В. Г. Дринфельд, О структуре квазитреугольных квазихопфовых алгебр, *Функц. анализ и его прил.*, 1992, том 26, выпуск 1, 78–80

совым разложением. Например, для группы $GL(n, \mathbb{C})$ такой базис представления с центральным зарядом m и старшим весом $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ $(m \geqslant \lambda_1 \geqslant \ldots \ldots \geqslant \lambda_n \geqslant 0)$ нумеруется набором целых чисел a_{ij} $(-\infty < i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m, j \leqslant \lambda_i$ при $i > 0)$ таким, что $a_{i,j} > a_{i-1,j}$ для любых i и j, $a_{i,j} \geqslant a_{i,j-1}$ при $j > 1$, $a_{i,1} \geqslant a_{i-n,m} + n$ и для некоторых целых чисел M и N верно, что $i < N$ влечет $a_{ij} = i + M$ для любого j.

Из других приложений отметим возможность построения резольвенты неприводимого $\widehat{G}^{(i)}_{\tau_i}$-модуля, члены которой суть весовые подпространства $V_{N,q}$ относительно $\widehat{G}^{(\varepsilon-i)}_{\tau_{\varepsilon-i}}$ [6].

Применению теоремы к изучению векторных инвариантов группы $Sp(2n, \mathbb{C}[[t]])$ будет посвящена отдельная работа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Прессли Э., Сигал Г.* Группы петель. — М.: Мир, 1990. 2. *Kac V. G.* Infinite dimensional Lie algebras. — Boston: Birkhauser, 1984. 3. *Frenkel I. B.* // J. Funct. Anal. — 1981. — V. 44. — P. 259—327. 4. *Frenkel I. B.* // Lecture Notes in Math. — 1982. — V. 933. — P. 71—110. 5. *Frenkel I. B.* // Appl. Math. — 1985. — V. 21. — P. 325—353. 6. *Зелевинский А. В.* // Функцион. анализ и его прил. — 1987. — Т. 21, вып. 2. — С. 74—75.

НИИ системных исследований
АН СССР

Поступило в редакцию
17 декабря 1990 г.

УДК 512.554.3+512.667.7

О СТРУКТУРЕ КВАЗИТРЕУГОЛЬНЫХ КВАЗИХОПФОВЫХ АЛГЕБР

В. Г. Дринфельд

Понятие квазитреугольной квазихопфовой алгебры (сокращенно $qtqH$-алгебры) было введено в [1], чтобы в какой-то мере объяснить связь между квантовыми группами и конформной теорией поля. Каждой паре $(\mathfrak{g}, t)$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над $\mathbf{C}[[h]]$, а $t \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ — симметричный инвариантный тензор, в работе [2] сопоставлена $qtqH$-алгебра (при этом используются возникшие в конформной теории поля уравнения Книжника — Замолодчикова). Оказывается, что с точностью до некоторых калибровочных преобразований эта конструкция дает все $qtqH$-алгебры над $\mathbf{C}[[h]]$, являющиеся деформациями универсальных обертывающих алгебр. Соответствующая теорема доказана в [2] с помощью некоторых результатов из [1]. Цель настоящей работы — дать прямое и простое доказательство этой теоремы.

Вместо $\mathbf{C}[[h]]$ мы предпочитаем иметь дело с коммутативным локальным кольцом L характеристики 0 таким, что $m^n = 0$ для некоторого n, где m — максимальный идеал L (чтобы получить утверждение для $\mathbf{C}[[h]]$, надо положить $L = \mathbf{C}[h]/(h^n)$ и устремить n к ∞). По определению, $qtqH$-алгебра над L — это набор $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$, где A — ассоциативная алгебра с единицей над L, $\Delta: A \to A \otimes A$ и $\varepsilon: A \to L$ — гомоморфизмы алгебр с единицей, а $\Phi \in A \otimes A \otimes A$, и $R \in A \otimes A$ — обратимые элементы такие, что $(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a)) \cdot \Phi^{-1}$ при $a \in A$, $\Delta'(a) = R \cdot \Delta(a) \cdot R^{-1}$ при $a \in A$, $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id} = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta$, выполнены равенства

$$(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Phi) = (1 \otimes \Phi) \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\Phi) \cdot (\Phi \otimes 1), \quad (1)$$

