Д. Н. Азаров, О нильпотентной априксимируемости свободных произведений свободных групп с циклическим объединением, *Матем. заметки*, 1998, том 64, выпуск 1, 3–8

DOI: https://doi.org/10.4213/mzm1366
Математические заметки

Том 64 Выпуск 1 Июль 1998

УДК 512.543

О НИЛЬПОТЕНТНОЙ АПРОКСИМИРУЕМОСТИ СВОБОДНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЙ СВОБОДНЫХ ГРУПП С ЦИКЛИЧЕСКИМ ОБЪЕДИНЕНИЕМ

Д. Н. Азаров

Пусть $G$ — свободное произведение свободных групп с циклическим объединением. В этой заметке доказывается критерий аппроксимируемости группы $G$ конечными $p$-группами. Устанавливаются также другие аппроксимационные свойства группы $G$.

Библиография: 9 названий.


Теорема 1. Пусть $A$ и $B$ — свободные группы, $h$ и $k$ — неединичные элементы группы $A$ и $B$ соответственно и $G = (A \ast B; h = k)$. Пусть $m$ и $n$ — наибольшие положительные числа такие, что уравнение $x^m = h$ и $y^n = k$ разрешены в группах $A$ и $B$ соответственно. Если одно из чисел $m$ или $n$ равно 1, т.д для любого произвольно число $p$ группа $G$ аппроксимируется конечными $p$-группами. Если же $m > 1$ и $n > 1$, то группа $G$ аппроксимируется конечными $p$-группами тогда и только тогда, когда числа $m$ и $n$ являются степенями числа $p$.

Заметим, что достаточное условие аппроксимируемости группы $G$ конечными $p$-группами было получено Гильденхюзом [4]. Используя обозначения из теоремы 1, результат Гильденхюза можно сформулировать следующим образом: если числа $m$ и $n$ являются степенями простого числа $p$, то группа $G$ аппроксимируется конечными $p$-группами.

Пусть $\pi$ — множество простых чисел. Напомним, что конечная группа называется $\pi$-$группой$, если множество всех простых делителей ее порядка содержится в множестве $\pi$.

Следующая теорема дополняет отмеченный выше результат Баумслага.
ТЕОРЕМА 2. Пусть $A, B, h, k, m, n$ такие же, как и в теореме 1. Если множество простых чисел $\pi$ непусто и содержит все простые делители чисел $m$ и $n$, то группа $G$ аппроксимируется конечными разрешимыми $\pi$-группами.

Поскольку конечная $\rho$-группа является нильпотентной, из аппроксимируемости данной группы конечными $\rho$-группами следует ее нильпотентная аппроксимируемость. Для рассматриваемой нами группы $G$ имеет место и обратное утверждение.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $A, B, h, k$ такие же, как и в теореме 1. Группа $G$ аппроксимируется нильпотентными группами тогда и только тогда, когда она аппроксимируется конечными $\rho$-группами для подходящего простого числа $\rho$.

Доказательства теорем 1, 2 и 3 приведены в п. 3. В п. 2 изложены некоторые предварительные утверждения.

2. Превысвигательные сведения. В работе Стіба [5, лемма 1] доказывается, что для любого неединичного элемента $c$ свободной группы $F$ и для любого положительного целого числа $l$ существует гомоморфизм группы $F$ на конечную группу, переводящий элемент $c$ в элемент порядка $l$. Почти дословное повторение доказательства этой леммы позволяет получить следующее более обще утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть группа $F$ аппроксимируется конечноделёнными нильпосредними группами без кручения, $c$ — неединичный элемент группы $F$.

Тогда для каждого положительного целого числа $l$ существует гомоморфизм $\phi$, группы $F$ на конечную нильпосредную группу $V$ таковой, что $|c\phi| = l$. Более того, если некоторое непустое множество простых чисел $\pi$ содержит все простые делители числа $l$, то можно считать, что группа $V$ является конечной нильпосредной $\pi$-группой.

