A. A. Bolibrukh, The Riemann–Hilbert problem, *Uspekhi Mat. Nauk*, 1990, Volume 45, Issue 2(272), 3–47

1990 г. март — апрель *т. 45, вып. 2(272)*
УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

УДК 517.53/.57

ПРОБЛЕМА РИМАНА — ГИЛЬБЕРТА

А. А. Болибрух

СОДЕРЖАНИЕ

Введение

1. С каждым линейным дифференциальным уравнением p-го порядка

$$y^{(p)} + q_1(z)\, y^{(p-1)} + \ldots + q_p(z)\, y = 0 \tag{1}$$

с рациональными на комплексной плоскости C коэффициентами $q_i(z)$ можно связать некоторую группу, называемую *группой монодромии* уравнения (1). Обозначим через D множество $\{a_1, \ldots, a_n\}$ особых точек уравнения (1) на сфере Римана CP^1. Множество D состоит из полюсов коэффициентов $q_1(z), \ldots, q_p(z)$ в конечной комплексной плоскости и, быть может, точки ∞ (в том случае, когда какой-либо из коэффициентов приведенного уравнения, полученного из (1) заменой переменной $\zeta = 1/z$, имеет полюс в точке $\zeta = 0$). Зафиксируем точку z_0, лежащую в $CP^1 \setminus D$ и базис $(y_1, \ldots, y_p)$ в пространстве решений уравнения (1) в окрестности $O(z_0) \subset CP^1 \setminus D$. Функции $y_1, \ldots, y_p$ допускают аналитическое продолжение вдоль любого пути, не пересекающего D. Пусть γ — петля с началом и концом в точке z_0, лежащая в $CP^1 \setminus D$. После аналитического продолжения функций $y_1, \ldots, y_p$ вдоль γ получим функции $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_p$, которые вновь образуют базис в пространстве решений уравнения (1) и, стало быть, связаны с исходными функциями соотношением следующего вида

$$(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_p)\cdot G = (y_1, \ldots, y_p).$$

Сопоставление $\gamma \mapsto G$ зависит лишь от гомотопического класса $[\gamma]$ петли γ и задает гомоморфизм

$$\chi\colon \quad \pi_1(CP^1 \setminus D, z_0) \to GL(p; C) \tag{2}$$

фундаментальной группы пространства $CP^1 \setminus D$ в группу невырожденных комплекснозначных матриц порядка p [1]). Гомоморфизм (2) называется *представлением монодромии* или просто *монодромией* уравнения (1), а группа $\operatorname{Im} \chi$ — *группой монодромии* этого уравнения. При замене точки z_0 на z_0' или при замене базиса $(y_1, \ldots, y_p)$ матрицы монодромии G переходят в $S^{-1}GS$, где S — неособая постоянная матрица. Тем самым монодромия уравнения (1) определена с точностью до эквивалентности.

Аналогично определяется представление монодромии и для систем линейных дифференциальных уравнений

$$df = \omega f, \tag{3}$$

где $\omega = \| \omega_{ij} \|$, $1 \leqslant i, j \leqslant p$, — матрица дифференциальных 1-форм, голоморфных на $CP^1 \setminus D$ (подробнее см. [30]).

Среди систем (3) можно выделить класс *систем типа Фукса*. Это такие системы, матричные дифференциальные формы ω которых имеют в точках из D особенности типа простых полюсов. Обозначим через $B^i = \operatorname{res}\limits_{a_i} \omega$ вычеты формы ω в точках a_i. Если точки ∞ нет среди особых точек фуксовой системы (3), то она принимает вид

$$df = \left(\sum_{i=1}^{n} B^i \frac{dz}{z - a_i} \right) f, \tag{4}$$

причем

$$\sum_{i=1}^{n} B^i = 0. \tag{5}$$

Все особые точки являются для фуксовой системы (4) регулярными особыми точками. Последнее означает, что любое решение f при приближении к особой точке a_i по любой секториальной окрестности с вершиной в точке a_i, не совпадающей с C, растет не быстрее некоторой степени расстояния $| z - a_i |$ до этой точки.

Класс систем (3) с регулярными особыми точками содержит в себе класс фуксовых систем, но не исчерпывается им (см. [1]).

В отличие от систем для уравнений (1) понятия фуксовости и регулярности эквивалентны. Если точка $a_i \in D$ является регулярной особой точкой для (1), то можно показать, что

$$q_j(z) = \frac{r_j(z)}{(z - a_i)^j}, \quad j = 1, \ldots, p, \tag{6}$$

где $r_j(z)$ — голоморфные в окрестности точки a_i функции. Уравнения (1), (6) называются *фуксовыми* в точке a_i.

2. Задача восстановления фуксова уравнения по его монодромии (2) впервые упоминается Риманом в одной из заметок конца 1850-х гг. В 1900 г. она была включена Д. Гильбертом в число его «Математических проблем» под XXI номером и сформулирована следующим образом [2]:

«*Показать, что всегда существует линейное дифференциальное уравнение фуксова типа с заданными особыми точками и заданной группой монодромии*».

Сложилась традиция, по которой эта проблема применительно к фуксовым системам называется в литературе *проблемой Римана — Гильберта* [2]).

[1]) Собственно, речь идет о гомоморфизме группы скольжений универсального накрытия $\tilde{S}$ пространства $CP^1 \setminus D$ в $GL(p; C)$, однако, как правило, удобнее иметь дело с более конкретно заданным объектом — фундаментальной группой, которая известным образом отождествляется с группой скольжений.

[2]) Аналогичное название употребляется и для другой задачи, которая здесь не рассматривается (см., например, [11]).

(Р. — Г.). Конформным преобразованием CP^1 всегда можно добиться того, чтобы точки ∞ не было среди особых точек системы (3), поэтому проблему Р. — Г. можно сформулировать так:

«*Дано представление* (2). *Показать, что всегда существует система* (4), (5) *с заданной монодромией* (2)».

Проблема Р. — Г. являлась объектом исследования многих математиков. Имеется ряд положительных результатов о ее разрешимости (в классе систем с регулярными особыми точками аналогичная проблема разрешима всегда). Краткий обзор этих результатов дан в § 1 настоящей работы.

В § 2 излагаются принадлежащие А. Х. М. Лёвелю [3] результаты о строении пространств решений фуксовых систем и систем с регулярными особыми точками.

§ 3 носит подготовительный характер. Здесь сформулированы некоторые факты из теории приводимых систем и описаны основные технические приемы, используемые в дальнейшем.

В § 5 вводится понятие фуксового веса представления (2) и исследуются его свойства.

Основными результатами настоящей работы являются следующие (см. [4]).

Теорема 1. *Для любого неприводимого представления* (2) *размерности* $p = 3$ *проблема Р. — Г. разрешима.*

Теорема 2. *Для любых трех точек* a_1, a_2, a_3 *и любого представления* (2) *размерности* $p = 3$ *проблема Р. — Г. разрешима.*

Теорема 3. *Для любого* $n > 3$, *любого набора точек* $a_1, \ldots, a_n$ *и любого* $p \geqslant 3$ *найдется такое представление* (2), *для которого не существует реализующей его фуксовой системы.*

Теорема 3 означает, что проблема Р. — Г. имеет отрицательное решение.

Теорема 1 доказывается в § 4. Теоремы 2 и 3 доказаны в § 6 на основании результатов § 5. Здесь же описаны все представления размерности $p = 3$, не реализующиеся фуксовыми системами (следствие 6.1) и приведен конкретный пример такого представления для $n = 4$ (пример 6.1).

В § 7 индексы Гротендика [5] двумерного голоморфного векторного расслоения на CP^1 с неприводимой связностью интерпретируются в терминах фуксового веса монодромии этой связности.

В заключении указана связь между разрешимостью проблемы Р. — Г. в различных постановках, включая постановку в классе систем с регулярными особыми точками и уравнений с ложными особенностями, а также дан краткий обзор литературы по многомерной проблеме Р. — Г.

Я глубоко благодарен В. А. Голубевой и В. П. Лексину, сообщивших мне о работе [6], а также Д. В. Аносову и А. В. Чернавскому, сделавших ряд ценных замечаний по улучшению доказательств.

§ 1. Краткий обзор результатов

1.1. Долгое время считалось, что проблема Р. — Г. полностью решена И. Племелем в работе [7] 1908 г. Однако в начале 1980-х гг. в его доказательстве были обнаружены лакуны (см. [8], [9]). Метод решения, предложенный Племелем, состоял в сведении проблемы Р. — Г. к так называемой однородной граничной задаче Гильберта теории сингулярных интегральных уравнений. Подробное исследование последней задачи содержится в книгах Н. И. Мусхелишвили [10] и Н. П. Векуа [11]. Упомянутое сведение осуществляется следующим образом.

Пусть все точки $a_1, \ldots, a_n$ лежат в конечной комплексной плоскости. Соединим их простым замкнутым контуром L (рис. 1). Зададим на L кусочно-постоянную невырожденную матричную функцию $g(t)$ следующим образом:

$$g(t) = G_i \cdot \ldots \cdot G_1, \quad t \in [a_i; a_{i+1}),$$

где G_i — матрица монодромии (2), соответствующая обходу точки a_i по «малой» петле. Обозначим через C^+ область конечной комплексной плоскости, ограниченную контуром L, через C^- — дополнение к $\bar{C}^+$ в CP^1.

Рассмотрим следующую задачу: найти все такие пары вектор-функций $\varphi^+ = (\varphi^+_{(1)}, \ldots, \varphi^+_{(p)})$ и $\varphi^- = (\varphi^-_{(1)}, \ldots, \varphi^-_{(p)})$, что:

1) $\varphi^+(z)$ голоморфна в C^+, $\varphi^-(z)$ голоморфна в C^- и имеет конечный порядок в точке ∞;

2) $\varphi^+(z)$, $\varphi^-(z)$ непрерывны вплоть до контура L, за исключением точек $a_1, \ldots, a_n$, и на $(a_i; a_{i+1})$ связаны соотношением

$$\varphi^+(t)\, g(t) = \varphi^-(t);$$

3) $\varphi^\pm(z)(z-a_i)^\varepsilon$ стремится к нулю для некоторого $0 \leqslant \varepsilon < 1$ при приближении точки z к a_i по областям C^+ и C^- соответственно.

Эта задача сводится к задаче с непрерывной функцией $g(t)$ (Племель и Векуа осуществляют это сведение по-разному), которая затем решается методами теории сингулярных интегральных уравнений. При этом оказывается, что всегда существует такая система решений $\varphi_1^\pm, \ldots, \varphi_p^\pm$, для которой выполнены следующие условия:

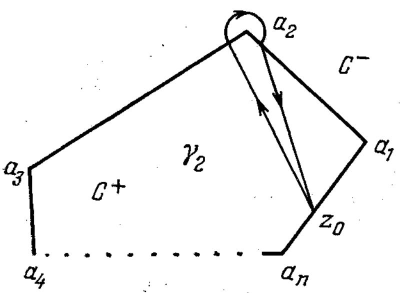


Рис. 1

а) определитель матрицы T, строчки которой составлены из вектор-функций $\varphi_1^\pm(z), \ldots, \varphi_p^\pm(z)$, отличен от нуля во всех точках комплексной плоскости C, за исключением точек из D;

б) матрица $z^S \cdot T(z)$, где S — некоторая целочисленная диагональная матрица, голоморфно обратима в точке ∞.

Функция $\varphi_l^+(z)$ из этой системы решений допускает аналитическое продолжение вдоль любого пути, не пересекающего множества D особых точек, в любую точку $C \setminus D$. Из свойства 2) следует, что при продолжении φ_l^+ вдоль «малой» петли, обходящей точку a_i, φ_l^+ переходит в $\varphi_l^+ G_i^{-1}$(на рис. 1 $i = 2$), поэтому то же самое верно и для матрицы $T(z)$. Таким образом, при аналитическом продолжении вдоль петли γ с началом и концом в точке z_0 матрица T переходит в $\tilde{T}$, где

$$\tilde{T}G = T, \quad G = \chi([\gamma]).$$

То же самое верно и для матрицы

$$T' = (z-a_1)^S T,$$

которая уже является голоморфно обратимой в точке ∞ согласно свойству б) построенной системы решений.

Отсюда и из свойства а) следует, что матричная форма

$$\omega = dT'\,(T')^{-1} \tag{1.1}$$

однозначна на CP^1 и голоморфна вне особых точек $a_1, \ldots, a_n$ из D. Система (3) с матричной формой (1.1) имеет заданную монодромию (2), а точки $a_1, \ldots, a_n$ являются для нее регулярными особыми точками.

Далее Племель применяет некоторую процедуру, с помощью которой переходит от построенной системы к другой с той же монодромией и с теми же особыми точками, которая уже является фуксовой во всех точках кроме, быть может, одной. Доказательство Племеля в этой части не вызывает никаких возражений. Что же касается утверждения Племеля о том, что в последней точке систему также можно привести к фуксовой, то строгое доказательство в общем случае в его работе отсутствует. Однако рассуждение Пле-

меля проходит, если одна из матриц монодромии G_i диагонализируема (см. [9]).

Итак, в работе Племеля доказана разрешимость проблемы Р. — Г. в случае, когда одна из матриц монодромии G_i, соответствующая обходу точки a_i по «малой» петле, диагонализируема.

Племель также первым решил проблему, аналогичную проблеме Р. — Г. в классе систем с регулярными особыми точками.

1.2. После опубликования результата Племеля [7] тематика работ, связанных с проблемой Р. — Г., переместилась в основном в область эффективного построения матриц фуксовой системы по заданным матрицам монодромии $G_1, \ldots, G_n$. В конце 1920-х гг. И. А. Лаппо-Данилевский с помощью развитого им метода аналитических функций от матриц представил решения фуксовой системы и матрицы монодромии $G_1, \ldots, G_n$ в виде сходящихся рядов от матриц коэффициентов этой системы (см. [12]). Эффективное решение проблемы Р. — Г. сводилось в этом случае к обращению полученных рядов и к исследованию вопроса сходимости, который был решен в [12] положительно для матриц $G_1, \ldots, G_n$, близких к единичной матрице.

Тем самым Лаппо-Данилевский доказал разрешимость проблемы Р. — Г. для представлений (2), матрицы монодромии которых, соответствующие обходам точек a_i по «малым» петлям, близки к единичной матрице.

В 1956 г. разрешимость проблемы Р. — Г. для представления (2) размерности $p = 2$ в случае трех особых точек доказал Б. Л. Крылов в [13], построив эффективное решение задачи.

Аналогичную задачу для четырех особых точек рассмотрел Н. П. Еругин [14], установивший, в частности, ее связь с уравнением Пенлеве.

Задача эффективного построения уравнения типа Фукса тесно связана с чрезвычайно важной для приложений задачей вычисления акцессорных коэффициентов, которая в настоящей работе не рассматривается. Информацию по этому вопросу см. в [15, 16, 14].

1.3. Новый этап в изучении проблемы Р. — Г. открыла работа Х. Рёрля [17] 1957 г., впервые применившего к ее решению методы теории расслоений [1]). По представлению (2) Рёрль строит главное расслоение на $CP^1 \setminus D$ со структурной группой $GL(p; C)$. Нам в дальнейшем понадобится координатное описание этого расслоения.

Рассмотрим конечное покрытие $\{U_\alpha\}$ множества $CP^1 \setminus D$ связными односвязными открытыми множествами U_α со связными односвязными пересечениями. Зафиксируем пути γ_α, ведущие из точки z_0 в фиксированные точки $z_\alpha \in U_\alpha$. Пусть $z \in U_\alpha \cap U_\beta$, обозначим через $t_\alpha(z)$ путь от точки z_α к z, лежащий в U_α. Зададим на $U_\alpha \cap U_\beta$ функцию перехода

$$g_{\alpha\beta}(z) = \chi([\gamma_\alpha t_\alpha(z)\, t_\beta^{-1}(z)\, \gamma_\beta^{-1}]). \tag{1.2}$$

Ясно, что функции $g_{\alpha\beta}(z)$ постоянны на $U_\alpha \cap U_\beta$. Нетрудно проверить, что $g_{\alpha\beta} = g_{\beta\alpha}^{-1}$, и условие коцикла

$$g_{\alpha\beta} \cdot g_{\beta\gamma} = g_{\alpha\gamma}$$

выполнено. Обозначим построенное голоморфное расслоение на $CP^1 \setminus D$ через F'.

База $CP^1 \setminus D$ расслоения F' стягивается на свой одномерный остов, поэтому комплексное расслоение F' топологически эквивалентно тривиальному расслоению (см. [18]). Поскольку множество $CP^1 \setminus D$ является многообразием Штейна, то F' голоморфно тривиально (см. [19]). Пусть $\{T_\alpha(z)\}$ — голоморфная тривиализация расслоения F'. Рассмотрим семейст-

[1]) Фактически соображения такого рода восходят к Биркгофу, передоказавшему в [21] результат Племеля, однако в то время адекватного геометрического языка для соответствующего описания не было.

во матричных дифференциальных 1-форм $\{\omega_\alpha\}$:

$$\omega_\alpha = -T_\alpha^{-1}\cdot dT_\alpha. \tag{1.3}$$

Из того, что $T_\alpha^{-1}(z)\, g_{\alpha\beta}(z) = T_\beta^{-1}(z)$ на $U_\alpha \cap U_\beta$ и $g_{\alpha\beta}(z)$ постоянна, следует, что $\omega_\alpha = \omega_\beta$ на $U_\alpha \cap U_\beta$, тем самым семейство (1.3) задает глобальную матричную дифференциальную форму ω, голоморфную на всем $CP^1 \setminus D$. Из построения следует, что система (3) с указанной формой ω имеет заданную монодромию (2). Затем Рёрль продолжает расслоение F' с помощью сечения $\{T_\alpha\}$ на всю сферу Римана CP^1. Продолженное расслоение всегда имеет мероморфное сечение, голоморфно обратимое вне точек из D. Построенная по этому сечению система (3) имеет заданную монодромию, а точки $a_1, \ldots, a_n$ являются для нее регулярными особыми точками.

Таким образом, Рёрль передоказал результаты Племеля, а также доказал разрешимость проблемы Р.— Г. на некомпактной римановой поверхности. Кроме того, Рёрль в [17] доказал также разрешимость в классе систем с регулярными особыми точками проблемы, аналогичной проблеме Р.— Г. для произвольной римановой поверхности (при этом, правда, у построенной системы появляются, вообще говоря, дополнительные «ложные» особенности, не дающие вклада в монодромию).

«Топологический» подход позволяет оценить множество тех представлений, для которых разрешима несколько модифицированная проблема Р.— Г. (Ю. С. Ильяшенко [9]): «В пространстве $(GL(p; C))^{n-1}$ существует счетное объединение собственных аналитических подмногообразий, каждый набор $G_1, \ldots, G_{n-1}$ из дополнения к которому обладает следующим свойством. Для каждого набора $(z-a_1)^{E_1}, \ldots, (z-a_n)^{E_n}$ фуксовых главных частей $\exp 2\pi i E_j = G_j$, $j = 1, \ldots, n$, $G_n = (G_1 \cdot \ldots \cdot G_{n-1})^{-1}$, $\sum_{j=1}^{n} \operatorname{Sp} E_j = 0$ существует фуксова система, фундаментальная матрица решений которой имеет фуксовы главные части из данного набора.»

1.4. В 1979 г. появилась работа [6] В. Деккера, из результатов которой вытекает разрешимость проблемы Р.— Г. для любого набора точек $a_1, \ldots, a_n$ и любого представления (2) размерности $p = 2$. Метод решения состоит в подправлении системы (3) с регулярными особыми точками и заданной монодромией до фуксовой с помощью калибровочных преобразований

$$g = \Gamma(z) f, \tag{1.4}$$

при которых система (3) переходит в систему $dg = \omega' g$ с формой

$$\omega' = d\Gamma\cdot\Gamma^{-1} + \Gamma\omega\Gamma^{-1}. \tag{1.5}$$

Если матричная функция $\Gamma(z)$ мероморфна на CP^1 и голоморфно обратима вне точек из D, то система (3), (1.5) вновь является системой с регулярными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ и той же монодромией. Используя результат П. Делиня [20] о виде матрицы коэффициентов системы с регулярными особыми точками, Деккер доказывает существование матрицы $\Gamma(z)$, приводящей матрицу ω к ω' из (1.5), которая в точках из D имеет особенности типа простых полюсов.

§ 2. Критерии фуксовости системы с регулярными особыми точками

2.1. Рассмотрим произвольную систему (3), форма ω которой голоморфна на $CP^1 \setminus D$. Множество решений X такой системы является p-мерным линейным пространством вектор-функций, голоморфных на универсальном накрытии

$$(\tilde{S}, y_0) \xrightarrow{\pi} (CP^1 \setminus D, z_0).$$

Будем в дальнейшем точки из $\tilde{S}$ обозначать через y, а соответствующие им точки $\pi(y)$ из CP^1 — через z.

После фиксации точек $z_0 \in CP^1 \setminus D$ и $y_0 \in \pi^{-1}(z_0)$ фундаментальная группа $\pi_1(CP^1 \setminus D, z_0)$ отождествляется с группой скольжений накрытия, поэтому можно определить действие g^* элемента $g \in \pi_1(CP^1 \setminus D, z_0)$ на функцию $f(y) \in X$ следующим образом:

$$(g^*f)(y) = f(g^{-1}y). \tag{2.1}$$

Это действие задает представление монодромии (2) системы (3). Действительно, если $(e) = (e_1(y), \ldots, e_p(y))$ — некоторый базис в X, то для фундаментальной матрицы $T(y)$ пространства X, построенной по базису (e) согласно (2.1) имеем

$$(g^*T)(y) = T(g^{-1}y) = T(y)\,\chi(g)$$

(последнее, в частности, означает, что пространство решений X инвариантно относительно действия (2.1) фундаментальной группы $\pi_1(CP^1 \setminus D, z_0)$).