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Phi) = 1, \quad (2)$$

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = \Phi^{312} R^{13} (\Phi^{132})^{-1} R^{23} \Phi, \quad (\mathrm{id} \otimes \Delta)(R) = (\Phi^{231})^{-1} R^{13} \Phi^{213} R^{12} \Phi^{-1} \quad (3)$$

и выполнена некоторая аксиома (см. [1]), которая в хопфовом случае, т. е. при $\Phi = 1$, сводится к существованию и биективности антипода. Назовем $qtqH$-алгебру A над L *деформационной*, если A — свободный L-модуль, $\Phi \equiv 1 \bmod m$, $R \equiv 1 \bmod m$, а алгебра Хопфа A/mA является универсальной обертывающей некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ над L/m. Отметим, что согласно теореме 1.6 из [1] в деформационном случае упомянутая выше аксиома типа существования антипода выполнена автоматически.

Примеры деформационных $qtqH$-алгебр доставляет следующая конструкция (см. [1, 2]). Пусть $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над L, являющаяся свободным L-модулем (такие алгебры Ли будем называть деформационными), а t — симметричный инвариантный элемент $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, $t \equiv 0 \bmod m$. Положим $A = U\mathfrak{g}$, $R = e^{t/2}$, определим Δ, ε обычным образом и положим $\Phi = \varphi(t^{12}, t^{23})$, где $\varphi(X, Y)$ — формальный ряд над $\mathbf{Q}$ от некоммутирующих переменных X, Y такой, что

$$\varphi(0, 0) = 1, \tag{4}$$

$$\varphi(X^{12}, X^{23} + X^{24})\varphi(X^{13} + X^{23}, X^{34}) = \varphi(X^{23}, X^{34})\varphi(X^{12} + X^{13}, X^{24} + X^{34})\varphi(X^{12}, X^{23}), \tag{5}$$

$$\exp((X^{13} + X^{23})/2) = \varphi(X^{13}, X^{12})\exp(X^{13}/2)\varphi(X^{13}, X^{23})^{-1}\exp(X^{23}/2)\varphi(X^{12}, X^{23}), \tag{6}$$

$$\exp((X^{12} + X^{13})/2) = \varphi(X^{23}, X^{13})^{-1}\exp(X^{13}/2)\varphi(X^{12}, X^{13})\exp(X^{12}/2)\varphi(X^{12}, X^{23})^{-1}, \tag{7}$$

где X^{ij} — образующие алгебры с определяющими соотношениями $[X^{ij}, X^{rl}] = 0$ при $i \neq j \neq r \neq l$, $[X^{ij} + X^{ir}, X^{jr}] = 0 = [X^{ir} + X^{jr}, X^{ij}]$ при $i < j < r$. Тогда $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ — деформационная $qtqH$-алгебра. Отметим, что существование формального ряда φ над $\mathbf{Q}$, удовлетворяющего (4)—(7), доказано в § 5 из [2], а формальный ряд над $\mathbf{C}$, удовлетворяющий (4)—(7), строится явно с помощью уравнений Книжника — Замолодчикова (см. § 2 из [2]). Зафиксируем какое-нибудь φ и обозначим через $A_{\mathfrak{g},t}$ построенную выше $qtqH$-алгебру. Наша цель — доказать следующее утверждение.

