В. В. Бересневич, Э. И. Ковалевская, О диофантовых приближениях зависимых величин в $p$-адическом случае, Матем. заметки, 2003, том 73, выпуск 1, 22–37

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm165

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением http://www.mathnet.ru/rus/agreement

Параметры загрузки:
IP: 54.70.40.11
28 декабря 2018 г., 19:02:07
Математические заметки

Том 73 Выпуск 1 Январь 2003

УДК 511.36

О ДИОФАНТОВЫХ ПРИБЛИЖЕНИЯХ ЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН В p-АДИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

В. В. Бересневич, Э. И. Ковалевская

В настоящей работе мы доказываем аналог метрической теоремы Хинчина для случая линейных диофантовых приближений плоских кривых, заданных над кольцом целых p-адических чисел с помощью нормальных (по Малеру) функций. Также доказываем некоторые общие утверждения, которые необходимы для обобщения этого результата на случай пространств большей размерности.

Библиография: 18 названий.

1. Введение. В 1924 году Хинчин [1] доказал, что для почти всех действительных чисел \( x \) (в смысле меры Лебега в \( \mathbb{R} \)) неравенство
\[
|qx - p| < \psi(q)
\]
имеет конечное либо бесконечное число решений \( p, q \in \mathbb{Z} \), если соответственно сходится или расходится ряд
\[
\sum_{h=1}^{\infty} \psi(h), \quad \text{где} \quad \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \text{ монотонно убывает.}
\]
Метрическая теория диофантовых приближений зависимых величин начала развиваться с работы К. Малера [2] 1932 года, в которой он, проводя классификацию действительных чисел, доказал, что при любом \( w > 4n \) для почти всех чисел \( x \in \mathbb{R} \) неравенство
\[
|P(x)| < H(P)^{-w}
\]
имеет конечное число решений \( P \in P_n \), где \( P_n \) — множество многочленов с целыми коэффициентами степени не выше \( n \), \( H(P) \) обозначает высоту многочлена \( P \). В той же работе Малер предположил, что ограничение на \( w \) может быть ослаблено до \( w > n \). Последовательные продвижения в решении проблемы Малера делала Дж. Коксма, В. Левек, Й. Кубилюс, Ф. Каш, Б. Фолькман и В. Шмидт. В 1964 году В.Г. Сприндцук дал полное решение проблемы Малера [3], а также рассмотрел комплексный случай и аналоги для p-адических чисел и формальных степенных рядов. В 1966 году А. Бейкер высказал гипотезу о том, что в теореме Сприндцuka в правой части неравенства можно ставить функцию \( \psi(H(P)) \), где \( \psi(h) \) — монотонно убывающая последовательность положительных чисел такая, что сходится ряд
\[
\sum_{h=1}^{\infty} h^{n-1}\psi(h).
\]
В последнее время было получено значительное продвижение в исследованиях диагфонтовых свойств дифференцируемых подмножеств эвклидова пространства. Со многими результатами можно ознакомиться по [3], [6]–[9].

В то время, как метрическая теория диагфонтовых приближений хорошо развита для поля действительных чисел, таких исследований в поле p-адических чисел проведено мало. В настоящей работе мы доказываем аналог теоремы Хинчины в случае линейных диагфонтовых приближений плоских кривых, заданных над кольцом целых p-адических чисел.

Всюду в дальнейшем мы используем следующие обозначения. Простое число \( p \geq 2 \) фиксирано, \( Q_p \) — поле p-адических чисел, \( Z_p \) — поле целых p-адических чисел, \( \|x\|_p \) — p-адическая норма \( x \in Q_p \), множество \( K(\alpha, r) = \{ x \in Z_p : \|x - \alpha\|_p < r \} \) называют кругом (диском или элементарным цилиндром) в \( Z_p \) радиуса \( r > 0 \) с центром в точке \( \alpha \in Z_p \).

Известно, что поле \( Q_p \) является локально компактным, и на нем можно ввести меру Хаара, обозначаемую через \( \mu \) и нормированную так, что \( \mu Z_p = p \). Конструкции и свойства этой меры описаны в [3, c. 69–76].

Согласно Малеру [10] функция \( f: Z_p \to Z_p \) называется нормальной, если она имеет вид

\[
f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x - \alpha)^n,
\]

где \( \|\alpha\|_p \leq 1, |\alpha_n|_p \leq 1 \) для всех \( n \) и

\[
\lim_{n \to \infty} |\alpha_n|_p = 0.
\]

Производные \( f^{(k)}(x) \) \( (k = 1, 2, \ldots) \) также являются нормальными функциями. Кроме того, для нормальной над \( Z_p \) функции имеет место разложение в ряд Тейлора [11], что не верно для произвольной p-адической функции [12, c. 223]. Отметим, что класс нормальных функций достаточно широк: если \( g(x) \) — произвольная голоморфная функция p-адической переменной, то существуют целые рациональные числа и \( s \) и \( t \) такие, что \( p^s g(p^t x) \) — нормальная функция.

**Теорема 1.** Пусть \( f: Z_p \to Z_p \) — нормальная функция такая, что \( f''(x) \neq 0 \) почти всюду (в смысле меры Хаара) в \( Z_p \), \( \psi: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \) монотонно убывает. Пусть \( L_f(\psi) \) — множество точек \( x \in Z_p \) таких, что неравенство

\[
|a_2 f(x) + a_1 x + a_0|_p < \psi(h),
\]

где \( h = \max\{|a_0|, |a_1|, |a_2|\} \), имеет бесконечное число решений \( (a_0, a_1, a_2) \in Z^3 \).

Тогда

\[
\mu L_f(\psi) = \begin{cases} 
0, & \text{если } \sum_{h=1}^{\infty} h^2 \psi(h) < \infty, \\
p, & \text{если } \sum_{h=1}^{\infty} h^2 \psi(h) = \infty.
\end{cases}
\]

Эта теорема усиливает результат Мельничука [13], у которого в правой части неравенства (2) стоит величина \( h^{-3-\varepsilon} \) с произвольным \( \varepsilon > 0 \). Отметим, что условие на \( f'' \).
равносило тому, что кривизна кривой \( (x, f(x)) \) отлична от нуля почти всюду в \( \mathbb{Z}_p \).

Аналог теоремы 1 в действительном случае доказан в [14], [15]. Если в неравенстве (2) вместо линейной формы \( a_2 f(x) + a_1 x + a_0 \) стоит многочлен с целыми коэффициентами степени не выше \( n \), \( h \) обозначает его высоту, а \( \psi \) такова, что ряд (1) сходится, то соответствующая теорема доказана в [16]. Используя результаты данной работы, можно также рассмотреть случай расходности и в этой теореме.

