Б. М. Гуревич, А. А. Темпельман, Хаусдорфова размерность и термодинамический формализм, УМН, 1999, том 54, выпуск 2(326), 171–172

DOI: https://doi.org/10.4213/rm139

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 54.70.40.11
HAUSDORFFAЯ РАЗМЕРНОСТЬ
И ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ

Б. М. ГУРЯЧ, А. А. ТЕМПЕЛЬМАН

На пространстве \( S^T = \{x : T \rightarrow S\} \), где \( T \) – счетное, а \( S \) – конечное множество, можно многими способами ввести метрику, согласованную с топологией, порождаемой цилиндрическими множествами. Мы определим класс метрик, относящихся к хюндoradoффу размерность всего пространства и его частей можно связать с основными понятиями термодинамического формализма [1]. Для ряда частных случаев была задача уже неоднократно рассматривалась (см. [2]) и указанную там литературу.

1. При любом \( V \subset T \) будем называть элементы \( x \) множества \( S^V \) конфигурациями на \( V \).
Если \( V \subset W \), то для каждой конфигурации \( x \in S^W \) определяется ее ограничение \( x_V \) на \( V \). Пусть заданы: последовательность конечных множеств \( T_n \subset T \), ведущее \( \tau \)-замыкание множество \( X \subset S^T \), определенное локально-конечной системой ограничений (ср. [1; §1.1]), и последовательность функций \( a_n : X \rightarrow R \), удовлетворяющие условиям: (a) \( a_n(x) > 0 \) при всех \( x \in X, n \geq 1 \); (b) \( a_n(x) = a_n(x') \) если \( x_T = x'_T \); (c) \( a_n(x) \rightarrow 0 \) при \( n \rightarrow \infty \) везде \( x \in X \).

Пусть \( X_V = \{x' \in X : x'_T = x_T \} \subseteq X \), \( V \subset T \), и \( \Xi_n(x) = \{x' \in X : x'_T = x_T \}, x \in X, n \geq 1 \). Для любых \( r > 0, b > r \), \( x \in X \) положим \( (l, r, b) = \max \{n \in \mathbb{Z}^+ : b_n(x) \geq r\} \). Свойства функций \( a_n \) гарантируют, что \( \Xi(x, r, b) \) корректно определено, при этом \( \sup_x \Xi(x, r, b) < \infty \) при всех \( r, b \) и \( \inf_x \Xi(x, r, b) \rightarrow \infty \) при \( r \rightarrow 0 \) везде \( b > 0 \).

Пусть на \( X \) задана метрика \( \rho \) и \( B_p(x, r) = \{x' \in X : \rho(x, x') < r\} \), \( r > 0 \), \( x \in X \). При \( n \in N, b > 0 \) поставим в соответствие каждой точке \( x \) вектор \( B_p(x, b_n(x)) \) радиуса \( \rho \). Пусть \( L_p(x, n, b) = \max \{l(x, r, b) : r > 0, b > r, x \in X\} \) среди этих цилиндров существует \( l \) логарифмически не пересекающихся. Определены индексы \( \rho \)-мер: на множестве \( C^p_n(x) = \sup_x \rho(x, n, b) \) (ср. [2], [3]). Назовем метрику \( \rho \) согласованной с последовательностью \( \{a_n\} \), если существуют такие \( b_1, b_2 > 0 \), что \( \rho(x, x') \leq b_1 a_n(x) \) при \( x_T = x'_T \) и (i) \( \rho(x, x') \leq b_2 a_n(x) \) при \( x_T = x'_T \) и (ii) \( (b_1, b_2) < \infty \).

Естественный класс таких метрик получается с помощью геометрических конструкций, отображающих \( X \) и \( \{a_n\} \) (см. [2], [3]).

Введем теперь класс последовательностей \( \{a_n\} \), сопряженных с моделями статистической физики на \( T \). Эти модели задаются потенциалами (см. [1], [4]). Пусть \( F \) – совокупность конечных множеств \( F \subset T \) и \( X^{(F)} = \bigcup_{V \in F} X^V \). Будем считать потенциал \( U \) функцией, заданной на \( X^{(F)} \), и писать \( U(V, x) \) вместо \( U(x) \), \( x \in X \), \( V \in F \). Предположим, что \( \|U\| < \infty \), где

\[ \|U\| = \sup_{T \in F} \sum_{x \in X^V} \max_{V \in F} \|U(V, x)\|, \]

обозначив через \( E(U)(V, x), Z(U)(V) \) и \( E(U)(V, x) = \sum_{x \in X} \) соответственно энергию конфигурации \( x \in X^V, V \in F \), статистическую сумму в "объеме" \( V \) (с пустыми границами и условиями) и энергию взаимодействия конфигурации \( x \in X^V \) конфигурации \( x \in X^V \), где \( x \in X^V = T \setminus V \).

