F. A. Berezin, Some remarks about the associated envelope of a Lie algebra, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1967, Volume 1, Issue 2, 1–14

Функциональный анализ и его приложения,
т. 1, вып. 2, 1967, 1—14.

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ ОБ АССОЦИАТИВНОЙ ОБОЛОЧКЕ АЛГЕБРЫ ЛИ

Ф. А. Березин

В предлагаемой работе изучается связь между групповым кольцом группы Ли и ассоциативной оболочкой соответствующей алгебры Ли.

Пусть G — группа Ли, $\mathfrak{G}$ — соответствующая алгебра Ли, $\hat{S}$ — ассоциативная оболочка алгебры $\mathfrak{G}$.

Элементы $\hat{S}$ находятся в естественном взаимно однозначном соответствии с многочленами на линейном пространстве $\tilde{\mathfrak{G}}$, двойственном алгебре $\mathfrak{G}$. Это соответствие устанавливается с помощью отображения Λ, которое описывается в п. 1. Далее, в группе рассматривается окрестность единицы, допускающая канонические координаты. Функции на G, отличные от нуля только в этой окрестности, являются функциями канонических координат. Преобразование Фурье такой функции является функцией на $\tilde{\mathfrak{G}}$:

$$f(y) = \int e^{-ity} s(g(t)) \rho(t)\, dt, \quad ty = \sum_1^n t_p y_p \tag{0}$$

(здесь $t = (t_1, \ldots, t_n)$ — канонические координаты, $\rho(t)$ — плотность правоинвариантной меры в канонических координатах, $dt = dt_1 \ldots dt_n$, $n = \dim G$, $s(g)$ — функция на G). Среди функций $s(g)$ допускаются обобщенные.

Заметим теперь, что элементы $\hat{S}$ можно интерпретировать как полиномы от операторов Ли левого сдвига, или, что то же, как левую свертку с некоторой обобщенной функцией $s(g)$, равной нулю вне произвольной окрестности единицы. Оказывается, что преобразование Фурье (0) такой обобщенной функции является многочленом. Таким образом, одному и тому же элементу $\hat{S}$ можно поставить в соответствие два многочлена на $\tilde{\mathfrak{G}}$: с одной стороны, непосредственно с помощью отображения Λ^{-1}, с другой стороны,— с помощью формулы (0), где $s(g)$ — соответствующая обобщенная функция.

Оказывается, и это является основным результатом статьи, что эти многочлены равны.

В качестве простого следствия из этого утверждения выводится закон умножения в ассоциативной оболочке алгебры Ли и формула для собственных чисел операторов Лапласа на компактных полупростых группах Ли (см. пп. 4 и 8).

В п. 7 устанавливается связь между конечномерными алгебрами Ли и некоторыми бесконечномерными алгебрами Ли, обобщающая связь между квантовой и классической механикой.

Для простоты изложения алгебра Ли предполагается вещественной, ее ассоциативная оболочка — комплексной.

1. Отображение Λ. Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — элементы произвольной алгебры над вещественным полем. *Симметрическим произведением* $A(^{k_1}_1 \ldots ^{k_n}_n)$ эле-

ментов $A_1^{k_1}, \ldots, A_n^{k_n}$ назовем коэффициент при $(k_1 + \ldots + k_n)!\,(k_1! \ldots k_n!)^{-1} \times \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n}$ в разложении $(\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_n A_n)^{k_1+\ldots+k_n}$ по степеням α_i (α_i — вещественные числа):

$$(\alpha_1 A_1 + \ldots + \alpha_n A_n)^N = \sum_{k_1+\ldots+k_n=N} \frac{N!}{k_1! \ldots k_n!} \alpha_1^{k_1} \ldots \alpha_n^{k_n} (A_1^{k_1} \ldots A_n^{k_n}). \tag{1}$$

Пусть $\mathfrak{G}$ — алгебра Ли, $\hat{S}$ — ее ассоциативная оболочка, $\tilde{\mathfrak{G}}$ — линейное пространство, сопряженное к $\mathfrak{G}$, S — пространство многочленов на $\tilde{\mathfrak{G}}$.

Введем в алгебру $\mathfrak{G}$ базис $\{\hat{x}_p\}$ и рассмотрим элементы $\hat{S}$ вида $\hat{y}_p = -i\hat{x}_p$.

Введем в $\tilde{\mathfrak{G}}$ координаты y_p по базису, биортогональному к $\hat{x}_p$. Построим теперь отображение Λ пространства S в $\hat{S}$ следующим образом:

$$\text{если } p(y) = \Sigma\, c_{k_1,\ldots,k_n} y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n}, \qquad \text{то } \hat{p} = \Sigma\, c_{k_1,\ldots,k_n} (\hat{y}_1^{k_1} \ldots \hat{y}_n^{k_n}). \tag{2}$$

(Числа $c_{k_1,\ldots,k_n}$ в обеих строчках одни и те же, $(\hat{y}_1^{k_1} \ldots \hat{y}_n^{k_n})$ означает симметрическое произведение.)

Очевидно, что запись элемента $\hat{p} \in \hat{S}$ в симметричной форме однозначна: если $\hat{p} \in \hat{S}$ имеет вид (2) и $\hat{p} = 0$, то все коэффициенты $c_{k_1,\ldots,k_n}$ равны нулю. Поэтому отображение Λ линейно и взаимно однозначно.

Нетрудно проверить, что симметрическое произведение $(\hat{y}_1^{k_1} \ldots \hat{y}_n^{k_n})$ преобразуется при изменении базиса в $\mathfrak{G}$ так же, как произведение $y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n}$. Поэтому отображение Λ не зависит от выбора базиса в $\mathfrak{G}$.

2. Отображения ε и δ. Начиная с этого пункта, алгебра Ли $\mathfrak{G}$ считается реализованной с помощью операторов Ли правого сдвига на группе G. Обозначим через U ограниченную окрестность единицы в группе G, допускающую канонические координаты, и через L_U — множество обобщенных функций вида

$$s(g) = \sum_{\Sigma k_i \leqslant M} \hat{x}_1^{k_1} \ldots \hat{x}_n^{k_n} f_{k_1,\ldots,k_n}(g), \tag{3}$$

где $f_{k_1,\ldots,k_n}$ — классические функции, суммируемые по правоинвариантной мере и равные нулю вне U, $\hat{x}_i$ — операторы Ли правого сдвига, $M < \infty$ — целое число, свое для каждого $s \in L_U$.

Очевидно, что в виде (3) представима δ-функция Дирака на группе G Поэтому в L_U входят обобщенные функции вида

$$s(g) = \sum_{\Sigma k_i \leqslant M} c_{k_1,\ldots,k_n} (\hat{y}_1^{k_1} \ldots \hat{y}_n^{k_n})\, \delta(g), \qquad \hat{y}_p = -i\hat{x}_p,\ M < \infty. \tag{4}$$

Пусть $\hat{p} \in \hat{S}$ — элемент, записанный симметричным образом,

$$\hat{p} = \Sigma\, c_{k_1,\ldots,k_n} (\hat{y}_1^{k_1} \ldots \hat{y}_n^{k_n}). \tag{5}$$

Сопоставим $\hat{p}$ элемент из L_U вида (4). Коэффициенты $c_{k_1,\ldots,k_n}$ в (4) и (5) одни и те же. Таким образом, мы получаем вложение обертывающей алгебры $\hat{S}$ в L_U. Это вложение обозначим через ε.