Случай сходимости в теореме 1 впервые был доказан в [17] методом существенных и несущественных областей. В настоящей работе мы даем эффективную версию этого результата (теорема 2 и следствие из теоремы 3), используя значительно модифицированный метод. Это позволяет строить наилучшие регулярные системы нулей линейных форм вида \( a_2 f(x) + a_1 x + a_0 \) (теорема 4). Мы также доказываем общее утверждение о приближении целых \( p \)-адических чисел точками регулярных систем (теорема 5), что является основой для исследования подобных задач в пространствах больших размерностей.

2. **Вспомогательные утверждения.** Несложно показать, используя монотонность \( \psi \), что нет ограничения общности в том, чтобы предполагать, что \( \psi(h) < h^{-1} \).

По условию теоремы \( f''(x) \neq 0 \) почти всюду в \( \mathbb{Z}_p \). Удалим из \( \mathbb{Z}_p \) множество произвольно малой меры \( \theta \) так, чтобы в оставшейся части \( \mathbb{Z}_p(\theta) \) выполнялось неравенство \( |f''(x)|_p \geq C_1 \), где \( C_1 = C_1(\theta) \) и \( 0 < C_1 < 1 \). Достаточно доказать теорему 1 на множестве \( \mathbb{Z}_p(\theta) \). Это множество можно представить в виде объединения конечного или счетного числа кругов \( K_8 \). Дальнейшие рассуждения применимы к любому кругу \( K_8 \). Рассмотрим один из них, который обозначим через \( K_0 \). Тогда для всех \( x \in K_0 \)

\[
|f''(x)|_p \geq C_1.
\] (3)

При этом без ограничения общности считаем, что радиус круга \( K_0 \) удовлетворяет неравенству

\[
\text{radius}(K_0) < C_1 p^{-3}.
\] (4)

Определим множество \( \mathcal{F} \), состоящее из всех ненулевых линейных форм с целыми рациональными коэффициентами вида \( F = a_2 f(x) + a_1 x + a_0 \). Очевидно, что каждая функция \( F \in \mathcal{F} \) является нормальной. Для \( F \in \mathcal{F} \) определим

\[
h_F = \max \{|a_i| : i = 0, 1, 2\}.
\]

**Лемма 1.** Пусть \( F \in \mathcal{F} \), \( \alpha_0, \alpha_1 > 0 \), \( \beta_1, \beta_2 \geq 0 \). Пусть \( \sigma_{\alpha, \beta}(F) \) обозначает множество тех \( x \in K_0 \), для которых выполнена система неравенств

\[
\left\{ \begin{array}{l}
|F(x)|_p < \alpha_0, \\
\beta_1 \leq |F'(x)|_p < \alpha_1, \\
\beta_2 \leq |F''(x)|_p.
\end{array} \right.
\] (5)

Тогда множество \( \sigma_{\alpha, \beta}(F) \) покрывает не более чем двумя кругами радиуса

\[
r_{\alpha, \beta} = \min \left\{ \frac{\alpha_0}{\beta_1}, \left( \frac{\alpha_0}{\beta_2} \right)^{1/2}, \frac{\alpha_1}{\beta_2} \right\}.
\]
ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Предположим, что $\sigma_{\alpha, \beta}(F)$ содержит по крайней мере две точки, поскольку в противном случае утверждение леммы очевидно. Тогда по свойству компактности $\mathbb{Z}_p$ существуют две точки $x_1, x_2 \in \sigma_{\alpha, \beta}(F)$ такие, что

$$|x_1 - x_2|_p \geq |x - y|_p$$

для любых $x, y \in \sigma_{\alpha, \beta}(F)$. (6)

Для доказательства леммы покажем, что $\sigma_{\alpha, \beta}(F) \subset \bigcup_{i=1}^{2} K(x_i, r_{\alpha, \beta})$.

Пусть $x \in \sigma_{\alpha, \beta}(F)$ и $i \in \{1, 2\}$. По формуле Тейлора мы имеем

$$F'(x) - F'(x_i) = (x - x_i) \left( F''(x_i) + \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} F^{(n+1)}(x_i)(x - x_i)^n \right).$$

(7)

Поскольку $F^{(n)}(x) = a_2 f^{(n)}(x)$ при $n > 1$, из (7) вытекает

$$F'(x) - F'(x_i) = a_2 (x - x_i) \left( f''(x_i) + \sum_{n=0}^{\infty} (n!)^{-1} f^{(n+1)}(x_i)(x - x_i)^n \right).$$

(8)

Используя (3), (4), неравенство $|f^{(n)}(x)|_p < 1$ и известную оценку $|1/n!|_p \leq p^n$, легко проверить, что

$$|(n!)^{-1} f^{(n+1)}(x_i)(x - x_i)^{n-1}|_p \leq C_1 \leq |f''(x_i)|_p.$$ 

Тогда $p$-адическая норма правой части (8) ($p$-адическая норма суммы не превосходит максимума $p$-адических норм слагаемых и в точности равна ему, если этот максимум достигается ровно на одном слагаемом) равна

$$|a_2 (x - x_i) f''(x_i)|_p = |F''(x_i)|_p |x - x_i|_p.$$ 

(9)

Сейчас, используя неравенства (5), получаем

$$\alpha_1 > |F'(x) - F'(x_i)|_p = |F''(x_i)|_p |x - x_i|_p \geq \beta_2 |x - x_i|_p,$$

откуда вытекает, что

$$|x - x_i|_p \leq \frac{\alpha_1}{\beta_2}. \quad (10)$$

Далее для $i = 1, 2$ рассмотрим разложение по формуле Тейлора для $F(x)$:

$$F(x) - F(x_i) = (x - x_i) \left( F'(x_i) + \sum_{n=2}^{\infty} (n!)^{-1} F^{(n)}(x_i)(x - x_i)^n \right).$$

(11)

Предположим, что для некоторого индекса $i \in \{1, 2\}$ выполнено неравенство

$$|F'(x_i)|_p > 2^{-1} F''(x_i)(x - x_i)|_p.$$ 

(12)

Тогда так же, как при доказательстве (9), несложно проверить, что $p$-адическая норма правой части (11) равна $|x - x_i|_p |F'(x_i)|_p$, и из (11) вытекает

$$|F(x) - F(x_i)|_p = |F'(x_i)|_p |x - x_i|_p.$$ 

(13)
Применяя к этому равенству условия (5), получаем

$$|x - x_i|_p \leq \frac{\alpha_0}{\beta_1}.$$  

(14)

Кроме того, из (5), (12) и (13) следует, что

$$\alpha_0 \geq |F(x) - F(x_i)|_p = |F'(x_i)|_p |x - x_i|_p > |F''(x_i)(x - x_i)|_p |x - x_i|_p$$

$$\geq |F''(x_i)|_p |x - x_i|^2 \geq \beta_2 |x - x_i|^2.$$  

Отсюда вытекает, что

$$|x - x_i|_p \leq \left( \frac{\alpha_0}{\beta_2} \right)^{1/2}.$$  

(15)

Из неравенств (10), (14) и (15) получаем утверждение нашей леммы в случае (12).