Пусть $F$ — произвольная группа, $\pi$ — непустое множество простых чисел. Подгруппа $H$ группы $F$ называется $\pi$-отделенной (отделной), если для любого элемента $x \in F \setminus H$ найдутся число $p \in \pi$ и гомоморфизм $\phi$ группы $F$ на конечную $p$-группу, отдающий $x$ от $H$, т.е. такой, что $x\phi \notin H\phi$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть $F$ — свободная группа, $H$ — неединичная циклическая подгруппа группы $F$ с порождающим элементом $h$, $m$ — наибольшее положительное число такое, что уравнение $x^m = h$ разрешимо в группе $F$. Пусть $\pi$ — непустое множество простых чисел. Подгруппа $H$ является $\pi$-отделенной тогда и только тогда, когда множество $\pi$ содержит все простые делители числа $m$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Необходимо доказать только достаточность. Пусть множество простых чисел $\pi$ содержит все простые делители числа $m$. Покажем, что для произвольного элемента $x \in F \setminus H$ существует простое число $p \in \pi$ и гомоморфизм группы $F$ на конечную $p$-группу, отдающий $x$ от $H$.

Пусть $G_F(H)$ — централлизатор подгруппы $H$ группы $F$. Возможны следующие случаи:

1) $x \notin G_F(H)$;
2) $x \in G_F(H) \setminus H$.

В случае 1) коммутатор $[x, h]$ отличен от 1. Зафиксировано число $p \in \pi$. Поскольку свободная группа $F$ аппроксимируется конечными $p$-группами, существует гомомор-
физм группы \( F \) на конечную \( p \)-группу, ядро которого не содержит \([x, h]\). Очевидно, что этот гомоморфизм отображает \( x \) от \( H \).

В случае 2), очевидно, подгруппа \( G_F(H) \) является циклической. Пусть \( c \) — ее порождающий элемент. Тогда \( h = c^m, x = c^k \), где \( k \) — целое число. Поскольку \( x \notin H \), то \( k \) не делится на \( m \). Поэтому число \( k \) не делится на некоторый делитель числа \( m \) вида \( p^n \), где \( p \) — простое число, \( s \) — целое положительное число. По предложению 1 существует гомоморфизм \( \varphi \) группы \( F \) на конечную \( p \)-группу такой, что \( |\varphi| = p^s \). Так как \( m \) делится на \( p^n \) и \( k \) не делится на \( p^n \), то \( h\varphi = 1 \) и \( x\varphi \neq 1 \). Таким образом, \( x\varphi \notin H\varphi \), т.е. элемент \( x \) отображается в подгруппу \( H \) некоторым гомоморфизмом группы \( F \) на конечную \( p \)-группу. Причем, поскольку \( p \) делит \( m \) и множество \( \pi \) содержит все простые делители числа \( m \), то \( p \in \pi \). Предложение доказано.

**Предложение 3.** Пусть \( \pi \) — непустое множество простых чисел, \( \mathcal{P} \) — класс конечных разрешимых \( \pi \)-групп. Пусть группа \( F \) апроксимируется \( \mathcal{P} \)-группами и \( \bar{F} \) — расширение группы \( F \) с помощью \( \mathcal{P} \)-группы. Тогда группа \( \bar{F} \) апроксимируется \( \mathcal{P} \)-группами.

**Доказательство.** Легко проверить, что если \( 1 \leq K \leq H \leq G \) — произвольный субнормальный ряд и \( G/H, H/K \in \mathcal{P} \), то существует нормальная подгруппа \( L \) группы \( G \) такая, что \( L \leq K \) и \( G/L \in \mathcal{P} \). (В качестве подгруппы \( L \) можно взять пересечение всех подгрупп группы \( G \), сопряженных с \( K \).) По лемме 1.5 из [6] группа \( \bar{F} \) апроксимируется \( \mathcal{P} \)-группами.

