В. Г. Дринфельд, Квазихопфовы алгебры, *Алгебра и анализ*, 1989, том 1, выпуск 6, 114–148

1989 АЛГЕБРА И АНАЛИЗ том 1, вып. 6

В. Г. Дринфельд

КВАЗИХОПФОВЫ АЛГЕБРЫ

Вводится и исследуется понятие квазихопфовой алгебры, получающееся из понятия алгебры Хопфа ослаблением аксиомы коассоциативности. Ослабленная аксиома обеспечивает ассоциативность тензорного произведения представлений. В контексте квазихопфовых алгебр обсуждаются понятия классического предела и квантования, описывается структура некоторых классов квазихопфовых алгебр, обсуждается связь с конформной теорией поля и инвариантами узлов.

Напомним, что алгебра Хопфа — это пара (A, Δ), где A — ассоциативная алгебра, а Δ — гомоморфизм $A \to A \otimes A$, причем должны выполняться некоторые условия, главное из которых — коассоциативность Δ, т. е. равенство отображений $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta : A \to A \otimes A \otimes A$ и $(\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta : A \to A \otimes A \otimes A$. Наличие Δ позволяет определить тензорное произведение представлений M_1 и M_2 алгебры A, а из коассоциативности Δ следует наличие естественного изоморфизма $(M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \xrightarrow{\sim} M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)$. Если, кроме того, Δ кокоммутативно, т. е. $\Delta = \Delta'$, где Δ' — композиция Δ и отображения $A \otimes A \to A \otimes A$, переставляющего тензорные сомножители, то имеется естественный изоморфизм $M_1 \otimes M_2 \xrightarrow{\sim} M_2 \otimes M_1$. Развитие квантового метода обратной задачи [1] привело (см. [2]) к понятию квазитреугольной алгебры Хопфа. Это тройка (A, Δ, R), где (A, Δ) — алгебра Хопфа, $R \in A \otimes A$, $\Delta'(a) = R\,\Delta(a)\,R^{-1}$ при $a \in A$, и выполнены соотношения «самосогласованности» (3.2), из которых следует уравнение Янга—Бакстера (3.4). В этом случае по-прежнему имеется естественный изоморфизм $M_1 \otimes M_2 \xrightarrow{\sim} M_2 \otimes M_1$ (в его определении участвует R), а (3.2) обеспечивает коммутативность некоторых естественных диаграмм (см. (3.5)). Другими словами, представления A образуют *квазитензорную категорию*. Согласно Н. Ю. Решетихину [3], именно это свойство A (наряду с наличием понятия контрагредиентного представления, определяемого с помощью антипода $S : A \to A$) позволяет каждому узлу в $\mathbb{R}^3$ сопоставить элемент центра A, являющийся обобщением многочлена Джоунса [4].

Естественно ослабить условие коассоциативности Δ, заменив его равенством $(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a)) \cdot \Phi^{-1}$, $a \in A$, где $\Phi \in$

Ключевые слова: алгебра Хопфа, квантовая группа, моноидальная категория, инварианты узлов, конформная теория поля.

$\in A \otimes A \otimes A$ должен удовлетворять естественному условию самосогласованности (см. (1.2)). Это приводит к понятию квазихопфовой алгебры (см. § 1) и к понятиям квазитреугольной, треугольной и кограничной квазихопфовой алгебры (см. § 3). Так как представления квазитреугольной квазихопфовой алгебры образуют квазитензорную категорию, то метод Решетихина [3] построения инвариантов узлов обобщается на квазихопфов случай.