Наконец, рассмотрим отображение δ (преобразование Фурье) пространства L_U в пространство функций на $\widetilde{\mathfrak{G}}$, определяемое формулой

$$\overset{\delta}{s}(y) = \int e^{-ity} s(g(t)) \rho(t)\, dt, \qquad ty = \Sigma t_p y_p, \tag{6}$$

где $s(g) \in L_U$, $t = \{t_p\}$ — канонические координаты элемента g, $\rho(t)$ — плотность правоинвариантной меры в канонических координатах, $dt = dt_1 \ldots dt_n$. Образ L_U при этом отображении обозначим через $\mathscr{L}_U$.

Основной целью настоящей работы является доказательство следующей теоремы.

Теорема I. 1) *Пространство функций* $\mathscr{L}_U$ *содержит* S. 2) *Следующая диаграмма является коммутативной*:

$$\begin{array}{ccc} \hat{S} & \xrightarrow{\varepsilon} & L_U \\ & {\scriptstyle\Lambda^{-1}}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle\delta} & \\ & \mathscr{L}_U & \end{array}$$

Обозначим через L пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций на G. Каждой обобщенной функции $s(g) \in L_U$ сопоставим оператор T_s правой свертки с ней в пространстве L:

$$(T_s f)(g) = \int f(gg_0^{-1}) s(g_0)\, dg_0, \quad f \in L \tag{7}$$

(dg_0 здесь и далее означает дифференциал правоинвариантной меры на G).

Лемма. *Если обобщенная функция* $s(g) \in L_U$ *имеет вид* (4), *то соответствующий ей оператор* T_s *равен*

$$T_s = \Sigma c_{k_1,\ldots,k_n} (\hat{y}_1^{k_1} \ldots \hat{y}_n^{k_n}). \tag{8}$$

Согласно определению $(\hat{y}_1^{k_1} \ldots \hat{y}_n^{k_n})$ есть линейная комбинация произведений операторов Ли. Поэтому для доказательства леммы достаточно проверить, что если $s(g) = \hat{x}_1^{p_1} \ldots \hat{x}_n^{p_n} \delta(g)$, где $\hat{x}_i$ — операторы Ли правого сдвига, то $T_s = \hat{x}_1^{p_1} \ldots \hat{x}_n^{p_n}$. Согласно определению обобщенной функции $\hat{x}_1^{p_1} \ldots \hat{x}_n^{p_n} \delta(g)$ имеем

$$(T_s f)(g) = \int f(gg_0^{-1}) s(g_0)\, dg_0 = \int f(gg_0^{-1}) (\hat{x}_1^{p_1} \ldots \hat{x}_n^{p_n} \delta(g_0))\, dg_0 =$$

$$= (-1)^{p_1 + \cdot + p_n} \int \left(\hat{x}_{ng_0}^{p_n} \ldots \hat{x}_{1g_0}^{p_1} f(gg_0^{-1}) \right) \delta(g_0)\, dg_0 =$$

$$= \int \hat{x}_{1g}^{p_1} \ldots \hat{x}_{ng}^{p_n} f(gg_0^{-1}) \delta(g_0)\, dg_0 = \hat{x}_1^{p_1} \ldots \hat{x}_n^{p_n} f(g).$$

В этих формулах $\hat{x}_{ig}$ ($\hat{x}_{ig_0}$) означает оператор Ли $\hat{x}_i$ правого сдвига, действующий на $f(gg_0^{-1})$ как на функцию g (g_0). При проведении преобразований мы воспользовались тем, что операторы $\hat{x}_i$ косоэрмитовы в скалярном произведении, определяемом интегралом по правоинвариантной мере, а также формулой

$$\hat{x}_{ng_0}^{p_n} \ldots \hat{x}_{1g_0}^{p_1} f(gg_0^{-1}) = (-1)^{p_1 + \cdot\cdot + p_n} \hat{x}_{1g}^{p_1} \ldots \hat{x}_{ng}^{p_n} f(gg_0^{-1}),$$

непосредственно следующей из определения операторов Ли правого сдвига.

Перейдем к доказательству теоремы. Обозначим через $L_2(G)$ гильбертово пространство функций с суммируемым квадратом по правоинвариантной мере

на G. Отметим, что введенные ранее элементы $\hat{y}_p = -i\hat{x}_p$ являются самосопряженными операторами в $L_2(G)$.

Заметим, что если $g_0 \in U$, $f \in L_2(G)$, то

$$f(gg_0^{-1}) = (e^{-it\hat{y}} f)(g), \qquad t\hat{y} = \Sigma\, t_p \hat{y}_p, \tag{9}$$

где $t = \{t_p\}$ — канонические координаты элемента g_0. Поэтому оператор T_s свертки с $s(g) \in L_U$ может быть записан в виде *)

$$T_s = \int e^{-it\hat{y}} s(g(t))\, \rho(t)\, dt, \tag{10}$$

где $\rho(t)$ и dt — те же, что в (6).

Пусть $f(g)$ — бесконечно дифференцируемая финитная функция. Разложим функцию $\varphi(t) = f(gg_0^{-1}(t)) = (e^{-it\hat{y}} f)(g)$ в ряд Тейлора:

$$(e^{-it\hat{y}} f)(g) = \sum_{k=0}^{N} (-i)^k \sum_{\Sigma k_i = k} \frac{t_1^{k_1} \ldots t_n^{k_n}}{k_1! \ldots k_n!} (\hat{y}_1^{k_1} \ldots \hat{y}_n^{k_n}) f(g) + R_N(t, g), \tag{11}$$

где $R_N(t, g)$ — остаточный член, который можно записать в форме Лагранжа:

$$R_N(t, g) = \frac{1}{(N+1)!} (t_1\hat{y}_1 + \ldots + t_n\hat{y}_n)^{N+1} f(\tilde{g})\big|_{\tilde{g} = gg_0^{-1}(\theta t)}, \quad |\theta| < 1. \tag{12}$$

Комбинируя (10) и (11), получаем для $T_s f$ следующее выражение:

$$T_s f = \sum_{\Sigma k_i \leqslant N} c_{k_1, \ldots, k_n} (\hat{y}_1^{k_1} \ldots \hat{y}_n^{k_n}) f(g) + r_N(g), \tag{13}$$

где

$$r_N(g) = \int s(g(t))\, \rho(t)\, R_N(t, g)\, dt \tag{14}$$

и

$$c_{k_1, \ldots, k_n} = (-i)^{k_1 + \ldots + k_n} \frac{1}{k_1! \ldots k_n!} \int t_1^{k_1} \ldots t_n^{k_n} s(g(t))\, \rho(t)\, dt. \tag{15}$$

Применим формулу (13) к случаю, когда $s(g)$ имеет вид (4).