Обозначим через O_i связные односвязные и попарно непересекающиеся окрестности точек a_i в CP^1, а через

$$(\tilde{S}_i, y_i^0) \xrightarrow{\pi_i} (O_i \setminus a_i, z_i^0)$$

— соответствующие универсальные накрытия. Пусть δ_i — петля с началом и концом в точке z_i^0, целиком лежащая в $O_i \setminus a_i$ и соответствующая однократному обходу точки a_i в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Зафиксируем пути γ_i в $CP^1 \setminus D$ из точки z_0 в точки z_i^0 такие, чтобы петля $\prod_{i=1}^{n} (\gamma_i \cdot \delta_i \cdot \gamma_i^{-1})$ была гомотопна постоянному пути (соотношение обхода), обозначим класс петли $\gamma_i \cdot \delta_i \cdot \gamma_i^{-1}$ через g_i. Тем самым определяются вложения $\tilde{S}_i \hookrightarrow \tilde{S}$ (при этом вложении точка y_i^0 переходит в $y_0\gamma_i$ — конечную точку поднятого пути γ_i) и

$$\gamma_i^*\colon \pi_1(O_i \setminus a_i, z_i^0) \to \pi_1(CP^1 \setminus D, z_0). \tag{2.2}$$

Гомоморфизм

$$\chi_i\colon \pi_1(O_i \setminus a_i, z_i^0) \to GL(p; C), \tag{2.3}$$

где $\chi_i = \chi \circ \gamma_i^*$, будем называть *$i$-м локальным представлением*, построенным по представлению (2).

Вложение (2.2) позволяет определить действие описанного выше элемента $g_i \in \pi_1(CP^1 \setminus D, z_0)$ на любую функцию, заданную на $\tilde{S}_i$, в частности, на функцию $\ln(y - a_i)$, которая определяется следующим образом:

$$\ln(y - a_i) = \int_\gamma \frac{d(z - a_i)}{z - a_i},$$

где γ — путь в $O_i \setminus a_i$, соединяющий точки z_i^0 и $\pi_i(y)$ и такой, что $y_i^0\gamma = y$. Из (2.1) и (2.2) следует, что

$$g_i^* \ln(y - a_i) = \ln(y - a_i) + 2\pi i. \tag{2.4}$$

Всюду в дальнейшем под функцией $(y - a_i)^{E_i}$ будет пониматься функция

$$(y - a_i)^{E_i} = \exp(E_i \ln(y - a_i)),$$

заданная на $\tilde{S}_i$.

Фундаментальную группу $\pi_1(CP^1 \setminus D, z_0)$ можно рассматривать как группу с n образующими $g_1, \ldots, g_n$ и единственным соотношением $g_1 \cdot \ldots$

$\ldots \cdot g_n = e$. Обозначим через G_i, E_i матрицы

$$(2.5)\qquad G_i = \chi(g_i),\quad E_i = \frac{1}{2\pi i}\ln G_i,\quad 0 \leqslant \operatorname{Re}\rho_i^j < 1,$$

где ρ_i^j — собственные значения матрицы E_i.

2.2. Перейдем к описанию строения пространства X решений системы (3) в окрестности регулярной особой точки a_i, данному А. Х. М. Лёвелем в [3].

Любая компонента $f_j(y)$ вектор-функции $f(y) \in X|_{\tilde{S}_i}$ может быть представлена в виде так называемой конечной логарифмической суммы (см. [1]):

$$(2.6)\qquad f_j(y) = \sum_{k,\, l \in \sigma} (y - a_i)^{\rho_k} h_{kl}(z) \ln^{b_l}(y - a_i),$$

где сумма конечна, $0 \leqslant \operatorname{Re}\rho_k < 1$, $b_l \in \mathbb{Z}$, $b_l \geqslant 0$, $h_{kl}(z)$ — ряды Лорана с конечной главной частью, и подобные члены (относительно наборов (ρ_k, b_l)) приведены.

Определение 2.1. *Нормированием* $\varphi_i(h_{kl}(z))$ *в точке* a_i или *i-м нормированием ряда Лорана* $h_{kl}(z)$ *с конечной главной частью* называется порядок нуля (порядок полюса со знаком «минус») функции $h_{kl}(z)$ в точке a_i.

Определение 2.2. *I-м нормированием* $\varphi_i(f_j)$ *конечной логарифмической суммы* (2.6) называется число

$$\varphi_i(f_j) = \min_{k,l\in\sigma} \varphi_i(h_{kl}).$$

I-м нормированием вектор-функции $f(y) \in X|_{\tilde{S}_i}$ называется число

$$\varphi_i(f(y)) = \min_{j=1,\ldots,p} \varphi_i(f_j).$$

Нормирование функции $f(y) \equiv 0$ положим по определению равным ∞.

Пример 2.1. Для функций $f_1(z) = z^2 - \frac{1}{z}$, $f_2(z) = y^{1/2}\frac{1}{z^3}\ln^2 y$, $f_3(y) = (z, z\ln y, z^2)$ нормирования $\varphi(f)$ в точке 0 равны:

$$\varphi(f_1) = -1,\quad \varphi(f_2) = -3,\quad \varphi(f_3) = 1.$$

Из определения 2.2 и вида логарифмической суммы (2.6) легко устанавливается, что нормирования обладают следующими свойствами:

1) $\varphi_i(g_i^* f) = \varphi_i(f)$, $i = 1, \ldots, n$;

2) $\forall c \in C \setminus 0 \quad \varphi_i(cf) = \varphi_i(f) \quad \varphi_i(f + g) \geqslant \min(\varphi_i(f), \varphi_i(g))$, причем если $\varphi_i(f) \neq \varphi_i(g)$, то $\varphi_i(f + g) = \min(\varphi_i(f), \varphi_i(g))$;

3) $\forall \lambda < \varphi_i(f) \quad f(y)(y - a_i)^{-\lambda} \to 0$ при стремлении z к точке a_i по любой секториальной окрестности O с вершиной в точке a_i, не совпадающей со всей комплексной плоскостью C (при этом предполагается, что $y \in \pi_i^{-1}(z)$ остается внутри одного листа $\pi_i^{-1}(O)$), причем число $\varphi_i(f)$ является максимальным из всех целых чисел k, обладающих этим свойством $\forall\lambda < k$.

Пространство $X|_{\tilde{S}_i}$ раскладывается в прямую сумму инвариантных относительно действия оператора g_i^* подпространств ${}^mX$ размерности p_m, соответствующих собственным значениям $\varkappa_m$ оператора g_i^*. Нормирование φ_i принимает на ${}^mX$ k_m различных конечных значений ${}^m\varphi_i^1 > \ldots > {}^m\varphi_i^{k_m}$ ($k_m \leqslant p_m$) и задает фильтрацию пространства ${}^mX$ подпространствами

$$0 \subset {}^mX^1 \subset \ldots \subset {}^mX^{k_m} = {}^mX,$$

где ${}^mX^l = \{f \in {}^mX / \varphi_i(f) \geqslant {}^m\varphi_i^l\}$, причем оператор монодромии g_i^* согласно свойству 1) сохраняет эту фильтрацию. Выберем в ${}^mX^1$ базис ${}^me_1, \ldots, {}^me_{l_1}$, в котором оператор $g_i^*|_{{}^mX^1}$ имеет верхний треугольный вид, дополним его

до базиса в ${}^mX^2$ так, чтобы $g_i^*\,|_{{}^mX^2}$ по-прежнему имел верхний треугольный вид и т. д., получим базис $({}^me)$ пространства ${}^mX$. Составим из $({}^me)$ базис (e) пространства X; этот базис, названный в [3] *ассоциированным*, обладает следующими свойствами:

а) нормирование φ_i принимает на элементах базиса (e) все свои значения с учетом кратностей;

б) $\forall m, j\ \varphi_i({}^me_j) \geqslant \varphi_i({}^me_{j+1})$;

в) матрица G_i оператора g_i^* в базисе (e) имеет верхний треугольный вид.

Обозначим через A_i диагональную матрицу нормирований $A_i = \operatorname{diag}(\varphi_i(e_1), \ldots, \varphi_i(e_p))$ ассоциированного базиса (e) пространства $X\,|_{\tilde{S}_i}$. Из свойств б) и в) сразу получаем

Предложение 2.1. *Матричная функция*

$$(2.7)\qquad (z-a_i)^{A_i}E_i\,(z-a_i)^{-A_i},$$

где E_i *из* (2.5), *голоморфна в окрестности* O_i *точки* a_i. *Для любого* $\varepsilon > 0$ *матрица*

$$(z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{E_i}(z-a_i)^{-A_i}(y-a_i)^{\varepsilon}$$

стремится к нулю при стремлении z *к* a_i *по любой секториальной окрестности* O *с вершиной в точке* a_i, *не совпадающей со всей плоскостью* C (*при этом предполагается, что* $y \in \pi_i^{-1}(z)$ *остается в одном листе* $\pi_i^{-1}(O)$).

Обозначим через $T_i(y)$ фундаментальную матрицу пространства $X\,|_{\tilde{S}_i}$, построенную по ассоциированному базису (e).

Предложение 2.2. *Матрица* $T_i(y)$ *может быть представлена в виде*

$$(2.8)\qquad T_i(y) = U_i(z)\,(z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{E_i},$$

где E_i *из* (2.5), *а матрица* $U_i(z)$ *однозначна и голоморфна в окрестности точки* a_i.

Доказательство. Однозначность матрицы $U_i(z)$ следует из того, что в силу (2.1) и (2.4)

$$(g_i^*T_i)(y) = G_i = g_i^*(y-a_i)^{E_i}.$$

Для голоморфности $U_i(z)$ достаточно показать, что для любого $\varepsilon > 0$ $U_i(z)(y-a_i)^{\varepsilon} \to 0$ при стремлении z к a_i по любой секториальной окрестности, не совпадающей с C. Но

$$U_i(z)(y-a_i)^{\varepsilon} = T_i(y)\,(y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}(y-a_i)^{\varepsilon} = S_1(y)\,S_2(y),$$

где

$$S_1(y) = T_i(y)\,(y-a_i)^{-A_i+(\varepsilon/2)I},$$
$$S_2(y) = (z-a_i)^{A_i}(y-a_i)^{-E_i}(z-a_i)^{-A_i}(y-a_i)^{\varepsilon/2}.$$

Поскольку j-й столбец матрицы $S_1(y)$ равен $e_j(y)\cdot(y-a_i)^{-\varphi_i(e_j)+\varepsilon/2}$, то из свойства 3 нормирований следует, что $S_1(y) \to 0$ при стремлении $z = \pi_1(y)$ к точке a_i по любой секториальной окрестности. Из предложения 2.1 то же самое получаем и для $S_2(y)$.

Замечание 2.1. Из свойств ассоциированного базиса и определения 2.2 нормирований следует, что первый столбец матрицы U_i из разложения (2.8) не обращается в 0 в точке a_i.

Определение 2.3. Собственные значения матрицы $A_i + E_i$, числа $\beta_i^j = \varphi_i^j + \rho_i^j$, называются *i-ми показателями пространства X в точке* a_i (в некоторых работах числа β_i^j называются *экспонентами пространства* X).

Предложение 2.3. *Система* (3) *с регулярной особой точкой* a_i *является фуксовой в точке* a_i *тогда и только тогда, когда в разложении* (2.8)

для пространства X решений этой системы

$$\det U_i(a_i) \neq 0. \tag{2.9}$$

Доказательство. Достаточность. Матричная форма ω системы (3) в окрестности точки a_i согласно (2.8) имеет вид

$$\omega = dT_i \cdot T_i^{-1} = \tag{2.10}$$
$$= \left(\frac{dU_i}{dz} U_i^{-1} + \frac{U_i}{z-a_i}(A_i + (z-a_i)^{A_i} E_i (z-a_i)^{-A_i}) U_i^{-1}\right) dz.$$

Если $\det U_i(a_i) \neq 0$, то форма ω имеет в точке a_i полюс первого порядка, т. е. система (3) фуксова в точке a_i.

Необходимость. Пусть форма ω системы (3) в окрестности точки a_i имеет вид

$$\omega = \frac{B^i}{z-a_i} dz + \psi,$$

где ψ — голоморфная форма. Из (2.10) получаем

$$B^i U_i(a_i) = U_i(a_i) L_i, \tag{2.11}$$
$$L_i = A_i + \lim_{z \to a_i} (z-a_i)^{A_i} E_i (z-a_i)^{-A_i}.$$

Предположим, что $\det U_i(a_i) = 0$. Обозначим через Y ядро преобразования $U_i(a_i)$:

$$Y = \{v \in C^p / U_i(a_i) v = 0\}.$$

Из (2.11) следует, что преобразование L_i переводит пространство Y в себя. Пусть v — собственный для L_i вектор из Y, тогда

$$L_i v = \beta_i^j v \tag{2.12}$$

для некоторого j, где β_i^j — один из показателей пространства X в точке a_i. Из (2.12) и вида матрицы L_i следует, что вектор-функция $w = T_i \cdot v$, координатным столбцом которой в базисе (e) является вектор v, принадлежит некоторому подпространству ${}^mX^l$ и имеет нулевые коэффициенты в разложении по части базиса (e), принадлежащей подпространству ${}^mX^{l-1}$. Поэтому $\varphi_i(w) = \varphi_i^j = {}^m\varphi_i^l$ и

$$(z-a_i)^{-A_i} v = v (z-a_i)^{-\varphi_i^j}. \tag{2.13}$$

Обозначим через $\tilde{A}_i$ матрицу $\tilde{A}_i = \operatorname{diag}(\beta_i^1, \ldots, \beta_i^p)$, а через $\tilde{E}_i$ — нильпотентную матрицу $E_i - R$, где $R = \operatorname{diag}(\rho_i^1, \ldots, \rho_i^p)$. Из (2.13) получаем

$$w(y)(y-a_i)^{-\beta_i^j} = T_i(y) v (y-a_i)^{-\beta_i^j} = U_i(z)(y-a_i)^{\tilde{A}_i}(y-a_i)^{\tilde{E}_i}(y-a_i)^{-\tilde{A}_i} v =$$
$$= U_i(z)\left[\sum_{l=0}^{p-1} \frac{1}{l!} \ln^l (y-a_i)(L_i - \tilde{A}_i + o(z-a_i))^l\right] v =$$
$$= U_i(z) v + \sum_{l=1}^{p-1} \frac{1}{l!} \ln^l (y-a_i)[(L_i - \tilde{A}_i)^l + o(z-a_i)] v =$$
$$= U_i(z) v + o(z-a_i)\left[\sum_{l=1}^{p-1} \frac{1}{l!} \ln^l (y-a_i)\right] v.$$

Поскольку $0 \leqslant \operatorname{Re} \rho_i^j < 1$ и $U_i(a_i) v = 0$, то отсюда следует, что $\forall \lambda < \varphi_i^j + 1$ $w(y)(y-a_i)^{-\lambda} \to 0$ при стремлении z к a_i по любой секториальной окрестности точки a_i. Поэтому из свойства 3) нормирований вытекает,

что $\varphi_i(w) \geqslant \varphi_i^j + 1$, что противоречит равенству $\varphi_i(w) = \varphi_i^j$. Полученное противоречие означает, что $\det U_i(a_i) \neq 0$.

Следствие 2.1. *Собственные значения матрицы B^i фуксовой системы (4) совпадают с i-ми показателями пространства решения X этой системы.*

Доказательство следует из (2.10), так как

$$B^i = \lim_{z \to a_i} (z - a_i) \frac{dT_i}{dz} T_i^{-1} = U_i(a_i) L_i U_i^{-1}(a_i). \tag{2.14}$$

Предложение 2.4. *Сумма Σ всех показателей пространства X решений системы (3) с регулярными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ является целым числом и не превосходит нуля:*

$$\Sigma = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \beta_i^j \leqslant 0. \tag{2.15}$$

Система (3) с регулярными особыми точками является системой типа Фукса на CP^1 тогда и только тогда, когда

$$\Sigma = 0. \tag{2.16}$$

Доказательство. Рассмотрим форму $\mathrm{Sp}\,\omega$ на CP^1. Если $T(y)$ — фундаментальная матрица пространства решений X, то

$$\mathrm{Sp}\,\omega = d \ln \det T,$$

поэтому из (2.8) получаем, что

$$\operatorname*{res}_{a_i} \mathrm{Sp}\,\omega = b_i + \sum_{j=1}^{p} \beta_i^j,$$

где b_i — порядок нуля функции $\det U_i(z)$ в точке a_i. По теореме о сумме вычетов

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{p} \beta_i^j + \sum_{i=1}^{n} b_i = 0.$$

Предложение 2.4 следует теперь из предложения 2.3 и того, что $b_i \in \mathbb{Z}$, $b_i \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, n$.|

§ 3. Предварительные сведения. Метод решения

3.1. Метод доказательства теорем 1, 2 введения состоит в следующем: система (3) с регулярными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ и заданной монодромией (2), существование которой доказано в [7], мероморфными в CP^1 голоморфно обратимыми вне точек $a_1, \ldots, a_n$ преобразованиями (1.4) подправляется до фуксовой. При этом используются критерии фуксовости из предложений 2.3, 2.4 и некоторый технический прием, который мы назовем «процедурой $A(a_i, l, j, k)$» и опишем в следующей лемме.

Лемма 3.1. *Пусть l-я строка $u_l(z)$ голоморфной в окрестности O_i точки a_i матрицы $U(z)$ имеет вид*

$$u_l(z) = (z - a_i)^k v_l(z), \tag{3.1}$$

где j-я компонента $v_{lj}(z)$ вектор-строки $v_l(z)$ голоморфна в O_i и $v_{lj}(a_i) \neq 0$. Существует такая мероморфная в CP^1 голоморфно обратимая вне точки a_i матричная функция $\Gamma(z)$, что j-й столбец $x_j(z)$ матрицы $U' = \Gamma U$ имеет вид

$$x_j(z) = (z - a_i)^k x_j'(z), \tag{3.2}$$

где $x'_j(z)$ голоморфен в O_i, $x'_{lj}(a_i) \neq 0$, $x'_{mj}(a_i) = 0$ при $m \neq l$ для m-х компонент x'_{mj} вектор-столбца x'_j.

Если строка $v_l(z)$ из (3.1) голоморфна в O_i, то все элементы матрицы U' также голоморфны в O_i.

Доказательство. Рассмотрим элемент $u_{mj}(z)$ матрицы $U(z)$, $m \neq l$. Если $u_{mj}(z) \not\equiv 0$, то этот элемент можно записать в виде $(z-a_i)^s\, t(z)$, где $t(z)$ — голоморфная в O_i функция и $t(a_i) \neq 0$. Пусть $0 \leqslant s \leqslant k$. Существует многочлен $Q_m\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$ степени $k-s$ такой, что

$$(3.3)\qquad Q_m\left(\frac{1}{z-a_i}\right)u_{lj}(z) + u_{mj}(z) = (z-a_i)^{k+1} f(z),$$

где функция $f(z)$ голоморфна в O_i.

Коэффициенты многочлена $Q_m\left(\frac{1}{z-a_i}\right)$ определяются следующим образом. Старший коэффициент c_1 при $\left(\frac{1}{z-a_i}\right)^{k-s}$ берется равным

$$c_1 = -\frac{t(a_i)}{v_{lj}(a_i)}.$$

Ясно, что

$$\frac{c_1}{(z-a_i)^{k-s}}u_{lj}(z) + u_{mj}(z) = (z-a_i)^r\, t'(z),$$

где $s < r$ и $t'(z)$ голоморфная в O_i функция, $t'(a_i) \neq 0$. Если $r \leqslant k$, то коэффициент c_2 при следующем члене $\frac{1}{(z-a_i)^{k-r}}$ возьмем, равным $c_2 = -\frac{t'(a_i)}{v_{lj}(a_i)}$, и т. д. Если же порядок s нуля функции $u_{mj}(z)$ в точке a_i больше k, то положим $Q_m \equiv 0$. Рассмотрим матрицу

$$(3.4)\qquad \Gamma(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & Q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot & & & \cdot \\ \vdots & & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & Q_{l-1} & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & Q_{l+1} & & & \\ & & & & \cdot & & & \\ & & & & \cdot & & & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & Q_p & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Из построения $\Gamma(z)$ и (3.3) получаем утверждение (3.2) леммы.

Если строка $v_l(z)$ из (3.1) голоморфна в O_i, то голоморфность матрицы $U' = \Gamma U$ следует из голоморфности $U(z)$ и того, что $\deg Q_m \leqslant k$, $m = 1, \dots, \hat{l}, \dots, p$.

Переход от матрицы U к $U' = \Gamma U$ и от пространства X к $X' = \Gamma X$, где $\Gamma(z)$ из (3.4), будет в дальнейшем называться «*процедурой* A (a_i, l, j, k)».

Рассмотрим пространство X решений системы (3), фуксовой в точках $a_1, \dots, \hat{i}, \dots, a_n$ с регулярной особой точкой a_i. Рассмотрим разложения (2.8) для пространства X в точках $a_1, \dots, a_n$.