Теперь пусть (12) не выполнено ни для какого $i \in \{1, 2\}$. Пусть $|x - x_1|_p \leq |x - x_2|_p$. Согласно (6) мы имеем

$$|x - x_1|_p \leq |x - x_2|_p \leq |x - x_2|_p.$$  

(16)

Домножив разложение Тейлора

$$F(x_2) - F(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1} F^{(n)}(x_1)(x_2 - x_1)^n$$

на $x - x_1$ и разделив на $x_2 - x_1$, получаем

$$\frac{(F(x_2) - F(x_1))(x - x_1)}{x_2 - x_1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1} F^{(n)}(x_1)(x_2 - x_1)^{n-1}(x - x_1).$$

Вычитая это равенство из разложения по формуле Тейлора

$$F(x) - F(x_1) = \sum_{n=1}^{\infty} (n!)^{-1} F^{(n)}(x_1)(x - x_1)^{n-1}(x - x_1)$$

и преобразовывая правую часть, получим

$$F(x) - F(x_1) - \frac{(F(x_2) - F(x_1))(x - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$= (x - x_1)(x - x_2) \left( 2^{-1} F''(x_1) + \sum_{n=3}^{\infty} (n!)^{-1} F^{(n)}(x_1) \left( x - x_1 \right)^{n-2} \right).$$  

(17)

Используя (5) и (16), мы находим, что $p$-адическая норма левой части (17) не превосходит $\alpha_0$. Далее, рассуждая, как при доказательстве (9), легко проверить, что $p$-адическая норма правой части (17) равна

$$|(x - x_1)(x - x_2)|_p |2^{-1} F''(x_1)|_p \leq |x - x_1|^2 |2^{-1} F''(x_1)|_p.$$  

Тогда

$$\alpha_0 \geq |2^{-1} F''(x_1)|_p |x - x_1|^2.$$  

(18)

Применим неравенство (5), получаем (15) при $i = 1$. Из (5), (18) и неравенства, противоположного к (12), мы также имеем

$$\alpha_0 \geq |x - x_1|_p |2^{-1} F''(x_1)(x - x_1)|_p \geq |x - x_1|_p |F'(x_1)|_p \geq |x - x_1|_p \beta_1,$$

откуда следует (14) при $i = 1$. Итак, мы получили неравенства (10), (14) и (15) при $i = 1$. В предположении $|x - x_1| \geq |x - x_2|$ мы бы получили эти неравенства при $i = 2$. Из (10), (14) и (15) мы снова получаем требуемое.
Лемма 2. Для каждой функции $F \in \mathcal{F}$ определим множество $\mathcal{X}_F = \{x \in K_0 : F(x) = 0\}$. Пусть $\mathcal{X} = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{X}_F$. Тогда $\mu \mathcal{X} = 0$.

Доказательство. В силу счетности множества $\mathcal{F}$ достаточно доказать, что $\mu \mathcal{X}_F = 0$ для фиксированной $F \in \mathcal{F}$. Несложно проверить, что если $\mathcal{X}_F$ состоит из по крайней мере двух точек (поскольку в противном случае утверждение тривиально), то $a_2(F) \neq 0$ и, следовательно, $|F''(x)|_p \geq |a_2|_p C_1 > 0$ для всех $x \in K_0$. Множество $\mathcal{X}_F$ содержит в множестве $\{x \in K_0 : |F(x)|_p < \varepsilon\}$ для любого $\varepsilon > 0$, мера которого по лемме 1 не превосходит $\sqrt{\varepsilon / (|a_2|_p C_1)}$, т.е. сколь угодно мала. Тем самым, лемма 2 доказана.

Лемма 3. Пусть $E \subset K_0$ - измеримое множество, $0 < C_4 < 1$ - постоянная. Если для любого круга $K \subset K_0$ выполнено $\mu(E \cap K) \geq C_4 \mu K$, то множество $E$ имеет полную меру Хаара в $K_0$.

Доказательство. Пусть $\overline{E} = K_0 \setminus E$. Тогда, поскольку $K \setminus \overline{E} = K \cap E$, для любого круга $K \subset K_0$ верно $\mu(K \setminus \overline{E}) \geq C_4 \mu K$. Далее, для любого $\varepsilon > 0$ существует покрытие множества $\overline{E}$ кругами $K_i$ такое, что

$$\sum_{i=1}^{\infty} \mu K_i - \varepsilon \leq \mu \overline{E} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu K_i.$$

Тогда мы имеем

$$\mu \overline{E} \geq \sum_{i=1}^{\infty} \mu K_i - \varepsilon = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i \setminus E) + \sum_{i=1}^{\infty} \mu(K_i \cap E) - \varepsilon \geq C_4 \sum_{i=1}^{\infty} \mu K_i + \mu \overline{E} - \varepsilon \geq (C_4 + 1) \mu \overline{E} - \varepsilon.$$

Отсюда следует, что $\mu \overline{E} \leq \varepsilon / C_4 \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Следовательно, $\overline{E}$ имеет нулевую, а $E$ полную меру в $K_0$.

Следующие две леммы доказаны соответственно в [7, с. 23] и [5].

Лемма 4. Пусть $E_i$, $i \in \mathbb{N}$, - измеримые подмножества $\mathbb{Z}_p$, $\sum_{i=1}^{\infty} \mu E_i = \infty$ и $E = \bigcap_{j=1}^{\infty} \bigcup_{i=j}^{\infty} E_i$. Тогда

$$\mu E \geq \lim_{N \to \infty} \frac{\left(\sum_{i=1}^{N} \mu E_i\right)^2}{\sum_{i,j=1}^{\infty} \mu(E_i \cap E_j)}.$$

Лемма 5. Пусть $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ монотонно убывает. Тогда ряды $\sum_{h=1}^{\infty} \tilde{\psi}(h)$ и $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \tilde{\psi}(2^k)$ сходятся или расходятся одновременно.

Два следующих пункта посвящены получению верхних оценок меры множества $x \in K_0$, для которых разрешимо неравенство (2) с несколькими видоизмененной правой частью. Получение этих оценок распадается на два случая.
3. Случай большой первой производной. Для \( Q \in \mathbb{N} \) определим множество \( \mathcal{F}(Q) = \{ F \in \mathcal{F} : h_F \leq Q \} \) (\( \mathcal{F} \) определено перед леммой 1). Пусть K обозначает круг в \( K_0 \) и \( \gamma > 0 \). Определим также множество \( \Omega(K, \gamma, Q, F) \), состоящее из всех \( x \in K \) таких, что

\[
|F(x)|_p < \gamma Q^{-3}, \quad |F'(x)|_p \geq h_F^{-1/2},
\]

и множество

\[
\Omega(K, \gamma, Q) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}(Q)} \Omega(K, \gamma, Q, F).
\]

Теорема 2. Существует постоянная \( C_2 > 0 \) такая, что для любого круга \( K \subset K_0 \), любого \( \gamma \) (\( 0 < \gamma < 1 \)) и всех \( Q > Q_0(K, f) \) верно неравенство

\[
\mu \Omega(K, \gamma, Q) \leq C_2 \gamma \mu K.
\]