Теорема. *Любая деформационная $qtqH$-алгебра $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ после скручивания посредством некоторого $F \in A \otimes A$ становится алгеброй вида $A_{\mathfrak{g},t}$. Более того, если I — идеал в L такой, что $qtqH$-алгебра A/IA равна $A_{\bar{\mathfrak{g}},\bar{t}}$ для некоторой деформационной алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ над L/I и некоторого симметричного инвариантного $\bar{t} \in \bar{\mathfrak{g}} \otimes \bar{\mathfrak{g}}$, то F можно выбрать сравнимым с $1 \bmod I$.*

Напомним (см. [1]), что скручивание $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ посредством обратимого элемента $F \in A \otimes A$ такого, что $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(F) = 1 = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(F)$, определяется формулами $\tilde{A} = A$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon$, $\tilde{\Delta}(a) = F \cdot \Delta(a) \cdot F^{-1}$, $\tilde{\Phi} = F^{23} \times (\mathrm{id} \otimes \Delta)(F) \times \Phi \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(F^{-1}) \cdot (F^{12})^{-1}$, $\tilde{R} = F^{21} \cdot R \cdot F^{-1}$.

Для доказательства теоремы достаточно доказать ее второе утверждение в случае, когда $mI = 0$. Положим $\bar{L} = L/I$. Построение тройки $(F, \mathfrak{g}, t)$ мы начнем с построения t как элемента $m \otimes_{\bar{L}} (\bar{\mathfrak{g}} \otimes \bar{\mathfrak{g}})$ (после того как будет построена деформационная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над L такая, что $\mathfrak{g}/I\mathfrak{g} = \bar{\mathfrak{g}}$, можно будет отождествить $m \otimes_{\bar{L}} (\bar{\mathfrak{g}} \otimes \bar{\mathfrak{g}})$ с $m \otimes_L (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) = m\,(\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g})$). Заметим, что $\ln(R^{21} \cdot R) \in m\,(A \otimes A) = m \otimes_{\bar{L}} (U\bar{\mathfrak{g}} \otimes U\bar{\mathfrak{g}})$. Обычное отождествление $U\bar{\mathfrak{g}}$ и симметрической алгебры $\bar{\mathfrak{g}}$ как $\bar{L}$-модулей позволяет определить оператор проектирования $U\bar{\mathfrak{g}} \to \bar{\mathfrak{g}}$. Образ $\ln(R^{21} \cdot R)$ в $m \otimes_{\bar{L}} (\bar{\mathfrak{g}} \otimes \bar{\mathfrak{g}})$ обозначим t. Так как $R^{21} \equiv R \bmod I$ и $R \equiv 1 \bmod m$, то $R^{21} \cdot R = R \cdot R^{21}$. Поэтому

t симметричен. Так как $[R^{21}\cdot R, \Delta(a)] = 0$ при $a \in A$, то t инвариантен. Образ t в $\bar{\mathfrak{g}} \otimes \bar{\mathfrak{g}}$ равен $\bar{t}$.

Рассмотрим t как элемент $m \otimes_{\bar{L}} (U\bar{\mathfrak{g}} \otimes U\bar{\mathfrak{g}}) = m(A \otimes A)$ и положим $R_1 = e^{t/2}$, $\Phi_1 = \varphi(t^{12}, t^{23})$, $a = R - R_1$, $b = \Phi - \Phi_1$. Имеем $a \in I \otimes (U\mathfrak{g}_0 \otimes U\mathfrak{g}_0)$, $b \in I \otimes (U\mathfrak{g}_0 \otimes U\mathfrak{g}_0 \otimes U\mathfrak{g}_0)$, где $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}/m\mathfrak{g}$. Из (4)—(7) следует, что равенства (1)—(3) остаются справедливыми при замене R, Φ на R_1, Φ_1. Поэтому

$$b^{234} - (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(b) + (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(b) - (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(b) + b^{123} = 0, \quad (8)$$

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id})(b) = 0, \quad (9)$$

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(a) - a^{13} - a^{23} = b^{312} - b^{132} + b, \quad (10)$$