Лемма 3.2. *Пусть l-я строка u_l матрицы U_i из разложения* (2.8) *для пространства X в точке a_i имеет вид*

$$(3.5)\qquad u_l(z) = (z-a_i)^k v_l(z),$$

где $k > 0$, $v_l(z)$ — голоморфная в O_i вектор-строка и $v_{lt}(a_i) \neq 0$. Если для нормирований φ_i^t пространства X выполнено неравенство $\varphi_i^{t-1} \geqslant \varphi_i^t + k$, то пространство $X' = \Gamma(z) X$, полученное из пространства X в результате применения процедуры $A(a_i, l, t, k)$, является пространством решений системы (3), фуксовой в точках $a_1, \ldots, \hat{i}, \ldots, a_n$, а нормирования $'\varphi_m^j$ и φ_m^j пространств X' и X связаны следующими соотношениями:

$$'\varphi_m^j = \varphi_m^j,\ j = 1, \ldots, p;\quad m \neq i; \tag{3.6}$$
$$'\varphi_i^t = \varphi_i^t + k,\quad '\varphi_i^j \geqslant \varphi_i^j,\quad j = 1, \ldots, \hat{t}, \ldots, p.$$

Доказательство. Фуксовость системы (3) с пространством решений X' в точках $a_1, \ldots, \hat{i}, \ldots, a_n$ и первое равенство из (3.6) следуют из предложений 2.2, 2.3 и из того, что разложения (2.8) для X' имеют вид

$$T'_m(y) = \Gamma(z) U_m(z)(z - a_m)^{A_m}(y - a_m)^{E_m},$$

где $\det \Gamma(a_m) \neq 0$ при $m \neq i$ для матрицы $\Gamma(z)$ из (3.4).

Обозначим через C матрицу $C = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, k_t, 0, \ldots, 0)$. Из леммы 3.1 следует, что матрица $\Gamma(z) U_i(z)$ может быть записана следующим образом

$$\Gamma(z) U_i(z) = U'_i(z)(z - a_i)^C,$$

где $U'_i(z)$ голоморфна в O_i и $u'_{lt}(a_i) \neq 0$. Поэтому матрицу T'_i можно представить в виде

$$T'_i(y) = U'_i(z)(z - a_i)^{A_i + C}(y - a_i)^{E_i}.$$

Из условия $\varphi_i^{t-1} \geqslant \varphi_i^t + k$ и из определения 2.2 нормирований получаем

$$'\varphi_i^t = \varphi_i^t + k,\ '\varphi_i^j \geqslant \varphi_i^j,\ j \neq t.$$

Замечание 3.1. Если в условии леммы 3.2 опустить условие голоморфности компонент $v_{l\,t+1}(z), \ldots, v_{lp}(z)$ вектор-строки $v_l(z)$ из (3.5), то условия (3.6) примут вид

$$'\varphi_i^j \geqslant \varphi_i^j,\ j < t;\ '\varphi_i^t = \varphi_i^t + k,\ '\varphi_i^{t+s} \geqslant \varphi_i^{t+s} - k_{t+s},\ s = 1, \ldots, p - t, \tag{3.6$'$}$$

где $k_{t+1} = \max(0,\ k - l_{t+1})$, $k_{t+2} = \max(0,\ k - l_{t+1},\ k - l_{t+2}), \ldots, k_p = \max(0,\ k - l_{t+1}, \ldots, k - l_p)$, l_j — порядок нуля элемента $v_{lj}(z)$ в точке a_i, если $v_{lj}(z) \not\equiv 0$ и $l_j = k$, если $v_{lj}(z) \equiv 0$.

Неравенства (3.6′) следуют из того, что матрица $\Gamma(z) U_i(z)$ в этом случае может быть записана в виде

$$\Gamma(z) U_i(z) = U'_i(z)(z - a_i)^{C'},$$

где $C' = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, k, -k_{t+1}, \ldots, -k_p)$, $U'_i(z)$ — голоморфная в O_i матрица и $k \geqslant -k_{t+1} \geqslant \ldots \geqslant -k_p$.

Опишем еще одну процедуру, которая будет применяться при доказательстве теорем 1—3 введения. Эта процедура состоит в переходе от пространства X к $X' = \Gamma(z) X$, где

$$\Gamma(z) = \left(\frac{z - a_j}{z - a_i}\right)^C, \tag{3.7}$$

$$C = \operatorname{diag}(c_{11}, \ldots, c_{pp}),\ c_{ll} \in \mathbb{Z},\ l = 1, \ldots, p.$$

тазовем ее «*процедурой* $B(a_i, a_j, c_{11}, \ldots, c_{pp})$».

3.2. В дальнейшем нам понадобятся некоторые утверждения относиНельно системы (3), связанные с приводимостью ее монодромии (2).

Лемма 3.3. *Если для некоторой компоненты $f_j(y)$ какой-либо функции $f(y)$ из пространства X решений системы (3) с монодромией (2) имеет*

место тождество

$$f_j(y) \equiv 0,$$

то представление (2) *приводимо.*

Доказательство. Рассмотрим базис $(e_1(y), \ldots, e_p(y))$ пространства X такой, что

$$e_1(y) = f(y),\ e_{j1}(y) \equiv \ldots \equiv e_{jl}(y) \equiv 0$$

и функции $e_{j\,l+1}(y), \ldots, e_{jp}(y)$ линейно независимы. Ясно, что число l должно удовлетворять неравенству $1 \leqslant l < p$. Пусть $m \leqslant l$, $g \in \pi_1(CP^1 \setminus D, z_0)$. Рассмотрим $g^*e_m = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i$. Поскольку для $1 \leqslant m \leqslant l$ по построению $e_{jm}(y) \equiv 0$, то из (2.1) следует, что

$$(g^*e_{jm})(y) = e_{jm}(g^{-1}y) \equiv 0 = \sum_{i=l+1}^{p} \lambda_i e_{ji}(y).$$

В силу линейной независимости функций $e_{j\,l+1}(y), \ldots, e_{jp}(y)$ получаем $\lambda_{l+1} = \ldots = \lambda_p = 0$. Последнее означает, что подпространство $X_l \subset X$, порожденное функциями $e_1(y), \ldots, e_l(y)$, является общим инвариантным подпространством для операторов монодромии и значит, представление (2) монодромии системы (3) приводимо.

Лемма 3.4. *Если для матричной дифференциальной формы* ω *системы* (3) *выполнено условие*

$$(3.8)\qquad \omega_{ij} \equiv 0,\ i = l+1, \ldots, p;\ j = 1, \ldots, l;\ l < p,$$

то представление (2) *монодромии системы* (3) *приводимо.*

Доказательство. Рассмотрим систему $df = \omega' f$, где $\omega' = \| \omega_{ij} \|$, $1 \leqslant i \leqslant l$, $1 \leqslant j \leqslant l$. Если f' — решение этой системы, то вектор-функция $f = (f', 0, \ldots, 0)$ является решением исходной системы (3). Лемма 3.4 следует теперь из леммы 3.3.

Рассмотрим вновь систему (3), фуксовую в точках $a_1, \ldots, \hat{\imath}, \ldots, a_n$ с регулярной особой точкой a_i. Рассмотрим разложения (2.8) для пространства X решений этой системы.

Лемма 3.5. *Пусть матрица* $U_i(z)$ *из разложения* (2.8) *для пространства* X *в точке* a_i *имеет вид*

$$(3.9)\qquad U_i(z) = (z - a_i)^C V(z),$$

где $C = \operatorname{diag}(0, \ldots, 0, c_{l+1\,l+1}, \ldots, c_{pp})$, $c_{jj} \in \mathbb{Z}$, $c_{jj} \geqslant 0$, $j = l+1, \ldots, p$, $V(z) = \| v_{km} \|$ — *голоморфно обратимая в окрестности* O_i *точки* a_i *матрица. Если для элементов* u^j_{km} *матриц* U_j, $j = 1, \ldots, n$, *из разложений* (2.8) *в точках* $a_1, \ldots, a_n$ *и для элементов* v_{km} *матрицы* V *имеют место равенства*

$$(3.10)\qquad u^j_{km}(a_j) = 0,\ v_{km}(a_i) = 0,\ l+1 \leqslant k \leqslant p,\ 1 \leqslant m \leqslant l,\quad j = 1, \ldots, n,$$

то представление (2) *монодромии системы* (3) *приводимо.*

Доказательство. Из вида матрицы $U_i(z)$ следует, что элементы u^i_{km} матрицы $U_i^{-1}(z)$ при $1 \leqslant k \leqslant p$, $1 \leqslant m \leqslant l$ голоморфны в окрестности Q_i точки a_i и для них имеет место (3.10). Ясно, что равенство (3.10) имеет место и для элементов матриц $U_1^{-1}(z), \ldots, \hat{\imath}, \ldots, U_n^{-1}(z)$, которые голоморфны в окрестностях точек $a_1, \ldots, \hat{\imath}, \ldots, a_n$ соответственно в силу предложения 2.3. Из формулы (2.10) получаем, что элементы ω_{km} матричной дифференциальной формы ω при $l+1 \leqslant k \leqslant p$, $1 \leqslant m \leqslant l$ голоморфны во всех точках $a_1, \ldots, a_n$. Поскольку ω голоморфна на $CP^1 \setminus D$, то отсюда получаем, что указанные формы ω_{km} голоморфны на всем CP^1, поэтому

$\omega_{km} \equiv 0$ для указанных номеров k, m. Лемма 3.5 следует теперь из леммы 3.4.

Лемма 3.6. *Пусть представление* (2) *монодромии системы* (3) *с регулярными особыми точками* $a_1, \ldots, a_n$ *приводимо, и пусть подпространство* X_l *пространства* X *решений этой системы является общим инвариантным подпространством для операторов монодромии. Тогда сумма* s_l *показателей пространства* X_l *по всем точкам* $a_1, \ldots, a_n$ *является целым числом, и удовлетворяет неравенству*

$$s_l = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \beta_i^j \leqslant 0. \tag{3.11}$$

Доказательство. Выберем в пространстве X_l базис $(e_1, \ldots, e_l)$ и рассмотрим фундаментальную матрицу $T(y)$, построенную по этому базису. Обозначим через $T'(y)$ матрицу, составленную из элементов базисного в точке $y_0 \in \tilde{S}$ минора матрицы $T(y)$, тогда $\det T'(y_0) \neq 0$. Пространство X', порожденное столбцами матрицы $T'(y)$, является пространством решений системы l линейных дифференциальных уравнений $df = \omega' f$, где $\omega' = dT' \cdot (T')^{-1}$. Множество особых точек построенной системы состоит из точек $a_1, \ldots, a_n$ и дополнительных «ложных» особенностей $a'_{n+1}, \ldots, a'_r$. К числу последних относятся те точки, для которых $\det T'(y) = 0$, $y \in \pi^{-1}(a'_i)$. Заметим, что если $\det T'(y) = 0$ для некоторого $y \in \pi^{-1}(a'_i)$, то в силу (2.1) $\det T'(y) = 0$ для любого $y \in \pi^{-1}(a'_i)$.

Из последнего замечания следует, что число дополнительных особых точек конечно, ибо в противном случае либо имеется предельная точка $\tilde{y} \in \tilde{S}$ для множества $\{a'_{n+i}\}$, либо множество $\{\pi(a'_{n+i})\}$ имеет своей предельной точкой особую точку a_j для некоторого $j = 1, \ldots, n$. В первом случае из теоремы единственности для аналитических функций, примененной к $\det T'(y)$, а во втором случае из той же теоремы, примененной к функции $\det U_j(z)$ из разложения (2.8), получаем $\det T'(y) \equiv 0$, что противоречит условию $\det T'(y_0) \neq 0$.

Показатели ${}'\beta_{n+i}^j$ пространства X' в точках a'_{n+i} совпадают с нормированиями ${}'\varphi_{n+i}^j$, которые в свою очередь неотрицательны в силу аналитичности $T'(y)$ в точках $\pi^{-1}(a'_{n+i})$:

$${}'\beta_{n+i}^j = {}'\varphi_{n+i}^j \geqslant 0. \tag{3.12}$$

Нормирования ${}'\varphi_i^j$ пространства X' связаны с нормированиями φ_i^j пространства X_l в точках $a_1, \ldots, a_n$ неравенствами

$${}'\varphi_i^j = \varphi_i(e'_j) \geqslant \varphi_i(e_j) = \varphi_i^j, \tag{3.13}$$

которые следуют из определения 2.2 нормирований и из того, что вектор-столбец $e'_j(y)$ матрицы $T'(y)$ получается из вектор-функции $e_j(y)$ вычеркиванием некоторого числа компонент.

Из предложения 2.4 и неравенств (3.12), (3.13) получаем

$$s_l = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} \beta_i^j \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{l} {}'\beta_i^j + \sum_{i=n+1}^{r} \sum_{j=1}^{l} {}'\varphi_i^j = s'_l \leqslant 0,$$

где s'_l — сумма показателей пространства X'.

Лемма 3.7. *Пусть представление* (2) *размерности* $p = 3$ *приводимо, и все операторы монодромии имеют общее инвариантное подпространство размерности* $l = 1$ *или* $l = 2$. *Тогда существуют такая система* (3) *с регулярными особыми точками* $a_1, \ldots, a_n$, *фуксовая в точках* $a_2, \ldots, a_n$, *монодромия которой совпадает с* (2) *и такая фундаментальная матрица* $T(y)$ *пространства* X *решений этой системы, для элементов* e_{km} *которой имеют место следующие тождества*

$$e_{km}(y) \equiv 0,\ l + 1 \leqslant k \leqslant 3,\ 1 \leqslant m \leqslant l. \tag{3.14}$$

Доказательство. Рассмотрим систему (3) с регулярными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$, фуксовую в точках $a_2, \ldots, a_n$, монодромия которой совпадает с (2) (существование такой системы доказано в [7]). Выберем ассоциированный базис (e) в пространстве $X|_{\tilde{S}_1}$ этой системы так, чтобы первые l его элементов являлись базисом инвариантного для операторов монодромии подпространства $X_l \subset X$. Можно считать, что для элементов u_{km} матрицы $U_1(z)$ из разложения (2.8) для фундаментальной матрицы $T(y)$, построенной по базису (e), имеют место равенства:

$$u_{21}(a_1) = u_{31}(a_1) = u_{32}(a_1) = 0. \tag{3.15}$$

Выполнения условий (3.15) всегда можно добиться с помощью линейных преобразований строк матрицы $U_1(z)$, чему соответствует переход от системы (3) с пространством решений X к системе с пространством решений $X' = SX$, где S — постоянная неособая матрица.

1. Рассмотрим вначале случай $l = 1$. Предположим, что

$$u_{j1}(a_1) \not\equiv 0, \ j = 2 \text{ или } j = 3. \tag{3.16}$$

Обозначим через r порядок нуля функции $u_{j1}(z)$ в точке a_1, из (3.15) следует, что $r > 0$.

Применим к пространству X процедуру $A(a_1, j, 1, r)$, получим пространство $X' = \Gamma_1(z)X$. Согласно замечанию 3.1 сумма s' показателей пространства $X_1' = \Gamma_1(z)X_1$ связана с суммой s показателей пространства X_1 неравенством

$$s' = s + r > s. \tag{3.17}$$

Приведем пространство X' вновь к виду (3.15). Если для некоторого элемента $u_{j1}'(z)$ матрицы $U_1'(z)$ имеет место (3.16), то вновь применим процедуру $A(a_1, j, 1, r')$ и т. д. Из леммы 3.6 и из (3.17) следует, что через конечное число шагов получим пространство $\tilde{X}$ решений системы (3) с регулярными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$, фуксовой в точках $a_2, \ldots, a_n$ с заданной монодромией (2) такое, что в разложении (2.8) для элементов матрицы $\tilde{U}_1(z)$ имеют место тождества $u_{21}(z) \equiv u_{31}(z) \equiv 0$, а, значит, и $e_{21}(z) \equiv e_{31}(z) \equiv 0$.

2. Рассмотрим теперь случай $l = 2$. Возможны два подслучая:

а) двумерное представление χ_2 монодромии пространства X_2 приводимо;

б) χ_2 неприводимо.

В случае а) согласно разобранному случаю $l = 1$ можно считать, что $T(y)$ уже имеет вид

$$T(y) = \begin{pmatrix} e_{11} & * \ * \\ 0 & \\ 0 & \tilde{T}_2(y) \end{pmatrix}, \tag{3.18}$$

где $\tilde{T}_2(y)$ — фундаментальная матрица пространства решений системы (3), представление монодромии которой совпадает с соответствующим факторпредставлением представления (2). У этого факторпредставления имеется одномерное инвариантное подпространство, порожденное вектором $e_2 = (e_{22}, e_{32})$, поэтому из разбора случая $l = 1$ вытекает существование такой матрицы $\Gamma'(z)$, что для элемента t_{21} матрицы $\tilde{T}_2' = \Gamma'\tilde{T}_2$ имеет место равенство $t_{21}(y) \equiv 0$. Рассмотрим матрицу

$$\Gamma(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ 0 \\ 0 & \\ 0 & \Gamma'(z) \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $T'(y) = \Gamma(z)T(y)$ получаем

$$e_{21}'(y) \equiv e_{31}'(y) \equiv e_{32}'(y) \equiv 0. \tag{3.19}$$

В случае б) предположим, что $u_{31}(z) \not\equiv 0$ и обозначим через r_1 и r_2 порядки нулей соответственно функций $u_{31}(z)$ и $u_{32}(z)$ в точке a_1. Из (3.15) следует, что $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ (если $u_{32}(z) \equiv 0$, положим $r_2 = r_1$). Применив к X процедуру $A(a_1, 3, 1, r_1)$, получим пространство $X' = \Gamma_1(z)X$. Согласно замечанию 3.1 сумма s' показателей пространства $X_2' = \Gamma_1(z)X_2$ связана с суммой s показателей пространства X_2 неравенством

$$s' \geqslant s + r_1 - \max(0, r_1 - r_2) > s. \tag{3.20}$$

Приведем пространство X' вновь к виду (3.15). Если элемент $u_{31}'(z)$ матрицы $U_1'(z) = \Gamma_1 U_1(z)$ не равен тождественно нулю, то вновь применим процедуру $A(a_1, 3, 1, r_1')$ и т. д. Из леммы 3.6 и из (3.20) следует, что через конечное число шагов получим пространство $\widetilde{X}$ решений системы (3) с регулярными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$, фуксовой в точках $a_2, \ldots, a_n$ с заданной монодромией (2) такое, что в разложении (2.8) для элемента $\widetilde{u}_{31}(z)$ матрицы $\widetilde{U}_1(z)$ имеет место тождество $\widetilde{u}_{31}(z) \equiv 0$. Поэтому $\widetilde{e}_{31}(y) \equiv 0$ и в силу неприводимости χ_2: $\widetilde{e}_{32}(y) \equiv 0$ (в противном случае вектор $e_1(y)$ является общим собственным вектором для операторов монодромии согласно лемме 3.3, и χ_2 — приводимо).

Следствие 3.1. *Если все матрицы монодромии представления* (2) *размерности p одновременно приводятся к верхне-треугольному виду, то существует такая система* (3) *с регулярными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$, фуксовая в точках $a_2, \ldots, a_n$, монодромия которой совпадает с* (2), *и фундаментальная матрица $T(y)$ пространства решений которой имеет верхний треугольный вид.*

Доказательство легко проводится по индукции, первый шаг которой воспроизведен при разборе случая 2а) леммы 3.7.

§ 4. Разрешимость проблемы Римана — Гильберта для неприводимого представления размерности три

Рассмотрим пространство X решений системы (3) с регулярной особой точкой a_i и разложение (2.8) для пространства X в точке a_i.

Лемма 4.1. *Существуют такая мероморфная на CP^1 голоморфно обратимая вне точки a_i матрица $\Gamma(z)$ и такая голоморфно обратимая в окрестности O_i точки a_i матрица $V_i(z)$, что для матрицы $U_i(z)$ из* (2.8) *имеет место разложение*

$$\Gamma(z)U_i(z) = (z - a_i)^C V_i(z), \tag{4.1}$$

где $C = \operatorname{diag}(c_{11}, \ldots, c_{pp})$, $c_{ll} \in \mathbb{Z}$, $l = 1, \ldots, p$, $0 \leqslant c_{11} \leqslant \ldots \leqslant c_{pp}$.

Доказательство. Утверждение о существовании разложения (4.1) с некоторой диагональной целочисленной матрицей C для голоморфно обратимой в $O_i \setminus a_i$ матрицы $U_i(z)$ эквивалентно теореме Бирктофа — Гротендика [5] о разложении голоморфного векторного расслоения на сфере Римана в сумму одномерных, поскольку матричную функцию $U_i(z)$ можно рассматривать как функцию перехода голоморфного расслоения $E(CP^1 \setminus \setminus a_i, O_i, U_i(z))$.

Покажем, что в (4.1) все $c_{ll} \geqslant 0$. Перепишем (4.1) в виде

$$U_i(z)V_i^{-1}(z) = \Gamma^{-1}(z)(z - a_i)^C. \tag{4.2}$$

Предположим, что $c_{ll} < 0$ для некоторого l. Матрица, стоящая в левой части (4.2), голоморфна в точке a_i, поэтому l-й столбец $t(z)$ матрицы, стоящей в правой части (4.2), также голоморфен в точке a_i, но

$$t(z) = (z - a_i)^{c_{ll}}\gamma(z),$$

где $\gamma(z)$ — l-й столбец матрицы $\Gamma^{-1}(z)$, стало быть, $\gamma(z) \to 0$ при $z \to a_i$. Отсюда по теореме Лиувилля следует, что $\gamma(z) \equiv 0$, что противоречит голо

морфной обратимости матрицы $\Gamma(z)$ вне точки a_i. Полученное противоречие означает, что $c_{ll} \geqslant 0$. Линейным преобразованием строк матрицы $\Gamma(z)\, U_i(z)$ (т. е. умножением $\Gamma(z)\, U_i(z)$ слева на некоторую постоянную невырожденную матрицу S) можно добиться того, чтобы выполнялось условие $0 \leqslant c_{11} \leqslant \ldots \leqslant c_{pp}$.

