D. Quillen, Determinants of Cauchy–Riemann operators over a Riemann surface, *Funktsional. Anal. i Prilozhen.*, 1985, Volume 19, Issue 1, 37–41

Функциональный анализ и его приложения,
1985, т. 19, вып. 1, 37—41

УДК 517.43

ДЕТЕРМИНАНТЫ ОПЕРАТОРОВ КОШИ — РИМАНА НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Д. Квиллен

1. Пусть M — компактное одномерное комплексное многообразие рода g и E — бесконечно дифференцируемое расслоение ранга r и степени d на M. Обозначим через $\Omega^{p,q}(E)$ векторное пространство гладких форм типа (p, q) на M со значениями в E. Под оператором Коши — Римана или $\bar\partial$-оператором на E мы будем понимать дифференциальный оператор D: $\Omega^{0,0}(E) \to \Omega^{0,1}(E)$, который локально, в терминах локальной координаты z и локального базиса в E, имеет вид $D = d\bar z\,(\partial_z + \alpha(z))$, где $\alpha(z)$ — гладкая матричная функция. Такие операторы взаимно однозначно соответствуют голоморфным структурам на векторном расслоении E. Обозначим пространство таких операторов через $\mathcal{A}$; оно является аффинным пространством, соответствующим комплексному векторному пространству $\mathcal{B} = \Omega^{0,1}(\mathrm{End}\, E)$.

Цель настоящей работы состоит в том, чтобы предложить конструкцию детерминантов для таких $\bar\partial$-операторов, основанную на понятии детерминантного линейного расслоения и на теории детерминантов положительных эллиптических операторов, связанных с дзета-функцией.

Поскольку $\bar\partial$-операторы отображают однако векторное пространство в другое, необходимо объяснить, что мы понимаем под детерминантом в этом случае. Рассмотрим сперва семейство операторов T: $V^0 \to V^1$, где V^0 и V^1 — векторные пространства одной и той же конечной размерности. Каждый оператор T индуцирует отображение из $\lambda(V^0)$ в $\lambda(V^1)$, где $\lambda(V)$ — наивысшая внешняя степень V. Поэтому T задает элемент σ_T прямой $\lambda(V^0)^* \otimes \lambda(V^1)$, где звездочка обозначает переход к двойственному векторному пространству. Выбрав базисный вектор на этой прямой, можно отождествить σ_T с функцией $\det(T)$, которая голоморфно зависит от T и отлична от нуля в точности там, где оператор T обратим.

В бесконечномерном случае $\bar\partial$-операторов указанная выше прямая заменяется на прямую $\mathcal{L}_D = \lambda(\mathrm{Ker} D)^* \otimes \lambda(\mathrm{Coker}\, D)$, которая зависит от оператора D. Семейство прямых $\mathcal{L}_D$ образует голоморфное линейное расслоение $\mathcal{L}$ над пространством $\mathcal{A}$, которое называется детерминантным векторным расслоением. Аналогом предположения о равенстве размерностей V^0 и V^1 является условие равенства нулю индекса $\bar\partial$-операторов, т. е. условие $d = r(g - 1)$. В этом случае у $\mathcal{L}$ есть каноническое голоморфное сечение σ и $\sigma_D \neq 0$ в том и только том случае, если оператор D обратим. Если мы построим тривиализацию $\mathcal{L}$ как голоморфного векторного расслоения, то каноническое сечение σ отождествится с голоморфной функцией $\det(D)$ на $\mathcal{A}$, которую мы назовем детерминантом, поскольку она отлична от нуля в точности в тех точках, в которых оператор D обратим.

Для того чтобы построить указанную тривиализацию, мы определим эрмитово скалярное произведение на $\mathcal{L}$, используя детерминант оператора Лапласа D^*D, связанный с дзета-функцией. Эта конструкция по существу совпадает с идеей «аналитического кручения» (см. [1]). Скалярное произведение и голоморфная структура задают связность на $\mathcal{L}$, кривизна которой оказывается удивительно простой; она будет описана в п. 4. Несложное изменение скалярного произведения приведет к плоской связности, интегрирование которой определяет нужную тривиализацию детерминантного линейного расслоения.

2. В этом разделе мы приведем более подробное описание детерминантного линейного расслоения. Пусть $\mathscr{F}$ — пространство фредгольмовых операторов T, действующих из одного гильбертова пространства $\mathscr{H}^0$ в другое гильбертово пространство $\mathscr{H}^1$. Поскольку $\mathscr{F}$ является открытым подмножеством банахова пространства ограниченных операторов, оно обладает структурой комплексного банахова многообразия. Построим на $\mathscr{F}$ голоморфное линейное расслоение $\mathscr{L}$ со слоями $\mathscr{L}_T = \lambda\,(\operatorname{Ker} T)^* \otimes \lambda\,(\operatorname{Coker} T)$ следующим образом.