Доказательство. Будем рассматривать только те функции \( F \in \mathcal{F}(Q) \), для которых \( \Omega(K, \gamma, Q, F) \neq \emptyset \). Для \( F \in \mathcal{F}(Q) \), используя свойство компактности \( \mathcal{Z}_p \), определим точку \( \alpha_F \in \Omega(K, \gamma, Q, F) \) такую, что

\[
|F'(\alpha_F)|_p = \min_{x \in \Omega(K, \gamma, Q, F)} |F'(x)|_p.
\]

Тогда согласно лемме 1

\[
\mu \Omega(K, \gamma, Q, F) \ll \gamma Q^{-3}|F'(\alpha_F)|_p^{-1},
\]

где "\( \ll \)" — символ Виноградова (\( A \ll B \) означает неравенство \( A \leq CB \) с некоторой положительной постоянной \( C \), зависящей только от \( K_0 \) и \( f \)). Для каждой функции \( F \in \mathcal{F}(Q) \) определим круг

\[
\overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F) = \{ x \in \mathcal{Z}_p : |x - \alpha_F|_p \leq (2pQ|F'(\alpha_F)|_p)^{-1} \}.
\]

Если число \( Q \) достаточно велико, то радиус круга \( \overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F) \) меньше радиуса К и, следовательно, \( \overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F) \subset K \). Далее, используя (20), легко видеть, что

\[
\mu \Omega(K, \gamma, Q, F) \ll \gamma Q^{-2} \mu \overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F).
\]

Зафиксируем любую функцию \( F \in \mathcal{F}(Q) \), для которой \( \Omega(K, \gamma, Q, F) \neq \emptyset \). Пусть \( x \in \overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F) \). Записав разложение \( F(x) \) в окрестности точки \( \alpha_F \) по формуле Тейлора и оценив каждое слагаемое, получаем

\[
|F(x)|_p < (2Q)^{-1}, \quad x \in \overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F).
\]

При этом используются неравенства (19), (21), \( |n!^{-1}|_p \leq p^n \) и \( |F^{(n)}(\alpha_F)|_p \leq 1 \).

Пусть \( F_1, F_2 \in \mathcal{F}(Q) \) и отличаются только коэффициентом \( a_0 \), т.е. \( F_1 - F_2 = a_0 \). Если предположить, что существует \( x \in \overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F_1) \cap \overline{\Omega}(K, \gamma, Q, F_2) \), то из (23) следует, что \( |F_1(x) - F_2(x)|_p < (2Q)^{-1} \). С другой стороны, \( F_1(x) - F_2(x) \) есть целое число, по абсолютной величине не превосходящее 2Q. Следовательно, его норма не может быть
меньше $(2Q)^{-1}$. Полученное противоречие показывает, что \( \Omega(K, \gamma, Q, F_1) \cap \Omega(K, \gamma, Q, F_2) = \emptyset \). Следовательно,

\[
\sum_{F \in \mathcal{F}(Q,a_2,a_1)} \mu \Omega(K, \gamma, Q, F) \leq \mu K,
\]

где \( \mathcal{F}(Q,a_2,a_1) \) — подмножество \( \mathcal{F}(Q) \), состоящее из функций \( F \) с фиксированными коэффициентами \( a_2 \) и \( a_1 \). Из последней оценки и (22) следует, что

\[
\sum_{F \in \mathcal{F}(Q,a_2,a_1)} \mu \Omega(K, \gamma, Q, F) \ll \gamma Q^{-2} \mu K.
\]

Суммирование этого неравенства по всевозможным \( a_2, a_1 \) (их число равно \((2Q + 1)^2\)) дает требуемую оценку.

4. Случай малой первой производной. Для каждой функции \( F(x) = a_2 f(x) + a_1 x + a_0 \in \mathcal{F} \) определим следующую величину: \( a_F = \text{НОД}(a_2, a_1, a_0) \). Далее пусть \( \mathcal{F}^* = \{ F \in \mathcal{F} : a_F = 1 \} \).

Теорема 3. Пусть \( \varepsilon > 0 \). Тогда для почти всех \( x \in K_0 \) система неравенств

\[
|F(x)|_p < h_F^{-3}, \quad |F'(x)|_p < h_F^{-\varepsilon}
\]

имеет только конечное число решений \( F \in \mathcal{F} \).

Доказательство. Пусть \( x \in K_0 \) и (25) выполнено бесконечно часто. На первом шаге доказательства мы покажем, что нет ограничения общности в том, чтобы предполагать, что решения \( F \) системы (25) принадлежат \( \mathcal{F}^* \). Действительно, если дано решение \( F \) системы (25), то функция \( \Phi = F/a_F \) принадлежит \( \mathcal{F}^* \) и удовлетворяет неравенствам

\[
|a_F|_p |\Phi(x)|_p = |F(x)|_p < h_F^{-3}, \quad |a_F|_p |\Phi'(x)|_p = |F'(x)|_p < h_F^{-\varepsilon}.
\]

Поскольку \( |a_F|_p^{-1} \leq a_F \) и, как легко проверить, \( h_F = h_F a_F \), из этих неравенств мы получаем

\[
|\Phi(x)|_p < h_F^{-3} a_F^{-2}, \quad |\Phi'(x)|_p < h_F^{-\varepsilon} a_F^{-1-\varepsilon}.
\]

Если (26) выполнено только для конечного числа различных функций \( \Phi \), то найдется одна из этих функций такая, что (26) выполнено для бесконечного числа функций \( F \) с одной и той же \( \Phi \), что необходимо приводит к тому, что \( \Phi(x) = 0 \). По лемме 2 \( x \) принадлежит множеству нулевой меры. Поэтому в дальнейшем мы предполагаем, что (26) выполнено для бесконечного числа \( \Phi \). Если \( \varepsilon \geq 1 \), то из (26) мы опять приходим к системе (25) для функции \( \Phi \), что доказывает наше предположение и в этом случае. Поэтому далее считаем, что \( \varepsilon < 1 \).

Тогда если система (25) выполнена для бесконечного числа функций \( F \in \mathcal{F} \), для которых \( a_F \geq h_F^{\varepsilon/(2-2\varepsilon)} \), то, используя первое неравенство (26), мы получаем, что неравенство \( |\Phi(x)|_p < h_F^{-3-\varepsilon/(1-\varepsilon)} \) выполнено для бесконечного числа \( \Phi \in \mathcal{F}^* \). Согласно результату работы [13] множество таких \( x \) имеет нулевую меру.
Если система (25) выполнена для бесконечного числа функций $F \in \mathcal{F}$, для которых $a_F < h_F^{\varepsilon/(2-2\varepsilon)}$, то из (26) мы получаем, что неравенства

$$|\Phi(x)|_p < h_F^{-3}, \quad |\Phi'(x)|_p < h_F^{-\varepsilon/2}$$

выполнены для бесконечного числа $\Phi \in \mathcal{F}^*$. Это также обосновывает наше предположение.