Замечание 4.1. Разложение (4.1) используется в работах Племеля [7] и Биркгофа [21]. Утверждение леммы 4.1 можно получить также из модифицированной леммы Соважа (см. [9]).

Перейдем теперь непосредственно к доказательству теоремы 1 введения. Будем считать, что $a_1 = 0$ и точки ∞ нет среди точек из D (выполнения этих условий всегда можно добиться конформным преобразованием сферы Римана).

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим пространство X решений системы трех уравнений (3) с регулярными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$, фуксовой в точках $a_2, \ldots, a_n$ с неприводимым представлением монодромии (2). (Существование такой системы доказано в [7].) В силу критерия фуксовости (2.16) и условия (2.15) для доказательства теоремы достаточно показать, что существует такая мероморфная на CP^1 голоморфно обратимая вне точек $a_1, \ldots, a_n$ матричная функция $\Gamma(z)$, что для пространства $X' = \Gamma(z)X$ выполняются следующие условия:

(4.3а) пространство X' является пространством решений системы (3), фуксовой во всех точках $a_1, \ldots, a_n$ кроме, быть может, одной;

$$(4.3б) \qquad \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3} {}'\beta_i^j > \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{3} \beta_i^j,$$

где β_i^j, ${}'\beta_i^j$ — показатели соответственно пространств X и X'.

Рассмотрим разложение (2.8) для пространства X в окрестности точки $a_1 = 0$. Перейдем от пространства X к $X' = \Gamma(z)X$, где $\Gamma(z)$ — матрица, определенная в лемме 4.1. Обозначим через $U_1'(z)$ матрицу $U_1'(z) = \Gamma(z)U_1(z) = z^C V_1(z)$.

Дальнейшее доказательство разбивается на три случая:

1) $c_{11} > 0$;

2) $c_{11} = 0$, $c_{22} > 0$;

3) $c_{11} = c_{22} = 0$, $c_{33} > 0$.

1. Рассмотрим случай 1. В этом случае из определения 2.2 нормирований и вида разложения (2.8) для пространства X' следует, что

$${}'\varphi_1^j \geqslant \varphi_1^j + c_{11}, \ j = 1, 2, 3,$$

для нормирований φ_1^j и ${}'\varphi_1^j$ пространств X и X' соответственно. Из последних неравенств получаем условия (4.3а) и (4.3б).

2. Рассмотрим случай 2. Обозначим X' вновь через X, U_1' — через U_1. Из неприводимости представления (2) и леммы 3.5 следует, что либо $v_{l1}(0) \neq 0$, где $l = 2$ или $l = 3$ для элементов матрицы $V_1(z)$ из (4.1), либо найдутся такие числа $2 \leqslant i \leqslant n$, $2 \leqslant l \leqslant 3$, что элемент $u_{l1}(z)$ матрицы $U_i(z)$ из разложения (2.8) пространства X в точке a_i отличен от нуля в точке a_i: $u_{l1}(a_i) \neq 0$. В первом случае l-я строка матрицы $U_1(z)$ имеет вид (3.5) с $t = 1$. Применим к X процедуру $A(a_1, l, 1, c_{ll})$ из леммы 3.2, получим, что условия (4.3а) и (4.3б) для пространства $X' = \Gamma(z)X$ выполнены. Если же $u_{l1}(a_i) \neq 0$, то применим к пространству X процедуру $B(a_1, a_i, 0, c_{22}, c_{33})$, получим пространство $X' = \Gamma X$, являющееся пространством решений системы (3), фуксовой в точках $a_1, \ldots, \hat{i}, \ldots, a_n$. Строка u_l' голоморфной матрицы $U_i' = \Gamma U_i$ будет иметь вид (3.5) с $t = 1$ и $k = c_{ll} > 0$. Применим к X' процедуру $A(a_i, l, 1, c_{ll})$. Для пространства $X'' = \Gamma' X'$ вновь получим условия (4.3а) и (4.3б).

3. Обозначим через u^i_{lm}, $1 \leqslant l$, $m \leqslant 3$ элементы матрицы $U_i(z)$ из разложения (2.8) для пространства X в точке a_i, а через v_{lm} — элементы матрицы $V_1(z)$ из (4.1). Третий случай разбивается на два подслучая:

а) одно из чисел $v_{31}(0)$, $u^2_{31}(a_2)$, ..., $u^n_{31}(a_n)$ отлично от нуля;

б) функции $v_{31}(z)$, $u^2_{31}(z)$, ..., $u^n_{31}(z)$ имеют в точках $a_1, \ldots, a_n$ нули порядков $k_1, k_2, \ldots, k_n$ соответственно, причем $k_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$.

Случай 3а) сводится к разобранному случаю 2. Рассмотрим случай 3б). Из неприводимости представления (2) и леммы 3.3 следует, что числа $k_1, \ldots, k_n$ конечны. Обозначим через s сумму

$$s = k_1 + c_{33} + k_2 + \ldots + k_n \tag{4.4}$$

порядков нулей функций $u^i_{31}(z)$ в точках a_i, $i = 1, \ldots, n$. Также из неприводимости представления (2) и леммы 3.5 следует, что либо $v_{32}(0) \neq 0$, либо найдется такое i, что $u^i_{32}(a_i) \neq 0$. В последнем случае, применив к пространству X процедуру $B(a_1, a_i, 0, 0, c_{33})$, получим пространство $X' = \Gamma(z)X$, являющееся пространством решений системы (3), фуксовой в точках $a_1, \ldots, \hat{\imath}, \ldots, a_n$. Сумма s из (4.4) при этом не изменится. Обозначим это пространство вновь через X. Матрица $U_i(z)$ из разложения (2.8) для этого пространства имеет вид (4.1), где $C = \operatorname{diag}(0, 0, c_{33})$.

Дальнейшее доказательство теоремы опирается на некоторую процедуру, которую мы назовем *процедурой* L и опишем ниже.

Описание процедуры L. Из замечания 2.1 следует, что либо $u^i_{11}(a_i) \neq 0$, либо $u^i_{21}(a_i) \neq 0$. Перейдем от пространства X к $X' = SX$, где S — постоянная невырожденная матрица вида

$$S = \begin{pmatrix} S' & & 0 \\ & & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

и такая, что первый столбец x_1 матрицы $U'_i(a_i) = SU_i(a_i)$ имеет вид

$$x_1 = (1, 0, 0). \tag{4.6}$$

Применим к пространству X' процедуру $A(a_i, 3, 2, c_{33})$, получим пространство ${}^1X = \Gamma_1 X'$ такое, что матрица ${}^1U_i(z) = \Gamma_1(z)U'_i(z)$ имеет вид

$${}^1U_i(a_i) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.7}$$

Из леммы 3.5 следует, что найдется такое j, что значение ${}^1u^j_{21}(a_j)$ элемента ${}^1u^j_{21}(z)$ матрицы ${}^1U_j(z)$ в точке a_j отлично от нуля: ${}^1u^j_{21}(a_j) \neq 0$. Применив к ${}^1X$ процедуру $A(a_j, 2, 1, 0)$, получим пространство ${}^2X = \Gamma_2(z){}^1X$. Из вида применявшихся преобразований следует, что матрицы ${}^2U_m(z) = \Gamma_2(z){}^1U_m(z)$ удовлетворяют следующим условиям:

1) третьи строки матриц ${}^2U_m(z)$ совпадают с третьими строками матриц $U_m(z)$, $m = 1, \ldots, n$;

2) матрица ${}^2U_i(a_i)$ имеет вид (4.7);

3) первый столбец матрицы ${}^2U_j(a_j)$ имеет вид $(0, {}^1u^j_{21}(a_j), 0)$.

Применим к пространству ${}^2X$ процедуру $B(a_i, a_j, 0, 1, 0)$, обозначим полученное пространство через $\tilde{X}$. Описание процедуры L закончено.

Из вида (4.7) матрицы ${}^2U_i(a_i)$ следует, что

$$\tilde{\varphi}^1_i = \varphi^1_i, \quad \tilde{\varphi}^2_i \geqslant \varphi^2_i, \quad \tilde{\varphi}^3_i \geqslant \varphi^3_i - 1, \tag{4.8}$$

где φ_i^j и $\widetilde{\varphi}_i^j$ — нормирования пространств X и $\widetilde{X}$ соответственно. Из вида 3) первого столбца матрицы ${}^2U_j(a_j)$ следует, что

$$\widetilde{\varphi}_j^1 = \varphi_j^1 + 1, \quad \widetilde{\varphi}_j^2 = \varphi_j^2, \quad \widetilde{\varphi}_j^3 = \varphi_j^3, \tag{4.9}$$

причем разложение (2.8) для пространства $\widetilde{X}$ в точке a_j имеет вид

$$\widetilde{T}_j(y) = \widetilde{U}'_j(z)(z-a_j)^{A_j+N}(y-a_j)^{E_j}, \tag{4.10}$$

где $N = \operatorname{diag}(1, 0, 0)$, $\widetilde{U}'_j(z) = \widetilde{U}_j(z)(z-a_j)^{-N}$. Из 1) и (4.10) получаем, что суммы s и $\widetilde{s}$ из (4.4) для пространств X и $\widetilde{X}$ связаны соотношением

$$\widetilde{s} = s - 1 < s. \tag{4.11}$$

Из (4.8), (4.9) следует, что пространство $\widetilde{X}$ удовлетворяет условию (4.3а) и

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{3}\widetilde{\beta}_k^m \geqslant \sum_{k=1}^{n}\sum_{m=1}^{3}\beta_k^m. \tag{4.12}$$

Вернемся к доказательству теоремы 1. Применим к X процедуру L. Если $\widetilde{X}$ удовлетворяет условию 3б), то вновь применим процедуру L. Из (4.11) следует, что не более, чем через $\sum_{l=1, l\neq i}^{n}(k_l - 1) + 1$ шагов получим пространство, удовлетворяющее условию 3а). В силу неравенства (4.12) доказательство теоремы в этом случае вновь сводится к разобранному случаю 2. Теорема 1 доказана.

Другой вариант доказательства теоремы 1 приведен в [22].

§ 5. Фуксовы системы двух уравнений на сфере Римана. Фуксов вес представления

5.1. Рассмотрим фуксову систему (4) двух уравнений на CP^1 и разложения (2.8) для его пространства решений X в точках $a_1, \ldots, a_n$. Можно считать, что для i-х нормирований пространства X выполнены условия

$$\varphi_i^1 \geqslant \varphi_i^2. \tag{5.1}$$

Действительно, если матрица G_i монодромии, определенная в (2.5), недиагонализируема, то согласно свойству б) ассоциированного в точке a_i базиса имеет место (5.1). Если же матрица G_i диагонализируема и $\varphi_i^1 < \varphi_i^2$ (такое возможно, так как в этом случае элементы e_1 и e_2 ассоциированного базиса (e) соответствуют разным блокам матрицы G_i), то перейдем от базиса (e_1, e_2) пространства $X|_{\widetilde{S}_i}$ в точке a_i к базису (e_2, e_1), вновь получим (5.1).

Определение 5.1. *Фуксовым весом* γ_ω *фуксовой системы* (4) двух уравнений назовем число

$$\gamma_\omega = \sum_{i=1}^{n}(\varphi_i^1 - \varphi_i^2).$$

Рассмотрим множество Ω всех фуксовых систем двух уравнений на CP^1 с данным представлением (2) монодромии (согласно [6] это множество непусто).

Определение 5.2. *Фуксовым весом* γ_χ *представления* (2) назовем число

$$\gamma_\chi = \min_{\Omega}\gamma_\omega.$$

Предложение 5.1. *Для любого представления* (2) *размерности* $p = 2$ *имеют место неравенства*

$$\gamma_\omega \geqslant 0, \quad \gamma_\chi \geqslant 0, \tag{5.2}$$

причем четность чисел γ_ω, γ_χ *совпадает с четностью числа* $\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Sp} E_i$. *Если* (2) — *коммутативное представление, не разлагающееся в прямую сумму одномерных, то* $\gamma_\chi = 0$.

Доказательство. Первая часть предложения следует из (5.1) и того, что

$$\sum_{i=1}^{n} (\beta_i^1 + \beta_i^2) = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Sp} E_i + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^1 + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2.$$

Действительно, из (2.16) получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^1 + \sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2 = -\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Sp} E_i,$$

поэтому

$$\gamma_\omega = \sum_{i=1}^{n} (\varphi_i^1 - \varphi_i^2) = -\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Sp} E_i - 2\sum_{i=1}^{n} \varphi_i^2.$$

Если (2) — коммутативное представление, не разлагающееся в прямую сумму одномерных, то матрицы G_i одновременно приводятся к виду

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & * \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}.$$

Поэтому матрица

$$T(y) = (z - a_1)^{-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Sp} E_i} \prod_{i=1}^{n} (z - a_i)^{E_i} \tag{5.3}$$

является фундаментальной матрицей фуксовой системы (4) с заданной монодромией и весом 0.

Лемма 5.1. *Для любой фуксовой системы* (4) *с фуксовым весом* γ_ω *и с пространством решений* X *найдется такая точка* $a_l \in D$ *и такая мероморфная на* CP^1 *голоморфно обратимая вне точек из* D *матричная функция* $\Gamma(z)$, *что пространство* $X' = \Gamma(z)X$ *удовлетворяет следующим условиям:*

а) X' *является пространством решений некоторой фуксовой системы* (4);

б) $'\varphi_i^1 = {}'\varphi_i^2 = 0, \quad i = 1, \ldots, \hat{l}, \ldots, n; \; {}'\varphi_l^1 - {}'\varphi_l^2 \leqslant \gamma_\omega,$

где $'\varphi_i^j$ — *нормирования пространства* X'.

Доказательство. Рассмотрим в каждой точке a_i разложение (2.8) для пространства X, удовлетворяющее условию (5.1). Обозначим через J множество индексов, для которых

$$\varphi_i^1 > \varphi_i^2, \quad i \in J.$$

Если это множество пусто или $J = \{l\}$ для некоторого l, то применим к X преобразование $\prod_{i \neq l} B(a_i, a_l, \varphi_i^1, \varphi_l^1)$ (в случае $J = \varnothing$ индекс l выбирается произвольно). Утверждение леммы в этом случае легко следует из вида разложений (2.8).

Пусть множество J содержит элементы $i, m, \ldots$ Для доказательства леммы достаточно показать, что с помощью замены $\tilde{X} = \Gamma X$ количество элементов множества J всегда можно уменьшить, не увеличивая фуксова веса системы.

Перейдем от пространства X к $X' = U_i^{-1}(a_i)X$, которое вновь обозначим через X. В разложении (2.8) для пространства X теперь

$$U_i(a_i) = I. \tag{5.4}$$

Применив к X процедуру $B(a_i, a_m, 1, 0)$, получим пространство $X' = \Gamma_1(z)X$. Из вида матрицы $\Gamma_1(z)U_i(z)$ следует, что нормирования $'\varphi_i^j$ пространства X' связаны с нормированиями φ_i^j пространства X следующими соотношениями:

$$\begin{cases} '\varphi_i^1 = \varphi_i^1 - 1, '\varphi_i^2 = \varphi_i^2, \\ \Delta_i' = '\varphi_i^1 - '\varphi_i^2 = \Delta_i - 1, \end{cases} \tag{5.5}$$

где $\Delta_i = \varphi_i^1 - \varphi_i^2$.

Рассмотрим матрицу $U_m(z)$ из разложения (2.8) для пространства X. Дальнейшее доказательство разбивается на два случая:

а) $u_{11}^m(a_m) \neq 0$;

б) $u_{11}^m(a_m) = 0$.

Рассмотрим вначале случай а). В этом случае первая строка матрицы $\Gamma_1(z)U_m(z)$ имеет вид (3.5) с $t = 1$, $k = 1$. Применив к пространству X' процедуру $A(a_m, 1, 1, 1)$, получим пространство $X'' = \Gamma_2 X'$, для нормирований $''\varphi_m^j$ которого в точке a_m согласно лемме 3.2 имеем

$$''\varphi_m^1 = \varphi_m^1 + 1, \quad ''\varphi_m^2 = \varphi_m^2, \quad \Delta_m'' = \Delta_m + 1. \tag{5.6}$$

Рассмотрим случай б). В этом случае из предложения 2.3 следует, что $u_{12}^m(a_m) \neq 0$ и, значит, первая строка матрицы $\Gamma_1(z)U_m(z)$ имеет вид (3.5) с $t = 2$, $k = 1$. Применив к пространству X' процедуру $A(a_m, 1, 2, 1)$, получим пространство $X'' = \Gamma_2(z)X'$, для нормирований $''\varphi_m^j$ которого в силу леммы 3.2:

$$''\varphi_m^1 = \varphi_m^1, \quad ''\varphi_m^2 = \varphi_m^2 + 1, \quad \Delta_m'' = \Delta_m - 1. \tag{5.7}$$

Из (5.5)—(5.7) следует, что как в случае а), так и в случае б) для пространства X'':

$$\sum_{l=1}^{n} {''\varphi_l^1} - {''\varphi_l^2} \leqslant \gamma_\omega, \quad \Delta_i'' = \Delta_i - 1. \tag{5.8}$$

Если $\Delta_i'' > 0$, $\Delta_m'' > 0$, то повторим описанную процедуру еще раз. Из (5.8) следует, что не более, чем через $\Delta_i = \varphi_i^1 - \varphi_i^2$ шагов получим пространство $\tilde{X} = \Gamma(z)X$, для которого имеет место (5.8) и либо $\tilde{\Delta}_i = 0$, либо $\tilde{\Delta}_m = 0$. Последнее означает, что количество элементов множества J уменьшилось. Из (5.5)—(5.8) и предложения 2.4 получаем, что $\tilde{X}$ является пространством решений фуксовой системы (4), фуксов вес которой не превышает γ_ω.

С л е д с т в и е 5.1. *Любая фуксова система двух уравнений вида* (4) *фуксова веса* γ_ω, *с помощью преобразования* (1.4) *может быть приведена к такой фуксовой системе* (4), *фуксов вес* γ_ω *которой не превосходит* $\gamma_{\omega'}$ *и разложения* (2.8) *для пространства* X *решений которой имеют следующий вид*:

$$T_i(y) = U_i(z)(y - a_i)^{E_i}, \quad i \neq l, \tag{5.9}$$

$$T_l(y) = U_l(z)(z - a_l)^{A_l}(y - a_l)^{E_l}, \tag{5.10}$$

где все матрицы $U_j(z)$ *голоморфно обратимы в точках* a_j, E_i — *верхние треугольные матрицы*,

$$E_l = \begin{pmatrix} \rho_l^1 & \varepsilon \\ 0 & \rho_l^2 \end{pmatrix}, \tag{5.11}$$

$$A_l = \begin{pmatrix} b + \gamma_1 & 0 \\ 0 & b - \gamma_2 \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

$$U_l(z) = \begin{pmatrix} 1 & c(z - a_l)^m \\ s(z - a_l)^k & 1 \end{pmatrix}(1 + o(1)), \tag{5.13}$$

где

$$\gamma_1 = \left[\frac{\gamma_\omega + 1}{2}\right], \ \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma_\omega, \ m > 0, \ k > 0, \ c \neq 0,$$

если $u_{12}^l(z) \not\equiv 0$; $s \neq 0$, *если* $u_{21}^l(z) \not\equiv 0$; $[x]$ — *целая часть* x.

Лемма 5.2. *Пусть фуксова система* (4) *приведена к виду* (5.9)—(5.13) *и* $\gamma_\omega > 0$. *Если все матрицы* G_j *монодромии этой системы недиагонализируемы, то найдется такое* $i \neq l$, *что значение элемента* $u_{11}^i(z)$ *матрицы* $U_i(z)$ *из разложения* (5.9) *в точке* a_i *отлично от нуля*:

$$u_{11}^i(a_i) \neq 0. \tag{5.14}$$

Доказательство. Из условия следует, что все матрицы E_i из (5.9), (5.10) — жордановы клетки. Предположим, что $u_{11}^i(a_i) = 0$, $i = 1, \ldots, \hat{l}, \ldots, n$, тогда из (2.14) и (5.9) получим

$$B^i = U_i(a_i)E_iU_i^{-1}(a_i) = \begin{pmatrix} \rho_i & 0 \\ * & \rho_i \end{pmatrix}.$$

Из (2.14), (5.13) и того, что $\gamma_\omega > 0$ следует, что $B^l = \operatorname{diag}(\beta_l^1, \beta_l^2)$, поэтому из (5) получаем

$$\sum_{i=1,\, i\neq l}^{n} \rho_i + \beta_l^1 = \sum_{i=1,\, i\neq l}^{n} \rho_i + \beta_l^2 = 0,$$

откуда $\beta_l^1 = \beta_l^2$ и с учетом $\rho_l^1 = \rho_l^2$ имеем $\varphi_l^1 = \varphi_l^2$, что противоречит условию $\gamma_\omega > 0$.

Лемма 5.3. *Пусть фуксова система* (4) *с монодромией* (2) *приведена к виду* (5.9)—(5.13) *и числа* c, m *из* (5.13) *таковы, что* $c \neq 0$, $m \leqslant \frac{1}{2}\gamma_\omega$. *Тогда* $\gamma_\chi < \gamma_\omega$.