Для каждого конечномерного подпространства F в $\mathscr{H}^1$ обозначим через U_F множество тех T, которые трансверсальны F в том смысле, что $\operatorname{Im} T + F = \mathscr{H}^1$. Для такого T имеется точная последовательность $0 \to \operatorname{Ker} T \to T^{-1}F \to F \to \operatorname{Coker} T \to 0$ и соответствующий канонический изоморфизм $\mathscr{L}_T = \lambda\,(\operatorname{Ker} T)^* \otimes \lambda\,(\operatorname{Coker} T) \simeq \lambda\,(T^{-1}F)^* \otimes \lambda\,(F)$. Множество U_F открыто, и семейство подпространств $T^{-1}F$ образует голоморфное линейное расслоение на U_F. Поэтому семейство прямых в правой части указанного изоморфизма образует голоморфное линейное расслоение на U_F. Голоморфная структура на $\mathscr{L}$ определяется требованием, чтобы указанный изоморфизм был изоморфизмом голоморфных линейных расслоений на U_F для любого F.

Зададим сечение σ расслоения $\mathscr{L}$ над связной компонентой $\mathscr{F}$, состоящей из операторов с нулевым индексом, полагая $\sigma_T = 0$, если T не обратим и $\sigma_T = 1$ при каноническом изоморфизме $\mathscr{L}_T = \mathbf{C}$, если T обратим. Можно показать, что это сечение голоморфно (это было бы неверно, если бы в качестве $\mathscr{L}$ мы бы взяли расслоение со слоями $\lambda\,(\operatorname{Ker} T) \otimes \lambda\,(\operatorname{Coker} T)^*$).

Пусть задан $\bar\partial$-оператор на E. Сопоставим ему соответствующий фредгольмов оператор, действующий из пространства квадратично интегрируемых сечений E в пространство Соболева, состоящее из (0, 1)-форм со значениями в E, имеющих квадратично интегрируемые первые производные. Таким образом, мы получаем линейное отображение из аффинного пространства $\mathscr{A}$ в класс смежности $\mathscr{F}$ по модулю компактных операторов. Обратный образ указанного выше линейного расслоения задает детерминантное линейное расслоение на пространстве $\mathscr{A}$, которое голоморфно и обладает каноническим сечением в случае нулевого индекса.

3. Определим теперь скалярное произведение на детерминантном линейном расслоении. Будем предполагать, что нам заданы скалярное произведение на E и риманова метрика на M, согласованная с комплексной структурой. Тогда в пространствах $\Omega^{0,q}(E)$ определено скалярное произведение, что позволяет сопоставить $\bar\partial$-оператору D сопряженный оператор D^* и оператор Лапласа $\Delta = D^*D$. Скалярные произведения в пространствах $\Omega^{0,q}(E)$ задают скалярные произведения в векторных пространствах $\operatorname{Ker} D$ и $\operatorname{Coker} D \simeq \operatorname{Ker} D^*$.

Пусть $\zeta(s)$ — дзета-функция эллиптического оператора Δ; это мероморфная функция s, которая при $\operatorname{Re}(s) > 1$ равна сумме $\Sigma\,\lambda^{-s}$, где λ пробегает ненулевые собственные значения Δ. Эта функция регулярна при $s = 0$ и гладко зависит от оператора Δ. Величина $\exp(-\zeta'(0))$ имеет хорошо известную интерпретацию: она равна детерминанту Δ в ортогональном дополнении к $\operatorname{Ker} D$.

Определим теперь скалярное произведение на $\mathscr{L}_D = \lambda\,(\operatorname{Ker} D)^* \otimes \lambda\,(\operatorname{Ker} D^*)$, умножая скалярное произведение в $\operatorname{Ker} D$ и $\lambda\,(\operatorname{Ker} D^*)$, индуцированное с $\operatorname{Ker} D$ и $\operatorname{Ker} D^*$, на дзета-детерминант $\exp(-\zeta'(0))$. Точнее, выбирая ортонормированные базисы в этих ядрах и беря внешние произведения базисных элементов, мы получим ненулевой элемент v в $\mathscr{L}_D$, который единствен с точностью до умножения на скаляр с абсолютной величиной 1. Скалярное произведение задается формулой $\|v\|^2 = \exp(-\zeta'(0))$.

