И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман, Гамильтоновы операторы и классическое уравнение Янга–Бакстера, *Функц. анализ и его прил.*, 1982, том 16, выпуск 4, 1–9

Функциональный анализ и его приложения,
1982, т. 16, вып. 4, 1—9.

УДК 517.43+519.46

ГАМИЛЬТОНОВЫ ОПЕРАТОРЫ И КЛАССИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ ЯНГА — БАКСТЕРА

И. М. Гельфанд, И. Я. Дорфман

В классической дифференциальной геометрии и в механике алгебраизация основных понятий строится следующим образом. В качестве основного объекта предъявляется кольцо функций, через которое определяются все другие основные объекты — векторные поля (как дифференцирования в кольце функций), дифференциальные формы как формы, полилинейные относительно этого кольца и т. д. Однако в последние годы в связи с интегрируемыми системами возникла необходимость построения гамильтонова формализма в вариационном исчислении (см. [1] — [7]). Работы авторов [8] — [10] возникли из наблюдения, что построение, основанное на использовании кольца функций, плохо совместимо с вариационным исчислением. Действительно, набор функционалов в вариационном исчислении не образует кольца [1]). Поэтому авторы выбрали другой путь введения основных дифференциально-геометрических объектов. Нам представляется, что изложенная ниже (а также приведенная в работах [8] — [10]) система определений существенна не только в вариационном исчислении, а и во многих других случаях, некоторые из которых приведены далее. Грубо говоря, этот подход состоит в том, что вместо кольца функций при построении такой схемы заранее задается алгебра Ли $\mathfrak{a}$ и комплекс $\mathfrak{a}$-модулей (Ω, d) с дифференциалом, согласованным с действием алгебры Ли (точные аксиомы см. ниже). Все примеры, приводимые далее, отличаются друг от друга выбором алгебры Ли и комплекса. Нам кажется, что возможности такого подхода далеко не исчерпаны.

Цель работы — показать, что в указанной схеме содержится ряд содержательных и важных примеров. Таковыми являются: гамильтонов формализм вариационного исчисления [3] — [4], [8], классическое уравнение Янга — Бакстера, гамильтонов формализм на конечномерных многообразиях, когомологии алгебр Ли, в том числе алгебр Ли векторных полей [11] — [12], деформации алгебр Ли (см., например, [13], [18]). Целью статьи является также окончательное установление связи между гамильтоновыми операторами и симплектическими структурами. При этом важным является понятие обобщенного невырожденного 2-коцикла (которое лишь для конечномерных алгебр Ли совпадает с понятием невырожденного 2-коцикла на подалгебре алгебры Ли).

1. Классическое уравнение Янга — Бакстера. Поскольку ниже это уравнение будет рассмотрено в качестве примера, мы приведем его вначале в том виде, в котором оно имеется в математической литературе. Однако нам представляется, что та алгебраическая трактовка классического уравнения Янга — Бакстера, которая приводится в п. 4, будучи эквива-

---

[1]) Мы, конечно, можем строить кольцо, рассматривая вместе с функционалами $\int f dx$ суммы их произведений, однако такая конструкция не более содержательна, чем погружение линейного пространства в кольцо за счет рассмотрения сумм произведений элементов.

лентной указанной здесь, является более естественной, не требуя, в частности, включения алгебры Ли в ассоциативное кольцо. Классическое уравнение Янга — Бакстера получается (см. [14], [15]) следующим образом. Пусть $\mathfrak{g}$ — конечномерная алгебра Ли, U — произвольная содержащая ее ассоциативная алгебра с единицей $\mathbf{1}$ (имеется в виду, что $[a, b] = ab - ba$, $a, b \in \mathfrak{g}$; можно считать, что U — это универсальная обертывающая алгебра для $\mathfrak{g}$). Обозначим через $\varphi^{ij}\colon \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to U \otimes U \otimes U$, $1 \leqslant i, j \leqslant 3$, $i \neq j$, отображения, действующие на элемент $a \otimes b \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ так: a ставится на i-е место, b — на j-е место, $\mathbf{1}$ — на оставшееся свободное место (например, $\varphi^{13}(a \otimes b) = a \otimes \mathbf{1} \otimes b$). Пусть, далее, r — функция двух комплексных переменных со значениями в $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Соотношение

$$[r^{12}(u_1, u_2), r^{13}(u_1, u_3)] + [r^{12}(u_1, u_2), r^{23}(u_2, u_3)] + \\ + [r^{13}(u_1, u_3), r^{23}(u_2, u_3)] = 0, \quad (1)$$

где $r^{ij} = \varphi^{ij} \circ r$, называется *классическим уравнением Янга — Бакстера*. Часто оно рассматривается совместно с так называемым *условием унитарности*

$$r^{12}(u_1, u_2) = -r^{21}(u_2, u_1). \quad (2)$$

В данной работе, в частности, будет показано, что система (1) — (2) является условием гамильтоновости в смысле работ авторов [8] — [10] (при соответствующем выборе комплекса) оператора, канонически соответствующего функции r.