Согласно «философии» квантовых групп [2], наряду с алгебрами Хопфа (являющимися «квантовыми» объектами) полезно рассматривать их «классические» аналоги — биалгебры Ли. Задание биалгебры Ли эквивалентно заданию тройки $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$, где $\mathfrak{p}$ — алгебра Ли с инвариантным скалярным произведением, а $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}$ — трансверсальные лагранжевы подалгебры. Оказывается (см. § 2, 3), что в квазихопфовом случае роль таких троек играют пары $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1)$, а в квазитреугольном квазихопфовом случае — пары $(\mathfrak{g}, t)$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, а $t \in \mathrm{Sym}^2\, \mathfrak{g}$ — инвариантный тензор. Вероятно, и в квантовой ситуации квазихопфовы алгебры окажутся проще хопфовых благодаря наличию в квазихопфовом случае «калибровочных» преобразований, называемых *скручиванием* (см. § 1). Во всяком случае, квазитреугольные квазихопфовы алгебры в рамках теории возмущений по постоянной Планка h допускают простое описание: согласно теореме 3.15, они, с точностью до скручивания, взаимно однозначно соответствуют своим классическим аналогам $(\mathfrak{g}, t)$, где структурные константы $\mathfrak{g}$ и координаты t зависят от h. Ввиду недостатка места мы не приводим доказательство теоремы 3.15, но указываем, как по $\mathfrak{g}, t)$ построить квазитреугольную квазихопфову алгебру $A_{\mathfrak{g},t} = (A, \Delta, \Phi, R)$. Именно A — это универсальная обертывающая алгебра, Δ — обычное коумножение, $R = e^{ht/2}$, а Φ определяется с помощью системы уравнений Книжника—Замолодчикова

$$\frac{\partial W}{\partial z_i} = \frac{h}{2\pi i} \sum_{j \neq i} \frac{t^{ij}}{z_i - z_j} \cdot W, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{0.1}$$

которой удовлетворяют корреляционные функции в модели Весса—Зумино—Виттена конформной теории поля (t^{ij} обозначает образ t при (i, j)-м вложении $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to (U\mathfrak{g})^{\otimes n}$). Точнее, $\Phi = W_2^{-1} W_1$, где W_1 и W_2 — решения системы (0.1) в области $z_1 > z_2 > z_3$, имеющие стандартные асимптотики при $z_1 - z_2 \ll z_2 - z_3$ и соответственно $z_1 - z_2 \gg z_2 - z_3$ (подробности см. в § 3). Эта конструкция приводит (см. конец § 3) к естественному доказательству важной теоремы Т. Коно [5], утверждающей, что если $\mathfrak{g}$ конечномерна и полупроста, а ρ — конечномерное представление $\mathfrak{g}$, то представление группы кос B_n, определяемое монодромией уравнения

$$\frac{\partial W}{\partial z_i} = \frac{h}{2\pi i} \sum_{j \neq i} \frac{\rho^{\otimes n}(t^{ij})}{z_i - z_j} \cdot W, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{0.2}$$

эквивалентно представлению B_n, построенному по некоторой R-матрице.

Фактически именно теорема Коно и предшествовавшие ей результаты [6—8] подсказали автору конструкцию $A_{\mathfrak{g},t}$ с помощью (0.1). Ход рассуждений был таким. Если задано представление квазитреугольной квазихопфовой алгебры A в пространстве V, то в $V^{\otimes n}$ действует B_n (это следует из того, что представления A образуют квазитензорную категорию C; если бы C была тензорной, т. е. если бы изоморфизм коммутативности $V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \otimes V_1$, $V_i \in C$, был инволютивным, то в $V^{\otimes n}$ дей-

ствовала бы группа подстановок S_n). Теорема Коно подсказала автору, что квазитреугольная квазихопфова алгебра $A_{\mathfrak{g},t}$ (определение которой тогда было неизвестно) должна обладать следующими свойствами: 1) $A_{\mathfrak{g},t}$ должна быть универсальной обертывающей с обычным коумножением, но нетривиальными R и Φ; 2) если ρ — представление $A_{\mathfrak{g},t}$ в пространстве V, то соответствующее представление B_n в $V^{\otimes n}$ должно определяться монодромией системы (0.2). Свойство 2) позволило угадать R и Φ.