Заметим, что при $N > M$, где M — число, указывающее множество индексов суммирования в (4), остаточный член в формуле (13) равен нулю. В самом деле, согласно (12) все частные производные $R_N(t, g)$ по t_p до порядка N равны нулю. С другой стороны, согласно (4) $s(g)$ есть линейная комбинация производных δ-функции до порядка M. Поэтому при $N > M$ интеграл (14) равен нулю.

Итак, при $N > M$ оператор, задаваемый формулой (13), совпадает с оператором (8), причем для коэффициентов $c_{k_1, \ldots, k_n}$ справедлива формула (15).

Применим теперь отображение δ к обобщенной функции, имеющей вид (4). Разложим экспоненту в ряд Тейлора:

$$e^{-ity} = \sum_{0}^{N} (-i)^k \sum_{\Sigma k_i = k} \frac{t_1^{k_1} \ldots t_n^{k_n}}{k_1! \ldots k_n!} y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n} + \sigma_N(t, y). \tag{16}$$

---

*) Оператор T_s действует по формуле:

$$T_s f = \int (e^{-it\hat{y}} f)\, s(g(t))\, \rho(t)\, dt.$$

В область определения T_s при любом $s \in L_U$ входит множество L финитных бесконечно дифференцируемых функций на G.

У остаточного члена $\sigma_N(t, y)$ все частные производные по t_p до порядка N равны нулю. Поэтому, повторяя еще раз предыдущие соображения, находим, что при $N > M$

$$\int s(g(t))\,\rho(t)\,\sigma_N(t, y)\,dt = 0.$$

Сопоставляя (16) и (15), получаем окончательно, что

$$\overset{\delta}{s}(y) = \sum_{\Sigma k_i \leqslant M} c_{k_1, \ldots, k_n} y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n},$$

причем коэффициенты $c_{k_1,\ldots,k_n}$ определяются формулой (15). Согласно определению отображения Λ $\overset{\delta}{s} = \hat{p}$, где $\hat{p} \in \hat{S}$ — элемент, определяемый формулой (8). Таким образом, теорема 1 доказана.

3. Сходимость в пространстве $\mathscr{L}_U$. В $\mathscr{L}_U$ естественно определить сходимость последовательностей элементов таким образом, чтобы из условия $\overset{\delta}{s}_n \to \overset{\delta}{s}$ следовала сильная сходимость операторов T_{s_n} к T_s на некотором плотном множестве в $L_2(G)$. В этом пункте определяется сходимость в $\mathscr{L}_U$, обладающая указанным свойством.

Опишем вначале плотное множество в $L_2(G)$. Обозначим через $U \subset U_1 \subset \subset U_2 \subset U_3$, V симметричные ограниченные окрестности единицы в G, допускающие канонические координаты, такие, что если $g \in U_2$, то $gV \subset U_3$, если $g \notin U_2$, то $gV \cap U_1$ пусто, $U \times U_2 \subset U_3$. Через R_V обозначим множество бесконечно дифференцируемых функций на G, равных нулю вне V, через R обозначим множество конечных линейных комбинаций элементов R_V и их левых сдвигов. Очевидно, что множество R плотно в $L_2(G)$.

Перейдем к определению сходимости. Очевидно, достаточно определить сходимость к нулю.

Определение. *Последовательность $\sigma_n(y) \in \mathscr{L}_U$ сходится к нулю, если, во-первых, она сходится к нулю равномерно на каждом компакте и, во-вторых, мажорируется некоторым полиномом.*

Покажем, что если последовательность функций $\sigma_n(y) = \overset{\delta}{s}_n(y)$ сходится к нулю, то соответствующая последовательность операторов свертки T_s сильно сходится к нулю на описанном ранее плотном множестве R.

Пусть $f \in R_V$, $s \in L_U$. Заметим, что интеграл

$$\int f(gg_0^{-1})\,s(g_0)\,dg_0$$

отличен от нуля лишь при $g \in U_2$. Поэтому в дальнейшем мы рассматриваем только $g \in U_2$. Введем функцию

$$\varphi_g(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ity} f(gg_0^{-1}(t))\,dt, \qquad n = \dim G. \tag{17}$$

Пусть $p(y)$ — произвольный полином. Из (17) следует, что

$$p(y)\,\varphi_g(y) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int e^{ity} p\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right) f(g(\lambda(t)))\,dt, \tag{18}$$

где через $\lambda(t) = \{\lambda_p(t)\}$ обозначены канонические координаты элемента $gg_0^{-1}(t) \in V$. Функции $\lambda_p(t)$ и все их частные производные непрерывны по g и, следовательно, ограничены при $g \in U_2$. Поэтому, применяя теорему План-

шереля для преобразования Фурье, получаем из (18), что

$$\int |p(y)\,\varphi_g(y)|^2\,dy \leqslant c < \infty, \tag{19}$$

где c — константа, не зависящая от g.

Введем функцию

$$\Phi(y) = \sup_{g \in U_2} |\varphi_g(y)|. \tag{20}$$

Из (19) следует, что для любого полинома $p(y)$ сходится интеграл

$$\int \Phi^2(y)\,|p(y)|^2\,dy,$$

и, следовательно *), сходится также интеграл

$$\int \Phi(y)\,|p(y)|\,dy.$$

Далее, из (6) и (17), используя определение преобразования Фурье обобщенных функций (см., например, [1]), находим, что если $\sigma_n(y) = \overset{\delta}{s}_n$, то

$$\int \sigma_n(y)\,\varphi_g(y)\,dy = \int f(gg_0^{-1}(t))\,s_n(g_0(t))\,\rho(t)\,dt = (T_{s_n}f)(g). \tag{21}$$

Пусть теперь последовательность σ_n сходится к нулю, $p(y)$ — мажорирующий σ_n полином, $\varepsilon > 0$ — произвольное число и $r > 0$ удовлетворяет условию

$$\int_{|y|>r} \Phi(y)\,p(y)\,dy < \varepsilon, \qquad |y| = (\Sigma y_i^2)^{1/2},$$

где $\Phi(y)$ определяется равенством (20).