2. Введение основных дифференциально-геометрических объектов. Пусть $\mathfrak{a}$ — некоторая (может быть, и бесконечномерная) алгебра Ли, (Ω, d) — комплекс линейных или топологических линейных пространств, т. е. $\Omega = \Omega^0 \oplus \Omega^1 \oplus \ldots \oplus \Omega^q \oplus \ldots$, $d\colon \Omega \to \Omega$ — линейное отображение такое, что $d\Omega^q \subset \Omega^{q+1}$, $d^2 = 0$. Если пространства Ω^q топологические, то оператор d и вводимые нами ниже операторы предполагаются непрерывными.

Скажем, что (Ω, d) — *комплекс над алгеброй Ли* $\mathfrak{a}$, если всякому $a \in \mathfrak{a}$ сопоставлено линейное отображение $i_a\colon \Omega \to \Omega$, $i_a\Omega^q \subset \Omega^{q-1}$, $i_a\Omega^0 = \{0\}$, удовлетворяющее условиям

$$i_a i_b + i_b i_a = 0, \quad [i_a d + d i_a, i_b] = i_{[a, b]}.$$

Оператор $L_a = i_a d + d i_a$ (переводящий Ω^q в Ω^q для всех q) назовем *производной Ли по направлению* $a \in \mathfrak{a}$. Операторы L_a задают представление алгебры Ли $\mathfrak{a}$ в Ω^q, так как из приведенных формул легко следует, что $L_{[a, b]} = [L_a, L_b]$.

В дальнейшем мы будем использовать следующие обозначения: для $a \in \mathfrak{a}$, $m \in \Omega^0$ через am обозначается элемент $i_a dm \in \Omega^0$; далее, для $\xi \in \Omega^1$ через (ξ, a) или (a, ξ) обозначается элемент $i_a\xi \in \Omega^0$. Мы будем предполагать, что из $(\xi, a) = 0$ для всех $\xi \in \Omega^1$ следует $a = 0$.

Примеры комплексов над алгебрами Ли будут приведены ниже.

3. Скобка Схоутена и гамильтоновы операторы. Цель этого пункта — в рамках введенных понятий определить симплектическую структуру. Связь с обычным определением симплектической структуры будет указана в п. 6.

Оператор $H\colon \Omega^1 \to \mathfrak{a}$ назовем *кососимметричным*, если $(H\xi, \eta) = -(\xi, H\eta)$ для любых $\xi, \eta \in \Omega^1$. *Скобкой Схоутена* двух кососимметричных операторов $H, K\colon \Omega^1 \to \mathfrak{a}$ назовем трилинейное отображение $[H, K]\colon \Omega^1 \times \Omega^1 \times \Omega^1 \to \Omega^0$, определенное формулой

$$[H, K](\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (KL_{H\xi_1}\xi_2, \xi_3) + (HL_{K\xi_1}\xi_2, \xi_3) + (\text{цикл}), \quad (3)$$

где слово (цикл) здесь и далее означает сумму по циклическим перестанов-

кам индексов 1, 2, 3. Оператор H: $\Omega^1 \to \mathfrak{a}$ назовем *гамильтоновым*, если он кососимметричен и $[H, H] = 0$.

Всякий гамильтонов оператор H: $\Omega^1 \to \mathfrak{a}$ позволяет построить связанный с ним гамильтонов формализм. Скобка Пуассона вводится по формуле $\{m_1, m_2\} = (Hdm_1, dm_2)$, $m_1, m_2 \in \Omega^0$; она удовлетворяет на Ω^0 тождеству Якоби. Аналогом гамильтонова соответствия между функциями и векторными полями в данной теории является отображение Hd: $\Omega^0 \to \mathfrak{a}$; можно доказать, что это отображение является морфизмом алгебр Ли. Подробное изложение всех этих фактов содержится в [8] — [10], поэтому мы не останавливаемся на них и переходим к определению симплектической структуры.

Если имеется кососимметричный оператор H: $\Omega^1 \to \mathfrak{a}$, то легко показать, что на его образе $L = \operatorname{Im} H \subset \mathfrak{a}$ корректно определено спаривание

$$\omega_H (a, b) = (a, H^{-1}b) \in \Omega^0, \tag{4}$$

т. е. если $a, b \in L = \operatorname{Im} H$, то $\omega_H (a, b)$ определено однозначно. Более общо, формула (4) имеет смысл для всевозможных пар $(a, b) \in L_1 \times L$, где $L = \operatorname{Im} H$, $L_1 = (\operatorname{Ker} H)^\perp$ — подпространство в $\mathfrak{a}$, состоящее из всевозможных a таких, что $(a, \xi) = 0$ для всех $\xi \in \operatorname{Ker} H$. Очевидно, что $L \subset L_1$. Мы охарактеризуем теперь гамильтоновы операторы в терминах спаривания (4). Введем некоторые определения.

Пусть в алгебре Ли $\mathfrak{a}$ зафиксированы два линейных подпространства $L \subset L_1 \subset \mathfrak{a}$ так, что $[L, L] \subset L_1$ (подчеркнем, что ни L, ни L_1 не обязаны быть подалгебрами алгебры Ли $\mathfrak{a}$).