Наряду с перечисленными выше результатами настоящая работа содержит (см. § 3) доказательство аналогов теоремы 3.15 для треугольных и кограничных квазихопфовых алгебр, а также набросок конструкции инварианта узлов, содержащего в себе все инварианты R-матричного типа (см. [3] и цитированную в [3] литературу), соответствующие квазиклассическим R-матрицам.

Автор благодарит И. В. Чередника, обратившего его внимание на работы [6—8].

§ 1. Определение и простейшие свойства квазихопфовых алгебр

Напомним, что биалгеброй над коммутативным кольцом k называется ассоциативная k-алгебра A с единицей, снабженная гомоморфизмами $\Delta : A \to A \otimes A$, $\varepsilon : A \to k$ такими, что $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id}$ и выполнено условие коассоциативности $(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta$ (обе части этого равенства являются гомоморфизмами $A \to A \otimes A \otimes A$). Поясним, что Δ и ε — гомоморфизмы алгебр с единицей, т. е. $\Delta(1) = 1$, $\varepsilon(1) = 1$.

Обозначим через A-mod категорию (левых) A-модулей. Если A — биалгебра, то имеется, как известно, следующий функтор $\otimes : (A\text{-mod}) \times (A\text{-mod}) \to A\text{-mod}$: если M и N — модули над A, то $M \otimes N$ — это $M \otimes_k N$ со структурой A-модуля, определяемой гомоморфизмом $\Delta : A \to A \otimes A$. Пара ($A$-mod, $\otimes$) является моноидальной категорией [9] (вообще говоря, несимметричной, так как A-модули $M \otimes N$ и $N \otimes M$ могут не быть изоморфными). В этой моноидальной категории морфизм ассоциативности (associativity constraint) тривиален, а единичным объектом является k со структурой A-модуля, определяемой гомоморфизмом ε. Оказывается, понятие биалгебры можно обобщить так, чтобы A-mod по-прежнему являлась моноидальной категорией, но с нетривиальным морфизмом ассоциативности.

Определение. Квазибиалгебра — это набор $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$, где A — ассоциативная k-алгебра с единицей, Δ — гомоморфизм $A \to A \otimes A$, ε — гомоморфизм $A \to k$, Φ — обратимый элемент $A \otimes A \otimes A$, причем должны выполняться равенства

$$(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(a)) = \Phi \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a)) \cdot \Phi^{-1}, \quad a \in A, \tag{1.1}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Phi) = (1 \otimes \Phi) \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\Phi) \cdot (\Phi \otimes 1), \tag{1.2}$$

$$(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = \mathrm{id} = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon) \circ \Delta, \tag{1.3}$$

$$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Phi) = 1. \tag{1.4}$$

Если A — квазибиалгебра, то тензорное произведение A-модулей и единичный A-модуль определяются так же, как в случае биалгебр. Из (1.1) следует, что для любых A-модулей M_1, M_2, M_3 отображение $\varphi : (M_1 \otimes$

$\otimes M_2) \otimes M_3 \to M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)$, определяемое как образ Φ в $\mathrm{End}_k (M_1 \otimes \otimes M_2 \otimes M_3)$, является изоморфизмом A-модулей, а из (1.3) следует, что изоморфизмами A-модулей являются естественные отображения $M \to \to k \otimes M$, $M \to M \otimes k$. Из (1.2), (1.4) следует, что выполнены условия когерентности (см. [9—11]), т. е. коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
((M_1 \otimes M_2) \otimes M_3) \otimes M_4 \arrow[r] \arrow[d] & (M_1 \otimes M_2) \otimes (M_3 \otimes M_4) \arrow[r] & M_1 \otimes (M_2 \otimes (M_3 \otimes M_4)) \arrow[d] \\
(M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)) \otimes M_4 \arrow[rr] & & M_1 \otimes ((M_2 \otimes M_3) \otimes M_4)
\end{tikzcd} \tag{1.5}$$

$$\begin{tikzcd}
& M_1 \otimes M_2 \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
(M_1 \otimes k) \otimes M_2 \arrow[rr] & & M_1 \otimes (k \otimes M_2)
\end{tikzcd} \quad (1.6) \tag{1.6}$$

Поэтому A-mod является моноидальной категорией.