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(a) - a^{12} - a^{13} = b^{213} - b^{231} - b. \quad (11)$$

Кроме того, из определения t вытекает

Л е м м а. *Проекция* $a^{21} + a$ *на* $I \otimes (\mathfrak{g}_0 \otimes \mathfrak{g}_0)$ *равна* 0. ■

Пусть $F \in A \otimes A$, $F \equiv 1 \bmod I$. Положим

$$f = F - 1 \in I \otimes (U\mathfrak{g}_0 \otimes U\mathfrak{g}_0).$$

Скручивание $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ посредством F не меняет t, R_1, Φ_1, а a и b заменяются на $\tilde{a} = a + f^{21} - f$ и $\tilde{b} = b + f^{23} - (\Delta \otimes \mathrm{id})(f) + (\mathrm{id} \otimes \Delta)(f) - f^{12}$. Из (8) и предложения 2.2 статьи [1] следует, что f можно выбрать так, чтобы $b + f^{23} - (\Delta \otimes \mathrm{id})(f) + (\mathrm{id} \otimes \Delta)(f) - f^{12} \in I \otimes \Lambda^3\mathfrak{g}_0$. Тогда из (9) следует, что после замены f на $f - (\varepsilon \otimes \varepsilon)(f)$ будем иметь $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(f) = 0 = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(f)$, т. е. мы имеем право скручивать посредством $F = 1 + f$. После такого скручивания будем иметь $\tilde{b} \in I \otimes \Lambda^3\mathfrak{g}_0$.

Итак, можно считать, что с самого начала $b \in I \otimes \Lambda^3\mathfrak{g}_0$. Тогда правые части (10) и (11) кососимметричны. Так как левая часть (10) симметрична по первым двум тензорным сомножителям, а левая часть (11) — по последним двум, то обе части (10) и (11) равны 0. Итак, $b = 0$, $a \in I \otimes (\mathfrak{g}_0 \otimes \mathfrak{g}_0)$. Из леммы следует, что $a^{21} + a = 0$. Поэтому скручиванием посредством $F = 1 + a/2$ можно добиться, чтобы $\tilde{a} = 0$, $\tilde{b} = 0$.

Итак, можно считать, что $a = 0$, $b = 0$, т. е. $R = e^{t/2}$, $\Phi = \varphi(t^{12}, t^{23})$. Тогда из инвариантности t следует, что $[R, \Delta(a)] = 0$, $[\Phi, (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a))] = 0$, $a \in A$. Поэтому Δ кокоммутативно и коассоциативно, т. е. (A, Δ, ε) — алгебра Хопфа. Рассуждая, как при доказательстве предложения 3.7 из [1], получим, что $A = U\mathfrak{g}$, где $\mathfrak{g} = \{a \in A \mid \Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a\}$ — деформационная алгебра Ли над L. Тем самым теорема доказана.

Элемент F, о котором идет речь в теореме, определен не однозначно, но если F_1 — другой такой элемент, то существует $u \in 1 + mA$ такое, что $F_1 = (u^{-1} \otimes u^{-1})\cdot F\cdot \Delta(u)$. Поэтому пары $(\mathfrak{g}, t)$ и $(\mathfrak{g}_1, t_1)$, соответствующие F и F_1, изоморфны; изоморфизм $\varphi\colon (\mathfrak{g}_1, t_1) \to (\mathfrak{g}, t)$ индуцируется автоморфизмом $\mathrm{Ad}\, u\colon A \to A$. При заданных F и F_1 в выборе u имеется произвол, так что φ определен однозначно лишь с точностью до внутренних автоморфизмов $\mathfrak{g}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Дринфельд В. Г.* // Алгебра и анализ.— 1989.— Т. 1, № 6.— С. 114—148.
2. *Дринфельд В. Г.* // Алгебра и анализ.— 1990.— Т. 2, № 4.— С. 149—181.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР,
г. Харьков

Поступило в редакцию
26 декабря 1990 г.