Второй шаг доказательства теоремы включает в себя введение дополнительных условий на производные. Прежде всего покажем, что для каждой функции $F \in \mathcal{F}^*$ такой, что существует решение $x \in K_0$ системы (25), выполнено

$$|F''(x)|_p \geq C_1, \quad x \in K_0. \quad (27)$$

Пусть $|a_2|_p < 1$. Тогда $h_F > 1$. Далее из неравенств (25) легко получить, что $|a_i|_p < 1$ для $i = 0, 1$. Следовательно, $p \mid a_F$, что противоречит тому, что $F$ принадлежит $\mathcal{F}^*$. Используя (3), получаем (27).

Далее, используя лемму Бореля–Кантелли, лемму 1 и неравенство (27), легко проверить, что множество тех $x \in K_0$, для которых бесконечно часто выполнено неравенство $|F''(x)|_p < h_F^{-3}$, имеет меру нуль. Поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать только те точки $x \in K_0$, для которых неравенство $|F''(x)|_p \geq h_F^{-3}$ выполняется для всех $F \in \mathcal{F}^*$, кроме возможно конечного числа.

Пусть $T$ – достаточно большое натуральное число. Положим $\delta = \varepsilon/T$. Согласно сказанному выше для каждой точки $x$ из рассматриваемого множества существует целое число $l$, удовлетворяющее условию $-3 - \delta \leq l\delta \leq -\varepsilon$, такое, что для бесконечного числа $F \in \mathcal{F}^*$ выполнена система неравенств

$$|F(x)|_p < h_F^{-3}, \quad h_F^{(l-1)\delta} \leq |F''(x)|_p < h_F^{l\delta}. \quad (28)$$

С настоящего момента мы фиксируем $l$. Для каждой функции $F \in \mathcal{F}^*$ определим множество

$$\sigma(F) = \{x \in K_0 : \text{выполнены неравенства (28)}\}.$$ 

Нас интересует множество тех $x \in K_0$, которые попадают в бесконечное число множеств $\sigma(F)$, где $F \in \mathcal{F}^*$.

Применим лемму 1 к неравенствам (27) и (28), получаем

$$\mu \sigma(F) \leq h_F^{-\xi},$$

где

$$\xi = \max\left(3 + (l - 1)\delta, \frac{3}{2}, -l\delta\right).$$

Третий шаг доказательства содержит выделение двух типов множеств $\sigma(F)$ и доказательство теоремы для каждого из них. Для целых неотрицательных $t$ определим классы

$$\mathcal{F}^*(t) = \{F \in \mathcal{F}^* : 2^t \leq h_F < 2^{t+1}\}.$$ 

Далее при каждом таком $t$ круг $K_0$ можно разбить на подкруги радиуса $2^{t(-\xi+\delta)}$. Круги такого разбиения обозначим через $K_i(t)$, где $1 \leq i \leq s_t$. Легко видеть, что число
кругов разбиения $s_t$ удовлетворяет соотношению $s_t \geq 2^{\xi(t)}$, где $A \sim B$ означает одновременное выполнение $A \ll B$ и $B \ll A$.

Будем говорить, что функция $F \in \mathcal{F}^*(t)$ ассоциирована с кругом $K_i^{(t)}$, если $\sigma(F) \cap K_i^{(t)} \neq \emptyset$. Две функции, ассоциированные с одним и тем же кругом, назовем ассоциированными. Заметим, что $\sigma(F) \neq \emptyset$ тогда и только тогда, когда $F$ и $-F$ ассоциированы.

Теперь мы можем определить упомянутые классы. Функцию $F \in \mathcal{F}^*$ отнесем к первому типу, если эта функция ассоциирована не более чем с $\pm F$. В противном случае отнесем эту функцию ко второму типу.

Первый случай тривиален, поскольку при фиксированном $t$ число функций первого типа во множестве $\mathcal{F}^*(t)$ не превосходит $2s_t$, и, следовательно, сумма мер $\sigma(F)$ по функциям первого типа не превосходит

$$2 \sum_{t=0}^{\infty} 2^{-\xi(t)} s_t \ll \sum_{t=0}^{\infty} 2^{-\xi} 2^{(\xi-\delta) t} = \sum_{t=0}^{\infty} 2^{(-\delta) t} t < \infty.$$ 

Применение леммы Бореля–Кантелли завершает рассмотрение этого случая.

Перейдем к случаю функций второго типа. Легко проверить, что если точка $x \in K_0$ не попадает в бесконечное число множеств $\sigma(F)$ первого типа, то эта точка попадает в бесконечное число кругов $K_i^{(t)}$ второго типа, т.е. таких кругов, с которыми ассоциированы функции второго типа. Зафиксируем $t$ и круг $K_i^{(t)}$ второго типа и покажем, что точки этого круга допускают более сильную аппроксимацию.

Согласно определению существуют функции $F_1, F_2$, ассоциированные с $K_i^{(t)}$, причем $F_1 \neq \pm F_2$. Эти функции имеют следующий вид: $F_j(x) = a_j^{(j)} f(x) + a_j^{(a)} x + a_0^{(j)}$. Из определения множества $\mathcal{F}^*$ следует, что $a_{F_j} = 1$. Тогда, используя условие $F_1 \neq \pm F_2$, легко показать, что векторы $a^{(j)} = (a_0^{(j)}, a_1^{(j)}, a_2^{(j)})$ линейно независимы ($j = 1, 2$).

Далее мы оцениваем $p$-адическую норму $F_j$ и $F'_j$ в произвольной точке $x \in K_i^{(t)}$. Для этого записывая разложение $F_j(x)$ и $F_j'(x)$ в окрестности некоторой точки $x_j \in \sigma(F_j) \cap K_i^{(t)}$ по формуле Тейлора и используя неравенства

$$|x - x_j| \ll 2^{(-\xi+\delta)}, \quad |n^{-1}|_p \leq p^n, \quad |F^{(n)}(x_j)|_p \leq 1,$$

(4) и (28), получаем

$$|F_j(x)|_p \ll 2^{t(-3+\delta)}, \quad |F_j'(x)|_p \ll 2^{t(-t\delta+\delta)}.$$ 

(29)

Рассмотрим все возможные числа вида

$$\lambda_1 a_2^{(1)} + \lambda_2 a_2^{(2)},$$

когда $0 \leq \lambda_1, \lambda_2 \leq 2^{3\delta t}, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$. Число различных выражений вида (30) равно

$$([2^{3\delta t}] + 1)^2 > 2^{6\delta t} \geq p^{6\delta t \log_2 p}.$$ 

Поэтому существует два различных выражения вида (30), значения которых имеют одинаковые остатки по модулю $p^{6\delta t \log_2 p}$. Обозначим эти выражения через $\lambda_1, k a_2^{(1)} + \lambda_2, k a_2^{(2)}, k = 1, 2$. Тогда

$$r_2 = \lambda_1, a_2^{(1)} + \lambda_2, a_2^{(2)} \equiv 0 \mod p^{6\delta t \log_2 p},$$