Чтобы сделать формулы типа (1.1)—(1.4) более выразительными, введем новые обозначения. Будем мыслить A как алгебру функций на «некоммутативном пространстве» X. Элемент $a \in A$ будем записывать в виде $a(x)$, элемент $b \in A \otimes A$ в виде $b(x, y)$ и т. д., где x, y — это как бы точки X. Если $a \in A$, то вместо $\Delta(a)$ будем писать $a(x * y)$, где $*$ — «операция» на X (т. е. «отображение» $X \times X \to X$). Гомоморфизм $\varepsilon : A \to k$ определяет точку X, которую мы обозначим 0; таким образом, вместо $\varepsilon(a)$ мы будем писать $a(0)$. Тогда формулы (1.1)—(1.4) перепишутся в виде

$$a(x*(y*z)) = \Phi(x, y, z)\, a((x*y)*z)\, \Phi(x, y, z)^{-1}, \quad a \in A, \tag{1.7}$$

$$\Phi(x, y, z*u)\cdot\Phi(x*y, z, u) = \Phi(y, z, u)\cdot\Phi(x, y*z, u)\cdot\Phi(x, y, z), \tag{1.8}$$

$$a(0*x) = a(x) = a(x*0), \quad a \in A, \tag{1.9}$$

$$\Phi(x, 0, z) = 1. \tag{1.10}$$

З а м е ч а н и е. Из (1.8)—(1.10) следует, что $\Phi(0, y, z) = 1 = \Phi(x, y, 0)$ (например, подставив в (1.8) $x = y = 0$, получим $\Phi(0, y, z) = 1$). Это аналог теоремы Келли [11] о том, что из коммутативности (1.5) и (1.6) следует коммутативность диаграмм

$$\begin{tikzcd}
(k \otimes M_1) \otimes M_2 \arrow[rr] \arrow[dr] & & k \otimes (M_1 \otimes M_2) \arrow[dl] \\
& M_1 \otimes M_2 &
\end{tikzcd} \qquad
\begin{tikzcd}
(M_1 \otimes M_2) \otimes k \arrow[rr] \arrow[dr] & & M_1 \otimes (M_2 \otimes k) \arrow[dl] \\
& M_1 \otimes M_2 &
\end{tikzcd}$$

Пусть заданы квазибиалгебра $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ и обратимый элемент $F \in A \otimes A$ такой, что $F(x, 0) = 1 = F(0, y)$. Положим

$$\tilde{\Delta}(a) = F\Delta(a)F^{-1}, \tag{1.11}$$

$$\tilde{\Phi}(x, y, z) = F(y, z)\, F(x, y*z)\, \Phi(x, y, z)\, F(x*y, z)^{-1}\, F(x, y)^{-1}, \tag{1.12}$$

где $*$ соответствует Δ (а не $\tilde{\Delta}$). Тогда $(A, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \tilde{\Phi})$ — квазибиалгебра. Будем говорить, что $(A, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \tilde{\Phi})$ получается из $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ *скручиванием посредством* F. Скручивание посредством F_1F_2 равносильно скручиванию посредством сначала F_2, а затем F_1.

Если $(A, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \tilde{\Phi})$ получается из $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ скручиванием посредством F, то соответствующие моноидальные категории C и $\tilde{C}$ эквива-

лентны (в моноидальном смысле). Чтобы убедиться в этом, надо построить эквивалентность категорий $f: C \to \widetilde{C}$, естественное преобразование $\mathscr{F}: f(M_1 \otimes M_2) \xrightarrow{\sim} f(M_1) \otimes f(M_2)$ и изоморфизм $\omega: f(k) \xrightarrow{\sim} k$ такие, что диаграммы

$$\begin{tikzcd}
f\big((M_1 \otimes M_2) \otimes M_3\big) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & \big(f(M_1) \otimes f(M_2)\big) \otimes f(M_3) \arrow[d, "\wr"] \\
f\big(M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3)\big) \arrow[r, "\sim"] & f(M_1) \otimes \big(f(M_2) \otimes f(M_3)\big)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
f(k \otimes M) \arrow[r, "\sim"] & k \otimes f(M) \\
f(M) \arrow[u, "\wr"] \arrow[ur, "\sim"] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
 & f(M) \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[d, "\wr"] \\
f(M \otimes k) \arrow[r, "\sim"] & f(M) \otimes k
\end{tikzcd}$$