Определение. Билинейное отображение ω: $L_1 \times L \to \Omega^0$ будем называть *обобщенным 2-коциклом* на $(\mathfrak{a}, \Omega)$, если

(а) ω кососимметрично на $L \times L$,

(б) для любых $a_1, a_2, a_3 \in L$ выполняется соотношение

$$a_1\omega (a_2, a_3) - \omega ([a_1, a_2], a_3) + (\text{цикл}) = 0. \tag{5}$$

Очевидно, в случае, когда L является подалгеброй алгебры Ли $\mathfrak{a}$, данное определение переходит в обычное определение 2-коцикла на этой подалгебре (со значениями в Ω^0).

Будем теперь рассматривать элементы $\xi \in \Omega^1$ только на подпространстве L_1. Таким образом, два элемента $\xi_1, \xi_2 \in \Omega^1$ мы отождествим, если $(\xi_1, a) = (\xi_2, a)$ для всех $a \in L_1$. Соответствующее фактор-пространство обозначим через $\Omega^1_{L_1}$.

Определение. Обобщенный 2-коцикл ω будем называть *невырожденным*, или *обобщенной симплектической структурой* на $(\mathfrak{a}, \Omega)$, если существует изоморфизм i: $L \to \Omega^1_{L_1}$ такой, что

$$(a, ib) = \omega (a, b), \ a \in L_1, \quad b \in L. \tag{6}$$

Теорема. *Всякий гамильтонов оператор* H: $\Omega^1 \to \mathfrak{a}$ *определяет обобщенную симплектическую структуру* ω_H *на* $(\mathfrak{a}, \Omega)$, *если положить* $L = \operatorname{Im} H$, $L_1 = (\operatorname{Ker} H)^\perp$, $\omega_H (a, b) = (a, H^{-1}b)$.

Обратно, по всякой обобщенной симплектической структуре можно построить гамильтонов оператор.

Доказательство. Пусть H: $\Omega^1 \to \mathfrak{a}$ — гамильтонов оператор. Проверим, что $[L, L] \subset L_1$, т. е. что для любых $a_1, a_2 \in \operatorname{Im} H$ имеем $[a_1, a_2] \in (\operatorname{Ker} H)^\perp$. Пусть $a_i = H\xi_i$, $\xi \in \operatorname{Ker} H$. Тогда, согласно (3), имеем

$$0 = -\frac{1}{2} [H, H] (\xi_1, \xi_2, \xi) = (L_{H\xi_1}\xi_2, H\xi) + (L_{H\xi_2}\xi, H\xi_1) + (L_{H\xi}\xi_1, H\xi_2) =$$
$$= (L_{H\xi_2}\xi, H\xi_1) = -(\xi, [H\xi_2, H\xi_1]) = (\xi, [a_1, a_2]),$$

что и требовалось.

Кососимметричность ω_H на $L \times L$, очевидно, следует из кососимметричности оператора H. Далее, для $a_i = H\xi_i$, $i = 1, 2, 3$, имеем

$$a_1\omega_H(a_2, a_3) - \omega_H([a_1, a_2], a_3) + (\text{цикл}) = (H\xi_1)(H\xi_2, \xi_3) - ([H\xi_1, H\xi_2], \xi_3) + \\ + (\text{цикл}) = -(H\xi_3, L_{H\xi_1}\xi_2) + (\text{цикл}) = \frac{1}{2}[H, H](\xi_1, \xi_2, \xi_3) = 0,$$

т. е. условие (5) выполнено.

Проверим невырожденность ω_H. Построим сначала отображение i. Всякому $b \in L = \operatorname{Im} H$ сопоставим класс эквивалентности элемента $H^{-1}b \in \Omega^1$ в фактор-пространстве $\Omega^1_{L_1}$ (поскольку всякие два прообраза элемента b отличаются на элемент из $\operatorname{Ker} H$, а $L_1 = (\operatorname{Ker} H)^\perp$, данный способ сопоставления корректен). Обозначим этот элемент через $\overline{H^{-1}b} \in \Omega^1_{L_1}$. Мы получим отображение i: $L \to \Omega^1_{L_1}$, задаваемое формулой $ib = \overline{H^{-1}b}$. Оно является изоморфизмом. В самом деле, очевидно, что это есть отображение «на». Далее, если $b \in \operatorname{Ker} i$, то, по определению $\Omega^1_{L_1}$, имеем $(a, H^{-1}b) = 0$ для всех $a \in L_1 = (\operatorname{Ker} H)^\perp$ и, в частности, для всех a, имеющих вид $a = H\xi$, $\xi \in \Omega^1$. Отсюда $(\xi, b) = 0$ для любого $\xi \in \Omega^1$, и, следовательно, $b = 0$. Итак, всякий гамильтонов оператор определяет обобщенную симплектическую структуру.