Предположим, что \( \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\text{card}(T_n)\right)^{-1} \ln Z(U)(T_n) = P(U, \{T_n\}) \), если он существует, будем называть "двойной", отвечающий потенциалу \( U \) и последовательности множеств \( \{T_n\} \).

Нам понадобится следующее условие (последнее из которых будет с нашей целью формулировано Рейсмом [1]):

\begin{enumerate}
\item \( \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\text{card}(T_n)\right)^{-1} \inf_{x \in X} E(U)(T_n, x_T) > 0; \)
\item \( \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\text{card}(T_n)\right)^{-1} \sup_{x \in X} |E(U)(x_T) - \sum_{n} E(U)(x_T); \sum_{n} T_n, x_{T_n}| = 0; \)
\item \( \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\text{card}(T_n+1)/\text{card}(T_n) = 1 \right); \)
\item \( \sum_{n} \left(\text{card}(T_n)^{-1} \ln \text{card}(T_n)\right) |\sum_{n} \left(\text{card}(T_n)^{-1} \ln \text{card}(T_n)\right) = 1 \) и для любых \( x, y \in X \) найдется \( z \in X \) с \( z_T = x_T, z_T - y_T = y_T - T_n). \)
\end{enumerate}
Легко видеть, что при выполнении условия (A) последовательность функций

\[ a_n(U)(x) = \exp\left(-E(U)(T_n, x_{T_n})\right), \quad n \in \mathbb{N}, \ x \in X, \]

удовлетворяет условиям (a)−(c).

**Теорема 1.** Если \( ||U|| < \infty \), выполняется условие (A) и найдётся \( \beta_0 \geq 0 \), для которого правило \( P(\beta_0, U, \{ T_n \}) \) существует и равно мере, то для любой метрики \( \rho \), согласованной с последовательностью функций \( a_n(U) \), хаусдорфова размерность \( d_H(X, \rho) \) множества \( X \) не превосходит \( \beta_0 \); если, кроме того, выполняется условие (B)−(D), то \( d_H(X, \rho) = \beta_0 \).

**Замечание 1.** Можно показать, что при условиях (A)−(D) хаусдорфова размерность гиббсовой меры с потенциалом \( U \) равна \( d_H(X, \rho) \).

2. Рассмотрим более конкретную ситуацию. Пусть \( T = \mathbb{Z}^d \), \( d \geq 1 \). Для любых \( V \subset T \), \( t \in T \) определим отображение \( \sigma^t \) : \( S^V \rightarrow S^{V-t} \) равенством \( (\sigma^t x)(t') = x(t+t'), \ t' \in V - t, \ x \in S^V \). Пусть \( \sigma = \{ \sigma^t, t \in T \} \). Пусть множество \( X \) из п. 1 вспомогательное и \( \sigma \)-инвариантное, а потенциал \( U \) \( f^0 \rightarrow \mathbb{R} \) инвариантен в том смысле, что \( U(V + t, x) = U(U, \sigma^t x), \ t \in T, \ V \in \mathcal{F}, x \in X_{V+t} \).

**Предложение.** Если \( U(V, x) \geq 0 \) при всех \( V \in \mathcal{F}, x \in X_{V} \) и найдётся такое \( V^+ \in \mathcal{F} \), что \( E(U)(V^+, x) > 0 \) при всех \( x \in X_{V^+} \) (локальная положительность \( U \)), то выполняется условие (A).

Назовём последовательность \( T_n \uparrow T \) регулярной, если \( \lim_{n \rightarrow \infty} \text{card}(T_n \Delta (T_{n+1})) / \text{card}(T_n) = 0 \) при всех \( t \in T \) и \( \sup_n \text{card}(t - t', t, t' \in T_n) / \text{card}(T_n) < \infty \).

**Теорема 2.** Пусть регулярная последовательность \( \{ T_n \} \) удовлетворяет условию (C), а потенциал \( U \) с \( ||U|| < \infty \) инвариантен и локально положителен. Тогда для любой метрики \( \rho \) на \( X \), согласованной с последовательностью \( \{ a_n(U) \} \), выполняется соотношение Бонди \( P(d_H(X, \rho)) = 0 \).

**Список литературы**