А. Л. Розенберг, Теоремы двойственности для групп и алгебр Ли, *УМН*, 1971, том 26, выпуск 6(162), 253–254

ТЕОРЕМЫ ДВОЙСТВЕННОСТИ ДЛЯ ГРУПП И АЛГЕБР ЛИ

А. Л. Розенберг

Заметка содержит теорему, из которой вытекают теорема двойственности Крейна — Таннаки [1], [2] и теорема двойственности Хариш-Чандры [3].

1. Основная конструкция. Пусть $\mathscr{C}$ и $\mathscr{C}'$ категории, F и F' — функторы от n переменных из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{C}$ и из $\mathscr{C}'$ в $\mathscr{C}'$ соответственно. Пусть $\omega \in \operatorname{Funct}(\mathscr{C}, \mathscr{C}')$ и $\omega \circ F = F' \circ \omega^n$. Обозначим через G^ω множество всех таких автоморфизмов $P = (\ldots, P(a), \ldots)$ функтора ω, что $P(F(a_1, \ldots, a_n)) = F'(P(a_1), \ldots, (P(a_n))$ для любых $a_1, \ldots, a_n \in Ob\mathscr{C}$. Очевидно, G^ω — подгруппа $\operatorname{Aut}(\omega)$.

Если категория $\mathscr{C}'$ аддитивна и функтор F' полилинеен, то множество $\mathfrak{D}^\omega$ всех таких $\xi = (\ldots, \xi(a), \ldots) \in \operatorname{End}(\omega)$, что

$$\xi(F(a_1, \ldots, a_n)) = \sum_{1 \leq i \leq n} F'(1_{\omega a_1}, \ldots, 1_{\omega a_{i-1}}, \xi(a_i), 1_{\omega a_{i+1}}, \ldots, 1_{\omega a_n})$$

для любых $a_1, \ldots, a_n \in Ob\mathscr{C}$ наделено естественной структурой алгебры Ли.

Группу G^ω и алгебру Ли $\mathfrak{D}^\omega$ (когда она определена) назовем группой и алгеброй Ли, дуальными к (ω, F). Пусть G — группа. Мультифунктор F' из $\mathscr{C}$ в $\mathscr{C}$ однозначно определяет мультифунктор F на категории G-объектов $\mathscr{C}^G$. Для каждой подкатегории Ω категории $\mathscr{C}^G$, инвариантной относительно F, обозначим через ω функтор из Ω в $\mathscr{C}$, игнорирующий действие группы G. Имеется естественный гомоморфизм $\tau^\omega\colon G \to G^\omega$. Основной вопрос, который нас здесь интересует,— чему равен образ отображения τ^ω?

Все сказанное в полной мере (включая обозначения) относится к произвольной алгебре Ли $\mathfrak{D}$, если, конечно, наложены соответствующие ограничения на $\mathscr{C}$ и F'.

Имеет смысл рассматривать не произвольные F-инвариантные подкатегории $\Omega \subset \mathscr{C}^G$ (или $\mathscr{C}^{\mathfrak{D}}$), а лишь направленные относительно естественного квазипорядка ($a \prec b$, если a — подобъект b), причем из $b \in \Omega$ и $a \prec b$ следует, что $a \in \Omega$. Такие подкатегории назовем F-фильтрами или просто фильтрами.

2. Теоремы двойственности. В этой заметке мы ограничимся случаем, когда $\mathscr{C}$ есть некоторая категория модулей $\mathfrak{C}_\Gamma$ и F' — тензорное произведение. Категория $\mathfrak{C}_\Gamma$ строится следующим образом: пусть $K \mid k$ — конечное расширение Галуа, Γ — группа Галуа этого расширения. Объекты $\mathfrak{C}_\Gamma$ есть такие K-модули V, что для любой тройки $(\lambda, v, \sigma) \in K \times V \times \Gamma$ $\sigma(\lambda \cdot v) = \sigma(\lambda) \cdot \sigma(v)$. Если V и V' — объекты из $\mathfrak{C}_\Gamma$, то $\operatorname{Mor}(V, V')$ есть $\operatorname{Hom}_K(V, V')$ и $\dim_K V < \infty$. Обозначим K-пространство V, рассматриваемое как пространство над полем k, через V_k. Если $\rho \in \mathfrak{C}_\Gamma^G$, то $G_\rho(k)$ есть, по определению, замыкание $\rho(G)$ в топологии Зарисского на $GL(\omega(\rho)_k)$, $\mathfrak{D}_\rho(k)$ — k-алгебра Ли группы $G_\rho(k)$. Если $\rho \in \mathfrak{C}^{\mathfrak{D}}$, то $\mathfrak{D}_\rho(k)$ есть наименьшая алгебраическая k-подалгебра $\operatorname{End}(\omega(\rho)_k)$, содержащая $\rho(\mathfrak{D})$; $G_\rho(k)$ — наименьшая алгебраическая подгруппа $GL(\omega(\rho)_k)$, алгебра Ли которой содержит $\rho(\mathfrak{D})$.