Обратно, пусть заданы пара $L \subset L_1 \subset \mathfrak{a}$ и невырожденный обобщенный 2-коцикл ω на $(\mathfrak{a}, \Omega)$. Для всякого элемента $\xi \in \Omega^1$ рассмотрим соответствующий класс эквивалентности $\bar{\xi} \in \Omega^1_{L_1}$. В силу невырожденности, существует однозначно определенный элемент $b = i^{-1}\bar{\xi} \in L$ такой, что $(a, \xi) = \omega(a, b)$, $a \in L_1$. Сопоставляя элементу $\xi \in \Omega^1$ элемент $b = i^{-1}\bar{\xi} \in L$, мы получаем линейный оператор H: $\Omega^1 \to L \subset \mathfrak{a}$ такой, что $(a, \xi) = \omega(a, H\xi)$, $\xi \in \Omega^1$, $a \in L_1$. Кососимметричность оператора H легко следует из кососимметричности ω на $L \times L$. Обращение в 0 скобки Схоутена $[H, H]$ вытекает непосредственно из условия (5). Итак, оператор H — гамильтонов и теорема, таким образом, доказана.

З а м е ч а н и е. Для кососимметричного оператора H условие гамильтоновости $[H, H] = 0$ можно переформулировать следующим эквивалентным образом: для любых $\xi, \eta \in \Omega^1$ выполнено условие

$$[H\xi, H\eta] = H(i_{H\xi}d\eta - i_{H\eta}d\xi + di_{H\xi}\eta).$$

В частности, образ $\operatorname{Im} H$ гамильтонова оператора замкнут относительно коммутатора в $\mathfrak{a}$[1]). Из этого факта и доказанной теоремы вытекает, что невырожденный обобщенный 2-коцикл определяет подалгебру L алгебры Ли $\mathfrak{a}$ и обычный 2-коцикл на ней.

4. Интерпретация классического уравнения Янга — Бакстера. Пусть алгебра Ли $\mathfrak{a}$ является топологической алгеброй Ли. Построим специального вида комплекс Ω над $\mathfrak{a}$, введя пространства Ω^q, $q \geqslant 0$, а также операторы d и i_a, $a \in \mathfrak{a}$, следующим образом. Положим $\Omega^0 = \mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$); далее, пусть Ω^q есть пространство полилинейных, кососимметричных и непрерывных по своим аргументам форм $\omega(a_1, \ldots, a_q)$, принимающих значения в $\mathbf{R}$ (или $\mathbf{C}$). Полагаем

$$d\omega(a_1, \ldots, a_{q+1}) = \sum_{i<j} (-1)^{i+j}\omega([a_i, a_j], a_1, \ldots, \hat{a}_i, \ldots, \hat{a}_j, \ldots, a_{q+1}),$$

$$(i_a\omega)(a_1, \ldots, a_{q-1}) = \omega(a, a_1, \ldots, a_{q-1}).$$

Как нетрудно проверить, все необходимые требования (см. п. 2) при этом выполнены и, таким образом, возникает комплекс Ω над алгеброй Ли $\mathfrak{a}$.

О п р е д е л е н и е. Гамильтонов оператор H: $\Omega^1 \to \mathfrak{a}$ мы будем в данном случае называть *оператором Янга — Бакстера*, а условие обра-

[1]) Это независимо заметил также Ю. Л. Далецкий.

щения в 0 скобки Схоутена $[H, H]$, приобретающее в этой ситуации вид

$$(\xi_1, [H\xi_2, H\xi_3]) + (\text{цикл}) = 0, \quad \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \Omega^1, \tag{7}$$

— *классическим уравнением Янга — Бакстера.*

Дадим наобходимые пояснения. Поскольку $\Omega^1 = \mathfrak{a}^*$, оператор H является элементом пространства $\mathrm{Hom}(\mathfrak{a}^*, \mathfrak{a})$. В случае конечномерных или ядерных пространств имеется естественное соответствие между $\mathrm{Hom}(\mathfrak{a}^*, \mathfrak{a})$ и $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$. Поэтому неизвестную функцию, входящую в классическое уравнение Янга — Бакстера, обычно рассматривают, как элемент $\mathfrak{a} \otimes \mathfrak{a}$. Неестественность подобной интерпретации, на наш взгляд, сказывается в том, что для определения классического уравнения Янга — Бакстера (см. п. 1) приходится вкладывать алгебру Ли в ассоциативную алгебру с единицей, а затем доказывать, что оно не зависит от способа вложения. То определение классического уравнения Янга — Бакстера, которое мы привели, не требует никаких дополнительных структур.

Традиционная форма классического уравнения Янга — Бакстера (п. 1) может быть получена из нашего определения следующим образом. В качестве алгебры Ли $\mathfrak{a}$ рассмотрим алгебру токов на $\mathbf{C}$ со значениями в конечномерной алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Будем предполагать, что топология в $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{a}^*$ выбрана таким образом, что элементы $\mathrm{Hom}(\mathfrak{a}^*, \mathfrak{a})$ задаются ядрами $r(u_1, u_2)$, принимающими значения в $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$; кососимметричные операторы $H\colon \Omega^1 \to \mathfrak{a}$ тогда задаются ядрами, удовлетворяющими условию

$$r(u_1, u_2) = -\sigma^{21} r(u_2, u_1), \tag{8}$$

где $\sigma^{21}\colon \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ — оператор перестановки, действующий по правилу $\sigma^{21}(a \otimes b) = b \otimes a$ (ср. (8) с условием унитарности (2)). Зафиксируем базис $e_1, \ldots, e_n$ в алгебре Ли $\mathfrak{g}$. Тогда, как нетрудно проверить, равенство (7) может быть переписано в терминах ядра r следующим образом [1]):

$$\sum_{\alpha,\beta} \left(r^{j\alpha}(u_2, u_1)\, r^{k\beta}(u_3, u_1)\, [e_\alpha, e_\beta]^i + r^{k\alpha}(u_3, u_2)\, r^{i\beta}(u_1, u_2)\, [e_\alpha, e_\beta]^j + \right.$$
$$\left. + r^{i\alpha}(u_1, u_3)\, r^{j\beta}(u_2, u_3)\, [e_\alpha, e_\beta]^k\right) = 0, \quad i, j, k = 1, \ldots, n. \tag{9}$$