Пусть \( A \) и \( B \) — произвольные группы, \( h \) и \( k \) — элементы групп \( A \) и \( B \) соответственно, причем порядки этих элементов равны. Пусть, далее, \( G = (A \ast B; h = k) \) — свободное произведение этих групп с циклическим объединением. Для дальнейшего изложения нам потребуется следующая конструкция, восходящая к Баумслагу. Пусть \( M \) и \( N \) — нормальные подгруппы групп \( A \) и \( B \) соответственно, причем порядки элементов \( h \) и \( k \) по модулю этих подгрупп совпадают. Тогда можно рассмотреть свободное произведение с объединением \( G_{M,N} = (A/M \ast B/N; hM = kN) \) и гомоморфизм \( \rho_{M,N} : G \to G_{M,N} \), продолжающий естественные гомоморфизмы \( A \to A/M \) и \( B \to B/N \).

**Предложение 4.** Пусть группы \( A \) и \( B \) апроксимируются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения, \( H = (h) \) и \( K = (k) \) — бесконечные циклические подгруппы групп \( A \) и \( B \) соответственно. Пусть, далее, \( \pi \) — непустое множество простых чисел. Если подгруппы \( H \) и \( K \) \( \pi \)-отделимы в группах \( A \) и \( B \) соответственно, то группа \( G = (A \ast B; h = k) \) апроксимируется конечными разрешимыми \( \pi \)-группами.

**Доказательство.** Заметим, что сомножители \( A \) и \( B \) апроксимируются конечными \( p \)-группами для любого простого числа \( p \), поскольку эти группы по условию апроксимируются конечно порожденными нильпотентными группами без кручения.

Пусть \( g \) — неединичный элемент группы \( G \). Покажем, что существует гомоморфизм \( \varphi \) группы \( G \) на конечную разрешимую \( \pi \)-группу такой, что \( g\varphi \neq 1 \). Рассмотрим неокрашенную запись элемента \( g \):

\[
g = x_1x_2 \cdots x_r.
\]

Предположим сначала, что \( r = 1 \). Тогда без потери общности можно считать, что \( g \in A \). Зафиксируем число \( p \in \pi \). Так как группа \( A \) апроксимируется конечными
$p$-группами, существует нормальная подгруппа $M$ конечного $p$-индекса группы $A$, не содержащая элемент $g$. Поскольку группа $B$ аппроксимируется конечными порожденными нильпотентными группами без кручения и порядок элемента $hM$ группы $A/M$ является степенью числа $p$, то по предложению 1 существует нормальная подгруппа $N$ конечного $p$-индекса группы $B$ такой, что $|kN| = |hM|$. Группа $G_{MN}$ является свободным произведением конечных $p$-групп с циклическим объединением и, следовательно, аппроксимируется конечными $p$-группами в силу теоремы Хигмена [7]. Поскольку $g\rho_{MN} \neq 1$, существует гомоморфизм $\rho$ группы $G_{MN}$ на конечную $p$-группу такой, что $g\rho_{MN} \neq 1$.

Предположим теперь, что $r > 1$. Пусть для определенности

$$x_1, x_3, \ldots \in A \setminus H, \quad x_2, x_4, \ldots \in B \setminus K.$$

Поскольку подгруппы $H$ и $K$ $\pi$-отделены в сомножителях $A$ и $B$ соответственно, то существуют нормальные подгруппы $A_1$ и $B_1$ групп $A$ и $B$ такие, что $A/A_1$ и $B/B_1$ – конечные нильпотентные $\pi$-группы и

$$x_1, x_3, \ldots \notin \pi A_1, \quad x_2, x_4, \ldots \notin \pi B_1. \quad (1)$$

Пусть $l$ – наименьшее общее кратное число $|hA_1|$ и $|kB_1|$. Так как все простые делители числа $l$ принадлежат множеству $\pi$, то по предложению 1 существуют нормальные подгруппы $A_2$ и $B_2$ групп $A$ и $B$ соответственно такие, что $A/A_2$ и $B/B_2$ – конечные нильпотентные $\pi$-группы и $|hA_2| = l = |kB_2|$. Пусть $M = A_1 \cap A_2, N = B_1 \cap B_2$. Тогда $|hM| = l = |kn|$. Теперь можно рассмотреть свободное произведение с объединением

$$\overline{G} = (A \ast \overline{B}; \overline{h} = \overline{k}),$$

где $\overline{A} = A/M, \overline{B} = B/N, \overline{h} = hM, \overline{k} = kN, \overline{G} = G_{MN}$.