Определение. Фильтр $\Omega \subset \mathfrak{C}_\Gamma^G$ (или $\Omega \subset \mathfrak{C}_G^{\mathfrak{D}}$) называется (Γ^*)-*фильтром*, если для любого $\rho \in \Omega$ и $\sigma \in \Gamma$ $\rho^* \in \Omega$ и $\rho^\sigma \in \Omega$, где ρ^* — сопряженное представление, $\rho^\sigma(x) = \sigma \circ \rho(x) \circ \sigma^{-1}$.

Определение. 1) Представление $\rho \in \mathfrak{C}_\Gamma^G$ (или $\mathfrak{C}_\Gamma^{\mathfrak{D}}$) называется *$k$-алгебраическим*, если $\rho(G) = G_\rho(k)$ (соответственно $\rho(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}_\rho(k)$).

2) Фильтр Ω называется *k-алгебраическим*, если в нем имеется конфинальная система k-алгебраических представлений.

Пусть ρ и ρ' — представления и $\rho \prec \rho' \in \Omega$. Символом $\pi_{\rho'\rho}$ обозначим гомоморфизм ограничения $\{X \in \operatorname{End}(\omega(\rho')) \mid X(\omega(\rho)) \subset \omega(\rho)\} \to \operatorname{End}(\omega(\rho))$. Если $M \subset \Pi\{\operatorname{End}\omega(\rho); \rho \in \Omega\}$, то $M(\rho) = \{\xi(\rho) \mid \xi \in M\}$ для всякого $\rho \in \Omega$. Пусть Ω — (Γ^*)-фильтр. Положим

$G^{\omega}_{\Gamma} = \{P \in G^{\omega} \mid P(\rho^{\sigma}) = \sigma \circ P(\rho) \circ \sigma^{-1}$ для всех $\sigma \in \Gamma, \rho \in \Omega\}$, $\mathfrak{D}^{\omega}_{\Gamma} = \{\xi \in \mathfrak{D}^{\omega} \mid \xi(\rho^{\sigma}) = \sigma \circ \xi(\rho) \circ \sigma^{-1}$ для всех $(\sigma, \rho) \in \Gamma \times \Omega\}$.

Лемма (основная). *Пусть* Ω — (Γ^*)-*фильтр в* $\mathfrak{C}^{G}_{\Gamma}$ *или* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{D}}_{\Gamma}$. *Тогда*:

1) $G^{\omega}_{\Gamma} = \lim \mathrm{pr} \, \{G^{\omega}_{\Gamma}(\rho) \mid \rho \in \Omega\}$, $\mathfrak{D}^{\omega}_{\Gamma} = \lim \mathrm{pr} \, \{\mathfrak{D}^{\omega}_{\Gamma}(\rho) \mid \rho \in \Omega\}$,

где проективный предел берется относительно гомоморфизмов $\{\pi_{\rho',\rho}\}$.

2) *Для всякого* $\rho \in \Omega$ $G^{\omega}_{\Gamma}(\rho) = \bigcap \{\pi_{\rho',\rho}(G_{\rho'}(k)) \mid \Omega \ni \rho' \succ \rho\}$, $\mathfrak{D}^{\omega}_{\Gamma}(\rho) = \bigcap \{\pi_{\rho',\rho}(\mathfrak{D}_{\rho'}(k)) \mid \Omega \ni \rho' \succ \rho\}$.

Из леммы легко вывести необходимые и достаточные условия эпиморфности τ^{ω}: $G \to G^{\omega}_{\Gamma}$. Мы, однако, ограничимся формулировкой полезного следствия.