Остается лишь убедиться, что система полученных равенств является (с учетом условия (8)) координатной записью уравнения (1). Мы видим, таким образом, что система (1) — (2) есть запись условия гамильтоновости оператора H. Поэтому, в силу теоремы п. 3, мы можем охарактеризовать решения этой системы, как обобщенные невырожденные 2-коциклы на $(\mathfrak{a}, \Omega)$.

В случае, когда алгебра Ли $\mathfrak{a}$ конечномерна, обобщенный невырожденный 2-коцикл на $(\mathfrak{a}, \Omega)$ является $\mathbf{R}$- или $\mathbf{C}$-значным 2-коциклом на подалгебре алгебры Ли $\mathfrak{a}$ (в самом деле, простое рассуждение, использующее соображения размерности, показывает, что из условия невырожденности вытекает в случае конечномерной алгебры Ли $\mathfrak{a}$ совпадение подпространств L и L_1). В случае же, когда $\mathfrak{a}$ есть бесконечномерная алгебра Ли, вообще говоря, существуют и такие решения классического уравнения Янга — Бакстера (7), для которых включение $L \subset L_1$ — строгое.

Отметим, что тот факт, что уравнение Янга — Бакстера входит в развитую нами схему, понял В. Г. Дринфельдъ. Он также для случая конечномерных алгебр Ли, для которых алгебра Ли интегрируется до группы, сформулировал (при $\Omega^0 = \mathbf{C}$, $\Omega^1 = \mathfrak{g}^*$) соответствующее условие в групповых терминах [16].

---

[1]) Не следует путать координаты тензора r^{ij} с обозначениями r^{12}, r^{13}, r^{23}, традиционно принятыми в данной теории.

5. Дифференциально-геометрические объекты формального вариационного исчисления. Рассмотрим кольцо A многочленов от букв $u_\alpha^{(i)}$, где α пробегает некоторое множество I, конечное или бесконечное, $i = 0, 1, 2, \ldots$ Прежде чем ввести связанные с формальным вариационным исчислением алгебру Ли и комплекс над ней, мы опишем вспомогательный объект — комплекс де Рама кольца A. Рассмотрим алгебру Ли $\mathfrak{a}$ всех дифференцирований ∂ кольца A и введем пространства Ω^q, состоящие из всевозможных кососимметричных полилинейных над A форм $\omega(\partial_1, \ldots, \partial_q)$, принимающих значения в кольце A. Операторы $d\colon \Omega^q \to \Omega^{q+1}$ и $i_\partial : \Omega^q \to \Omega^{q-1}$, $\partial \in \mathfrak{a}$, определим, соответственно, по формулам

$$d\omega(\partial_1, \ldots, \partial_{q+1}) = \sum_i (-1)^{i+1} \partial_i \omega(\partial_1, \ldots, \hat{\partial}_i, \ldots, \partial_{q+1}) + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([\partial_i, \partial_j], \partial_1, \ldots, \hat{\partial}_i, \ldots, \hat{\partial}_j, \ldots, \partial_{q+1}),$$

$$(i_\partial\omega)(\partial_1, \ldots, \partial_{q-1}) = \omega(\partial, \partial_1, \ldots, \partial_{q-1}).$$

Возникает комплекс $\Omega(A)$ над алгеброй Ли $\mathfrak{a}$ дифференцирований кольца A, называемый *комплексом де Рама* кольца A. В алгебре Ли $\mathfrak{a}$ мы выделим дифференцирование, обозначаемое d/dx, и определяемое формулой $(d/dx) f = \sum_{i,\alpha} u_\alpha^{(i+1)} \partial f / \partial u_\alpha^{(i)}$. Рассмотрим подалгебру $\mathfrak{a}_1$ алгебры Ли $\mathfrak{a}$, состоящую из дифференцирований, коммутирующих с d/dx.

Основной комплекс $(\tilde{\Omega}, d)$ мы введем следующим образом. Будем считать $\omega \in \Omega^q$ эквивалентной 0, если ω есть производная Ли $L_{d/dx}\omega_1$ некоторой формы $\omega_1 \in \Omega^q$. Совокупность q-форм, эквивалентных 0, обозначим через Ω_0^q и положим $\tilde{\Omega}^q = \Omega^q / \Omega_0^q$. В пространстве $\tilde{\Omega} = \bigoplus \tilde{\Omega}^q$ корректным образом определены отображения $d\colon \tilde{\Omega}^q \to \tilde{\Omega}^{q+1}$ и $i_\partial\colon \tilde{\Omega}^q \to \tilde{\Omega}^{q-1}$ при любом $\partial \in \mathfrak{a}_1$. Нетрудно проверить, что для d и i_∂ выполнены требования п. 2 и, таким образом, возникает комплекс $(\tilde{\Omega}, d)$ над алгеброй Ли $\mathfrak{a}_1$.

