2, μ_2) отображется на некоторый идеал (m, χ) объекта b. Пусть (k, μ) — полный прообраз идеала (m, χ) при эпиморфизме α. Покажем, что $(k, \mu) = (k_1, \mu_1) \cup (k_2, \mu_2)$.

Действительно, по определению полного прообраза, (k, μ) является идеалом объекта a, содержащим идеал (k_1, μ_1). Покажем, что идеал (k, μ) содержит также идеал (k_2, μ_2). Пусть $k_2 \xrightarrow{\theta_2} m \xrightarrow{\chi} b$ — каноническое разложение отображения $\mu_2\alpha$: $k_2 \to b$, так что θ_2 — некоторый эпиморфизм и

$$\theta_2\chi = \mu_2\alpha, \tag{15}$$

и пусть $\beta: b \to c$ — эпиморфизм, ядром которого служит идеал (m, χ). Тогда, как было показано при доказательстве утверждения (а) теоремы 2.1, полный прообраз (k, μ) идеала (m, χ) при эпиморфизме α является ядром отображения $\alpha\beta$. Поэтому, поскольку, согласно соотношению (15), $\mu_2\alpha\beta = \theta_2\chi\beta = \omega$, существует некоторое отображение $\gamma_2: k_2 \to k$, удовлетворяющее соотношению $\mu_2 = \gamma_2\mu$. Отображение γ_2 является мономорфизмом и, значит, $(k_2, \mu_2) \leqslant (k, \mu)$.

Пусть теперь $(\bar{k}, \bar{\mu})$ — произвольный идеал объекта a, удовлетворяющий соотношениям $(k_1, \mu_1) \leqslant (\bar{k}, \bar{\mu})$ и $(k_2, \mu_2) \leqslant (\bar{k}, \bar{\mu})$, и пусть $(\bar{m}, \bar{\chi})$ — образ идеала $(\bar{k}, \bar{\mu})$ при эпиморфизме α. Тогда, поскольку (m, χ) является образом идеала (k_2, μ_2) при эпиморфизме α, согласно теореме 1.1, $(m, \chi) \leqslant (\bar{m}, \bar{\chi})$. Согласно аксиоме IV, $(\bar{m}, \bar{\chi})$ также является идеалом объекта b. Принимая теперь во внимание, что (k, μ) является полным прообразом идеала (m, χ), а $(\bar{k}, \bar{\mu})$ — полным прообразом идеала $(\bar{m}, \bar{\chi})$ при эпиморфизме α, мы, согласно утверждениям (а) и (в) теоремы 2.1, получаем, что $(k, \mu) \leqslant (\bar{k}, \bar{\mu})$.

Из доказательства теоремы 2.3 вытекает

Следствие 2.1. *Если* (k_1, μ_1) *и* (k_2, μ_2) — *любые два идеала некоторого объекта* a *и* $(k, \mu) = (k_1, \mu_1) \cup (k_2, \mu_2)$, *то* (k, μ) *является полным прообразом образа одного из идеалов* (k_1, μ_1) *или* (k_2, μ_2) *при эпиморфизме, ядром которого служит другой из этих двух идеалов.*

Если идеал (k, μ) некоторого объекта a является объединением некоторых идеалов (k_1, μ_1) и (k_2, μ_2), то он содержит эти идеалы, и, следовательно, существуют такие мономорфизмы γ_1: $k_1 \to k$ и γ_2: $k_2 \to k$, что

$$\mu_1 = \gamma_1\mu, \tag{16}$$

$$\mu_2 = \gamma_2\mu. \tag{17}$$

Согласно лемме 1.5, (k_1, γ_1) и (k_2, γ_2) являются идеалами объекта k. В следующем параграфе нам понадобится

Лемма 2.5. *Если* $(k_1, \mu_1) \cup (k_2, \mu_2) = (k, \mu)$, *то*

$$(k_1, \gamma_1) \cup (k_2, \gamma_2) = (k, \varepsilon_k).$$

Доказательство. Пусть $\alpha : a \to b$ — эпиморфизм, ядром которого является идеал (k_1, μ_1). Тогда, согласно лемме 1.5, (k_1, γ_1) — ядро отображения $\mu\alpha : k \to b$. Так как (k, μ) является полным прообразом образа (m, χ) идеала (k_2, μ_2) при эпиморфизме α, то каноническое разложение отображения $\mu\alpha$ имеет вид $k \xrightarrow{\theta} m \xrightarrow{\chi} b$, где θ — некоторый эпиморфизм и