(31)
где $\lambda_{j,0} = \lambda_{j,1} - \lambda_{j,2}$ ($j = 1, 2$). При этом выполнено
\[ 0 < |\lambda_{1,0} + |\lambda_{2,0}| \quad \text{и} \quad \max \{|\lambda_{1,0}|, |\lambda_{2,0}|\} \leq 2 \cdot 2^{3\delta t}. \quad (32) \]
Функция $R(x) = r_2 f(x) + r_1 x + r_0 = \lambda_{1,0} F_1(x) + \lambda_{2,0} F_2(x)$ не равна тождественно нулю, поскольку $a^{(1)}$ и $a^{(2)}$ линейно независимы. Кроме того, несложно проверить, что
\[ h_R \ll 2^{t(1+3\delta)}. \quad (33) \]
Используя (29) и (32), получаем
\[ |R(x)|_p \leq \max(|\lambda_{1,0}|_p F_1(x)|_p, |\lambda_{2,0}|_p F_2(x)|_p) \ll 2^{t(-3+2\delta)}, \quad (34) \]
\[ |R'(x)|_p \leq \max(|\lambda_{1,0}|_p F_1'(x)|_p, |\lambda_{2,0}|_p F_2'(x)|_p) \ll 2^{t(-t\delta+\delta)} \ll 2^{t(-t\delta+\delta)}. \quad (35) \]
Далее, используя (31), (34) и (35), получаем неравенства
\[ |r_1|_p \leq p^{-[6\delta t \log p] 2}, \quad |r_0|_p \leq p^{-[6\delta t \log p] 2}. \]
Следовательно, мы можем определить функцию $Q(x) = p^{-[6\delta t \log p] 2} R(x) \in \mathcal{F}$. Согласно (33) мы находим $h_Q \ll 2^{t(1-3\delta)}$. Из оценки (34) получаем
\[ |Q(x)|_p = |p^{-[6\delta t \log p] 2} R(x)|_p \ll 2^{t(3-3\delta)} \ll h_Q^{(3-8\delta)/(1-3\delta)} = h_Q^{3-\delta/(1-3\delta)}. \quad (36) \]
Если точка $x$ попадает в бесконечное число кругов второго типа, то неравенства (36) выполнены для бесконечного числа номеров $t$.

Если (36) выполнено только для конечного числа различных функций $Q$, то найдется одна из этих функций такая, что (36) выполнено для бесконечного числа $t$ с одной и той же функцией $Q$, что необходимо приводит к тому, что $Q(x) = 0$. По лемме 2 такая точка $x$ принадлежит множеству нулевой меры. Если (36) выполнено для бесконечного числа $Q$, то по теореме Мельничука [13] $x$ опять принадлежит множеству нулевой меры.

Теорема 3 доказана.

Используя теоремы 2 и 3, несложно получить

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть $\Delta(K, Q, \gamma) = \{x \in K : \exists F \in \mathcal{F}(Q), |F(x)|_p < \gamma Q^{-3}\}$, где $K \subset K_0$ - некоторый круг, $Q, \gamma > 0$. Тогда существует абсолютно постоянная $C_3 > 0$ такая, что $\mu \Delta(K, Q, \gamma) \leq C_3 \gamma$ для всех $Q > Q_0(K, \gamma, f)$.

5. Доказательство случая сходимости в теореме 1. Этот случай разбивается на два подслучая. Первый состоит в рассмотрении множества тех $x \in K_0$, для которых существует бесконечно много $F \in \mathcal{F}$ таких, что $|F(x)|_p < \psi(h_F), |F'(x)|_p < h_F^{-1/2}$. Поскольку $\psi(h) < h^{-3}$ для всех достаточно больших $h$, то согласно теореме 3 это множество имеет нулевую меру Haара.

Второй случай — это рассмотрение множества тех $x \in K_0$, для которых существует бесконечно много $F \in \mathcal{F}$ таких, что $|F(x)|_p < \psi(h_F), |F'(x)|_p \geq h_F^{-1/2}$. Для $t \in N$ пусть $\Lambda(t)$ обозначает множество $x \in K_0$ таких, что существует решение $F \in \mathcal{F}(2^t)$ этой системы. Исследуемое множество состоит из тех $x$, которые попадают в бесконечное число $\Lambda(t)$. В силу монотонности $\psi$ мы имеем включение $\Lambda(t) \subset \Omega(K_0, \psi(2^t), h)$. Согласно теореме 2 $\mu \Lambda(t) \ll 2^{3\psi(2^t)}$. Тогда если $\sum_{h=1}^{\infty} h^2 \psi(h) < \infty$, то, используя эту оценку и лемму 5, находим
\[ \sum_{t=0}^{\infty} \mu \Lambda(t) \ll \sum_{t=0}^{\infty} 2^{3\psi(2^t)} < \infty. \]

По лемме Бореля–Кантелли рассматриваемое множество имеет нулевую меру Haара. Таким образом, случай сходимости в теореме 1 доказан.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\Gamma$ — множество $p$-адических чисел и $N: \Gamma \to \mathbb{R}^+$ — функция, называемая нормировочной. Пара $(\Gamma, N)$ называется регулярной системой точек в кружке $K_0$, если существует постоянная $C > 0$ такая, что для любого кружка $K \subset K_0$ и для любого достаточно большого числа $T$ найдется набор $\gamma_1, \ldots, \gamma_t \in \Gamma \cap K$, удовлетворяющий условиям $N(\gamma_i) \leq T$ ($1 \leq i \leq t$), $|\gamma_i - \gamma_j|_p \geq T^{-1}$ ($1 \leq i < j \leq t$), $t \geq C T \mu K$.

ТЕОРЕМА 4. Пара $\Gamma = \{\gamma \in \mathbb{Z}_p: \exists F \in \mathcal{F}, F(\gamma) = 0\}$ и $N(\gamma) = \min_{F \in \mathcal{F}}:F(\gamma) = 0 h_F^2$ является регулярной системой точек в $K_0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольный кружок $K \subset K_0$ и $Q > 0$ — достаточно большое число. Пусть $\Delta(K, Q, \gamma) = K \setminus \Delta(K, Q, \gamma)$. По следствию 1 для всех достаточно больших $Q$ верно неравенство

$$\mu \Delta \left( K, Q, \frac{1}{2C_3} \right) \geq \frac{\mu K}{2}. \quad (37)$$

Определим натуральное число $l$ такое, что $p^l > C_3 \geq p^{l-1}$. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} |F(x)|_p \leq 2^{-1} p^{-2l}Q^{-3}, \\ |a_i| \leq p^l Q, \quad i = 0, 1, 2, \\ |a_2|_p \leq p^{-l}, \end{cases} \quad (38)$$