Пара, состоящая из алгебры Ли дифференцирований ∂ кольца A таких, что $[\partial, d/dx] = 0$, и построенного выше комплекса $(\tilde{\Omega}, d)$, и является основным объектом формального вариационного исчисления.

Алгебру Ли $\mathfrak{a}_1$, а также пространства $\tilde{\Omega}_0$ и $\tilde{\Omega}_1$ можно описать несколько более содержательным образом. Как нетрудно видеть, всякое дифференцирование из $\mathfrak{a}_1$ имеет вид $\partial = \sum_{i,\alpha} h_\alpha^{(i)} \partial / \partial u_\alpha^{(i)}$, где $h_\alpha^{(i)} \stackrel{\text{def}}{=} (d/dx)^i h_\alpha$. Обозначим через A^I совокупность всевозможных последовательностей $h = \{h_\alpha\}$, $h_\alpha \in A$, $\alpha \in I$. Всякую такую последовательность мы будем называть *векторным полем*. Поскольку всякое дифференцирование $\partial \in \mathfrak{a}_1$ однозначно определяется набором $h_\alpha = \partial u_\alpha$, можно интерпретировать алгебру Ли $\mathfrak{a}_1$, как пространство векторных полей A^I, наделенное коммутатором $k = [h, g]$, где

$$k_\beta = \sum_{\alpha, i} \left(h_\alpha^{(i)} \frac{\partial g_\beta}{\partial u_\alpha^{(i)}} - g_\alpha^{(i)} \frac{\partial h_\beta}{\partial u_\alpha^{(i)}} \right), \quad \beta \in I. \tag{10}$$

Коммутатор в пространстве векторных полей был впервые введен по формуле (10) в [4]. Далее, пространство $\tilde{\Omega}^0$, очевидно, совпадает с фактор-пространством $\bar{A} = A/(d/dx)A$ и состоит, таким образом, из элементов вида $\int f\,dx$, $f \in A$; такие элементы в формальном вариационном исчислении называются *функционалами*. Наконец, можно проверить, что пространство $\tilde{\Omega}^1$ отождествляется с пространством $\bar{A}$ таких последователь-

ностей $\xi = \{\xi_\alpha\}$, $\xi_\alpha \in A$, $\alpha \in I$, что $\xi_\alpha \neq 0$ лишь для конечного набора индексов α. Спаривание $(\xi, h) \in \tilde{A}$ между 1-формой $\xi \in \bar{A}$ и векторным полем $h \in A^I$ определяется формулой $(\xi, h) = \int \sum_\alpha \xi_\alpha h_\alpha \, dx \in \bar{A}$. Детальное изложение этих фактов имеется в работе [10].

Рассмотрим гамильтоновы операторы. Пусть $H: \tilde{\Omega}^1 \to \mathfrak{a}_1$ — гамильтонов оператор. Согласно принятым нами соглашениям, можно считать, что H действует из пространства $\bar{A}$ 1-форм в пространство A^I векторных полей, и, тем самым, может быть задан бесконечной матрицей $H = (H_{\alpha\beta})$, $H_{\alpha\beta}: A \to A$, $\alpha, \beta \in I$. Обычно в вариационном исчислении предполагают операторы $H_{\alpha\beta}$ дифференциальными, т. е. имеющими вид [1])

$$H_{\alpha\beta} = \sum_{i=0}^{n(\alpha,\beta)} a_{\alpha\beta i} \left(\frac{d}{dx}\right)^i, \qquad a_{\alpha\beta i} \in A.$$

Косая симметрия такого оператора H сводится к соотношениям

$$\sum_{i=0}^{n(\alpha,\beta)} a_{\alpha\beta i} \left(\frac{d}{dx}\right)^i = - \sum_{i=0}^{n(\beta,\alpha)} \left(-\frac{d}{dx}\right)^i \circ a_{\beta\alpha i}. \tag{11}$$

Условие обращения в 0 скобки Схоутена $[H, H]$ можно, как показано в [8], переписать следующим образом:

$$((D_H\xi_1)H\xi_2, \xi_3) + (\text{цикл}) = 0, \qquad \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \bar{A}, \tag{12}$$

где через $D_H\xi$, при фиксированном $\xi \in \bar{A}$, обозначается оператор $(D_H\xi)$: $\bar{A} \to \bar{A}$ с матричными элементами

$$(D_H\xi)_{\alpha\beta} = \sum_{i,j,\gamma} \frac{\partial a_{\alpha\gamma i}}{\partial u_\beta^{(j)}} \xi_\gamma^{(i)} \left(\frac{d}{dx}\right)^j.$$

Основываясь на формулах (11) — (12), удается записать условия гамильтоновости оператора H в виде системы уравнений на коэффициенты $a_{\alpha\beta i} \in A$, решая которую, в конечном счете получаем примеры гамильтоновых операторов вариационного исчисления. Подробное описание гамильтонова формализма вариационного исчисления, а также разбор примеров можно найти в работах [8] — [10].