$$\theta\chi = \mu\alpha. \tag{18}$$

Таким образом, согласно лемме 1.1, (k_1, γ_1) является ядром эпиморфизма $\theta : k \to m$. Рассмотрим отображение $\gamma_2\theta : k_2 \to m$. Применяя соотношения (18), (17) и (15), мы получим:

$$\gamma_2\theta\chi = \gamma_2\mu\alpha = \mu_2\alpha = \theta_2\chi,$$

и так как χ является мономорфизмом, то $\gamma_2\theta = \theta_2$. Таким образом, $\gamma_2\theta$ — эпиморфизм. Поэтому образом идеала (k_2, γ_2) при эпиморфизме θ является несобственный идеал (m, ε_m). Для завершения доказательства леммы, согласно следствию 2.1, остается лишь заметить, что полным прообразом несобственного идеала (m, ε_m) при эпиморфизме θ является несобственный идеал (k, ε_k).

§ 3. Радикалы в категориях

Легко убедиться, что класс колец K, удовлетворяющий условиям (1) и (2) (см. [2], стр. 15), для которого в работе [2] А. Г. Курошем была построена общая теория радикалов, вместе с гомоморфизмами колец класса K и естественным определением операции умножения между некоторыми из этих гомоморфизмов образует некоторую категорию, удовлетворяющую аксиомам I — V. В этом параграфе мы хотим показать, что вся построенная в §§ 2 — 7 работы [2] общая теория радикалов колец остается справедливой для объектов произвольной категории K, удовлетворяющей аксиомам I — V. Для этого, как нетрудно убедиться простой проверкой, достаточно показать, что на категорию K можно обобщить основное утверждение § 2 работы [2] о равносильности условий I.1 — I.3 условиям II.1 — II.2.

Предположим, что некоторые объекты категории K, удовлетворяющей аксиомам I — V, обладают некоторым свойством S. Такие объекты мы будем называть S-объектами. Если (k, μ) — некоторый подобъект объекта a и k является S-объектом, то (k, μ) мы будем называть S-подобъектом объекта a. В этом же смысле мы будем пользоваться термином «S-идеал». В дальнейшем мы будем везде предполагать, что свойство S таково, что:

(А) *Образ* (см. замечание, сделанное в § 1) *S-объекта при любом отображении является S-объектом.*

(Б) *Для любого объекта a категории K совокупность всех его S-идеалов является множеством.*

Из условия (А) следует, что нулевой объект 0 категории K является S-объектом и что любой объект, эквивалентный некоторому S-объекту, сам является S-объектом.

Мы будем говорить, что в категории K свойство S определяет S-радикал, если:

1. *Для любого объекта a категории K существует S-идеал* (r, ρ) *содержащий все S-идеалы объекта a.*

2. *Некоторый фактор-объект b, а значит, согласно условию* (А), *и все фактор-объекты, объекта a по идеалу* (r, ρ) *обладает лишь одним нулевым S-идеалом* $(0, \omega)$.

В этом случае идеал (r, ρ) мы будем называть S-радикалом объекта a, S-объекты категории K — S-радикальными объектами, а объекты категории K, S-радикалами которых является нулевой идеал $(0, \omega)$, — S-полупростыми объектами.

Мы будем говорить, что свойство S удовлетворяет условию (В), если:

(В) *Каждый объект категории K, образ которого при любом ненулевом отображении обладает ненулевым S-идеалом, является S-объектом.*

Лемма 3.1. *Если свойство S удовлетворяет условию* (В), *то объединение (k, μ) любых двух S-идеалов (k_1, μ_1) и (k_2, μ_2) произвольного объекта a, является S-идеалом.*

Доказательство. Пусть $\delta : k \to m$ — некоторое ненулевое отображение с ядром (l, ν); без ограничения общности можно предположить, что δ является эпиморфизмом. Согласно лемме 2.5, объединением идеалов (k_1, γ_1) и (k_2, γ_2) объекта k (мы сохранили здесь обозначения, используемые в лемме 2.5) является несобственный идеал (k, ε_k). Поэтому, согласно определению объединения двух идеалов, идеал (l, ν) объекта k не содержит по крайней мере один из идеалов (k_1, γ_1) и (k_2, γ_2). Предположим, для определенности, что идеал (l, ν) не содержит идеала (k_1, γ_1). В таком случае идеал (k_1, γ_1) при эпиморфизме δ отображается на некоторый ненулевой идеал (n_1, λ_1) объекта m. Так как (k_1, γ_1) является S-идеалом объекта k, то, согласно условию (А), (n_1, λ_1) является S-идеалом объекта m. Таким образом, согласно условию (В), k является S-объектом и, значит, (k, μ) — S-идеалом объекта a.