Оценим интеграл в левой части (21).

$$\left|\int \sigma_n(y)\,\varphi_g(y)\,dy\right| \leqslant \int_{|y|<r} |\sigma_n(y)|\,\Phi(y)\,dy + \int_{|y|>r} p(y)\,\Phi(y)\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \int_{|y|<r} |\sigma_n(y)|\,\Phi(y)\,dy + \varepsilon. \tag{22}$$

Так как последовательность σ_n сходится к нулю равномерно на каждом компакте, то при достаточно больших n интеграл в правой части (22) меньше ε. Следовательно, при достаточно большом n

$$\left|\int \sigma_n(y)\,\varphi_g(y)\,dy\right| = |(T_{s_n}f)(g)| < 2\varepsilon.$$

Ввиду произвольности ε отсюда вытекает, что последовательность функций $(T_{s_n}f)(g)$ равномерно сходится к нулю. Так как эти функции, кроме того, равны нулю вне U_2, то отсюда следует, что они сходятся к нулю в смысле метрики $L_2(G)$. Используя очевидное тождество

$$(T_{s_n}f)(g_1g) = (T_{s_n}f_1)(g),$$

*) В самом деле, пусть $p_0(y)$ — такой многочлен, что $\int |pp_0^{-1}|^2\,dy < \infty$. Сформулированное утверждение следует из неравенства Коши — Буняковского:

$$\int \Phi\,|p|\,dy = \int \Phi\,|p_0|\,|pp_0^{-1}|\,dy \leqslant \left(\int |\Phi\,p_0|^2\,dy \int |pp_0^{-1}|^2\,dy\right)^{1/2}.$$

где $f_1(g) = f(g_1 g)$, получаем отсюда, что последовательность $(T_{s_n} f_1)(g)$ также сходится к нулю в смысле метрики пространства $L_2(G)$. Следовательно, последовательность T_{s_n} сильно сходится к нулю на R.

Отметим еще одно важное свойство сходимости, введенной в $\mathcal{L}_U$. Пусть U' — окрестность единицы, содержащаяся вместе со своим замыканием в U. *Тогда каждый элемент $\mathcal{L}_{U'}$ есть предел последовательности элементов из $\mathcal{L}_U$, стремящихся к нулю при $|y| \to \infty$ быстрее любой степени $|y|$* $(|y| = (y_1^2 + \ldots + y_n^2)^{1/2})$.

Рассмотрим последовательность функций $\sigma_N^0 \in \mathcal{L}_U$

$$\sigma_N^0(y) = \int e^{-ity} s_N^0(g(t)) \rho(t)\, dt,$$

где s_N^0 — бесконечно дифференцируемые функции, удовлетворяющие условиям:

1) $s_N^0 = 0$ при $|t| > \frac{2}{N}$ $(|t| = (t_1^2 + \ldots + t_n^2)^{1/2})$;

2) $0 \leqslant s_N^0(t)\rho(t) < c_N^{-1}$, $c_N = \int\limits_{|t|<1/N} dt$, $dt = dt_1 \ldots dt_n$;

3) $\int s_N^0(t)\rho(t)\, dt = 1$.

(Напомним, что $\rho(t)$ является аналитической функцией и $\rho(0) \neq 0$.)

Из бесконечной дифференцируемости функций $s_N^0 \rho$ обычным образом вытекает, что $\lim\limits_{|y|\to\infty} |y|^M \sigma_N^0(y) = 0$ при любом $M > 0$. Далее,

$$\sigma_N^0(y) - 1 = \int\limits_{|t|<2/N} (e^{-ity} s_N^0(t)\rho(t) - c_{N/2}^{-1})\, dt =$$

$$= \int\limits_{|t|<2/N} (s_N^0(t)\rho(t) - c_{N/2}^{-1})\, dt + \int (e^{-ity} - 1)\, s_N^0(t)\rho(t)\, dt.$$

Первый интеграл в правой части равен нулю в силу определения констант c_N и свойства 3) функций $s_N^0(t)$. Поэтому, учитывая, что $|e^{-ity} - 1| \leqslant |t|\,|y|$, получаем для функций $|\sigma_N^0 - 1|$ оценку

$$|\sigma_N^0(y) - 1| \leqslant \int |e^{-ity} - 1|\, s_N(t)\rho(t)\, dt \leqslant |y| \int |t|\, s_N(t)\rho(t)\, dt \leqslant \frac{2|y|}{N}.$$

Рассмотрим теперь произвольную обобщенную функцию $s \in L_{U'}$. Обозначим для краткости $s(t)\rho(t)$ через $\varphi(t)$ и $s_N^0(t)\rho(t)$ через $\varphi_N(t)$. Пусть, далее,

$$\psi_N(t) = \frac{1}{\rho(t)} \int \varphi(t - \tau)\varphi_N(\tau)\, d\tau.$$

Очевидно, что если N достаточно велико, то существует $s_N(g(t)) = \psi_N(t) \in L_U$. Используя обычные свойства преобразования Фурье, находим, что соответствующая функция $\sigma_N(y) = \overset{\delta}{s}_N \in \mathcal{L}_U$ равна $\sigma_N(y) = \sigma(y)\sigma_N^0(y)$, где $\sigma(y) = \overset{\delta}{s}(y)$. Напомним, что $\lim\limits_{|y|\to\infty} |y|^M \sigma_N^0(y) = 0$ при любом $M > 0$. Что касается $\sigma(y)$, то, как всякий элемент $\mathcal{L}_{U'}$, $|\sigma(y)| \leqslant Q(y)$, где $Q(y)$ — некоторый полином.

Поэтому функция $\sigma_N(y)$ ведет себя на бесконечности так же, как $\sigma_N^0(y)$: $\lim\limits_{|y|\to\infty} |y|^M \sigma_N(y) = 0$ при любом $M > 0$.

Далее, используя полученную ранее оценку для $\sigma_N^0 - 1$, находим, что

$$|\sigma_N(y) - \sigma(y)| = |\sigma(y)|\,|1 - \sigma_N^0(y)| \leqslant |\sigma(y)| \cdot 2|y|/N.$$

Поэтому $\sigma_N(y)$ сходится к $\sigma(y)$ равномерно на каждом компакте, и существует такой полином $p(y)$, что $|\sigma_N(y) - \sigma(y)| \leqslant p(y)$. Следовательно, $\sigma_N(y) \to \sigma(y)$ в смысле сходимости в $\mathcal{L}_U$.

4. Закон умножения в $\mathcal{L}_U$. Пусть $U \times U \subset U_1$, где U_1 — ограниченная окрестность единицы в G, допускающая каноническую систему координат, $s_1, s_2 \in L_U$, s — свертка функций s_1 и s_2, $T_s = T_{s_1} T_{s_2}$, $\sigma_1 \overset{\delta}{=} s_1$, $\sigma_2 \overset{\delta}{=} s_2$, $\sigma \overset{\delta}{=} s$ — элементы $\mathcal{L}_U$, соответствующие s_1, s_2 и s при отображении δ. Целью настоящего пункта является следующая теорема:

Теорема II. *Функции σ_1, σ_2 и σ связаны соотношением*

$$\sigma(y) = \int K_U(y \mid y_1, y_2)\, \sigma_1(y_1)\, \sigma_2(y_2)\, dy_1\, dy_2, \tag{23}$$

где

$$K_U(y \mid y_1, y_2) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int\limits_{\substack{g(t_1) \in U \\ g(t_2) \in U}} e^{-iy\ln(g(t_1)g(t_2)) + iy_1t_1 + iy_2t_2}\, dt_1\, dt_2, \tag{24}$$

$\ln(g(t_1)\,g(t_2))$ *означает прообраз элемента $g(t_1)\,g(t_2)$ при каноническом отображении, $n = \dim G$.*

Прежде чем доказывать теорему, сделаем два замечания.