Предложение. *Скалярные произведения на семействе прямых $\mathscr{L}_D$ задают гладкое скалярное произведение на детерминантном линейном расслоении.*

Для доказательства обозначим через F_a^0 (соответственно F_a^1) для $a \geqslant 0$ подпространство, порожденное собственными векторами D^*D (соответственно DD^*) с собственными значениями, не превосходящими a. Имеется канонический изоморфизм $\mathscr{L}_D = \lambda\,(F_a^0)^* \otimes \lambda\,(F_a^1)$, и легко проверить, что при этом изоморфизме скалярное произведение на $\mathscr{L}_D$ совпадает со скалярным произведением, индуцированным с F_a^q, умноженным на $\exp\,(-\zeta'_{>a}\,(0))$. Здесь $\zeta_{>a}\,(s) = \Sigma\lambda^{-s}$, λ пробегает собственные значения Δ, большие a. Подпространства F_a^q и функция $\zeta_{>a}$ гладко зависят от оператора D, если a не является собственным значением Δ. Поскольку a произвольно, мы видим, что скалярное произведение является гладким.

В случае, если $\bar\partial$-операторы имеют нулевой индекс, метрика на детерминантном линейном расслоении задается равенством

$$\|\,\sigma_D\,\|^2 = \det{}_\zeta\,(D^*D),$$

где σ — каноническое сечение, а $\det_\zeta\,(\Delta)$ полагается равным $\exp\,(-\,\xi'\,(0))$ при $\operatorname{Ker}\Delta = 0$ и равным 0 в противном случае.

4. Голоморфное линейное расслоение, снабженное скалярным произведением, обладает канонической связностью, согласованной с этими двумя структурами. Кривизна этой связности равна $\bar\partial\partial\log\|\,s\,\|^2$, где s — произвольное локальное голоморфное сечение. Если многообразие, на котором задано расслоение, односвязно, форма кривизны задает линейное расслоение, и скалярное произведение однозначно с точностью до изоморфизма. Ниже мы вычислим форму кривизны детерминантного линейного расслоения.

Скалярное произведение на E индуцирует скалярное произведение на $\mathscr{B} = \Omega^{0,1}\,(\operatorname{End} E)$ следующим образом. Пусть задана форма $B \in \mathscr{B}$, скажем, $B = \alpha\,(z)\,d\bar z$ относительно локального ортонормированного базиса в E. Положим $B^+ = \alpha\,(z)^*\,dz \in \Omega^{1,0}\,(\operatorname{End} E)$. Тогда $\operatorname{tr}_E\,(B^+B)$ является формой типа (1, 1), которую можно проинтегрировать:

$$\|\,B\,\|^2 = \int\limits_M \frac{i}{2\pi}\operatorname{tr}_E(B^+B).$$

Поскольку пространство $\bar\partial$-операторов $\mathscr{A}$ является аффинным пространством, соответствующим $\mathscr{B}$, это скалярное произведение задает келерову форму на $\mathscr{A}$. Эта келерова форма равна $\partial\bar\partial q$, где q — квадратичная функция, $q\,(D) = \|\,D - D_0\,\|^2$ и D_0 — базисная точка $\mathscr{A}$. Келерова форма не зависит от выбора базисной точки.

Теорема 1. *Кривизна детерминантного линейного расслоения равна келеровой форме на $\mathscr{A}$.*

Из этой теоремы вытекает, что если мы умножим скалярное произведение на $\mathscr{L}$ на функцию e^q, то связность, соответствующая новому скалярному произведению, будет плоской. Взяв всюду плоское сечение (которое существует, поскольку $\mathscr{A}$ стягиваемо), мы получим тривиализацию $\mathscr{L}$. В случае, когда $\bar\partial$-операторы имеют нулевой индекс, образ канонического сечения σ относительно этой тривиализации является голоморфной функцией на $\mathscr{A}$, и мы получаем

Следствие. *Пусть задана базисная точка D_0. Тогда существует голоморфная функция $\det\,(D;\,D_0)$ на $\mathscr{A}$, единственная с точностью до скаляра с абсолютным значением 1, для которой*

$$\det{}_\zeta\,(D^*D) = e^{-\|D-D_0\|^2}\,|\det\,(D;\,D_0)\,|^2.$$

Ввиду зависимости от базисной точки, детерминант $\det(D; D_0)$ не инвариантен относительно калибровочных преобразований. Случай линейных расслоений на эллиптической кривой показывает, что нельзя построить детерминант, который был бы как голоморфен, так и калибровочно инвариантен.

В следующих разделах мы опишем доказательство теоремы.