Аналогично, опираясь на аксиому V, доказывается

Лемма 3.2. *Если свойство S удовлетворяет условию* (В), *то объединение любой бесконечной вполне упорядоченной строго возрастающей це-*

почки S-идеалов произвольного объекта a является S-идеалом объекта a.

Теперь мы можем доказать следующее утверждение.

Теорема 3.1. *Свойство S тогда и только тогда определяет в категории K S-радикал, когда оно удовлетворяет условию* (В).

Доказательство. Пусть свойство S определяет в категории K S-радикал и пусть a — некоторый объект категории K, S-радикал (r, ρ) которого не эквивалентен несобственному идеалу (a, ε_a), т. е. объект a не является S-радикальным. Тогда фактор-объект b объекта a по идеалу (r, ρ), являющийся образом при некотором ненулевом эпиморфизме $\alpha : a \to b$ с ядром (r, ρ), согласно условию 2, не содержит ни одного ненулевого S-идеала.

Предположим теперь, что свойство S удовлетворяет условию (В). Так как, согласно условию (Б), совокупность всех S-идеалов произвольного объекта a категории K является множеством и так как, согласно аксиоме V, существует объединение любой бесконечной вполне упорядоченной строго возрастающей цепочки S-идеалов объекта a, а также определено объединение любых двух S-идеалов объекта a, то существует объединение (r, ρ) всех S-идеалов объекта a. Из лемм 3.1 и 3.2 вытекает, что (r, ρ) является S-идеалом объекта a. Нам остается показать, что фактор-объект b объекта a по идеалу (r, ρ), т. е. образ при некотором эпиморфизме $\alpha : a \to b$ с ядром (r, ρ) не содержит ни одного ненулевого S-идеала.

Действительно, пусть (m, χ) — некоторый S-идеал объекта b. Тогда, согласно утверждению (а) теоремы об отображении 2.1, для идеала (m, χ) существует полный прообраз (p, σ) при эпиморфизме α, являющийся идеалом объекта a, содержащим идеал (r, ρ). Таким образом, существует некоторый мономорфизм $\rho' : r \to p$, удовлетворяющий соотношению $\rho = \rho'\sigma$. Согласно лемме (1.5), (r, ρ') является ядром отображения $\sigma\alpha : p \to b$, каноническое разложение которого имеет вид $p \xrightarrow{\tau} m \xrightarrow{\chi} b$, где τ — некоторый эпиморфизм и $\tau\chi = \sigma\alpha$. Покажем, что p является S-объектом. Пусть $\theta : p \to q$ — произвольный ненулевой эпиморфизм с ядром (u, φ). Если идеал (u, φ) объекта p содержит идеал (r, ρ'), то, как легко следует из аксиомы IV и утверждений (а) и (б) теоремы об отображении 2.1, объект q эквивалентен некоторому фактор-объекту S-объекта m и, следовательно, согласно условию (А), является S-объектом. Предположим теперь, что идеал (u, φ) не содержит идеала (r, ρ'). Тогда, согласно аксиоме IV, идеал (r, ρ') при эпиморфизме θ отображается на некоторый ненулевой идеал (s, λ) объекта q. Так как (r, ρ') является S-идеалом объекта p, то, согласно условию (А), (s, λ) — S-идеал объекта q. Таким образом, согласно условию (В), p является S-объектом и, значит, (p, σ) — S-идеалом объекта a. Но в таком случае, поскольку идеал (r, ρ) является объединением всех S-идеалов объекта a, $(p, \sigma) \leqslant (r, \rho)$. Так как, с другой стороны, $(r, \rho) \leqslant (p, \sigma)$ по построению, то, согласно лемме 1.2, идеал (p, σ) эквивалентен идеалу (r, ρ) и, следовательно, при эпиморфизме α отображается на нулевой идеал объекта b. Тем самым показано, что S-идеал (m, χ) является нулевым идеалом объекта b.

Таким образом, теорема 3.1 доказана, а эта теорема как раз и является обобщением основного результата § 2 работы [2].

(Поступило в редакцию 19/XII 1958 г.)

Литература

1. А. Г. Курош, Прямые разложения в алгебраических категориях, Труды Моск. матем. о-ва, **8** (1959), 391—412.
2. А. Г. Курош, Радикалы колец и алгебр, Матем. сб., **33** (75) (1953), 13—26.
3. S. A. Amitsur, A general theory of radicals. II, Amer. Journ. Math., **76** (1954), 100—125.
4. S. MacLane, Duality for groups, Bull. Amer. Math. Soc., **56** (1950), 485—516.