6. Конечномерные гамильтоновы многообразия. Пусть M — гладкое m-мерное многообразие, $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли векторных полей на M, (Ω, d) — комплекс дифференциальных форм на M, т. е. комплекс де Рама кольца $C^\infty(M)$ гладких функций на M (см. п. 5). Пара, состоящая из указанных алгебры Ли $\mathfrak{a}$ и комплекса (Ω, d) над ней, и является основным объектом рассмотрения данного пункта.

Предположим, что всякой точке $x \in M$ поставлен в соответствие линейный оператор $H(x)$: $T_x^*M \to T_xM$, гладко зависящий от x и кососимметричный при всяком $x \in M$, т. е. такой, что $(H(x)\xi, \eta) = -(\xi, H(x)\eta)$, $\xi, \eta \in T_x^*M$. Иначе говоря, мы предполагаем, что на M задано бивекторное поле $H(x) = \{H^{ij}(x)\}$. Такое поле определяет, очевидно, некоторый кососимметричный оператор H: $\Omega^1 \to \mathfrak{a}$. Условие гамильтоновости оператора H, т. е. условие обращения в 0 скобки Схоутена $[H, H]$, как не-

[1]) То, что $H_{\alpha\beta}$ имеет такой вид, означает локальность скобок Пуассона, т. е. в других обозначениях $\{u_\alpha(x), u_\beta(y)\} = \sum a_{\alpha\beta i}\delta^{(i)}(x-y)$.

трудно видеть, может быть записано в координатах следующим образом:

$$\sum_{\alpha}\left(H^{i\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}H^{jk}+H^{j\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}H^{ki}+H^{k\alpha}\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}H^{ij}\right)=0,\quad i,j,k=1,\ldots,m. \tag{13}$$

Определение. Многообразие M, снабженное бивекторным полем $H(x)$, удовлетворяющим условию (13), мы будем называть *гамильтоновым многообразием*.

На всяком гамильтоновом многообразии, согласно изложенной выше общей схеме, может быть построен гамильтонов формализм, т. е. введены скобки Пуассона функций

$$\{f,g\}=\sum_{i,j}H^{ij}(x)\frac{\partial f}{\partial x^{j}}\frac{\partial g}{\partial x^{i}},\qquad f,g\in C^{\infty}(M),$$

удовлетворяющие тождеству Якоби, указано соответствие между функциями на M (гамильтонианами) и гамильтоновыми векторными полями и т. д. Гамильтоново многообразие является весьма естественным обобщением симплектического многообразия. В самом деле, согласно теореме п. 3, со всяким гамильтоновым многообразием M можно связать пару пространств $L\subset L_1\subset \mathfrak{a}$ и невырожденный обобщенный 2-коцикл ω, определенный на $L_1\times L$. Если оператор $H(x)$ при всяком $x\in M$ осуществляет изоморфизм T_x^*M с T_xM (что возможно лишь при четном m), то, как нетрудно видеть, пространство L совпадает со всей алгеброй Ли $\mathfrak{a}$, а указанный 2-коцикл ω — это замкнутая невырожденная билинейная форма на M, т. е. симплектическая структура.

Случай, промежуточный между гамильтоновыми и симплектическими многообразиями, исследован А. Лихнеровичем [17]. Это — так называемые *пуассоновы многообразия*, т. е. многообразия, снабженные бивекторным полем постоянного ранга $2n<m$, удовлетворяющим условию (13) Как показано в работе [17], всякое пуассоново многообразие допускает слоение коразмерности $m-2n$ на симплектические многообразия. Слои касательны к подпространствам $\operatorname{Im}H(x)\subset T_xM$, а симплектическая структура на них индуцирована бивекторным полем. Этот результат может быть получен на основе упоминавшегося выше свойства гамильтоновых операторов, состоящего в том, что образ такого оператора замкнут относительно коммутатора в $\mathfrak{a}$. В самом деле, если рассмотреть распределение $\{\operatorname{Im}H(x)\}$ на многообразии M, то, по теореме Фробениуса, оно будет интегрируемым, и, тем самым, определяет указанное слоение. Более сложен общий случай гамильтонова многообразия, когда ранг оператора $H(x)$ может меняться от точки к точке. Ряд возникающих здесь структур исследован в работе А. А. Кириллова [19].

Отметим, что рассмотренный комплекс (Ω, d) не исчерпывает интересных примеров комплексов над алгеброй Ли векторных полей. Важен, например, комплекс $(\bigoplus_q \Lambda^q\mathfrak{a}^*, \partial)$, возникающий при рассмотрении когомологий алгебры Ли $\mathfrak{a}$ с постоянными коэффициентами (см. [11] — [13]). Другой интересный комплекс над $\mathfrak{a}$ получается, если в качестве Ω^q взять совокупность всевозможных q-линейных отображений $\mathfrak{a}$ в себя; действие алгебры Ли $\mathfrak{a}$ на Ω^q индуцируется присоединенным действием на $\mathfrak{a}$. Этот комплекс тесно связан с деформациями алгебр Ли (см. [13], [18]).