Доказательство. Применим к пространству X решений системы (4) процедуру $A(a_l, 1, 2, m)$, получим пространство $X' = \Gamma(z)X$. Из леммы 3.1 и вида (3.4) матрицы $\Gamma(z)$ следует, что матрица

$$U_l' = \Gamma(z)U_l(z)(z - a_l)^C, \tag{5.15}$$

где $C = \operatorname{diag}(m, -m)$, голоморфно обратима в точке a_l. Поскольку $\varphi_l^1 - m \geqslant \varphi_l^2 + m$ в силу условия леммы, то разложение (2.8) для пространства X' в точке a_l принимает вид

$$T_l'(y) = U_l'(z)(z - a_l)^{A_l'}(y - a_l)^{E_l}, \tag{5.16}$$

где $A_l' = A_l - C$, поэтому $\gamma_\chi \leqslant \gamma_{\omega'} = \gamma_\omega - 2m$.

В некоторых случаях фуксов вес представления (2) можно определить по фуксову весу какой-либо системы с монодромией (2).

Предложение 5.2. *Пусть фуксова система* (4) *с монодромией* (2) *приведена к виду* (5.9)—(5.13). *Если число* c *из* (5.13) *равно нулю, то* $\gamma_\chi = \gamma_\omega$. *Если* $c \neq 0$, *то* $\gamma_\chi = \gamma_\omega$ *в том и только в том случае, когда* $m \geqslant \gamma_\omega$.

Доказательство. 1. Докажем вначале, что если $c \neq 0$, $m < \gamma_\omega$, то $\gamma_\chi < \gamma_\omega$. В силу леммы 5.3 достаточно разобрать случай

$$\frac{1}{2}\gamma_\omega < m < \gamma_\omega. \tag{5.17}$$

Для матрицы E_l из (5.11) имеются две возможности:

а) E_l — диагональная,

б) E_l — жорданова клетка.

В случае а) применим к X процедуру $A(a_l, 1, 2, m)$, получим пространство $X' = \Gamma(z)X$, для которого имеет место разложение (5.15), (5.16) и $'\varphi_l^1 = \varphi_l^1 - m$, $'\varphi_l^2 = \varphi_l^2 + m$. Переставим столбцы матрицы $T_l' = \Gamma T_l$, получим

разложение для X' вида (2.8) (поскольку E_l — диагональная матрица) с матрицей $A_l'' = \operatorname{diag}(\varphi_l^2 + m, \varphi_l^1 - m)$, $E_l'' = \operatorname{diag}(\rho_l^2, \rho_l^1)$. Из (5.17) следует, что

$$\gamma_{\omega'} = \varphi_l^2 + m - (\varphi_l^1 - m) = 2m - \gamma_\omega < \gamma_\omega, \tag{5.18}$$

поэтому $\gamma_\chi < \gamma_\omega$.

Рассмотрим случай б). Если для некоторого $i \neq l$ E_i — диагональная матрица, то переставив в случае необходимости столбцы матрицы $T_i(y)$, получим, что для $U_i(z)$ из (5.9) выполнено условие (5.14). Если все E_j, $j \neq l$ — жордановы клетки, то в силу леммы 5.2 также найдется $i \neq l$, для которого имеет место (5.14).

Применим к пространству X процедуру $B(a_l, a_i, 2m - \gamma_\omega, 0)$, получим пространство $X' = \Gamma_1(z)X$. Матрица

$$U_l'(z) = \Gamma_1(z)U_l \cdot (z - a_l)^C,$$

где $C = \operatorname{diag}(2m - \gamma_\omega, 0)$, голоморфно обратима в точке a_l и ее первая строка имеет вид

$$((a_l - a_i)^{2m-\gamma_\omega}, c'(z - a_l)^{\gamma_\omega - m})(1 + o(1)), \quad c' \neq 0,$$

а нормирования $'\varphi_l^j$ пространства X' в точке a_l равны: $'\varphi_l^1 = \varphi_l^1 - (2m - \gamma_\omega)$, $'\varphi_l^2 = \varphi_l^2$. Заметим, что $'\varphi_l^1 - {}'\varphi_l^2 = 2(\gamma_\omega - m)$, поэтому применив к X' процедуру $A(a_l, 1, 2, \gamma_\omega - m)$, получим пространство $X'' = \Gamma_2(z)X'$, нормирования $''\varphi_l^j$ которого согласно доказательству леммы 5.3 равны:

$$''\varphi_l^1 = {}''\varphi_l^2. \tag{5.19}$$

Процедура $A(a_l, 1, 2, \gamma_\omega - m)$ не меняет вида (3.5) первой строки матрицы $\Gamma_1(z)U_i(z)$ с $t = 1$, $k = 2m - \gamma_\omega$. Применим к X'' процедуру $A(a_i, 1, 1, 2m - \gamma_\omega)$, получим пространство $\widetilde{X} = \Gamma_3(z)X''$, для нормирований $\widetilde{\varphi}_i^j$ которого в силу леммы 3.2 и (5.18) имеем

$$\widetilde{\varphi}_i^1 = \varphi_i^1 + 2m - \gamma_\omega, \quad \widetilde{\varphi}_i^2 = \varphi_i^2. \tag{5.20}$$

Из (5.19), (5.20) и (5.17) для пространства $\widetilde{X}$ получаем

$$\gamma_{\widetilde{\omega}} = \sum_{j=1}^{n} (\widetilde{\varphi}_j^1 - \widetilde{\varphi}_j^2) = 2m - \gamma_\omega < \gamma_\omega.$$

Значит, и $\gamma_\chi < \gamma_\omega$.

2. Покажем, что если $c \neq 0$, $m \geqslant \gamma_\omega$ или $c = 0$, то $\gamma_\chi = \gamma_\omega$. Предположим противное. Пусть существует фуксова система (4) с пространством решений X', с той же монодромией, что и исходная, фуксов вес которой равен $\gamma_{\omega'} < \gamma_\omega$. Согласно следствию 5.1 можно считать, что эта система приведена к виду (5.9)—(5.13) с заменой точки a_l на точку a_t и чисел γ_1, γ_2 на γ_1', γ_2'. Из предположения $\gamma_{\omega'} < \gamma_\omega$ и одинаковой четности чисел $\gamma_{\omega'}, \gamma_\omega$ (см. предложение 5.1) следует, что

$$\gamma_1' < \gamma_1, \quad \gamma_2' < \gamma_2. \tag{5.21}$$

Выберем в пространстве X' базис (e') такой, что для фундаментальной матрицы $T'(y)$, построенной по этому базису, и для матрицы $T_l(y)$ пространства X из (5.10) имеет место равенство

$$(g_i^* T')(y) = (g_i^* T_l)(y), \quad i = 1, \ldots, n. \tag{5.22}$$

Рассмотрим $(e')|_{\widetilde{S}_t}$. Для нормирований φ_t базиса (e') имеются две возможности:

а) $\varphi_t(e_1') \neq \varphi_t(e_2')$;

б) $\varphi_t(e_1') = \varphi_t(e_2') = b - \gamma_2'$.

В случае б) найдутся такие $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, что $\varphi_t(\lambda_1 e_1' + \lambda_2 e_2') = b + \gamma_1'$. Перейдем от базисов (e) пространства X и (e') пространства X' к $(\tilde{e}) = (e)S$, $(\tilde{e}') = (e')S$, где

$$S = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{5.23}$$

в случае б) и $S = I$ — в случае а).

В случае б) по построению $\varphi_t(\tilde{e}_1') = b - \gamma_2'$, $\varphi_t(\tilde{e}_2') = b + \gamma_1'$ и матрица E_t в этом базисе имеет нижний треугольный вид (поскольку $\tilde{e}_2'$ является собственным вектором для G_t в силу свойств 1) и 2) нормирований), поэтому базис $(\tilde{e})$ формально не является ассоциированным, но, как легко видеть, для него также имеют место предложения 2.1—2.3.

Случай а) либо сводится к б), если $\varphi_t(e_1') < \varphi_t(e_2')$, либо $\varphi_t(e_1') > \varphi_t(e_2')$, матрица E_t — верхне-треугольная, и вновь имеют место предложения 2.1—2.3. Итак, для фундаментальной матрицы $\tilde{T}' = T'S$, где S из (5.23), имеет место разложение (2.8), (2.9) с матрицей

$$\tilde{A}_t' = \operatorname{diag}(b_{11}, b_{22}), \tag{5.24}$$

где одно из чисел b_{jj} равно $b + \gamma_1'$, другое — $b - \gamma_2'$.

Для матрицы $\tilde{T}_l = T_l \cdot S$, рассматриваемой на $\tilde{S}_l$, вновь имеет место разложение (5.10)—(5.13) с заменой матрицы $U_l(z)$ на $\tilde{U}_l(z)$ и E_l на $S^{-1}E_lS$, где

$$\tilde{U}_l(z)(z-a_l)^{A_l} = U_l(z)(z-a_l)^{A_l} S = U_l(z)\tilde{S}(z)(z-a_l)^{A_l},$$

$$\tilde{S}(z) = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(z-a_l)^{\gamma_\omega} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в случае б) и $\tilde{S} = I$ в случае а), поэтому в случае б)

$$\tilde{U}_l(z) = \begin{pmatrix} 1 & c(z-a_l)^m + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(z-a_l)^{\gamma_\omega} \\ s(z-a_l)^k & 1 \end{pmatrix}(1 + o(1)).$$

Поскольку по условию либо $c \neq 0$, $m \geqslant \gamma_\omega$, либо $c = 0$, то $\tilde{U}_l(z)$ вновь имеет вид (5.13) с заменой c на c', m на m', и либо $c' \neq 0$, $m' \geqslant \gamma_\omega$, либо $c' = 0$.

Рассмотрим матричную функцию

$$Y(y) = \tilde{T}_l(y)(\tilde{T}'(y))^{-1}. \tag{5.25}$$

Из (5.22), (5.23) следует, что $Y(y)$ — однозначная функция на CP^1. Из (5.9) получаем, что $Y(z)$ — голоморфно обратима вне точек a_l, a_t, а из (5.10)—(5.13)— что в окрестности точки a_l имеет место разложение

$$Y(z) = \tilde{U}_l(z)(z-a_l)^{A_l}(\tilde{U}_l')^{-1},$$

поэтому первая строка $y_1(z)$ матрицы Y может быть там представлена в виде

$$y_1(z) = (\alpha(z-a_l)^{b+\gamma_1}, \ \beta c'(z-a_l)^{b+m'-\gamma_2})(1 + o(1)),$$

откуда в силу условия $m' \geqslant \gamma_\omega$, если $c' \neq 0$ (и, конечно, в случае $c' = 0$), получаем

$$y_1(z) = (z-a_l)^{b+\gamma_1} t_1(z), \tag{5.26}$$

где $t_1(z)$ — голоморфный в точке a_l вектор.

В окрестности точки a_t матрица Y имеет вид

$$Y(z) = \tilde{U}_t(z)(z-a_t)^{-\tilde{A}_t'}(\tilde{U}_t'(z))^{-1},$$

где $\tilde{A}'_t$ имеет вид (5.24). В этом случае для той же строки $y_1(z)$ матрицы Y получаем

$$y_1(z) = \frac{1}{(z-a_t)^{b+\gamma'_1}} t_2(z), \tag{5.27}$$

где $t_2(z)$ — голоморфный в точке a_t вектор.

Из (5.21), (5.26), (5.27) и из голоморфности $y_1(z)$ вне точек a_l, a_t следует, что степень дивизора каждой компоненты функции $y_1(z)$ на CP^1 строго больше нуля, поэтому $y_1(z) \equiv 0$, что противоречит голоморфной обратимости матрицы $Y(z)$ вне точек a_l, a_t. Полученное противоречие означает, что $\gamma_\chi = \gamma_\omega$.

Лемма 5.4. *Пусть фуксова система* (3), (4) *приведена к виду* (5.9)—(5.13). *Тогда форма* ω *этой системы в окрестности точки* a_l *имеет вид*

$$\omega = \begin{pmatrix} \dfrac{\beta_1^1}{z-a_l} & c(m-\beta_1^1+\beta_1^2)(z-a_l)^{m-1} + \varepsilon(z-a_l)^{\gamma_\omega - 1} \\ s(k+\beta_1^1-\beta_1^2)(z-a_l)^{k-1} & \dfrac{\beta_1^2}{z-a_l} \end{pmatrix}(1+o(1))dz. \tag{5.28}$$

Доказательство. Из (5.13) получаем

$$U_l^{-1}(z) = \begin{pmatrix} 1 & -c(z-a_l)^m \\ -s(z-a_l)^k & 1 \end{pmatrix}(1+o(1)),$$

$$\frac{dU_l}{dz} = \begin{pmatrix} \alpha(z-a_l)^{t_1} & cm(z-a_l)^{m-1} \\ sk(z-a_l)^{k-1} & \delta(z-a_l)^{t_2} \end{pmatrix}(1+o(1)),$$

где $t_1 \geqslant 0$, $t_2 \geqslant 0$. Соотношение (5.28) следует теперь из (2.10).

Лемма 5.5. *Пусть элемент* $\omega_{pq}\,dz$ *матричной формы* ω *фуксовой системы* (3), (4) *имеет в окрестности точки* a_l *разложение вида*

$$\omega_{pq} = \frac{1}{z-a_l} c_{-1}^{pq} + c_0^{pq} + (z-a_l) c_1^{pq} + \dots \tag{5.29}$$

Элементы b_{pq}^i *матриц* B^i *из* (4) *связаны с числами* c_k^{pq} *следующими соотношениями:*

$$\begin{cases} b_{pq}^l = c_{-1}^{pq}, \\ \displaystyle\sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{n} b_{pq}^i \frac{1}{(a_i-a_l)^r} = -c_{r-1}^{pq}, \quad r = 1, \dots \end{cases} \tag{5.30}$$

Доказательство. Из (5) получаем

$$\omega - B^l \frac{dz}{z-a_l} = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{n} B^i \frac{dz}{z-a_i},$$

откуда и следует доказательство леммы.

Предложение 5.3. *Фуксов вес* γ_χ *любого представления* (2) *удовлетворяет неравенству* $\gamma_\chi \leqslant n-1$. *Если представление* (2) *неприводимо, то*

$$\gamma_\chi \leqslant n-2. \tag{5.31}$$

Доказательство. Рассмотрим фуксову систему (4) с монодромией (2) и фуксовым весом γ_χ, приведенную к виду (5.9)—(5.13). Предположим, что $\gamma_\chi > n-2$. Тогда согласно предложению 5.2: $m \geqslant n-1$ для

числа m из (5.13). Из леммы 5.4 в этом случае следует, что элемент ω_{12} формы ω этой системы в окрестности точки a_l имеет вид $\omega_{12} = o\,((z-a_l)^{n-3})dz$, а из (5), (2.14) и условия $\gamma_\chi > 0$ следует: $b_{12}^l = 0$, $b_{12}^1 + \ldots + b_{12}^n = 0$, поэтому из леммы 5.5 получаем, что числа b_{12}^i, $i \neq l$ удовлетворяют системе $n-1$ уравнений (5.30)

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq l}}^{n} b_{12}^i \frac{1}{(a_i-a_l)^r} = 0, \quad r = 0, \ldots, n-2,$$

определитель которой является определителем Вандермонда чисел $\frac{1}{a_1-a_l}, \ldots, \hat{l}, \ldots, \frac{1}{a_n-a_l}$ и поэтому отличен от нуля. Значит, $b_{12}^i = 0$, $i = 1, \ldots, n$, поэтому все матрицы B^i системы (4) имеют нижний треугольный вид, и из следствия 2.1 получаем

$$b_{11}^l = \rho_l^1 + \varphi_l^1,\ b_{22}^l = \rho_l^2 + \varphi_l^2,\ b_{11}^i = \rho_i^1,\ b_{22}^i = \rho_i^2,\ i \neq l. \tag{5.32}$$

Поскольку из (5) следует, что $\sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i^j + \varphi_l^j = 0$, $j = 1, 2$, а из (2.5) — что $0 \leqslant \operatorname{Re} \sum\limits_{i=1}^{n} \rho_i^j \leqslant n-1$, $j = 1, 2$, то из последних двух равенств имеем $-(n-1) \leqslant \varphi_l^j \leqslant 0$, $j = 1, 2$, поэтому $\varphi_l^1 - \varphi_l^2 \leqslant n-1$, что вместе с предположением $\gamma_\chi > n-2$ приводит к равенству $\gamma_\chi = n-1$.

Из нижней треугольности матриц B^i в этом случае следует, что представление (2) приводимо.

Предложение 5.4. *Для любых точек $a_1, \ldots, a_n$ и любого числа γ, удовлетворяющего неравенствам*

$$0 < \gamma \leqslant n-2, \tag{5.33}$$

существует такое неприводимое представление (2), *что $\gamma_\chi = \gamma$ и все матрицы G_i монодромии группы* $\operatorname{Im}\chi$ *из* (2.5) *недиагонализируемы.*

Доказательство. Пусть, как и ранее, $a_1 = 0$, и точки ∞ нет среди точек D (этого всегда можно добиться конформным преобразованием сферы Римана).

1. Докажем предложение вначале для случая четного $\gamma = 2\gamma'$. Рассмотрим следующие две системы уравнений относительно неизвестных $d_2, \ldots, d_n$; $c_2, \ldots, c_n$:

$$\sum_{i=2}^{n} d_i \frac{1}{a_i^r} = \delta_{r,\gamma}, \tag{5.34}$$

$$\sum_{i=2}^{n} c_i \frac{1}{a_i^r} = x^2\delta_{r,n-2}, \tag{5.35}$$

где $r = 0, 1, \ldots, n-2$; $\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$

Поскольку определитель систем (5.34), (5.35) отличен от нуля, то для решения d системы (5.34) найдется такое j, что $d_j \neq 0$. Всякое же решение c системы (5.35) имеет вид $c = x^2 t$, $t_i \neq 0$, $i = 2, \ldots, n$, поэтому можно выбрать такие значения корней $\sqrt{d_i t_i}$, что $s = \sum\limits_{i=2}^{n} \sqrt{d_i t_i} \neq 0$. Выберем число x в (5.35) равным $x = -\frac{\gamma}{2s} = -\frac{\gamma'}{s}$, тогда $\sum\limits_{i=2}^{n} \sqrt{d_i c_i} = xs = -\frac{\gamma}{2} = -\gamma'$, поэтому

матрицы

$$(5.36)\qquad B^1=\begin{pmatrix}\gamma' & 0\\ 0 & -\gamma'\end{pmatrix},\quad B^i=\begin{pmatrix}\sqrt{d_ic_i} & d_i\\ -c_i & -\sqrt{d_ic_i}\end{pmatrix}$$

удовлетворяют условиям (5).

Рассмотрим фуксову систему (4), (5.36). Из следствия 2.1 и вида матриц (5.36) для показателей пространства X решений этой системы получаем

$$(5.37)\qquad \begin{cases}\beta_1^1=\varphi_1^1=\gamma', & \beta_1^2=\varphi_1^2=-\gamma',\\ \beta_i^j=\rho_i^j=\varphi_i^j=0, & i\neq 1,\quad j=1,2.\end{cases}$$

Рассмотрим разложение (2.8) для пространства X в точке $a_1=0$:

$$(5.38)\qquad T_1(y)=U_1(z)\,z^{A_1}y^{E_1}.$$

Из (5.37) следует, что

$$(5.39)\qquad A_1=\begin{pmatrix}\gamma' & 0\\ 0 & -\gamma'\end{pmatrix},\quad E_1=\begin{pmatrix}0 & \alpha\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Из (5.36) и (2.14) получаем

$$\begin{pmatrix}\gamma' & 0\\ 0 & -\gamma'\end{pmatrix}=U_1(0)\begin{pmatrix}\gamma' & 0\\ 0 & -\gamma'\end{pmatrix}U_1^{-1}(0),$$

поэтому

$$U_1(0)=\begin{pmatrix}u_{11} & 0\\ 0 & u_{22}\end{pmatrix}.$$

Сделаем в пространстве $X\,|_{\tilde S_1}$ замену базиса: $e_1'=\frac{e_1}{u_{11}}$, $e_2'=\frac{e_2}{u_{22}}$. В новом базисе, который мы вновь обозначим через (e), матрицы из (5.38) примут вид (5.13), (5.39) с заменой a_l на $a_1=0$ и α на $\varepsilon=\alpha\frac{u_{11}}{u_{22}}$. Из (5.34) и леммы 5.5 для матричной формы ω построенной системы (3), (4), (5.36) получаем:

$$(5.40)\qquad \omega_{12}=(z^{\gamma-1}+o(z^{\gamma-1}))\,dz.$$

Из (5.40) и леммы 5.4 следует, что число m в (5.13) для матрицы $U_1(z)$ удовлетворяет неравенству $m\geqslant\gamma$, а из этого неравенства и предложения 5.2 получаем, что для построенной системы $\gamma_\omega=\gamma_\chi=\gamma$.

Осталось показать, что матрицы монодромии $G_1,\ldots,G_n$ построенной системы (4), (5.36) недиагонализируемы и ее представление монодромии неприводимо.

Для недиагонализируемости матриц $G_1,\ldots,G_n$ в силу (2.5) достаточно показать недиагонализируемость матриц $E_1,\ldots,E_n$. Из (5.37) и (2.11) следует, что матрицы L_i в (2.14) при $i\neq 1$ совпадают с E_i, поэтому в силу (2.14) недиагонализируемость матриц E_i следует из недиагонализируемости B^i из (5.36) при $i\neq 1$.