коммутативны. Достаточно положить $\omega = \mathrm{id}$, $f = \mathrm{id}$ (напомним, что если забыть моноидальную структуру, то $C = \widetilde{C} = (A\text{-mod})$), а в качестве $\mathscr{F}: M_1 \otimes M_2 \to M_1 \otimes M_2$ взять образ F в $\mathrm{End}_k\,(M_1 \otimes M_2)$.

Замечания. 1) Возможно, естественней было бы определить квазибиалгебру как набор $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, f, g)$, где $A, \Delta, \varepsilon, \Phi$ имеют прежний смысл, f и g — обратимые элементы A, причем должны выполняться (1.7), (1.8) и следующие аналоги условий (1.9), (1.10):

$$a(0 * x) = f(x)\, a(x)\, f(x)^{-1}, \tag{1.13}$$

$$a(x * 0) = g(x)\, a(x)\, g(x)^{-1}, \tag{1.14}$$

$$\Phi(x, 0, z) = g(x)^{-1} f(z). \tag{1.15}$$

Тогда для любого A-модуля M образы f и g в $\mathrm{End}_k\, M$ определяют изоморфизмы А-модулей $M \to k \otimes M$ и соответственно $M \to M \otimes k$, а (1.15) обеспечивает коммутативность диаграммы (1.6). Поэтому A-mod является моноидальной категорией. При таком определении квазибиалгебры скручивание определяется формулами

$$\tilde{f}(x) = F(0, x) f(x), \quad \tilde{g}(x) = F(x, 0) g(x) \tag{1.16}$$

наряду с (1.11), (1.12), причем не требуется, чтобы $F(x, 0) = 1 = F(0, x)$. Оказывается, два определения квазибиалгебры по существу эквивалентны. Действительно, если $A, \Delta, \varepsilon, \Phi, f, g$ удовлетворяют (1.7), (1.8) и (1.13)—(1.15), то можно выбрать F так, чтобы $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$, определяемые формулой (1.16), равнялись 1 (чтобы убедиться в этом, надо проверить, что $f(0) = g(0)$, а для этого достаточно в (1.15) положить $x = z = 0$ и в (1.8) положить $x = y = z = u = 0$).

2) Пусть A, Δ, Φ удовлетворяют (1.7), (1.8) и существуют гомоморфизмы $\varepsilon: A \to k$, $\varepsilon': A \to k$ такие, что $(\varepsilon \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta$ и $(\mathrm{id} \otimes \varepsilon') \circ \Delta$ — внутренние автоморфизмы A. Тогда ε и ε' единственны, $\varepsilon' = \varepsilon$ и существуют обратимые элементы $f, g \in A$, удовлетворяющие (1.13)—(1.15), причем f и g единственны с точностью до замены f, g на cf, cg, где $c \in k^*$. Действительно, равенство $\varepsilon' = \varepsilon$ и единственность ε доказываются рассмотрением гомоморфизма $(\varepsilon \otimes \varepsilon') \circ \Delta: A \to k$. Из (1.15) следует, что если f и g существуют, то $f(x) = c\Phi(0, 0, x)$, $g(x) = c\Phi(x, 0, 0)^{-1}$, где $c \in k^*$. Остается доказать, что (1.13)—(1.15) выполнены, если положить $f(x) = \Phi(0, 0, x)$, $g(x) = \Phi(x, 0, 0)^{-1}$. Для доказательства (1.13)

и (1.14) достаточно в (1.7) положить $x = y = 0$ и соответственно $y = z = 0$, а для доказательства (1.15) достаточно в (1.8) положить $y = z = 0$.