Заслуживают внимания также комплексы над алгебрами Ли, возникающие в связи с расслоенными пространствами. Пусть имеется векторное расслоение $E\xrightarrow{\pi}M$. Обозначим через G группу его автоморфизмов. Пусть

(Ω, d) есть комплекс дифференциальных форм на E, удовлетворяющий естественным требованиям согласованности со структурой расслоения (или, в наших терминах, являющийся комплексом над алгеброй Ли группы G). Согласно общей схеме, здесь могут быть определены гамильтоновы операторы. Поскольку группа G содержит в качестве подгруппы группу токов на многообразии M со значениями в $GL(n)$, а также (в случае тривиального расслоения) группу автоморфизмов базы M, условие гамильтоновости здесь обобщает классическое уравнение Янга — Бакстера, с одной стороны, и условие гамильтоновости (13), с другой. Соответствующие формулы будут опубликованы отдельно.

Интересен бесконечномерный аналог этой ситуации, который получится, если алгебру Ли векторных полей на базе M заменить алгеброй Ли векторных полей формального вариационного исчисления.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Захаров В. Е., Фаддеев Л. Д.* Уравнение Кортевега — де Фриза — вполне интегрируемая гамильтонова система.— Функц. анализ, 1971, т. 5, вып. 4, с. 18—27.
2. *Gardner C. S.* Korteweg — de Vries equation and generalizations, IV.— J. Math. Phys., 1971, v. 12, № 8, p. 1548—1551.
3. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.* Асимптотика резольвенты штурм-лиувиллевских уравнений и алгебра уравнений Кортевега — де Фриза. УМН, 1975, т. 30, вып. 5, с. 67—100.
4. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.* Дробные степени операторов и гамильтоновы системы.— Функц. анализ, 1976, т. 10, вып. 4, с. 13—29.
5. *Гельфанд И. М., Дикий Л. А.* Резольвента и гамильтоновы системы.— Функц. анализ, 1977, т. 11, вып. 2, с. 11—27.
6. *Богоявленский О. И., Новиков С. П.* О связи гамильтоновых формализмов стационарных и нестационарных задач.— Функц. анализ, 1976, т. 10, вып. 1, с. 9—13.
7. *Magri F.* A simple model of the integrable Hamiltonian equation.— J. Math. Phys., 1978, v. 19, № 5, p. 1156—1162.
8. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* Гамильтоновы операторы и связанные с ними алгебраические структуры.— Функц. анализ, 1979, т. 13, вып. 4, с. 13—30.
9. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* Скобка Схоутена и гамильтоновы операторы.— Функц. анализ, 1980, т. 14, вып. 3, с. 71—74.
10. *Гельфанд И. М., Дорфман И. Я.* Гамильтоновы операторы и бесконечномерные алгебры Ли.— Функц. анализ, 1981, т. 15, вып. 3, с. 23—40.
11. *Гельфанд И. М., Фукс Д. Б.* Когомологии алгебр Ли формальных векторных полей.— Изв. АН СССР, сер. матем., 1970, т. 34, вып. 2, с. 322—337.
12. *Гельфанд И. М., Фукс Д. Б.* Когомологии алгебры Ли векторных полей на окружности.— Функц. анализ, 1968, т. 2, вып. 4, с. 92—93.
13. *Гельфанд И. М., Фейгин Б. Л., Фукс Д. Б.* Когомологии алгебры Ли формальных векторных полей с коэффициентами в сопряженном к ней пространстве и вариации характеристических классов слоений.— Функц. анализ, 1974, т. 8, вып. 2, с. 13—29.
14. *Кулиш П. П., Склянин Е. К.* О решениях уравнения Янга — Бакстера.— В кн.: Дифференциальная геометрия, группы Ли и механика, III (Зап. научн. семин. ЛОМИ, т. 95), Л.: Наука, 1980, с. 129—160.
15. *Белавин А. А., Дринфельд В. Г.* О решениях классического уравнения Янга—Бакстера для простых алгебр Ли.— Функц. анализ, 1982, т. 16, вып. 3, с. 1—29.
16. *Дринфельд В. Г.* Гамильтоновы структуры на группах Ли, биалгебры Ли и геометрический смысл классических уравнений Янга — Бакстера.— ДАН СССР, 1982, т. 266.
17. *Lichnerowicz A.* Les variétés de Poisson et leurs algébres de Lie associeés.— J. Diff. Geom., 1977, № 12, p. 253—300.
18. *Flato M., Sternheimer D.* Deformations of Poisson brackets, separate and joint analyticity in group representations, nonlinear group representations and physical applications.— In: Harmonic Anal. and Represent. Semisimple Lie Groups. Lect. NATO Adv. Study Inst., Liége 1977.— Dordrecht, 1980, p. 385—448.
19. *Кириллов А. А.* Локальные алгебры Ли.— УМН, 1976, т. 31, вып. 4, с. 57—76.

Институт прикладной математики
АН СССР
Институт химической физики
АН СССР

Поступила в редакцию
1 июня 1982 г.