Покажем, что E_1 также недиагонализируема. Заметим, что при $c\neq 0$, $m=\gamma$ и при $c=0$ выражение $c\,(m-\beta_1^1+\beta_1^2)$ в (5.28) в силу (5.37) зануляется, поэтому элемент ω_{12} из (5.28) при $m\geqslant\gamma$ имеет вид

$$\omega_{12}=(\varepsilon z^{\gamma_\omega-1}+o\,(z^{\gamma_\omega-1}))\,dz.$$

Сравнивая последнее равенство с (5.40) и учитывая доказанное равенство $\gamma_\omega=\gamma_\chi=\gamma$, получаем $\varepsilon=1$, $\alpha=\frac{u_{22}}{u_{11}}\neq 0$, значит, E_1 — недиагонализируемая матрица.

Если бы представление монодромии построенной системы (4), (5.36) было бы приводимым, то из недиагонализируемости матриц $G_1,\ldots,G_n$ следовало бы, что оно коммутативно. В этом случае из предложения 5.1 мы получили бы $\gamma_\chi=0$, что противоречит доказанному равенству $\gamma_\chi=\gamma>0$.

2. Рассмотрим случай нечетного $\gamma = 2\gamma'' + 1$. Доказательство предложения в этом случае полностью повторяет случай четного γ с заменой матриц B^i из (5.36) на

$$(5.36') \qquad B^1 = \begin{pmatrix} -n+2+\gamma'' & 0 \\ 0 & -n+1-\gamma'' \end{pmatrix},$$

$$B^i = \begin{pmatrix} \sqrt{d_i c_i} + \dfrac{2n-3}{2n-2} & d_i \\ -c_i & -\sqrt{d_i c_i} + \dfrac{2n-3}{2n-2} \end{pmatrix}, \quad i \neq 1,$$

матрицы A_1 — на

$$A_1 = \begin{pmatrix} -n+2+\gamma'' & 0 \\ 0 & -n+1-\gamma'' \end{pmatrix},$$

и показателей из (5.37) на

$$(5.37') \qquad \begin{cases} \beta_1^1 = \varphi_1^1 = -n+2+\gamma'', \ \beta_1^2 = \varphi_1^2 = -n+1-\gamma'', \\ \beta_i^j = \rho_i^j = \dfrac{2n-3}{2n-2}, \ i \neq 1, \ j = 1, 2. \end{cases}$$

З а м е ч а н и е 5.1. Из того, что в (5.38) матрица T_1 имеет вид (5.10)—(5.13) следует, что

$$\varphi_1(e_{11}^1) = \gamma', \quad \varphi_1(e_{12}^1) \geqslant 0, \quad \varphi_1(e_{21}^1) \geqslant \gamma', \quad \varphi_1(e_{22}^1) = -\gamma'$$

для элементов e_{ij}^1 матрицы T_1.

П р и м е р 5.1. Представление монодромии фуксовой системы

$$(5.41) \qquad df = \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\frac{dz}{z} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{dz}{z+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{dz}{z-1} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{dz}{z-\frac{1}{2}}\right] f$$

с четырьмя особыми точками $a_1 = 0$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $a_4 = 1/2$ имеет фуксов вес $\gamma_\chi = 2$, при этом матрицы монодромии $G_1, \ldots, G_4$ недиагонализируемы.

5.2. Обозначим через F_n группу с n образующими $h_1, \ldots, h_n$ и единственным соотношением $h_1 \cdot \ldots \cdot h_n = e$, а через $\varkappa_a$ — изоморфизм

$$(5.42) \qquad \varkappa_a\colon \pi_1(CP^1 \setminus D, z_0) \to F_n,$$

при котором $\varkappa_a(g_i) = h_i$ для образующих g_i, определенных в начале § 2.

Любое представление (2) может быть записано в виде $\chi = \chi' \circ \varkappa_a$, где

$$(5.43) \qquad \chi'\colon F_n \to GL(p; C)$$

некоторое представление группы F_n. Будем в дальнейшем обозначать χ через $\chi(a)$, где $a = (a_1, \ldots, a_n)$.

Доказательство следующего предложения очевидно.

П р е д л о ж е н и е 5.5. *Если для наборов точек $a = (a_1, \ldots, a_n)$ и $b = (b_1, \ldots, b_n)$ существует конформное преобразование $r\colon CP^1 \to CP^1$ такое, что*

$$r(a_i) = b_i, \ i = 1, \ldots, n; \ r(\gamma_i^a) = \gamma_i^b, \ i = 1, \ldots, n,$$

для путей γ_i, определенных в начале § 2, то $\gamma_{\chi(a)} = \gamma_{\chi(b)}$.

П р е д л о ж е н и е 5.6. *Пусть фуксов вес $\gamma_{\chi(a)}$ представления $\chi(a)$ с недиагонализируемыми матрицами монодромии $\chi'(h_1), \ldots, \chi'(h_n)$ больше единицы. Существует такое $\varepsilon > 0$ и такой индекс l, что для любого набора точек $a' = (a_1, \ldots, a_{l-1}, a_l + t, a_{l+1}, \ldots, a_n)$, где $0 < |t| < \varepsilon$, имеет место*

неравенство

$$\gamma_{\chi(a')} < \gamma_{\chi(a)} - 1.$$

Доказательство. Рассмотрим фуксову систему (4) с монодромией (2) и фуксовым весом $\gamma = \gamma_{\chi(a)}$, приведенную к виду (5.9)—(5.13) к некоторой точке a_l. Из предложения 5.4 следует, что в (5.13) либо $c \neq 0$, $m \geqslant \gamma$, либо $c = 0$. Переведем конформным преобразованием точку a_l в точку 0 и точку ∞ в ∞. Обозначим полученный набор вновь через $a_1, \ldots, a_n$.

Рассмотрим изомонодромную деформацию

$$df = \left[\left(\frac{B^1(t)}{z-t} + \sum_{i=2}^{n} \frac{B^i(t)}{z-a_i}\right) dz\right] f \tag{5.44}$$

построенной системы, где

$$\begin{cases} B^i(t) = \dfrac{1}{a_i - t}[B^i(t), B^1(t)], \\ B^i(0) = B^i, \quad \sum\limits_{i=1}^{n} B^i(t) = 0. \end{cases} \tag{5.45}$$

и параметр t изменяется в малой окрестности точки 0. Система (5.44) имеет при достаточно малых t ту же монодромию, что и исходная система (4) (см. [23]).

Из (5.12), (5.13) и (2.14) получаем

$$B^1(0) = \begin{pmatrix} b+\gamma_1 & 0 \\ 0 & b-\gamma_2 \end{pmatrix},$$

поэтому из (5.45) следует, что

$$\frac{dB^i(0)}{dt} = \frac{1}{a_i}\begin{pmatrix} 0 & -\gamma b^i_{12} \\ \gamma b^i_{21} & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$B^i(t) = \begin{pmatrix} b^i_{11} + o(t) & b^i_{12} - \dfrac{\gamma}{a_i} b^i_{12} t + o(t) \\ b^i_{21} + \dfrac{\gamma}{a_i} b^i_{21} t + o(t) & b^i_{22} + o(t) \end{pmatrix}. \tag{5.46}$$

Отсюда и вновь из (5.45) имеем

$$B^1(t) = -\sum_{i=2}^{n} B^i(t) = \begin{pmatrix} b+\gamma_1+o(t) & o(t) \\ o(1) & b-\gamma_2+o(t) \end{pmatrix}, \tag{5.47}$$

поскольку, в силу лемм 5.5, 5.4 и предложения 5.3, выполнено равенство

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{b^i_{12}}{a^r_i} = h\delta_{r,\gamma}, \quad h \neq 0, \quad r = 0, \ldots, \gamma, \quad 2 \leqslant \gamma \leqslant n-2. \tag{5.48}$$

Разложение (2.8) для пространства X решений системы (5.44) в точке t имеет вид

$$T_1(y, t) = U_1(z, t)(z-t)^{A_1}(y-t)^{E_1}.$$

Из (2.14) следует, что $U_1(t, t) B^1(0) = B^1(t) U_1(t, t)$, откуда

$$U_1(t, t) = \begin{pmatrix} 1 + x_1 \cdot t + o(t) & o(t) \\ o(1) & 1 + x_2 \cdot t + o(t) \end{pmatrix}.$$

Приведем систему (5.44) к виду (5.9)—(5.13). Для этого перейдем от пространства X решений этой системы к $X' = U^{-1}(t, t) X$. Матрицы коэф-

фициентов новой системы будут иметь вид

$$(5.49)\qquad \begin{cases} \widetilde{B}^1(t) = \begin{pmatrix} b+\gamma_1 & 0 \\ 0 & b-\gamma_2 \end{pmatrix}, \\ \widetilde{B}^i(t) = U_1^{-1}(t,t)\,B^i(t)\,U_1(t,t) = \\ \qquad = \begin{pmatrix} * & b_{12}^i - (x_1-x_2)\,b_{12}^i t - \gamma \dfrac{b_{12}^i}{a_i}\,t + o(t) \\ * & * \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Из (5.49) и (5.48) получаем

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\widetilde{b}_{12}^i(t)}{a_i^r} = o(t),\quad 0 \leqslant r \leqslant \gamma - 2,$$

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{\widetilde{b}_{12}^i(t)}{a_i^{\gamma-1}} = -\gamma h t + o(t),$$

поэтому для формы $\widetilde{\omega}$ новой системы в окрестности точки $z = t$ согласно лемме 5.5 имеем $c_{\gamma-2}^{12}(t) \neq 0$ в (5.29) для достаточно малых t. Отсюда и из (5.28) с учетом равенства $\gamma_\omega = \gamma$ получаем $c \neq 0$, $m \leqslant \gamma - 1$ в разложении (5.13) для новой системы. Из предложения 5.2 заключаем, что $\gamma_{\chi(a')} < \gamma_{\chi(a)}$. Из предложения 5.1 следует, что числа $\gamma_{\chi(a)}$ и $\gamma_{\chi(a')}$ имеют одинаковую четность, поэтому $\gamma_{\chi(a')} < \gamma_{\chi(a)} - 1$ для набора $a' = (a_1 + t, a_2, \ldots, a_n)$ при достаточно малых t. Для завершения доказательства предложения осталось лишь применить конформное преобразование, обратное к тому, которое было использовано в начале доказательства, и воспользоваться предложением 5.5.

§ 6. Проблема Римана — Гильберта для системы трех уравнений

В этом параграфе будут описаны все те представления (2) размерности $p = 3$, для которых проблема Р.—Г. имеет отрицательное решение.

Предложение 6.1. *Пусть представление* (2) *размерности* $p = 3$ *приводимо и каждая из образующих* G_i *группы* $\operatorname{Im}\chi$, *определенная в* (2.5), *приводится к жордановой клетке. Проблема Р.—Г. для представления* (2) *разрешима тогда и только тогда, когда для соответствующего двумерного подпредставления или факторпредставления* χ_2 *представления* (2) *имеет место равенство*

$$(6.1)\qquad \gamma_{\chi_2} = 0.$$

Доказательство. Необходимость. 1. Рассмотрим систему (4) с монодромией (2). Пусть X_i — подпространство размерности $i = 1$ или $i = 2$ пространства X решений этой системы, инвариантное относительно действия операторов монодромии. Из того, что матрицы E_j в разложениях (2.8) имеют вид жордановых клеток, следует, что первые i элементов ассоциированного в точке a_j базиса образуют базис в пространстве $X_i|_{\widetilde{S}_j}$, а из свойства б) ассоциированного базиса следует, что $\varphi_j^1 \geqslant \varphi_j^2 \geqslant \varphi_j^3$, откуда

$$(6.2)\qquad \operatorname{Re}\beta_j^1 \geqslant \operatorname{Re}\beta_j^2 \geqslant \operatorname{Re}\beta_j^3,\ j = 1, \ldots, n,$$

где $\beta_j^1, \ldots, \beta_j^i$ — показатели подпространства X_i в точке a_j. Из условия фуксовости (2.16) и (6.2) получаем

$$s_i = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{i} \beta_j^l \geqslant 0,$$

что вместе с неравенством (3.11) влечет

$$(6.3)\qquad s_i = 0,$$

откуда в силу (2.16), (6.2) заключаем, что

$$(6.4)\qquad \operatorname{Re}\beta_j^1 = \operatorname{Re}\beta_j^2 = \operatorname{Re}\beta_j^3,\quad \varphi_j^1 = \varphi_j^2 = \varphi_j^3,\quad j = 1, \ldots, n.$$

2. Рассмотрим фундаментальную матрицу $T(y)$ пространства X, первые i столбцов которой образуют базис пространства X_i. Тогда матрица $T'(y) = U_1^{-1}(a_1)\,T(y)$ имеет вид (3.14) (ибо в противном случае согласно доказательству леммы 3.7 сумму (6.3) можно было бы увеличить, что невозможно в силу (3.11)):

$$(6.5)\qquad \underset{\text{а)}\ i=2}{T'(y) = \begin{pmatrix} \widetilde{T}(y) & * \\ & * \\ 0\,0 & e_{33} \end{pmatrix}},\qquad \underset{\text{б)}\ i=1}{T'(y) = \begin{pmatrix} e_{11} & ** \\ 0 & \\ 0 & \widetilde{T}(y) \end{pmatrix}}.$$

В (6.5) матрица $\widetilde{T}$ является фундаментальной матрицей пространства $\widetilde{X}$ решений системы (4) с монодромией χ_2, поэтому из (6.4) и (6.5) а) для нормирований $\widetilde{\varphi}_j^k$ пространства $\widetilde{X}$ получаем $\widetilde{\varphi}_j^1 = \varphi_j^1$, $\widetilde{\varphi}_j^2 = \varphi_j^2$ и $\gamma_{\chi_2} = 0$ для $i = 2$.

В случае (6.5) б) согласно определению 2.2 нормирований $\widetilde{\varphi}_j^1 \geqslant \varphi_j^2$, $\widetilde{\varphi}_j^2 \geqslant \varphi_j^3$, откуда в силу (6.3) и условия фуксовости (2.16) вновь $\widetilde{\varphi}_j^1 = \varphi_j^2$, $\widetilde{\varphi}_j^2 = \varphi_j^3$ и $\gamma_{\chi_2} = 0$ для $i = 1$.

Достаточность. 1. Рассмотрим систему (4) с регулярными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$, фуксовую в точках $a_2, \ldots, a_n$ с монодромией (2) и фундаментальной матрицей T пространства X решений вида (6.5) (существование такой системы доказано в лемме 3.7). Из [6] и следствия 5.1 получаем, что существует такая мероморфная на CP^1 голоморфно обратимая вне точек $a_1, \ldots, a_n$ матрица $\widetilde{\Gamma}(z)$, что пространство $\widetilde{X}'$ с фундаментальной матрицей $\widetilde{T}' = \widetilde{\Gamma}(z)\,\widetilde{T}$ имеет разложение (5.9)—(5.13), где $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ в силу условия $\gamma_{\chi_2} = 0$.

Обозначим через c_j число $\varphi_j(e_{33})$ в случае (6.5) а) и число $\varphi_j(e_{11})$ в случае (6.5) б). Перейдем от пространства X к $X' = \Gamma(z)\,X$, где

$$(6.6)\qquad \underset{\text{а)}\ i=2}{\Gamma(z) = \begin{pmatrix} \Gamma_1(z) & 0 \\ & 0 \\ 0\quad 0 & 1 \end{pmatrix}},\qquad \underset{\text{б)}\ i=1}{\Gamma(z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & \Gamma_1(z) \end{pmatrix}},$$

$$\Gamma_1(z) = \prod_{j=1,\, j\neq l}^{n} \left(\frac{z-a_j}{z-a_l}\right)^{c_j} \widetilde{\Gamma}(z).$$

Фундаментальная матрица $T' = \Gamma(z)\,T$ пространства X' вновь имеет вид (6.5), причем для нормирований $'\varphi_j^k$ этого пространства имеют место следующие равенства

$$(6.7)\qquad \begin{cases} '\varphi_j^1 = {}'\varphi_j^2 = \varphi_j(e_{33}) = c_j, & j = 1, \ldots, n, \text{ в случае а)}, \\ c_j = {}'\varphi_j^1 = \varphi_j(\widetilde{e}_1) = \varphi_j(\widetilde{e}_2), & j = 1, \ldots, n, \text{ в случае б)}, \end{cases}$$

где $\widetilde{e}_1$ и $\widetilde{e}_2$ — столбцы матрицы $\widetilde{T}$. Равенства (6.7) при $j \neq l$ следуют из вида матрицы $\Gamma_1(z)$ и (5.9). Докажем их при $j = l$. Обозначим через ρ_j собственные значения жордановых клеток E_j. Для функций $e_{11}(y)$ и $e_{33}(y)$ имеем

$$(6.8)\qquad \sum_{j=1}^{n} (\rho_j + c_j) = 0.$$

С другой стороны, для пространства $\widetilde{X}'$ получаем в силу (2.16)

$$\sum_{j=1}^{n} (2\rho_j + {}'\widetilde{\varphi}_j^1 + {}'\widetilde{\varphi}_j^2) = 0.$$

Так как $'\widetilde{\varphi}_j^1 = '\widetilde{\varphi}_j^2$, то отсюда и из (6.8) следует, что

$$\sum_{j=1}^{n} c_j = \sum_{j=1}^{n} '\widetilde{\varphi}_j^1 = \sum_{j=1}^{n} '\widetilde{\varphi}_j^2.$$

Случай $j = l$ следует теперь из равенств (6.7) при $j \neq l$.

2. Дальнейшее доказательство разбивается на два случая: а) $i = 2$, б) $i = 1$.

Рассмотрим вначале случай б). Из (6.7) и построения матрицы $\widetilde{T}'$ следует, что в окрестности точки a_j матрицу $T'(y)$ можно представить в следующем виде

$$T'(y) = U_j(z)(z - a_j)^{c_j I}(y - a_j)^{E_j}, \tag{6.9}$$

где

$$U_j(z) = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\widetilde{U}_j(z)} \end{pmatrix},$$

$u_{11}(a_j) \neq 0$; $\widetilde{U}_j(z)$ — голоморфно обратима в точке a_j; $u_{12}(z)$, $u_{13}(z)$ имеют в точке a_j, вообще говоря, полюсы порядков p и q соответственно.

Обозначим через $u_2(z)$ и $u_3(z)$ строки матрицы $\widetilde{U}_j(z)$. Поскольку $u_2(a_j)$ и $u_3(a_j)$ линейно независимы, то существуют такие многочлены $Q_2\left(\frac{1}{z - a_j}\right)$ и $Q_3\left(\frac{1}{z - a_j}\right)$ степеней не более, чем $\max(p, q)$, что вектор $t(z) = Q_2 u_2 + Q_3 u_3 + (u_{12}, u_{13})$ голоморфен в точке a_j. (Построение Q_2 и Q_3 проводится аналогично построению Q в лемме 3.1.) Перейдем от пространства X' к ${}^1X' = \Gamma_2(z) X'$, где

$$\Gamma_2(z) = \begin{pmatrix} 1 & Q_2 & Q_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрица ${}^1U_j' = \Gamma_2(z) U_j$ будет уже голоморфно обратима в точке a_j, поэтому равенство (6.7) б) примет вид $'\varphi_j^1 = '\varphi_j^2 = '\varphi_j^3 = c_j$.

Проделаем описанную процедуру для всех $j = 1, \ldots, n$, получим пространство ${}^nX'$. Из голоморфной обратимости матриц ${}^nU_j'$, вида разложений (6.9) и формулы (2.10) следует, что ${}^nX'$ — пространство решений фуксовой системы (4) с заданной монодромией (2).

Рассмотрим случай а). Применим к матрице $T'(y)(y - a_j)^{-E_j}$ процедуру $A(a_j, 3, 3, c_j)$, получим пространство ${}^1X'$, для которого в разложении (6.9) матрица ${}^1U_j'(z)$ уже голоморфно обратима. Проделаем указанную процедуру для всех $j = 1, \ldots, n$; дальнейшее доказательство полностью повторяет случай б).

Замечание 6.1. Пусть представление (2) приводимо и каждая из образующих G_i приводится к жордановой клетке. Если существует фуксова система (4) с монодромией (2), то для показателей β_i^j пространства решений этой системы имеют место соотношения:

$$\beta_i^1 = \ldots = \beta_i^p, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Доказательство проводится аналогично п. 1 необходимости предложения 6.1.

Замечание 6.2. Доказательство достаточности предложения 6.1 проходит, если условие приводимости каждой матрицы G_i к жордановой клетке заменить следующим: каждая из матриц $G_i' = \chi_2(g_i)$ приводится к виду $\begin{pmatrix} \lambda_i & * \\ 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$.

Доказательство. Если каждая из матриц G_i имеет кратное собственное значение кратности три, то доказательство то же, что в предложении 6.1. Если же для некоторого l имеет место неравенство $\rho_l^1 \neq \rho_l^2$ или $\rho_l^2 \neq \rho_l^3$, то доказательство повторяет доказательство достаточности предложения 6.1 до формулы (6.7) (последняя формула имеет место для $j \neq l$), а затем — от пункта 2 до конца. При этом описанная в пункте 2 процедура приведет к равенствам $'\varphi_j^1 = {}'\varphi_j^2 = {}'\varphi_j^3 = c_j$, $j \neq l$, $'\varphi_l^2 = {}'\varphi_l^3$ и, вообще говоря, $'\varphi_l^1 \neq {}'\varphi_l^2$ (в частности, может быть $'\varphi_l^1 < {}'\varphi_l^2$). Поскольку матрица E_l имеет в предположении $\rho_l^1 \neq \rho_l^2$ вид

$$E_l = \begin{pmatrix} \rho_l^1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & E_l' & \end{pmatrix},$$

то фуксовость построенной системы вновь следует из (2.10).