Будем понимать под алгеброй Хопфа биалгебру A с биективным антиподом $S : A \to A$. Это определение несколько отличается от общепринятого [12] (в [12] не требуется биективности S) и эквивалентно определению из [2] (по теореме Хейнемана [13], с. 56 биективность S эквивалентна существованию косого антипода, который фактически равен S^{-1}). Обозначим через C_A категорию A-модулей, являющихся свободными k-модулями конечного типа. Если A — алгебра Хопфа, то C_A — *жесткая* моноидальная категория. Жесткость, по определению, означает, что для каждого объекта $M \in C_A$ существуют левый и правый дуальные объекты. Поясним, что левым дуальным для M мы называем объект $N \in C_A$ вместе с морфизмами $N \otimes M \to k$, $k \to M \otimes N$ такими, что композиции $M \to (M \otimes N) \otimes M \xrightarrow{\sim} M \otimes (N \otimes M) \to M$ и $N \to N \otimes (M \otimes N) \xrightarrow{\sim} (N \otimes M) \otimes N \to N$ тождественны; в этой ситуации M называется правым дуальным для N. Отметим, что в любой моноидальной категории левый и правый дуальные объекты единственны, если они существуют (доказательство см. ниже), и что для симметрических моноидальных категорий приведенное выше определение жесткости эквивалентно определению из § 1 работы [14]. Дуальные объекты в C_A строятся следующим образом: 1) левый дуальный объект ${}^*M$ — это $\mathrm{Hom}_k(M, k)$ с действием A, заданным формулой $a \mapsto (\rho(S(a)))^*$, где $a \in A$, $\rho : A \to \mathrm{End}_k M$ определяет структуру A-модуля на M, а морфизмы ${}^*M \otimes M \to k$, $k \to M \otimes {}^*M$ определяются естественным образом; 2) правый дуальный объект M^* строится аналогично, но с заменой S на S^{-1}.

Попытка ввести класс квазибиалгебр A, для которых моноидальная категория C_A жесткая, приводит к следующему определению.

Определение. Квазихопфова алгебра — это биалгебра $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$, для которой существуют $\alpha, \beta \in A$ и антиавтоморфизм S алгебры A такие, что

$$\sum_i S(b_i)\,\alpha c_i = \varepsilon(a)\,\alpha, \quad \sum_i b_i \beta S(c_i) = \varepsilon(a)\,\beta \tag{1.17}$$

при $a \in A$, $\sum_i b_i \otimes c_i = \Delta(a)$ и

$$\sum_i X_i \beta S(Y_i)\,\alpha Z_i = 1, \quad \text{где } \sum_i X_i \otimes Y_i \otimes Z_i = \Phi, \tag{1.18}$$

$$\sum_j S(P_j)\,\alpha Q_j \beta S(R_j) = 1, \quad \text{где } \sum_j P_j \otimes Q_j \otimes R_j = \Phi^{-1}. \tag{1.19}$$

Замечания. 1) Если S, α, β удовлетворяют условиям (1.17)—(1.19), то для любого обратимого $u \in A$ этим условиям удовлетворяют также $\bar{S}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$, где

$$\bar{S}(a) = uS(a)\,u^{-1}, \ \bar{\alpha} = u\alpha, \ \bar{\beta} = \beta u^{-1}. \tag{1.20}$$

2) Пусть $\Phi = 1$, так что (A, Δ, ε) — биалгебра. Тогда (1.18) и (1.19) означают, что $\alpha\beta = \beta\alpha = 1$. Поэтому преобразование (1.20) позволяет без ограничения общности считать, что $\alpha = \beta = 1$, после чего (1.17) превращается в обычное определение антипода. Итак, для биалгебр квазихопфовость эквивалентна хопфовости.