Из (1) следует, что

$$x_1, x_3, \ldots \notin \pi HM, \quad x_2, x_4, \ldots \notin \pi KN.$$

Поэтому элемент $g\rho_{MN}$ имеет в группе $\overline{G}$ несократимую запись длины $r > 1$ и, следовательно, отличен от 1.

Покажем, что группа $\overline{G}$ аппроксимируется конечными разрешимыми $\pi$-группами. Заметим, что $\overline{A}$ и $\overline{B}$ – конечные нильпотентные $\pi$-группы. Пусть $p_1, \ldots, p_s$ – множество всех простых делителей их порядков. Обозначим через $U_i$ и $V_i$ подгруппы групп $\overline{A}$ и $\overline{B}$ соответственно, порожденные теми сильными подгруппами этих групп, порядки которых не делятся на $p_i, i = 1, \ldots, s$. Поскольку порядки $\overline{h}$ и $\overline{k}$ по модулю подгруппы $U_i$ и $V_i$ совпадают, можно рассмотреть свободное произведение с объединением $\overline{G}_i = \overline{G}_{U_iV_i}$ и гомоморфизм $\rho_i = \rho_{U_iV_i}: \overline{G} \rightarrow \overline{G}_i$. По теореме Хигмена [7] группа $\overline{G}_i$ аппроксимируется конечными $p_i$-группами, поэтому существует гомоморфизм $\sigma_i$ группы $\overline{G}_i$ на конечную $p_i$-группу, инъективный на сомножителях $\overline{A}/U_i$ и $\overline{B}/V_i$. Пусть

$$F = \bigcap_{i=1}^{s} \operatorname{Ker} \rho_i \sigma_i.$$

Тогда

$$\overline{A} \cap F = \bigcap_{i=1}^{s} (\overline{A} \cap \operatorname{Ker} \rho_i \sigma_i) = \bigcap_{i=1}^{s} U_i = 1, \quad \overline{B} \cap F = \bigcap_{i=1}^{s} (\overline{B} \cap \operatorname{Ker} \rho_i \sigma_i) = \bigcap_{i=1}^{s} V_i = 1.$$
По теореме Х. Нейман (см., например, [8, с. 122]) подгруппа $F$ группы $G$ является свободной. Легко заметить, что $G/F$ — конечная нильпотентная $\pi$-группа. Так как свободная группа $F$ аппроксимируется конечными разрешимыми $\pi$-группами, то по предложению 3 группа $G$ также обладает этим свойством.

Поскольку элемент $g \rho_{MN}$ группы $G$ отличен от 1, существует гомоморфизм $\rho$ группы $G$ на конечную разрешимую $\pi$-группу такой, что $g \rho_{MN} \rho \neq 1$.

3. Доказательства теорем. Теорема 2 непосредственно вытекает из предложений 2 и 4.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Пусть $A$ и $B$ — свободные группы, $h$ и $k$ — неединичные элементы групп $A$ и $B$ соответственно, $G = (A \ast B; h = k)$. Пусть $m$ и $n$ — наибольшие положительные числа такие, что уравнения $x^m = h$ и $y^n = k$ разрешимы в группах $A$ и $B$ соответственно.

Рассмотрим сначала случай, когда одно из чисел $m$ или $n$ равно 1. Пусть для определенности $m = 1$. Обозначим через $b$ элемент группы $B$ такой, что $b^n = k$. Тогда группу $G$ можно разложить в свободное произведение вида

$$G = (C \ast B; t = b),$$

где $C = (A; t; h = t^n)$.

Баумслаг [9] доказал, что если элемент $f$ свободной группы $F$ порождает свой центратор в этой группе, то группа $L = (F, r; f = r^k)$ аппроксимируется конечными нильпотентными группами без кручения.