5. Пусть задан $\bar\partial$-оператор D. Построим его параметрикс $G_0(z, z')$ следующим образом. Пусть ∇ — единственная связность на E, согласованная со скалярным произведением и с оператором D. Пусть $F(z, z')$: $E_{z'} \to E_z$ параллельный перенос относительно ∇ вдоль геодезической, идущей из z' в z. Пусть $r^2(z', z)$ — квадрат расстояния между z' и z. Положим $G_0(z', z) = \frac{1}{2\pi i}[dz'\,\partial_{z'} \log r^2(z', z)]\,F(z', z)$. Эта функция корректно определена в некоторой окрестности диагонали в $M \times M$.

Предположим теперь, что оператор D обратим, и пусть $G(z, z') = \langle z | D^{-1} | z' \rangle$ — ядро Шварца оператора D^{-1}. Определим конечную часть G вдоль диагонали как элемент $J \in \Omega^{1,0}(\operatorname{End} E)$, задаваемый равенством

$$J(z') = \lim_{z \to z'} (G(z, z') - G_0(z, z')).$$

В терминах локального базиса E у нас есть следующие локальные формулы:

$$ds^2 = \rho(z)\,|dz|^2;$$
$$D = d\bar z\,(\partial_{\bar z} + \alpha);$$
$$\nabla = dz\,(\partial_z - \alpha^*) + d\bar z\,(\partial_{\bar z} + \alpha);$$
$$F(z, z') = 1 + (z - z')\,\alpha^*(z') - (\bar z - \bar z')\,\alpha(z') + \ldots;$$
$$G(z, z') = \frac{i}{2\pi}\frac{dz'}{z - z'}\{1 + (z - z')\,\beta(z') - (\bar z - \bar z')\,\beta(z') + \ldots\}.$$

Здесь $\beta(z)$ — гладкая матричная функция, глобально определенная оператором D, которая голоморфно зависит от D. После некоторых вычислений получаем, что

$$(*)\qquad J = \frac{i}{2\pi}\,dz\left(\beta - \alpha^* - \frac{1}{2}\,\partial_z \log \rho\right).$$

Теорема 2. *Равномерно по z имеем*

$$\lim_{t \to 0} \langle z | e^{-t\Delta} G | z \rangle = J(z),$$

и, значит, для любого $B \in \mathcal{B}$ имеем

$$\lim_{t \to 0} \operatorname{Tr}(e^{-t\Delta} D^{-1} B) = \int_M \operatorname{tr}(JB).$$

Эта теорема следует из непрерывности $G - G_0$ вдоль диагонали и формулы

$$\lim_{t \to 0} \langle z | e^{-t\Delta}\, G_0 | z \rangle = 0,$$

которая, в свою очередь, вытекает из асимптотического разложения ядра уравнения теплопроводности.

6. Приведем теперь доказательство теоремы 1. Добавляя к E векторное расслоение с противоположным индексом, можно предположить, что индекс равен 0. Достаточно проверить, что форма кривизны и келерова форма совпадают над однопараметрическим семейством $D = D_w$ обратимых $\bar\partial$-операторов, голоморфно зависящих от комплексного параметра w. Форма кривизны в таком случае равна $\bar\partial\partial \log \|\sigma\|^2 = dw\,d\bar w\,\partial^2_{w\bar w}\,\zeta'(0)$ (напомним, что

$\zeta(s) = \mathrm{Tr}(\Delta^{-s})$, $\Delta = D^*D$). Имеем

$$-\partial_w\zeta(s) = s\,\mathrm{Tr}(\Delta^{-s-1}\partial_w\Delta) = s\,\mathrm{Tr}(\Delta^{-s}D^{-1}\partial_w D) =$$
$$= \frac{s}{\Gamma(s)}\int_0^\infty \mathrm{Tr}(e^{-t\Delta}D^{-1}\partial_w D)\,t^{s-1}\,dt = s\left\{\int \mathrm{tr}(J\partial_w D) + O(s)\right\} \text{ при } s \to 0,$$

где последний шаг использует теорему 2. Отсюда $\partial_w\zeta(0) = 0$ и $-\partial_w\zeta'(0) = \int \mathrm{tr}(J\partial_w D)$.

В формуле (*) для J единственным неголоморфным по w членом является α^*. Поэтому

$$\partial_{\bar w}J = -\frac{i}{2\pi}dz\,\partial_{\bar w}\alpha^* = -\frac{i}{2\pi}(\partial_w D)^+,$$
$$\partial^2_{\bar w w}\zeta'(0) = \int \frac{i}{2\pi}\mathrm{tr}(\partial_w D)^+\,\partial_w D,$$

и теорема доказана.

ЦИТИРУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. *Ray D.*, *Singer I.* Analytic torsion.— Ann. Math., 1973, v. 98, № 1, p. 154—177.

Массачусетский технологический институт

Поступило в редакцию 18 июня 1984 г.