Замечание 1. Из формулы (24) вытекает, что функция K_U является ограниченной. Поэтому интеграл (23) существует в обычном смысле, если функции σ_1 и σ_2 суммируемы.

В общем случае интеграл (23) следует понимать как предел: если $\sigma_{1n}, \sigma_{2n} \in \mathcal{L}_U$ — последовательности суммируемых функций, сходящихся соответственно к σ_1 и σ_2 в смысле сходимости в $\mathcal{L}_U$, то положим по определению

$$\int K_U(y \mid y_1, y_2)\, \sigma_1(y_1)\, \sigma_2(y_2)\, dy_1\, dy_2 = \\ = \lim_{n\to\infty} \int K_U(y \mid y_1, y_2)\, \sigma_{1n}(y_1)\, \sigma_{2n}(y_2)\, dy_1\, dy_2. \tag{25}$$

Так как из сходимости $\sigma_{1n} \to \sigma_1$, $\sigma_{2n} \to \sigma_2$ следует сильная сходимость на плотном множестве R соответствующих операторов, то предел в правой части (25) существует и не зависит от выбора последовательностей σ_{1n}, σ_{2n} и равен $\sigma \overset{\delta}{=} s$. При таком понимании интеграла (23) его можно применять, в частности, к случаю, когда σ_1 и σ_2 являются полиномами. В этом случае в силу теоремы I формула (25) определяет прообраз при отображении Λ элемента $\hat{\sigma}_1 \hat{\sigma}_2 \in \hat{S}$.

Замечание 2. Рассмотрим последовательность окрестностей единицы U_n, обладающих свойствами: 1) в $U_n \times U_n$ можно ввести канонические координаты; 2) каждая окрестность единицы с этим свойством принадлежит множеству $\mathcal{U} = \bigcup U_n$. Заметим теперь, что если $U_1 \subset U_2$, то $\mathcal{L}_{U_1} \subset \mathcal{L}_{U_2}$. Поэтому при $\sigma_1, \sigma_2 \in U_1$ в формуле (23) можно использовать K_{U_2} вместо K_{U_1}.

Обозначим через $\mathcal{L}$ множество конечных линейных комбинаций произведений $\sigma_1(y_1)\,\sigma_2(y_2)$, $\sigma_1 \sigma_2 \in U_n$, $n = 1, 2, \ldots$. На множестве $\mathcal{L}$ определен линейный функционал $\lim \int K_{U_n}(y \mid y_1, y_2)\, \sigma(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2$, $\quad \sigma \in \mathcal{L}$.

Если этот функционал продолжается до непрерывного функционала на том или ином пространстве основных функций, то он может быть записан с помощью обобщенной функции, которую мы обозначим через $K(y\,|\,y_1,\ y_2)$:

$$\int K(y\,|\,y_1,\ y_2)\,\sigma(y_1,\ y_2)\,dy_1\,dy_2 = \lim \int K_{U_n}(y\,|\,y_1,\ y_2)\,\sigma(y_1,\ y_2)\,dy_1\,dy_2.$$

Возникающая таким образом обобщенная функция K является универсальной: ею можно заменить K_U в формуле (23) при любом U. В следующем пункте будет рассмотрен соответствующий пример *).

Перейдем к доказательству теоремы II. Согласно определению

$$s(g(t)) = \int s_1(gg_1^{-1})\,s_2(g_1)\,dg_1 = \int s_1(g_1)\,s_2(g_2)\,\delta(g_2^{-1}g_1^{-1}g)\,dg_1\,dg_2 =$$
$$= \int s_1(g(t_1))\,s_2(g(t_2))\,\delta(g(-t_2)\,g(-t_1)\,g(t))\,\rho(t_1)\,\rho(t_2)\,dt_1\,dt_2,$$

где $\delta(g)$ — δ-функция Дирака на группе G.

Умножим обе части этого равенства на $\rho(t)\,e^{-ity}$ и проинтегрируем по t. Учитывая (6), получим

$$\sigma(y) = \frac{1}{(2\pi)^{2n}} \int\limits_{\substack{g(t_1)\in U\\ g(t_2)\in U}} e^{-ity}\,\delta(g(-t_2)\,g(-t_1)\,g(t))\,\rho(t)\,e^{i(t_1y_1+t_2y_2)}\,\sigma_1(y_1)\,\sigma_2(y_2)\times$$
$$\times\, dy_1\,dy_2\,dt_1\,dt_2\,dt.$$

Благодаря наличию δ-функции, интеграл по t в правой части вычисляется, в результате получаем формулы (23) и (24).

5. Пример. Рассмотрим группу G_3 треугольных матриц третьего порядка с единицами на диагонали. В канонических координатах элемент $g\in G_3$ имеет вид

$$g(t) = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & t_3 + t_1t_2/2 \\ 0 & 1 & t_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Канонические координаты элемента $g(t) = g(\alpha)\,g(\beta)$ легко вычисляются (для того чтобы не вводить двойных индексов, мы в этом пункте различные аргументы обозначаем разными буквами):

$$t_1 = \alpha_1 + \beta_1,\quad t_2 = \alpha_2 + \beta_2,\quad t_3 = \alpha_3 + \beta_3 + (\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)/2.$$

Так как каждый элемент G_3 допускает запись в канонических координатах, можно вычислить универсальную функцию K, положив в формуле (24) $U = G$. В результате имеем **)

$$K(z\,|\,x,\ y) = \frac{1}{\pi^2 z_3^2}\,\delta(z_3 - x_3)\,\delta(z_3 - y_3)\exp\left\{\frac{2i}{z_3}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ z_1 & x_1 & y_1 \\ z_2 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

6. Умножение на оператор Ли. Пусть $\hat{x}\in\mathfrak{G}$, $\hat{f}\in\hat{S}$. Рассмотрим линейные операторы в $\hat{S}$: $\hat{f}\to\hat{x}\hat{f}$, $\hat{f}\to\hat{f}\hat{x}$. Соответствующие им при отображении Λ линейные операторы в S обозначим через $A_x^{\text{л}}$ и $A_x^{\text{п}}$ соответственно.

*) Возможны случаи, когда обобщенная функция K в действительности оказывается обычной.

**) При вычислении используется тождество $\int e^{i\alpha\xi}\,d\xi = 2\pi\delta(\alpha)$.

Обозначим через $S_1 \subset S$ подпространство в S, состоящее из многочленов первой степени. Введем операторы A_p в S_1, которым при отображении Λ отвечают коммутаторы с базисными элементами, $\hat{x} \to [\hat{y}_p, \hat{x}]$:

$$A_p y_q = -i \sum C_{pq}^s y_s, \tag{26}$$

где C_{pq}^s — структурные константы алгебры Ли $\mathfrak{G}$.