где $F(x) = a_2 f(x) + a_1 x + a_0$. Используя принцип ищущих Лярихле, несложно показать, что для любого $x \in \mathbb{Z}_p$ эта система имеет решение $F \in \mathcal{F}$. Если предположить, что $|F'(x)|_p \leq p^{-l}$, то из (38) можно получить, что $|a_i|_p \leq p^l$, откуда вытекает, что $\tilde{F} = p^{-l} F \in \mathcal{F}$. Более того, используя (38), несложно показать, что $h_{\tilde{F}} \leq \tilde{Q}$ и $|\tilde{F}(x)|_p \leq 2^{-1} p^{-l} Q^{-3} < (2C_3)^{-1} Q^{-3}$. В этом случае мы имеем $x \in \Delta(K, Q, 1/(2C_3))$. Следовательно, если $x \in \Delta(K, Q, 1/(2C_3))$, то $|F'(x)|_p \geq p^{-l} \geq 1/(pC_3)$ для любого решения $F \in \mathcal{F}$ системы (38). Далее, для каждого такого решения $F$ существует корень $\gamma_F \in K$ функции $F$ такой, что $|x - \gamma|_p \leq p^{-2l} Q^{-3}$. Этот корень легко найти как предел следующей последовательности: $x_{n+1} = x_n - F(x_n)/F'(x_n)$, $x_0 = x$, сходимость которой легко доказать, используя условия на $F(x_0)$ и $F'(x_0)$.

Пусть $\Gamma^*_Q$ — множество всевозможных таких $\gamma_F \in K$. Тогда

$$\Delta \left( K, Q, \frac{1}{2C_3} \right) \subset \bigcup_{\gamma \in \Gamma^*_Q} K(\gamma, p^{-2l} Q^{-3}). \quad (39)$$

Выберем максимальный набор чисел $\gamma_1, \ldots, \gamma_t \in \Gamma^*_Q$ такой, что $|\gamma_i - \gamma_j|_p \geq p^{-2l} Q^{-3}$ при $i \neq j$. Согласно выбору всякое $\gamma \in \Gamma^*_Q$ удовлетворяет неравенству $|\gamma - \gamma_i|_p \leq
$p^{-2l}Q^{-3}$ для некоторого $i$. Следовательно, $K(\gamma, p^{-2l}Q^{-3}) \subset K(\gamma_i, p^{-2l}Q^{-3})$, и из (37) и (39) вытекает, что

$$\frac{\mu K}{2} \leq \mu \Delta \left( K, Q, \frac{1}{2C_3} \right) \leq tp^{-2l}Q^{-3}.$$  

Значит, $t \geq 2^{-1}p^{2l}Q^3 \mu K$. Кроме того, из (38) следует, что $N(\gamma_i) \leq (p^l Q)^3$. Полагая $T = p^{3l}Q^3$, получаем требуемый набор точек в определении регулярной системы. Теорема 4 доказана.

7. Приближение точками регулярных систем.

**Теорема 5.** Пусть $(\Gamma, N)$ – регулярная система точек в круге $K_0 \subset \mathbb{Z}_p$, $\tilde{\psi}: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ – монотонно убывающая функция такая, что $\sum_{h=1}^{\infty} \tilde{\psi}(h) = \infty$. Тогда $\mu \Gamma \tilde{\psi} = \mu K_0$, где множество $\Gamma \tilde{\psi}$ состоит из $x \in K_0$ таких, что неравенство

$$|x - y|_p < \tilde{\psi}(N(\gamma))$$

имеет бесконечное число решений в $\gamma \in \Gamma$.

**Доказательство.** В силу монотонности $\tilde{\psi}$ и сходимости ряда $\sum_{h=1}^{\infty} \tilde{\psi}(h)$ без ограничения общности можно считать, что для всех $h$ выполнено неравенство

$$\tilde{\psi}(h) \leq \frac{h^{-1}}{2}.\quad (41)$$

Зафиксируем произвольный круг $K \subset K_0$. Определим последовательность $\varphi_k = 2^k \tilde{\psi}(2^k)$. Согласно лемме 3 имеем

$$\sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k = \infty.\quad (42)$$

По определению регулярной системы существуют постоянные $C = C(\Gamma, N, K_0)$ и $k_0 = k_0(\Gamma, N, K)$ такие, что для любого целого $k \geq k_0$ существует набор $\Gamma_k(K) = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_{t_k}\} \subset \Gamma \cap K$ такой, что

$$N(\gamma) \leq 2^k \text{ для всех } \gamma \in \Gamma_k(K),\quad (43)$$

$$|\gamma_1 - \gamma_2|_p \geq 2^{-k} \text{ для всех различных } \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_k(K),\quad (44)$$

$$C2^k \mu K \leq t_k \leq 2^k \mu K.\quad (45)$$

Для $\gamma \in \Gamma_k(K)$ определим множество $E_k(\gamma) = \{x \in \mathbb{Z}_p : |x - y|_p < \tilde{\psi}(2^k)\}$. Пусть $E_k = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_k} E_k(\gamma)$. В силу монотонности $\tilde{\psi}$ и условия (43) для любого $x \in E_k(\gamma)$ выполнено (40). Тогда легко видеть, что

$$E(K) = \bigcap_{N=k_0}^{\infty} \bigcup_{k=N}^{\infty} E_k \subset \Gamma \tilde{\psi} \cap K.$$  

Следовательно,

$$\mu(\Gamma \tilde{\psi} \cap K) \geq \mu E(K).\quad (46)$$
Далее легко проверить, что
\[ \mu E_k(\gamma) \asymp \tilde{\psi}(2^k). \] (47)

В силу неравенств (41) и (44) для различных \( \gamma, \beta \in \Gamma_k(K) \) выполнено \( E_k(\gamma) \cap E_k(\beta) = \emptyset \). Тогда, используя (45), получаем \( \mu E_k \asymp 2^k \mu K \tilde{\psi}(2^k) = \varphi_k \mu K \) и

\[ \left( \sum_{k=k_0}^N \mu E_k \right)^2 \asymp (\mu K)^2 \left( \sum_{k=k_0}^N \varphi_k \right)^2. \] (48)

Согласно (42) имеем \( \sum_{k=k_0}^\infty \mu E_k = \infty \).