Теорема. *Пусть* Ω — k-*алгебраический* (Γ^*)-*фильтр в* $\mathfrak{C}^{G}_{\Gamma}$ (*или в* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{D}}_{\Gamma}$). Тогда $\tau^{\omega}(G) = G^{\omega}_{\Gamma}(\tau^{\omega}(\mathfrak{D}) = \mathfrak{D}^{\omega}_{\Gamma})$ *в том и только в том случае, если из условия* $P(\rho) \in \rho(G)$ $(\xi(\rho) \in \rho(\mathfrak{D}))$ *для каждого* $\rho \in \Omega$ *следует, что* $P = (\ldots, P(\rho), \ldots) \in \tau^{\omega}(G)$ (*соответственно* $(\ldots, \xi(\rho), \ldots) \in \tau^{\omega}(\mathfrak{D})$).

Приведем теперь некоторые следствия теоремы.

Следствие 1. а) *Пусть* G — *линейная алгебраическая группа над полем* k-*характеристики* 0; Ω — (Γ^*)-*фильтр в категории* Ω_r *всех рациональных представлений группы* G, *содержащий такое* k-*алгебраическое представление* ρ_1, *что* $\mathrm{Ker}(\rho_1) = \bigcap \{\mathrm{Ker}(\rho) \mid \rho \in \Omega\}$. *Тогда* $\tau^{\omega}(G) = G^{\omega}_{\Gamma}$.

б) *Если* $\Omega = \Omega_r$, *то поле* k *можно считать произвольным.*

Следствие 2. *Пусть* $\mathrm{char}\, k = 0$ *и* $\mathfrak{D}$ — *проконечномерная* k-*алгебра Ли, совпадающая со своим коммутантом. Тогда* τ^{ω}: $\mathfrak{D} \to \mathfrak{D}^{\omega}_{\Gamma}$ — *эпиморфизм для любого* (Γ^*)-*фильтра. В частности, это верно, если* $\mathfrak{D}$ — *полупростая алгебра Ли.*

Таким образом, следствие 2 есть обобщение теоремы Хариш-Чандры.

Следствие 3. *Пусть* G — *компактная группа,* k — *произвольное подполе поля вещественных чисел. Тогда для любого* (Γ^*)-*фильтра* Ω *непрерывных представлений* $\tau^{\omega}(G) = G^{\omega}_{\Gamma}$.

В случае, когда K — поле комплексных чисел, это есть в точности теорема Крейна — Таннаки.

В заключение приведем еще два следствия из леммы. Для простоты ограничимся случаем $K = k$. При $\Omega = \mathfrak{C}^{\mathfrak{D}}_{1}$ вместо G^{ω} будем писать G_1.

Предложение 1. *Пусть* $\mathfrak{D}$ — *полупростая* k-*алгебра Ли,* $\mathrm{char}\, k = 0$; Ω — *произвольный фильтр в* $\mathfrak{C}^{\mathfrak{D}}_{1}$. *Тогда* G^{ω} *можно наделить структурой алгебраической группы, алгебра Ли которой есть* $\tau^{\omega}(\mathfrak{D})$.

Предложение 2. *Пусть* $\mathfrak{D}$ — *то же, что и в предложении* 1. *Тогда неприводимая односвязная алгебраическая группа* $\widetilde{G}$, *алгебра Ли которой есть* $\mathfrak{D}$, *изоморфна* G_1. *Отсюда следует, что всякое представление алгебры* $\mathfrak{D}$ *есть дифференциал рационального представления группы* $\widetilde{G}$. *Последнее свойство характеризует* $\widetilde{G}$.

Автор благодарит А. А. Кириллова, Е. А. Горина и А. И. Штерна за внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

[1] T. Tannaka, Über den Dualitatssatz der nichtkommutativen Gruppen, Tohoku Math. J. **45** : 1 (1938), 1—12.

[2] М. Г. Крейн, Принцип двойственности для бикомпактной группы и квадратной блок-алгебры, ДАН **69** (1949), 725—728.

[3] Harish-Chandra, Lie algebras and the Tannaka duality theorem, Ann. Math. **51** : 2 (1950), 299—330.

Поступило в Правление общества 19 января 1971 г.