В этом пункте доказывается следующая

Теорема III.

$$(A_x^{\text{л}} f)(y) = x f(y_1, \ldots, y_n) -$$

$$-\frac{1}{2} \sum (A_p x) \frac{\partial f}{\partial y_p} + \sum_{k=2}^{\infty} B_k \sum_{\Sigma k_i = k} ((A_1^{k_1} \ldots A_n^{k_n}) x) \frac{\partial^k f}{\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_n^{k_n}};$$

$$(A_x^{\text{п}} f)(y) = x f(y_1, \ldots, y_n) +$$

$$+\frac{1}{2} \sum (A_p x) \frac{\partial f}{\partial y_p} + \sum_{k=2}^{\infty} B_k \sum_{\Sigma k_i = k} ((A_1^{k_1} \ldots A_n^{k_n}) x) \frac{\partial^k f}{\partial y_1^{k_1} \ldots \partial y_n^{k_n}},$$

где B_k — числа Бернулли и $(A_1^{k_1} \ldots A_n^{k_n})$ означает симметрическое произведение операторов $A_1^{k_1} \ldots A_n^{k_n}$.

Обе формулы доказываются одинаково, поэтому мы ограничимся доказательством первой из них. Заметим прежде всего, что достаточно рассмотреть случай, когда $f = y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n}$. Введем новые обозначения

$$z_1 = y_1, \ldots, z_{p_1} = y_1, \; z_{p_1+1} = y_2, \ldots, z_{p_1+p_2} = y_2, \quad z_{p_1+p_2+1} = y_3, \ldots;$$

$$\hat{z}_1 = \hat{y}_1, \ldots, \hat{z}_{p_1} = \hat{y}_1, \; \hat{z}_{p_1+1} = \hat{y}_2, \ldots$$

В этих обозначениях

$$y_1^{p_1} \ldots y_n^{p_n} = z_1 \ldots z_p, \quad (\hat{y}_1^{p_1} \ldots \hat{y}_n^{p_n}) = (\hat{z}_1 \ldots \hat{z}_p), \qquad p = \sum p_i.$$

Найдем $\hat{x}(\hat{z}_1 \ldots \hat{z}_p)$. С этой целью рассмотрим выражение $\hat{k}(t) = t\hat{x} + t_1 \hat{z}_1 + \ldots + t_p \hat{z}_p$. Дифференцируя $\hat{k}^{p+1}(t)$ по t, получаем *)

$$\frac{d}{dt} \hat{k}^{p+1}(t) = \hat{x} \hat{k}^p + \hat{k} \hat{x} \hat{k}^{p-1} + \ldots + \hat{k}^p \hat{x} =$$

$$= \sum_{r=0}^{p} \sum_{s=0}^{r} \frac{r!}{s!\,(r-s)!} [\hat{k} \ldots [\hat{k}\,\hat{x}] \ldots] \hat{k}^{p-s} = \sum_{s=0}^{p} \frac{(p+1)!}{(s+1)!\,(p-s)!} [\hat{k} \ldots [\hat{k}\,\hat{x}] \ldots] \hat{k}^{p-s}, \tag{27}$$

причем $s = 0$ отвечает слагаемое $\hat{x}\,\hat{k}^p$. Согласно определению симметрического произведения

$$\hat{k}^m = \sum_{q + \Sigma q_i = m} \frac{m!}{q!\,q_1! \ldots q_p!} t^q t_1^{q_1} \ldots t_p^{q_p} (\hat{x}^q \hat{z}_1^{q_1} \ldots \hat{z}_p^{q_p}). \tag{28}$$

---

*) В следующих ниже преобразованиях используются тождества

$$\hat{k}^r \hat{x} = \sum_{s=0}^{r} \frac{r!}{s!\,(r-s)!} [\hat{k} \ldots [\hat{k}\,\hat{x}] \ldots] \hat{k}^{r-s} \quad \text{и} \quad \sum_{r=s}^{p} \frac{r!}{s!\,(r-s)!} = \frac{(p+1)!}{(s+1)!\,(p-s)!}.$$

Первое тождество легко доказывается по индукции, второе см. в [3].

Пользуясь этим, получаем

$$\frac{d}{dt}\hat{k}^{p+1}\Big|_{t=0} = (p+1)!\sum_{s=0}^{p}\frac{1}{(s+1)!}[k\ldots[kx]\ldots]\sum_{\Sigma q_i=p-s}\frac{t_1^{q_1}\ldots t_p^{q_p}}{q_1!\ldots q_p!}(\hat{z}_1^{q_1}\ldots\hat{z}_p^{q_p}) =$$

$$= (p+1)!\left\{\hat{x}\sum_{\Sigma q_i=p}\frac{t_1^{q_1}\ldots t_p^{q_p}}{q_1!\ldots q_p!}(\hat{z}_1^{q_1}\ldots\hat{z}_p^{q_p}) + \right.$$

$$\left. + \frac{\Sigma t_k[\hat{z}_k\hat{x}]}{2!}\sum_{\Sigma q_i=p-1}\frac{t_1^{q_1}\ldots t_p^{q_p}}{q_1!\ldots q_p!}(z_1^{q_1}\ldots z_p^{q_p}) + \ldots\right\}.$$

Полагая теперь в (28) $m = p+1$ и дифференцируя по t, мы получим другое выражение для $\frac{d\hat{k}^{p+1}}{dt}\Big|_{t=0}$. Сравнивая коэффициенты при $t_1\ldots t_p$ в этих выражениях, находим, что

$$(\hat{x}\hat{z}_1\ldots\hat{z}_p) = \hat{x}(\hat{z}_1\ldots\hat{z}_p) + \frac{1}{2!}\sum_k[\hat{z}_k\hat{x}](\hat{z}_1\ldots\hat{z}_{k-1}\hat{z}_{k+1}\ldots\hat{z}_p) +$$

$$+ \frac{1}{3!}\sum_{k\neq l}[\hat{z}_k[\hat{z}_l\hat{x}]](\hat{z}_1\ldots\hat{z}_{k-1}\hat{z}_{k+1}\ldots\hat{z}_{l-1}\hat{z}_{l+1}\ldots\hat{z}_p) + \ldots \quad (29)$$

Из (29) следует, что

$$\hat{x}(\hat{z}_1\ldots\hat{z}_p) = (\hat{x}\hat{z}_1\ldots\hat{z}_p) + \frac{B_1}{1!}\sum_k([\hat{z}_k\hat{x}]\hat{z}_1\ldots\hat{z}_{k-1}\hat{z}_{k+1}\ldots\hat{z}_p) +$$

$$+ \frac{B_2}{2!}\sum_{k\neq l}([\hat{z}_k[\hat{z}_l\hat{x}]]\hat{z}_1\ldots\hat{z}_{k-1}\hat{z}_{k+1}\ldots\hat{z}_{l-1}\hat{z}_{l+1}\ldots\hat{z}_p) + \ldots \quad (30)$$

Подставляя это выражение в (29), находим для B_m рекуррентные соотношения

$$B_m = -\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!\,(m-k)!}B_k, \qquad B_0 = 1.$$

Следовательно, числа B_m являются числами Бернулли. Переходя к старым обозначениям, получаем отсюда утверждение теоремы для случая, когда $f = y_1^{p_1}\ldots y_n^{p_n}$.