Перейдем к оценке суммы мер пересечений множеств \( E_k \). Пусть \( k_0 \leq k < l \leq N \), где \( N \) — достаточно большое натуральное число. Для любого \( \gamma \in \Gamma_k(K) \) верно равенство

\[ E_l \cap E_k(\gamma) = \bigcup_{\beta \in \Gamma_l(K)} E_l(\beta) \cap E_k(\gamma). \]

Используя (47), мы получаем

\[ \mu (E_l \cap E_k(\gamma)) \leq \max_{\beta \in \Gamma_l(K)} \{ \mu E_l(\beta) \} n(l, k, \gamma) \ll n(l, k, \gamma) \tilde{\psi}(2^l), \] (49)

где \( n(l, k, \gamma) \) — число различных \( \beta \in \Gamma_l(K) \) таких, что \( E_l(\beta) \cap E_k(\gamma) \neq \emptyset \) (для краткости множество таких \( \beta \) обозначим через \( \Gamma_l(K) \)). Чтобы оценить число \( n(l, k, \gamma) \), заметим, что \( K(\beta_1, 2^{-l-1}) \cap K(\beta_2, 2^{-l-1}) = \emptyset \) для любых различных \( \beta_1, \beta_2 \in \Gamma_l(K) \), что легко проверить, используя (44) для \( \Gamma_l(K) \). Следовательно,

\[ \mu \left( \bigcup_{\beta \in \Gamma_l(K)} K(\beta, 2^{-l-1}) \right) = n(l, k, \gamma) \mu K(\beta, 2^{-l-1}) \ll n(l, k, \gamma) 2^{-l}. \] (50)

Далее покажем, что

\[ K(\beta, 2^{-l-1}) \subset K(\gamma, \tilde{\psi}(2^k) + 2^{-l}) \] (51)

для каждого \( \beta \in \Gamma_l(K) \). Действительно, пусть \( x \in K(\beta, 2^{-l-1}) \) и \( y \in E_k(\gamma) \cap E_l(\beta) \). Тогда, используя определение множеств \( E_k(\gamma), E_k(\beta) \) и неравенство (42), мы находим

\[ |x - \gamma|_p = |x - \beta - y + y - \gamma|_p \leq \max \{|x - \beta|_p, |\beta - y|_p, |y - \gamma|_p\} \leq \max \{\tilde{\psi}(2^k), 2^{-l}\}, \]

что доказывает (51). Из (51) вытекает, что мера объединения в (50) не превосходит \( \mu K(\gamma, \tilde{\psi}(2^k) + 2^{-l}) \). Тогда мы получаем \( n(l, k, \gamma) 2^{-l} \ll \tilde{\psi}(2^k) + 2^{-l} \), откуда \( n(l, k, \gamma) \ll 2^l \tilde{\psi}(2^k) + 1 \). Подставляя эту оценку в (49), получаем

\[ \mu (E_l \cap E_k(\gamma)) \ll \tilde{\psi}(2^l) \cdot (2^l \tilde{\psi}(2^k) + 1). \]

Наконец, используя (45), при \( l > k \) оцениваем меру пересечения \( E_l \cap E_k \):

\[ \mu (E_l \cap E_k) \ll t_k \mu (E_l \cap E_k(\gamma)) \ll \mu K(2^{-(l-k)} \varphi_l + \varphi_k \varphi_l). \]
Итоговая оценка для $\mu(E_l \cap E_k)$ при любых $k_0 \leq k, l \leq N$ может быть записана в виде

$$\mu(E_l \cap E_k) \ll \mu K(2^{-|l-k|} \varphi_l + \varphi_k \varphi_l).$$

Применя эту оценку и (42), при достаточно большом $N$, получаем

$$\sum_{l=k_0}^{N-1} \sum_{k=k_0}^{N-1} \mu(E_l \cap E_k) \ll \mu K \sum_{l=k_0}^{N-1} \sum_{k=k_0}^{N-1} \varphi_k \varphi_l + \mu K \sum_{l=k_0}^{N-1} \sum_{k=k_0}^{N-1} 2^{-|l-k|} \varphi_l$$

$$\ll \mu K \sum_{k=k_0}^{N-1} \sum_{l=k_0}^{N-1} \varphi_k \varphi_l + \mu K \sum_{l=k_0}^{N-1} \varphi_l \ll \mu K \left( \sum_{k=k_0}^{N-1} \varphi_k \right)^2,$$

gде непостоянная постоянная в этом неравенстве не зависит ни от $K$, ни от $N$. Комбинируя эту оценку вместе с (48), находим, что

$$\frac{\left( \sum_{k=k_0}^{N-1} \mu E_k \right)^2}{\sum_{k,l=k_0}^{N-1} \mu(E_k \cap E_l)} \geq C_5 \mu K,$$

gде постоянная $C_5$ не зависит ни от $K$, ни от $N$. По лемме 4 получаем $\mu E(K) \geq C_5 \mu K$. Согласно (46) имеем $\mu(\Gamma(\psi) \cap K) \geq C_5 \mu K$ для любого шара $K \subset K_0$. Лемма 3 завершает доказательство теоремы 5.

8. Доказательство случая расходимости в теореме 1. Пусть $(\Gamma, N)$ – регулярная система, определённая в теореме 4, и $\psi$ – монотонная функция такая, что $\sum_{h=1}^{\infty} h^2 \psi(h) = \infty$. Определим также функцию $\widehat{\psi}(n) = \psi(n^{1/3})$. Используя монотонность $\psi$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \widehat{\psi}(n) = \sum_{h=1}^{\infty} \sum_{(h-1)^3 < n < h^3} \widehat{\psi}(n) \gg \sum_{h=1}^{\infty} h^2 \psi(h) = \infty.$$

Очевидно также, что $\widehat{\psi}$ монотонна. Тогда по теореме 5 для почти всех $x \in K_0$ неравенство

$$|x - \gamma|^p < \widehat{\psi}(N(\gamma))$$

имеет бесконечное число решений $\gamma \in \Gamma$.

Для каждого числа $\gamma \in \Gamma$ существует функция $F \in \mathcal{F}$ такая, что $F(\gamma) = 0$ и $N(\gamma) = h_F^p$. Используя формулу Тейлора и свойства $p$-адической нормы, несложно проверить, что $|F(x)|_p \leq |x - \gamma|^p$. Кроме того, $\widehat{\psi}(N(\gamma)) = \psi(N^{1/3}(\gamma)) = \psi(h_F)$. Поэтому из неравенства (52) следует, что $|F(x)|_p < \psi(h_F)$. Тогда последнее неравенство выполнено бесконечно часто для почти всех $x \in K_0$. Тем самым, доказательство теоремы 1 завершено.
СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[4] Берник В. И. О точном порядке приближения кула значениями целочисленных многочле-
[8] Спринджук В. Г. Достижения и проблемы теории диофантовых приближений // УМН.
№ 2. P. 279–308.
bridge: Cambridge Univ. Press, 1981.
[13] Мельчичук Ю. В. О метрической теории совместных диофантовых приближений p-адиче-
[16] Ковалявская Э. И. Метрическая теорема о точном порядке приближения кула значениями
целочисленных многочленов в Qp // Докл. НАН Беларуси. 1999. Т. 43. № 5. С. 34–36.
[17] Ковалявская Э. И. p-адический вариант теоремы Хинчина для плоских кривых в случае
[18] Бересневич В. З. Применение понятия регулярных систем точек в метрической теории

Институт математики НАН Беларуси, г. Минск
E-mail: beresnevich@im.bas-net.by, kovalyevsk@im.bas-net.by
Поступило 20.10.2000