Предложение 6.2. *Для любого представления* (2) *размерности* $p = 3$, *образ которого лежит в множестве верхних треугольных матриц, проблема Р.—Г. разрешима.*

Доказательство. Рассмотрим систему (3) с регулярным особыми точками $a_1, \ldots, a_n$ и заданной монодромией (2), фундаментальная матрица $T(y)$ пространства X решений которой имеет вид

$$T(y) = \begin{pmatrix} e_{11} & * & * \\ 0 & e_{22} & * \\ 0 & 0 & e_{33} \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

Существование такой системы доказано в пункте 2а) леммы 3.7. Обозначим через $c_i^j = \varphi_i(e_{jj})$ нормирование элемента $e_{jj}(y)$ в точке i. Можно считать, что

$$c_i^1 = c_i^2 = c_i^3 = 0, \quad i = 1, \ldots, \hat{l}, \ldots, n, \tag{6.11}$$

где l — произвольный индекс из множества $\{1, \ldots, n\}$. (В противном случае применим к пространству X преобразование $\prod\limits_{i\neq l} B(a_i, a_l, c_i^1, c_i^2, c_i^3)$, получим фундаментальную матрицу вида (6.10) с условием (6.11).) Матрицы G_i операторов монодромии g_i^* в базисе из столбцов матрицы $T(y)$ имеют верхний треугольный вид, поэтому то же самое верно и для матриц E_i из (2.5).

Дальнейшее доказательство сводится к разбору следующих случаев:
1) одна из матриц E_i диагонализируема;
2) $\forall i\ \rho_i^1 = \rho_i^2$ или $\forall i\ \rho_i^2 = \rho_i^3$;
3) $\forall i\ \rho_i^1 = \rho_i^3$, $\rho_l^1 \neq \rho_l^2$ для некоторого l;
4) $\rho_l^1 \neq \rho_l^3$ для некоторого l.

Случай 1) разобран в [7]. Случай 2) следует из замечания 6.2 и предложения 5.1. Рассмотрим случай 3). Заметим, что в этом случае $\varphi_l(e_{11}) = \varphi_l(e_{33}) = c_l$ в силу (6.11) и равенства (2.16) для $e_{11}(y)$ и $e_{33}(y)$. Перейдем от фундаментальной матрицы $T(y)$ к $T_s(y) = T(y)S$, где S — верхняя треугольная матрица такая, что

$$S^{-1}E_lS = E_l^s = \begin{pmatrix} \rho_l^1 & 0 & 1 \\ 0 & \rho_l^2 & 0 \\ 0 & 0 & \rho_l^1 \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

Применим к матрице $T_s \cdot (y - a_l)^{-E_l^s}$ процедуру

$$A(a_l, 2, 2, \varphi_l(e_{22})) \cdot A(a_l, 3, 3, \varphi_l(e_{33})) \cdot \prod_{i\neq l} A(a_i, 2, 2, 0) \cdot A(a_i, 3, 3, 0). \tag{6.13}$$

Получим пространство X', для которого имеет место разложение (2.8), (2.9) в точках a_i, $i \neq l$, а в точке a_l матрица $T_s(y)$ может быть представлена в виде

$$T_s(y) = U(z)(z-a_l)^{A_l}(y-a_l)^{E_l^s}, \quad A_l = \operatorname{diag}(c_l, \varphi_l(e_{22}), c_l), \tag{6.14}$$

а $U_l(z)$ — голоморфно обратима в точке a_l. Для матриц E_l^s, A_l имеет место предложение 2.1, поэтому из (2.10) получаем, что X' является пространством решений системы (4), фуксовой также и в точке a_l.

В случае 4) локальное представление χ_l из (2.3) раскладывается в прямую сумму одномерного χ_l^1 и двумерного представлений и собственный вектор e представления χ_l^1 либо является собственным вектором для всех G_i (когда $\rho_l^1 \neq \rho_l^2$), либо определяет собственный вектор факторпредставления χ_1 представления χ (когда $\rho_l^2 \neq \rho_l^3$). Доказательство в случае 4) предложения 6.2 будет следовать из доказательства следующего предложения 6.3.

Предложение 6.3. *Пусть представление* (2) *размерности* $p = 3$ *таково, что одно из локальных представлений* χ_l *из* (2.3) *раскладывается в прямую сумму одномерного* χ_l^1 *и двумерного представлений. Тогда проблема Р. — Г. для представления* (2) *разрешима.*

Доказательство. Рассмотрим систему (3) с регулярными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$, фуксовую вне точки a_l с заданной монодромией (2). В силу (2.15), (2.16) для доказательства предложения достаточно показать, что сумму s показателей пространства X решений этой системы всегда можно увеличить.

Рассмотрим разложение (2.8) для пространства X в окрестности точки a_l, выбрав в качестве ассоциированного базиса такой, в котором матрица E_l имеет вид

$$E_l = \begin{pmatrix} \rho_l^1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho_l^2 & \varepsilon \\ 0 & 0 & \rho_l^3 \end{pmatrix}. \tag{6.15}$$

В силу леммы 4.1 можно считать, что матрица $U_l(z)$ при этом уже имеет вид (4.1). Пусть для определенности $c_{33} > 0$ в (4.1). Дальнейшее доказательство сводится к разбору следующих случаев:

1) $\varphi_l(e_{31}) \leqslant \varphi_l(e_{32})$; $u_{31}^l(z) \not\equiv 0$;
2) $\varphi_l(e_{31}) > \varphi_l(e_{32})$;
3) $u_{31}^l(z) \equiv u_{32}^l(z) \equiv 0$, $u_{12}^l(a_l) = 0$, $u_{12}^l(z) \not\equiv 0$;
4) $u_{31}^l(z) \equiv u_{32}^l(z) \equiv u_{12}^l(z) \equiv 0$.

В случае 1) применим к пространству X процедуру $A(a_l, 3, 1, \varphi_l(e_{31}))$, в случае 2) — процедуру $A(a_l, 3, 2, \varphi_l(e_{32}))$, в случае 3) — процедуры $A(a_l, 3, 3, \varphi_l(e_{33}))$ и $A(a_l, 1, 2, \varphi_l(e_{12}))$. Во всех трех случаях, как это следует из замечания 3.1, получим $s' > s$, где s' — сумма показателей пространства $X' = \Gamma(z) X$.

Если же $u_{31}^l(z) \equiv u_{32}^l(z) \equiv u_{12}^l(z) \equiv 0$ (случай 4)), то из (6.15) получаем, что в разложении (2.8) в точке a_l имеет место тождество $e_{31}(y) \equiv e_{32}(y) \equiv e_{12}(y) \equiv 0$, т. е. представление χ — верхне-треугольное, причем собственный вектор e локального представления χ_l^1 не является собственным вектором всего представления χ и не определяет собственного вектора в соответствующем одномерном факторпредставлении. В этом случае предложение 6.3 следует из доказанных пунктов 1) — 3) предложения 6.2.

Из теоремы 1 и предложений 6.1—6.3 получаем

Следствие 6.1. *Проблема Р. — Г. для представления* (2) *размерности* $p = 3$ *имеет отрицательное решение тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия*:

а) *каждая из образующих G_i группы* $\operatorname{Im}\chi$ *приводится к жордановой клетке*;

б) *представление* (2) *приводимо*;

в) *соответствующее двумерное подпредставление или факторпредставление* χ_2 *неприводимо и* $\gamma_{\chi_2} > 0$.

Перейдем к доказательству теорем 2, 3, сформулированных во введении.

Доказательство теоремы 2. Рассмотрим приводимое представление (2) размерности $p = 3$, для которого все матрицы G_i приводятся к жордановым клеткам и соответствующее двумерное подпредставление или факторпредставление χ_2 неприводимо. Из приводимости (2) следует, что для соответствующего одномерного подпредставления или факторпредставления число

$$r = \sum_{i=1}^{3} \rho_i$$

— целое, где ρ_i — собственное значение жордановой клетки E_i. Поэтому из предложения 5.1 заключаем, что γ_{χ_2} — четное число. Из неприводимости χ_2 и предложения 5.3 для $n = 3$ следует, что $\gamma_{\chi_2} \leqslant 1$, поэтому $\gamma_{\chi_2} = 0$. Теорема 2 вытекает теперь из следствия 6.1.

Доказательство теоремы 3.

1. Докажем теорему вначале для случая $p = 3$. Для этого достаточно построить представление (2), удовлетворяющее условиям следствия 6.1.

Рассмотрим систему ((4), (5.36)). Поскольку число точек n больше трех, то найдутся такие 2-векторы $b_2, \ldots, b_n$, что $b_j \neq 0$, $j = 2, \ldots, n$, и

$$\sum_{j=2}^{n} b_j = 0, \quad \operatorname{rank} {}'B^j = 2, \quad j = 2, \ldots, n, \tag{6.16}$$

где через $'B^i$ обозначены матрицы

$$'B^1 = \begin{pmatrix} 0 & z^{-\gamma'} & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & B^1 \end{pmatrix}, \quad 'B^i = \begin{pmatrix} 0 & b_i & \\ 0 & & \\ 0 & B^i & \end{pmatrix}, \tag{6.17}$$

B^i — матрицы из (5.36), $\gamma' = \frac{1}{2}\gamma_\chi$, γ_χ — фуксов вес представления (2) монодромии системы ((4), (5.36)), $\gamma_\chi > 0$.

Рассмотрим систему ((4), (6.17)), в силу (6.16) она удовлетворяет условию (5). Покажем, что представление монодромии этой системы удовлетворяет условиям следствия 6.1.

Из построения системы ((4), (6.17)) следует, что условия б), в) следствия 6.1 для нее выполнены.

Поскольку матрицы $'B^i$ из (6.17) при $i > 1$ приводятся к жордановым клеткам, то из (2.11) и (2.14) получаем, что то же самое верно для матриц E_i и, значит, для $G_i = \exp(2\pi i E_i)$.

Рассмотрим пространство решений системы ((4), (6.17)) в окрестности точки $a_1 = 0$. Пусть $T_1(y)$ — фундаментальная матрица для системы ((4), (5.36)) из (5.38). Тогда матрица

$$T = \begin{pmatrix} 1 & e_{12} & e_{13} \\ 0 & & \\ 0 & T_1 & \end{pmatrix} \tag{6.18}$$

является фундаментальной матрицей для системы ((4), (6.17)). Подставляя $T(y)$ в эту систему, получаем

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{de_{12}}{dz} &= z^{-\gamma'-1} e_{22} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{z - a_i} (b_{12}^i e_{22} + b_{13}^i e_{32}), \\ \frac{de_{13}}{dz} &= z^{-\gamma'-1} e_{23} + \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{z - a_i} (b_{12}^i e_{23} + b_{13}^i e_{33}). \end{aligned} \right. \tag{6.19}$$

Поскольку из замечания 5.1 следует, что

$$\varphi_1(e_{22}) = \gamma',\ \varphi_1(e_{23}) \geqslant 0,\ \varphi_1(e_{33}) = -\gamma',\ \varphi_1(e_{32}) \geqslant \gamma',$$

где через $\varphi_1(f)$ обозначено нормирование функции f в точке $a_1 = 0$, то из (6.19) получаем, что

$$\varphi_1\left(\frac{de_{12}}{dz}\right) = -1, \quad \varphi_1\left(\frac{de_{13}}{dz}\right) = -\gamma' - 1. \tag{6.20}$$

Из (6.20) следует, что точка $a_1 = 0$ является для системы ((4), (6.17)) регулярной особой точкой.

Матрица E_1 из разложения (2.8) для $T(y)$ имеет вид

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.21}$$

Если бы выполнялось равенство $\alpha = 0$, то матрица y^{E_1} имела вид

$$y^{E_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \beta \ln y \\ 0 & 1 & \ln y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и элемент e_{12} из (6.18) был бы однозначной мероморфной функцией в окрестности точки $a_1 = 0$, но тогда число $\varphi_1\left(\frac{de_{12}}{dz}\right)$ было бы неотрицательным в случае голоморфности $e_{12}(z)$ и меньшим -1 в случае, когда функция e_{12} имеет в точке $a_1 = 0$ полюс. Получаем противоречие с первым равенством в (6.20). Значит, $\alpha \neq 0$ в (6.21) и E_1 приводится к жордановой клетке. Поэтому то же самое верно и для G_1. Условие а) следствия 6.1 выполнено.

Итак, для представления (2) монодромии системы ((4), (6.17)) проблема Р. — Г. имеет отрицательное решение.

2. Рассмотрим матрицы

$${}_p'B^i = \begin{pmatrix} \overbrace{0 \quad \cdots \quad 0}^{p} & \\ \vdots \qquad\quad \vdots & \\ \qquad\quad 0 & \\ 0 \quad \cdots \quad 0 & 'B^i \end{pmatrix}. \tag{6.22}$$

Для представления (2) монодромии системы ((4), (6.22)) не существует реализующей его фуксовой системы. Теорема 3 доказана.

Пример 6.1. Для представления (2) монодромии системы

$$df = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & z & 0 \\ 0 & 0 & -z \end{pmatrix}\frac{dz}{z^2} + \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{dz}{z+1} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\frac{dz}{z-1} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & -3 & -3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}\frac{dz}{z-\frac{1}{2}}\right)f \tag{6.23}$$

с регулярными особыми точками $0, -1, 1, \frac{1}{2}$ не существует реализующей его фуксовой системы.

Из следствия 5.1 и доказательства теоремы 3 получаем в силу (2.10)

Следствие 6.2. *Пусть представление* (2) *размерности* $p = 3$ *удовлетворяет условиям* а), б), в) *следствия* 6.1. *Тогда существует система* (3) *с монодромией* (2) *и с регулярными особыми точками* $a_1, \ldots, a_n$ *фуксовая во всех точках, кроме одной, в которой порядок полюса матрицы коэффициентов равен* $\frac{\gamma_{\chi_2}}{2} + 1$, *и не существует аналогичной системы с полюсом меньшего порядка.*

Из предложения 5.3 и следствия 6.2 получаем

Следствие 6.3. *Для любого представления* (2) *размерности* $p = 3$ *существует система* (3) *с регулярными особыми точками* $a_1, \dots, a_n$ *и монодромией* (2), *фуксовая во всех точках кроме, быть может, одной, в которой порядок полюса матрицы коэффициентов не превосходит числа* $\left[\frac{n}{2}\right]$, *где* $[x]$ — *целая часть числа* x.

Запишем представление (2) в виде $\chi = \chi(a)$ (см. (5.42), (5.43)). Из предложения 5.6 и следствия 6.1 получаем

Следствие 6.4. *Для любого набора точек* $a = (a_1, \dots, a_n)$, *любого представления* (5.43) *размерности* $p = 3$ *и любого* $\varepsilon > 0$ *найдется такой набор точек* $a' = (a_1', \dots, a_n')$, *что* $|a_i' - a_i| < \varepsilon$ *и проблема Р. — Г. для представления* $\chi(a')$ *разрешима.*

Следствие 6.4 означает, что не существует такого набора матриц $G_1, \dots, G_n$; $G_1 \cdot \ldots \cdot G_n = I$, порядка (3×3), что проблема Р. — Г. для представления $\chi(a)$ имеет отрицательное решение для всех наборов точек $a = (a_1, \dots, a_n)$.

§ 7. Фуксов вес и двумерные голоморфные векторные расслоения на сфере Римана

В любом комплексном векторном расслоении с постоянными функциями перехода можно ввести голоморфную интегрируемую связность (см. [24]). Пусть $(e_1^i, \dots, e_p^i)$ — произвольный базис сечений расслоения $F'|_{U_i}$, где через F' обозначено векторное расслоение, ассоциированное с расслоением, построенным в пункте 1.3 § 1. Обозначим через ∇' голоморфную связность в F', а через $-\omega^i$ — матрицу этой связности в базисе $(e_1^i, \dots, e_p^i)$. Пусть f — координаты сечения s в базисе (e^i). Тогда

$$\nabla' f = (d - \omega^i) f.$$

Таким образом, связность ∇' задает семейство локальных систем дифференциальных уравнений на $CP^1 \setminus D$:

$$(d - \omega^i) f = 0. \tag{7.1}$$

В базисе $(s_1, \dots, s_p)$ из p линейно-независимых в каждой точке глобальных голоморфных сечений, который существует в силу голоморфной тривиальности расслоения F', семейство (7.1) задает систему линейных дифференциальных уравнений (3) на всем $CP^1 \setminus D$. Из построения этой системы следует, что ее монодромия совпадает с (2). Если от базиса $(s_1, \dots, s_p)$ перейти к $(s_1', \dots, s_p') = (s_1, \dots, s_p)\,\Gamma^{-1}(z)$, то система (3), построенная по связности ∇', перейдет в

$$df = \omega' f,$$

где ω' имеет вид (1.5). Итак, задание связности в тривиальном расслоении эквивалентно заданию системы линейных дифференциальных уравнений (с точностью до калибровочных преобразований (1.5)).

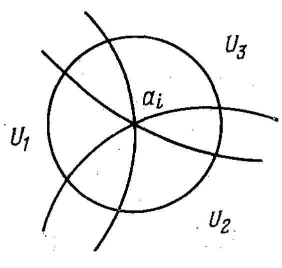


Рис. 2

Продолжим расслоение со связностью (F', ∇') до расслоения со связностью (F^0, ∇^0) на всем CP^1 следующим образом. Пусть окрестность O_i точки a_i пересекается с окрестностями $U_{\lambda_1}, \dots, U_{\lambda_k}$ из покрытия $\{U_\lambda\}$ по связным односвязным множествам (см. рис. 2, на котором $k = 3$).

Расслоение F' из п. 1.3 § 1 строится так, что из функций перехода $g_{kl}\colon U_{\lambda_k} \cap U_{\lambda_l} \to GL(p; C)$ лишь одна отлична от I. Пусть это g_{1k}, тогда

$g_{1k} = G_i$. Выберем в $O_i \cap U_{\lambda_1}$ ту ветвь функции $(y - a_i)^{E_i}$, где E_i из (2.5), которая соответствует листу накрытия над $O_i \cap U_{\lambda_1}$, содержащему отмеченную точку $y_i \in \tilde{S}_i$. Положим для выделенной ветви $(z - a_i)^{E_i}$:

$$g_{01} = (z - a_i)^{E_i}, \tag{7.2}$$

g_{02} положим равным аналитическому продолжению функции g_{01} в $O_i \cap U_{\lambda_2}$ вдоль пути, обходящему точку a_i против часовой стрелки и т. д. Тогда на $O_i \cap U_{\lambda_k} \cap U_{\lambda_1}$ получим

$$g_{0k} = g_{01} \cdot G_i = g_{01} \cdot g_{1k}. \tag{7.3}$$

Расслоение F', продолженное описанным образом во все точки $a_i \in D$, обозначим через F^0. Если $(e_1^k, \ldots, e_p^k)$ — базис горизонтальных сечений в $F\;|_{U_{\lambda_k}}$ (последнее означает, что матрица ω' связности ∇' в этом базисе — нулевая), то из (7.2), (7.3) следует, что $(\xi_1, \ldots, \xi_p) = (e_1^k, \ldots, e_p^k)\, g_{0k}^{-1}$ — базис в $F^0\,|_{O_i \setminus \{a_i\}}$. Матрица ω_0^k связности ∇' в базисе $(\xi_1, \ldots, \xi_p)\,|_{O_i \cap U_{\lambda_k}}$ равна согласно (1.5):

$$\omega_0^k = dg_{0k} \cdot g_{0k}^{-1} = E_i \frac{dz}{z - a_i}. \tag{7.4}$$

Из (7.4) следует, что связность ∇' продолжается до связности ∇^0 во всем F^0, голоморфной в F^0, за исключением точек из D, которые являются для ∇^0 полюсами первого порядка.

Построенное продолжение (F^0, ∇^0) называется в [20] продолжением Манина расслоения (F', ∇') (в [20] оно построено для n-мерного многообразия и дивизора D с нормальными пересечениями). Связность ∇^0 имеет заданную монодромию (2), и если бы расслоение F^0 было голоморфно тривиальным, то тем самым проблема Р. — Г. для представления (2) была бы разрешима. Однако F^0 уже топологически, как правило, нетривиально, ибо его первый класс Чжэня c_1 равен

$$c_1 = \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Sp} E_i \tag{7.5}$$

(отождествление $H^2(CP^1, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ считается заданным) [1].

Рассмотрим всевозможные продолжения $(F_\lambda, \nabla_\lambda)$ расслоения (F', ∇') на все CP^1, при которых продолженная связность ∇_λ имеет в точках из D особенности типа простых полюсов. Все такие продолжения в точке a_i описываются с помощью предложения 2.3. Действительно, пусть матрица E_i приведена к жордановой нормальной форме. Рассмотрим блочную матрицу A_i, каждый блок которой соответствует жордановой клетке E_i^m матрицы E_i и $A_i^m = \operatorname{diag}(b_1^m, \ldots, b_{k_m}^m)$, где k_m — размер клетки, $b_i^m \in \mathbb{Z}$, $b_1^m \geqslant \ldots \geqslant b_{k_m}^m$. Заменим функцию перехода g_{01} в (7.2) на

$$g_{01}^{\lambda_i} = (z - a_i)^{A_i^{\lambda_i}} (z - a_i)^{E_i}, \tag{7.6}$$

где $A_i^{\lambda_i}$ — произвольная матрица, описанная выше. Продолжив расслоение (F', ∇') с помощью (7.6) во все точки a_i, получим расслоение $(F_\lambda, \nabla_\lambda)$, $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ со связностью ∇_λ, имеющей в точках $a_i \in D$ особенности фуксового типа, как это следует из предложений 2.1—2.3.