7. Связь между конечномерными и некоторыми бесконечномерными алгебрами Ли. Пусть $f_1, f_2 \in S$. Из доказанной в предыдущем пункте теоремы следует, что многочлен f, соответствующий при отображении Λ элементу обертывающей алгебры $\hat{f} = \hat{f}_1\hat{f}_2 - \hat{f}_2\hat{f}_1$, равен

$$f(y) = -i\sum C_{pq}^s y_s\frac{\partial f_1}{\partial y_p}\frac{\partial f_2}{\partial y_q} + \ldots,$$

где C_{pq}^s — структурные константы алгебры $\mathfrak{G}$; многоточием обозначены слагаемые, содержащие производные выше первого порядка от f_1 или f_2.

Отбросим эти слагаемые, а также множитель $-i$. В результате мы получим композицию элементов из S, которую естественно назвать скобкой Пуассона и обозначать так же, как скобку Пуассона в классической механике:

$$[f_1, f_2] = \sum C_{pq}^s y_s\frac{\partial f_1}{\partial y_p}\frac{\partial f_2}{\partial y_q}. \quad (31)$$

Нетрудно проверить, что пространство полиномов S образует алгебру Ли относительно операции (31) и что многочлены первой степени образуют в ней подалгебру, изоморфную исходной алгебре $\mathfrak{G}$.

Рассмотрим в качестве примера трехпараметрическую нильпотентную алгебру $\mathfrak{G}$ с образующими $\hat{p}$, $\hat{q}$, $\hat{r}$ и соотношениями *)

$$[\hat{p}, \hat{q}] = r, \qquad [\hat{p}, \hat{r}] = [\hat{q}, \hat{r}] = 0.$$

В этом случае $f = f(p, q, r)$,

$$[f_1, f_2] = r\left(\frac{\partial f_1}{\partial p}\frac{\partial f_2}{\partial q} - \frac{\partial f_2}{\partial p}\frac{\partial f_1}{\partial q}\right).$$

Полагая $r = 1$, мы приходим к классической скобке Пуассона.

Алгебра $\mathfrak{G}$ играет важную роль в квантовой механике. Ее ассоциативная оболочка называется «алгеброй квантовых наблюдаемых величин». Указанная здесь связь между ней и алгеброй скобок Пуассона лежит в основе всех соотношений между квантовой и классической механикой (см., например, [2]).

8. Собственные числа операторов Лапласа на компактной полупростой группе Ли. Отождествим для удобства алгебру $\mathfrak{G}$ и пространство $\widetilde{\mathfrak{G}}$ с помощью инвариантного относительно присоединенного представления скалярного произведения в $\mathfrak{G}$. Обозначим через $Z \subset S$ множество многочленов на $\mathfrak{G}$, инвариантных относительно присоединенного представления. Хорошо известно [4], что $\hat{Z} \subset \hat{S}$ является центром алгебры $\hat{S}$. Элементы $\hat{z} \in \hat{Z}$ называются операторами Лапласа на группе G. Обозначим, далее, через $\mathfrak{H} \subset \mathfrak{G}$ картановскую подалгебру $\mathfrak{G}$. Задача состоит в том, чтобы с помощью значения на $\mathfrak{H}$ полинома z определить спектр оператора $\hat{z}$.

Мы решим несколько более общую задачу. Обозначим через $\mathfrak{Z}_U$ множество обобщенных функций вида (3), которые при всех $g \in G$ удовлетворяют условию $T_s T_g = T_g T_s$, где T_s — оператор свертки с s и T_g — оператор правого сдвига на элемент g **).

В п. 2 было отмечено, что существует естественное вложение ε алгебры $\hat{S}$ в L_U. Очевидно, что ε отображает $\hat{Z}$ в $\mathfrak{Z}_U$. Напомним далее, что отображение $\delta: L_U \to \mathscr{L}_U$, определяемое формулой (6), служит продолжением отображения Λ.

Если $s \in \mathfrak{Z}_U$, то функция $\overset{\delta}{s}$ инвариантна относительно присоединенного представления.

Мы укажем явное выражение для спектра оператора T_s через функцию $\sigma(h) = \overset{\delta}{s}(h)$, являющуюся значением на картановской алгебре функции $\overset{\delta}{s}(x)$.

Пусть L_g — неприводимое представление группы G, $L_s = \int L_g s(g)\,dg$. Беря след от обеих частей тождества $L_s = \lambda(s) E$, находим $\lambda(s)$:

$$\lambda(s) = \frac{\operatorname{sp} L_s}{\operatorname{sp} L_e} = \int s(g)\,\varphi(g)\,dg, \qquad \varphi(g) = \frac{\operatorname{sp} L_g}{\operatorname{sp} L_e}$$

(e — единица группы G). Введем в группу G канонические координаты, выразим функцию $s(g)$ через ее преобразование Фурье $\sigma = \overset{\delta}{s}$ и обозначим для краткости $\varphi(g(t))$ через $\Phi(t)$. В результате для $\lambda(s)$ получим новое выражение:

$$\lambda(s) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int \sigma(x)\,\Phi(t)\,e^{i(x,t)}\,dt\,dx, \qquad n = \dim G \tag{32}$$

((x, t) — инвариантное скалярное произведение в $\mathfrak{G}$). Функции $\sigma(x)$ и $\Phi(t)$ постоянны на классах сопряженных элементов. Поэтому интеграл (32) может быть упрощен.

*) Эта алгебра и соответствующая ей группа уже рассматривались в п. 5.

**) Если s — классическая функция, то это условие эквивалентно постоянству s на классах сопряженных элементов.

Обозначим через U_g присоединенное представление группы G. Обычным образом легко устанавливается, что если f — суммируемая функция, то

$$\int f(x)\,dx = c_1 \int \left(\int f(U_g h)\,dg\right) j^2(h)\,dh, \tag{33}$$

где внутренний интеграл берется по инвариантной мере на группе G, внешний — по картановской подалгебре $\mathfrak{H}$ и $j(h)$ — функция на $\mathfrak{H}$, равная

$$j(h) = \prod_{\alpha>0} (\alpha, h), \tag{34}$$

α — корень алгебры $\mathfrak{H}$. Воспользуемся, далее, интегралом *)

$$\int e^{i(U_g x, t)}\,dg = c_2 \frac{\Sigma\,(\det w)\, e^{i(x, wt)}}{j(x)\, j(t)}, \quad t \in \mathfrak{H}. \tag{35}$$

(Сумма в числителе берется по всем элементам группы Вейля W, c_2 — некоторая константа.)