Поскольку $m = 1$, элемент $h$ порождает свой центратор в группе $A$. Поэтому в силу отмеченного выше результата Баумслага группа $C$ аппроксимируется конечными нильпотентными группами без кручения. Свободная группа $B$ также обладает этим свойством.

Пусть $p$ — простое число. Хорошо известно, что конечно порожденная нильпотентная группа без кручения аппроксимируется конечными $p$-группами. Поэтому группы $C$ и $B$ аппроксимируются конечными $p$-группами.

Заметим, что подгруппа $(t)$ группы $C$ совпадает со своим центратором. Поэтому если $x \in C \setminus (t)$, то $[x, t] \neq 1$. Поскольку группа $C$ аппроксимируется конечными $p$-группами, существует гомоморфизм группы $C$ на конечную $p$-группу, ядро которого не содержит коммутатор $[x, t]$. Этот гомоморфизм отделяет $x$ от $(t)$. Следовательно, подгруппа $(t)$ группы $C$ $p$-отделена.

Очевидно, что подгруппа $(b)$ группы $B$ совпадает со своим центратором. Как и выше, легко убедиться, что подгруппа $(b)$ $p$-отделена.

Таким образом, свободные множители $C$ и $B$ группы $G$ аппроксимируются конечными порожденными нильпотентными группами без кручения и объединяемые подгруппы $(t)$ и $(b)$ $p$-отделены в соответствующих сомножителях. По предложению 4 группа $G$ аппроксимируется конечными $p$-группами.

Рассмотрим теперь случай, когда числа $m$ и $n$ отличны от 1. Если числа $m$ и $n$ являются степенями простого числа $p$, то по теореме 2 группа $G$ аппроксимируется конечными $p$-группами. Пусть теперь одно из этих чисел, скажем $m$, не является степенью простого числа $p$. Обозначим через $q$ простой делитель числа $m$, отличный от $p$. Тогда существует элемент $a$ группы $A$ такой, что $a^q = h$. Обозначим через $b$ элемент группы $B$, для которого $b^m = k$. При любом гомоморфизме группы $G$ на конечную $p$-группу коммутатор $[a, b]$ переходит в 1. Поскольку этот коммутатор отличен от 1, группа $G$ не аппроксимируется конечными $p$-группами. Теорема 1 доказана.
Доказательство теоремы 3. Сохраним обозначения из теоремы 1. Очевидно, что группу $G$ можно разложить в свободное произведение вида $G = (A_1 * B_1; h = k) * F$, где $A_1, B_1, F$ — свободные группы, причем $A_1$ и $B_1$ конечно порождены.

Предположим, что группа $G$ аппроксимируется nilpotентными группами. Тогда группа $D = (A_1 * B_1; h = k)$ аппроксимируется конечно порождёнными nilpotентными группами, которые, в свою очередь, finitely аппроксимируемы. Поэтому группа $D$ аппроксимируется конечными nilpotentными группами.

Опользуем через $m$ и $n$ наибольшие положительные числа такие, что уравнения $x^m = h$ и $y^n = k$ разрешимы в группах $A_1$ и $B_1$ соответственно.

Покажем, что группа $D$ аппроксимируется конечными $p$-группами для подходящего простого числа $p$. Допустим противное. Тогда по теореме 1 числа $m$ и $n$ отличны от 1 и не являются степенями одного и того же простого числа. Инными словами, найдутся различные простые числа $p$ и $q$, делящие числа $m$ и $n$ соответственно. Пусть $a$ и $b$ — элементы группы $A_1$ и $B_1$ такие, что $a^p = h, b^q = k$. Тогда при любом гомоморфизме группы $D$ на конечную nilpotentную группу отличный от 1 коммутатор $[a, b]$ переходит в 1. Это противоречит доказанной выше аппроксимируемости группы $D$ конечными nilpotentными группами.


Автор выражает благодарность профессору Д. И. Молдаванскому за ряд ценных замечаний и советов при написании этой статьи.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ


Ивановский государственный университет Поступило 12.07.96