---

[1]) Независимо от того, тривиально ли расслоение F^0, у главного расслоения, с которым оно ассоциировано, всегда существует мероморфное сечение, голоморфно обратимое вне точек $a_1, \ldots, a_n$. Используя его вместо сечения расслоения F' из пункта 1.3, получим систему с заданной монодромией и регулярными особыми точками $a_1, \ldots, a_n$.

Предложение 7.1. *Проблема Р. — Г. для представления* (2) *разрешима тогда и только тогда, когда хотя бы одно из расслоений F_λ голоморфно тривиально.*

Доказательство следует из предложения 2.3.

Любое голоморфное векторное расслоение F на CP^1 по теореме Биркгофа — Гротендика [5] представляется в виде прямой суммы одномерных:

$$F \cong \mathcal{O}(k_1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(k_p), \tag{7.7}$$

где $\mathcal{O}(l)$ — расслоение, задающееся двумя окрестностями $U_0 = CP^1 \setminus 0$, $U_1 = CP^1 \setminus \infty$ и функцией перехода $g_{01} = z^l$, $l \in \mathbb{Z}$.

Набор чисел $k_1 \geqslant \ldots \geqslant k_p$ из (7.7), которые будем называть *индексами Гротендика*, однозначно определяет голоморфный тип расслоения F, в то время как топологический тип этого расслоения полностью определяется числом $c_1 = k_1 + \ldots + k_p$ — первым классом Чжэня этого расслоения.

Предложение 7.2. *Пусть расслоение* (F^0, ∇^0) *построено по представлению* (2) *размерности* $p = 2$ *и фуксова веса* γ_χ. *Тогда*

$$k_1 - k_2 = \gamma_\chi, \tag{7.8}$$

где k_1, k_2 — *индексы Гротендика расслоения* F^0.

Доказательство. Рассмотрим пространство X решений фуксовой системы (4) с заданной монодромией (2) и фуксовым весом γ_χ. Согласно следствию 5.1 можно считать, что эта система имеет вид (5.9)—(5.13), при этом число m в формуле (5.13) согласно предложению 5.2 удовлетворяет неравенству $m \geqslant \gamma_\chi$.

Рассмотрим расслоение F_l, которое задается окрестностями $U_1 = CP^1 \setminus a_l$, $U_0 = O_l$ и функцией перехода $g'_{10} = U_l(z)(z - a_l)^{A_l}$, где $U_l(z)$, A_l из (5.12), (5.13). Нетрудно показать, что расслоения F_l и F^0 голоморфно эквивалентны. Из (5.13) и (5.11) следует, что

$$U_l(z)(z - a_l)^{A_l} = (z - a_l)^{A_l} U'_l(z), \tag{7.9}$$

где матрица

$$U'_l(z) = \begin{pmatrix} 1 & c(z-a_l)^{m-\gamma_\chi} \\ s(z-a_l)^{k+\gamma_\chi} & 1 \end{pmatrix}(1 + o(1))$$

в силу условия $m \geqslant \gamma_\chi$ голоморфно обратима в O_l, поэтому расслоение F_l голоморфно эквивалентно расслоению

$$\mathcal{O}(-b + \gamma_2) \oplus \mathcal{O}(-b - \gamma_1),$$

значит,

$$k_1 = -b + \gamma_2, \quad k_2 = -b - \gamma_1, \quad k_1 - k_2 = \gamma_\chi. \tag{7.10}$$

Замечание 7.1. Из (7.5) и того, что $k_1 + k_2 = c_1$, где c_1 — первый класс Чжэня расслоения F^0, следует, что

$$k_1 = \frac{1}{2}\gamma_\chi + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Sp} E_i, \quad k_2 = -\frac{1}{2}\gamma_\chi + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \operatorname{Sp} E_i. \tag{7.11}$$

Следствие 7.1. *Любое двумерное голоморфное векторное расслоение на CP^1 голоморфно эквивалентно некоторому расслоению F, являющемуся продолжением расслоения Манина, построенного по неприводимому представлению* (2).

Доказательство следует из (7.7), предложений 5.4, 7.2.

Таким образом, в любом двумерном голоморфном векторном расслоении E на CP^1 можно ввести неприводимую связность ∇_λ, голоморфную вне конечного числа точек и имеющую в этих точках особенности типа простых полюсов; будем называть такие связности *неприводимыми фуксовыми связностями*.

Обозначим число особых точек неприводимой фуксовой связности ∇_λ через n_λ. Рассмотрим множество Λ всех таких связностей и обозначим через n число

$$n = \min_{\Lambda} n_\lambda.$$

Следствие 7.2. *Число n связано с индексами k_1, k_2 Гротендика расслоения E следующим соотношением при $k_1 > k_2$*

$$n - 2 = k_1 - k_2. \tag{7.12}$$

Доказательство следует из предложений 5.4 и 7.2 ($k_1 > k_2$).

Таким образом, голоморфный тип (k_1, k_2) расслоения на CP^1 полностью определяется его классом Чжэня $k_1 + k_2$ (топологический инвариант) и минимальным числом $n = k_1 - k_2 + 2$ особых точек всевозможных неприводимых фуксовых связностей данного расслоения (аналитический инвариант).

Рассмотрим расслоение (F_0^l, ∇_0^l), построенное в (7.6) с матрицами $A_l = \operatorname{diag}(-k_2, -k_1)$, $A_1 = \ldots, \hat{l}, \ldots = A_n = 0$. Из предложения 7.1 и следствия 5.1 получаем следующее следствие

Следствие 7.3. *Расслоение F_0^l для некоторого l голоморфно тривиально.*

Рассмотрим конечное покрытие $\mathfrak{U}$ сферы Римана CP^1. Пусть $\mathfrak{W}$ — покрытие с условием $\mathfrak{W} \ll \mathfrak{U}$ (обозначение см. в [30], с. 117). Голоморфное векторное расслоение E на CP^1 определяется коциклом

$$f_E \in Z^1(\mathfrak{U};\ \mathcal{O}^{GL(p;C)}).$$

Из предложений 7.2 и 5.6 получаем

Предложение 7.3. *Для любого двумерного голоморфного векторного расслоения E на CP^1 с первым классом Чжэня c_1 и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое голоморфное векторное расслоение E', что $\| f_E - f_{E'} \|_{C(\mathfrak{W})} < \varepsilon$, а индексы Гротендика k_1', k_2' расслоения E' равны*

$$k_1' = \left[\frac{c_1 + 1}{2}\right], \quad k_2' = c_1 - k_1',$$

где $[x]$ — целая часть числа x.

Из предложения 7.2 получаем следующую формулировку следствия 6.1.

Предложение 7.4. *Проблема Римана — Гильберта для представления* (2) *размерности $p = 3$ имеет отрицательное решение тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:*

1) *все локальные представления* (2.3), *построенные по представлению* (2), *неразложимы;*

2) *представление* (2) *приводимо, и соответствующее двумерное подпредставление или факторпредставление χ_2 неприводимо;*

3) *индексы Гротендика k_1, k_2 продолжения Манина расслоения, построенного по представлению χ_2, различны.*

Заключение

1. Из работ Б. Римана [25] можно извлечь различные постановки задачи о восстановлении фуксова уравнения по представлению (2). Все они сводятся к следующим четырем:

1) XXI проблема Гильберта, сформулированная в классе фуксовых линейных дифференциальных уравнений p-го порядка (в дальнейшем будем обозначать ее через Г.);

2) XXI проблема Гильберта в классе линейных фуксовых систем (проблема Р.— Г.);

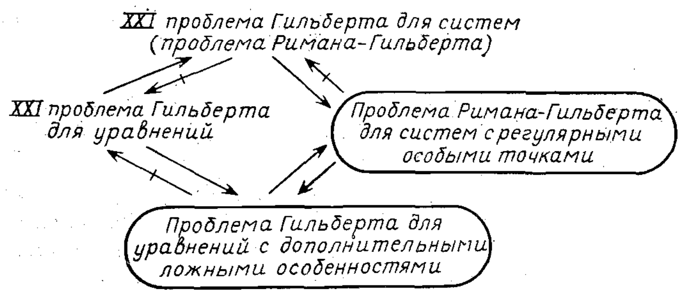
3) проблема, аналогичная проблеме Г., сформулированная в классе линейных фуксовых дифференциальных уравнений с дополнительными «ложными» особенностями (т. е. такими особенностями, которые не дают вклада в монодромию); обозначим ее через Г. Л.;

4) проблема, аналогичная проблеме Р.— Г., сформулированная в классе систем с регулярными особыми точками (проблема Р. С.).

Так, например, задача определения системы p функций, аналитических вне точек $a_1, \ldots, a_n$, с конечными полюсами в $a_1, \ldots, a_n$, претерпевающих заданные подстановки при обходе этих точек, поставленная Риманом в 1857 г., очевидным образом сводится к проблеме Г. Л. (см. [25]). Проблемы Р. — Г. и Р. С. с дополнительными ложными особенностями легко сводятся к проблеме Р. С. (для осуществления такого сведения надо воспользоваться леммой 4.1 и калибровочным преобразованием $\Gamma_i(z) = \left(\frac{z-a_1}{z-b_i}\right)^{C_i}$ для всех ложных особых точек b_i).

Из результатов Племеля [7] следует разрешимость проблемы Р. С., из результатов Делиня [20], а также из работы Настольда [26] следует разрешимость проблемы Г. Л. (О числе дополнительных ложных особых точек, возникающих при решении проблемы Г. Л., см. [27, 28].)

Из разрешимости проблемы Г. для представления (2) следует разрешимость аналогичной проблемы Р.— Г. (см. [28]). Наконец, из разрешимости проблемы Р. С. не следует разрешимость проблемы Р.— Г. (пример 6.1), а из разрешимости проблемы Р.— Г. для некоторого представления (2), не следует разрешимость проблемы Г. для этого же представления [28]. Все вышесказанное можно свести в следующую схему (кружок означает разрешимость соответствующей проблемы для всех представлений, стрелка — то, что из разрешимости для данного представления (2) одной проблемы следует разрешимость другой).



2. Классическая проблема Р.— Г. допускает различные обобщения. Аналогичная проблема на римановой поверхности рассматривалась в уже упомянутой во введении работе Рёрля [17, 29], а также в работах [30—33].

Работы Рёрля [17] и Делиня [20] послужили импульсом для постановки и изучения многомерной проблемы Р.— Г., состоящей в исследовании вопроса существования вполне интегрируемой системы Пфаффа типа Фукса на комплексном аналитическом многообразии M^n с заданным дивизором особенностей D и заданной группой монодромии.

Первые полученные на этом пути результаты относились к разбору тривиальных случаев: стягиваемого многообразия Штейна (разрешимость проблемы Р.— Г. в этом случае доказал Р. Жерар в [34]) и n-мерного комплексного проективного пространства в случае коммутативной монодромии [35—37]. В [35, 38] были получены первые примеры отрицательного решения многомерной проблемы Р.— Г.

Разрешимость многомерной проблемы Р.— Г. доказана также на проективном многообразии и многообразии Штейна в классе систем с дополни-

тельными ложными особенностями [39] и на связном многообразии Штейна размерности два с условием $H^2(M^n, \mathbb{Z}) = 0$ [40]. Необходимые условия разрешимости проблемы Р.— Г. в терминах представления и фундаментальной группы получены в [41]. Одним из препятствий на пути решения многомерной проблемы Р.— Г. является то, что до сих пор в общем случае не решена задача описания локального пространства решений системы Пфаффа типа Фукса (строение этого пространства для дивизора D с нормальным пересечением изучено в [42—44]).

3. Проблема Римана — Гильберта и ее аналоги имеют многочисленные приложения в различных областях математики, физики, механики. Среди них следует упомянуть интересные приложения в квантовой теории поля [45—49], теории уравнения Винера — Хопфа [50], в механике — [51]. Подробнее об этих приложениях см. [52].

Различные аспекты проблемы Римана — Гильберта представлены также в работах [53—59] (последние две работы относятся к многомерной проблеме Р.— Г.).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] Коддингтон Э. А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Иностранная литература, 1958.
[2] Проблемы Гильберта.— М.: Наука, 1969.
[3] Levelt A. H. M. Hypergeometric functions // Proc. Koninkl. Netherlands Acad. Wet., Ser. A, Math. Sci.— 1961.— V. 64.— P. 361—401.
[4] Болибрух А. А. Проблема Римана — Гильберта на комплексной проективной прямой // Мат. заметки.— 1989.— Т. 46, в. 3.— С. 118—120.
[5] Оконек К., Шнейдер М., Шпиндлер Х. Векторные расслоения на комплексном проективном пространстве.— М.: Мир, 1984.
[6] Dekkers W. The matrix of a connection having regular singularities on a vector bundle of rank 2 on $P^1(C)$ // Lecture Notes in math.— 1979.— V. 712.— P. 33—43.
[7] Plemelj J. Problems in the sense of Riemann and Klein.— Inter. publ. New York — Sydney, 1964.
[8] Kohn T. Un resultat de Plemelj // Progress in Math.— Birkhauser — Stutgart.— 1983.— V. 37.— P. 307—312.
[9] Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.— Т. 1 — М.: ВИНИТИ, 1985, с. 7—149.
[10] Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения.— М.: Наука, 1968.
[11] Векуа Н. П. Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.— М.: Наука, 1970.
[12] Лаппо-Данилевский И. А. Применение функций от матриц к теории линейных систем обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Гостехиздат, 1957.
[13] Крылов Б. Л. Решение в конечном виде проблемы Римана для системы Гаусса // Тр. Казан. авиационного ин-та.— 1956.— Т. 31.— С. 203—445.
[14] Еругин Н. П. Проблема Римана.— Минск: Наука и техника, 1983.
[15] Венков А. Б. Примеры эффективного решения проблемы Римана — Гильберта о восстановлении дифференциального уравнения по группе монодромии в рамках теории автоморфных функций.— Препринт / ЛОМИ АН СССР.— Л., 1986.
[16] Зограф П. Г., Тахтаджян Л. А. Об уравнении Лиувилля, акцессорных параметрах и геометрии пространства Тейхмюллера для римановых поверхностей рода 0 // Мат. сб.— 1987.— Т. 132, N 2.— С. 147—166.
[17] Röhrl H. Das Riemann — Hilbertsche Problem der Theorie der linearen Differentialgleichungen // Math. Ann. — 1957.— 133.— S. 1—25.
[18] Хьюзмоллер Д. Расслоенные пространства.— М.: Мир, 1980.
[19] Грауэрт Г., Реммерт Р. Теория пространств Штейна.— М.: Наука, 1989.

[20] Deligne P. Équations différentielles à points singuliers réguliers // Lecture Notes in math.— 1970.— V. 163.
[21] Birkhoff G. D. Collected mathematical papers: V. I.— Amer. Math. soc., 1950.
[22] Болибрух А. А. О проблеме Римана — Гильберта для системы трех уравнений // Проблемы современной математики в задачах физики и механики.— М.: МФТИ, 1989.— С. 10—25.
[23] Schlesinger L., Über lösungen gewisser linearer Differentialgleichungen als Funktionen der singularen Punkte // J. reine und angew. Math.— 1905.— Bd 129.— S. 287—294.
[24] Atiyah M. F. Complex analytic connections in fibre bundles // Trans. Amer. Math. Soc.— 1957.— V. 85, N 1.— P. 181—207.
[25] Риман Б. Сочинения.— М.: Гостехиздат, 1948.
[26] Nastold H. J. Über meromorphe Schnitte komplex analytischer Vektorraumbundel und Anwendungen auf Riemannschen Klassen // Math. Z.— 1958.— Bd 70.— S. 55—92.
[27] Ohtsuki M. On the number of apparent sihgularities of a linear differential equation // Tokyo J. Math.— 1982.—V. 5, N 1.— P. 23—29.
[28] Болибрух А. А. О построении фуксова дифференциального уравнения по представлению монодромии // Мат. заметки.— 1990.— Т. 48.
[29] Röhrl H. Holomorphe vector bundles over Riemann surfaces // Bull. Amer. Math. Soc.— 1962. — V. 68, N 3.— P. 125—160.
[30] Форстер О. Римановы поверхности.— М.: Мир, 1980.
[31] Чибрикова Л. И. Граничные задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях // Математический анализ (Итоги науки).— Т. 18.— М.: ВИНИТИ, 1980.— С. 3—51.
[32] Okamoto K. On Fuchs problem on a torus. 1 // Funkcialaj Ekvacioj.— 1971.— V. 14, N 2.— P. 137—152.
[33] Okamoto K. Sur le problème de Fuchs sur un tore. II // J. Fac. Sci. Univ. Tokyo.— 1977.— V. 24, N 9.— P. 357—412.
[34] Gerard R. Le problème de Riemann — Hilbert sur une variete analytique complexe // Ann. Inst. Fourier.— 1969. — V. 19, N 2.— P. 1—12.
[35] Болибрух А. А. Пример неразрешимой проблемы Римана — Гильберта на CP^2 // Геометрические методы в задачах алгебры и анализа.— Ярославский ун-т.— 1980.— Т. 2.— С. 60—64.
[36] Голубева В. А. О восстановлении систем Пфаффа типа Фукса по образующим группы монодромии // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1980.— Т. 44, N 5.— С. 979—998.
[37] Лексин В. П. Мероморфные пфаффовы системы на комплексных проективных пространствах // Мат. сб.— 1986.— Т. 129, N 2.— С. 201—217.
[38] Лексин В. П. О фуксовых представлениях фундаментальной группы комплексных многообразий // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений.— Ярославский ун-т.— 1979.— С. 109—114.
[39] Suzuki O. The problem of Riemann and Hilbert and the relations of Fuchs in several complex variables // Lecture Notes in math.— 1979.— V. 712.— P. 325—364.
[40] Kita M. The Riemann — Hilbert problem and its application to analytic functions of several complex variables // Tokyo J. Math.— 1979.— V. 2, N 1.— P. 1—27.
[41] Хейн Р. М. Итерированные интегралы и проблема гомотопических периодов.— М.: Наука, 1988.
[42] Yoshida M., Takano K. Local theory of Fuchsian systems // Proc. Japan Acad.— 1975.— V. 51.— P. 219—223.
[43] Болибрух А. А. О фундаментальной матрице системы Пфаффа типа Фукса // Изв. АН СССР. Сер. мат.— 1977.— Т. 41, N 5.— С. 1084—1109.
[44] Болибрух А. А. Системы Пфаффа типа Фукса на комплексном аналитическом многообразии // Мат. сб.— 1977. — Т. 103 : 1. — С. 112—123.
[45] Сато М., Дзимбо М., Мива Т. Голономные квантовые поля.— М.: Мир, 1983.
[46] Miwa T. Clifford Operators and Riemann's Monodromy Problem // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.— 1981.— V. 17 — P. 665—686.

[47] U e n o K. Infinite dimensional Lie algebra acting on chiral fields and the Riemann — Hilbert problem // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.— 1983.— V. 19.— P. 59—82.

[48] U e n o K., N a k a m u r a Y. Transformation theory for anti-self-dual equation and the Riemann — Hilbert problem // Physics Let.— 1982.— V. 109B. — P. 273—278.

[49] H a u s e r I., E r n s t F. J. A homogeneous Hilbert problem for a Kinnersly — Chitrie transformation of electronic space-times // J. Math. Phys.— 1980.— V. 21, N 5, 6.— P. 1126—1140, 1418—1422.

[50] В л а д и м и р о в В. С., В о л о в и ч И. В. Уравнение Винера — Хопфа, задача Римана — Гильберта и ортогональные многочлены // Докл. АН СССР.— 1982.— Т. 266, N 4.— С. 788—791.

[51] Ч е р е п а н о в Г. П. Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам теории упругости // Прикл. мат. и мех.— 1962.— Т. 26, N 5.— С. 907—912.

[52] Г о л у б е в а В. А. Некоторые вопросы аналитической теории фейнмановских интегралов // УМН.— 1976.— Т. 31, в. 2.— С. 135—202.

[53] S a i t o T. Problem of Riemann // Sugaku. — 1961.— V. 12, N 3.— P. 145—159.

[54] K a t z N. M. An overview of Deligne's work on Hilbert's twentyfirst problem // Proc. Symp. in pure Math.— 1976.— V. 28.— P. 537—559.

[55] D e M o n v e l B. Problème de Riemann — Hilbert // Progress in Math.— Birkhauser — Stutgart.— 1983.— V. 37.— P. 313—322.

[56] D u a d y A. Problème de Riemann — Hilbert, solution pour des points singuliers reéls // Progress in Math.— Birkhauser — Stutgart.— 1983 — V. 37.— P. 289—298.

[57] A o m ô t o K. Une remarque sur la solution de L. Schlesinger et Lappo-Danilevsky // J. fac. sci. univ. Tokyo. Ser. IA.— 1970.— V. 17, N 1, 2.— P. 341—354.

[58] K a s h i w a r a M. The Riemann — Hilbert problem for holonomic systems // Publ. Res. Inst. Math. Sci. Kyoto Univ.— 1984.— V. 20.— P. 319—365.

[59] L e D u n g T r a n g, M e b k h o u t Z. Introduction to linear differential systems// Proc. Symp. in pure Math.— 1983.— V. 40.— P. 31—63.

Московский физико-технический институт

Поступила в редакцию 15 декабря 1989 г.