Используя формулы (33)—(35), выражение (32) для $\lambda(s)$ можно упростить:

$$\lambda(s) = c \int\limits_{t,h\in\mathfrak{H}} \Phi(t)\, j(t)\, \sigma(h)\, j(h)\, \Sigma\,(\det w)\, e^{i(wh,t)}\,dh\,dt. \tag{36}$$

Константа c определяется формулой (38) (см. ниже).

В случае произвольного $s \in L_U$ существенное упрощение формулы (36) вряд ли возможно; в случае, когда $T_s = \hat{z} \in \hat{Z}$, можно произвести некоторые дальнейшие преобразования. Заметим, что в этом случае $z(h)$ подобно $j(h)$ является многочленом на $\mathfrak{H}$. Поэтому, используя ортонормированный базис в $\mathfrak{H}$, находим, что

$$z(h)\, j(h)\, \Sigma\,(\det w)\, e^{i(wh,t)} = z\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right) j\left(\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial t}\right) \Sigma e^{i(wh,t)}.$$

Подставляя эту формулу в (36), получаем окончательно:

$$\lambda(\hat{z}) = c\,(2\pi)^l\,|W|\, z\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right) j\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right) j(t)\,\Phi(t)\Big|_{t=0}, \tag{37}$$

где $\Phi(t) = \dfrac{\operatorname{sp} L_g(t)}{\operatorname{sp} L_e}$, $l = \dim \mathfrak{H}$ и через $|W|$ обозначен порядок группы Вейля.

*) Чтобы не перебивать основного изложения, приведем его вычисление в сноске. Введем в $\mathfrak{G}$ ортонормированную систему координат и заметим, что оператор $z(\partial/\partial x)$, $z \in Z$ перестановочен с операторами $f(x) \to f(U_g x)$. Поэтому относительно операторов $z(\partial/\partial x)$ инвариантно пространство $\overset{0}{R}$ функций, удовлетворяющих условию $f(x) = f(U_g x)$. Значение оператора $z(\partial/\partial x)$ на $\overset{0}{R}$ назовем его радиальной частью. Так как функции из $\overset{0}{R}$ определяются своими значениями на $\mathfrak{H}$, то радиальные части операторов $z(\partial/\partial x)$ являются операторами в пространстве функций на $\mathfrak{H}$, инвариантных относительно группы Вейля. Радиальные части таких операторов приведены в [5]. В координатах по ортонормированному базису в $\mathfrak{H}$ они имеют вид

$$\overset{0}{z} = j^{-1}(h)\, p_z(\partial/\partial h)\, j(h),$$

где p_z — инвариантный относительно группы Вейля многочлен на $\mathfrak{H}$ и $j(h)$ определяется формулой (34). Существенно, что для каждого инвариантного относительно группы Вейля многочлена p на $\mathfrak{H}$ найдется такой полином $z \in Z$ на $\mathfrak{G}$, что $p = p_z$. Заметим теперь, что функция $e^{i(x,t)}$ является собственной для всех операторов $z(\partial/\partial x)$, поэтому тем же свойством обладает функция $F(x)$, определяемая интегралом в левой части (35). Так как, кроме того, она принадлежит $\overset{0}{R}$, то она удовлетворяет системе уравнений $\overset{0}{z}F = \lambda F$. Ввиду особой простоты операторов $\overset{0}{z}$ эта система легко решается. В результате получаем формулу (35) (см. по этому поводу [6], стр. 350, и [7], стр. 450, где решается аналогичная задача).

Константа c определяется из условия $\lambda(z) = 1$ при $z \equiv 1$:

$$c^{-1} = (2\pi)^l\,|W|\,j\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right) j(t)\,\varphi(t)\Big|_{t=0} = (2\pi)^l\,|W|\,j\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right) j(t)\Big|_{t=0}. \tag{38}$$

В частности, если $G = SU(n)$ — группа унитарных унимодулярных матриц порядка n, то

$$\lambda(\hat{z}) = \frac{1}{n!}\, z\left(i\frac{\partial}{\partial t}\right)\prod_{p<q}\left(\frac{\partial}{\partial t_p} - \frac{\partial}{\partial t_q}\right)\prod_{p<q}(t_p - t_q)\frac{\begin{vmatrix} e^{it_1 l_1} & \dots & e^{it_1 l_n} \\ \cdot & \cdot\,\cdot\,\cdot & \cdot \\ e^{it_n l_1} & \dots & e^{it_n l_n}\end{vmatrix}}{\prod\limits_{p<q}(e^{it_p} - e^{it_q})\prod\limits_{p<q}(l_p - l_q)}\Bigg|_{t=0}. \tag{39}$$

В этой формуле $l_1 > l_2 > \ldots > l_n$ — числа, определяющие представление, $l_1 + \ldots + l_n = (n(n-1))/2$, $l_i - l_j$ — целые.

Формула (39) справедлива и для полной унитарной группы, причем ее вывод остается прежним. Условие $l_1 + \ldots + l_n = n(n-1)/2$ в этом случае излишне.

Спектр операторов Лапласа исследовался ранее в работах Хариш-Чандры [8]—[10], а также в ряде физических работ (см. [11], [12]).

Автор пользуется случаем выразить искреннюю признательность И. М. Гельфанду, который прочел работу в рукописи и сделал ряд замечаний, использованных при подготовке статьи для печати.

Московский государственный

Поступило в редакцию
1 ноября 1966 г.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Гельфанд И. М, Шилов Г. Е., Теория обобщенных функций, вып. 1, М., Физматгиз, 1958.
2. Березин Ф. А., Об одном представлении операторов с помощью функционалов, Труды Моск. матем. о-ва **17** (1967), 118—184.
3. Градштейн И. С., Рыжик И. М., Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, М, Физматгиз, 1963.
4. Гельфанд И. М, Центр инфинитезимального группового кольца, Матем. сб. **16**, № 1 (1950).
5. Березин Ф А., Операторы Лапласа на полупростых группах Ли и некоторых симметрических пространствах, УМН **12**, вып. 1 (1957), 152—156
6. Березин Ф А., Гельфанд И. М, Некоторые замечания к теории сферических функций на симметрических римановых многообразиях, Труды Моск. матем. о-ва **5** (1956), 311—351.
7. Березин Ф. А., Операторы Лапласа на полупростых группах Ли, Труды Моск. матем. о-ва **6** (1957), 371—463.
8. Harich-Chandra, The characters of semisimple Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. **83** (1956), 98—163.
9. Harich-Chandra, Spherical functions on a semisimple Lie group I, Amer. J Math. **80** (1958).
10 Harich-Chandra, On same applications of the universal envelopping algebra of a semisimple Lie group algebra, Trans. Amer. Math. Soc. **70** (1951), 28—96.
11. Переломов А. М., Попов В. С., Операторы Казимира для групп $U(n)$ и $SU(n)$, Ядерная физика, т. III, вып. 5, 924—931.
12. Переломов А. М., Попов В. С, Операторы Казимира для ортогональной группы, Ядерная физика, т. III, вып. 6, 1127—1134.