3) Если A — квазихопфова алгебра, то определенная выше моноидальная категория C_A жесткая. При этом ${}^*M$ и M^* определяются аналогично хопфовому случаю, но морфизмы $f_1 : {}^*M \otimes M \to k$, $f_2 : k \to$

$\to M \otimes {}^*M$, $f_3 : M \otimes M^* \to k$, $f_4 : k \to M^* \otimes M$ теперь задаются формулами $f_1 = \varphi_1 \circ (\mathrm{id} \otimes \rho(\alpha))$, $f_2 = (\rho(\beta) \otimes \mathrm{id}) \circ \varphi_2$, $f_3 = \varphi_3 \circ (\rho(S^{-1} \times \times (\alpha)) \otimes \mathrm{id})$, $f_4 = (\mathrm{id} \otimes \rho(S^{-1}(\beta))) \circ \varphi_4$, где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ — естественные отображения $\mathrm{Hom}_k(M, k) \otimes_k M \to k$, $k \to \mathrm{Hom}_k(M, k) \otimes_k M$ и т. д., а $\rho : A \to \mathrm{End}_k M$ определяет на M структуру A-модуля.

4) С каждой квазибиалгеброй $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ связаны еще три квазибиалгебры: а) можно, не меняя Δ, заменить умножение в A противоположной операцией, а Φ на Φ^{-1}; б) можно, не меняя умножения в A, заменить Δ на $\Delta' = \sigma \circ \Delta$, а $\Phi(x, y, z)$ на $\Phi(z, y, x)^{-1}$, где $\sigma : A \otimes A \to A \otimes A$ — перестановка сомножителей; в) можно заменить умножение противоположной операцией, Δ на Δ', а $\Phi(x, y, z)$ на $\Phi(z, y, x)$. Если $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ — квазихопфова алгебра, то и остальные три квазибиалгебры квазихопфовы: в случае а) надо S, α, β заменить на $\bar{S} = S^{-1}$, $\bar{\alpha} = S^{-1}(\beta)$, $\bar{\beta} = S^{-1}(\alpha)$; в случае б) надо положить $\bar{S} = S^{-1}$, $\bar{\alpha} = S^{-1}(\alpha)$, $\bar{\beta} = S^{-1}(\beta)$, а в случае в) $\bar{S} = S$, $\bar{\alpha} = \beta$, $\bar{\beta} = \alpha$.

5) Квазихопфовость сохраняется при скручивании. Действительно, если $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ — квазихопфова алгебра, S, α, β удовлетворяют (1.17)—(1.19), а $\tilde{\Delta}$ и $\tilde{\Phi}$ определяются формулами (1.11), (1.12), то роль S, α, β для $(A, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \tilde{\Phi})$ играют $\tilde{S} = S$, $\tilde{\alpha} = \sum_i S(d_i)\alpha e_i$, $\tilde{\beta} = \sum_j f_j \beta S(g_j)$, где $\sum_i d_i \otimes e_i = F^{-1}$, $\sum_j f_j \otimes g_j = F$.

6) Вероятно, следовало бы в определение квазихопфовой алгебры перед словом «существуют» вставить «локально по $\mathrm{Spec}\, k$». Мы этого не делаем, так как нас интересует главным образом случай, когда k — поле или кольцо формальных рядов над полем.

7) Из (1.17) и (1.18) следует, что $\varepsilon \circ S = \varepsilon$. Действительно, применив $\varepsilon \otimes \varepsilon$ к (1.17), получим $\varepsilon(S(a))\alpha = \varepsilon(a)\alpha$, а из (1.18) вытекает обратимость $\varepsilon(\alpha)$.

8) Будет доказано (см. предложение 1.3), что одно из условий (1.18), (1.19) излишне. Однако избыточная система аксиом (1.17)—(1.19) более симметрична (см. замечание 4).

Предложение 1.1. *Если тройки* (S, α, β) *и* $(\bar{S}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ *удовлетворяют* (1.17)—(1.19), *то они связаны преобразованием* (1.20), *где и определен однозначно.*

Доказательство. Если (S, α, β) и $(\bar{S}, \bar{\alpha}, \bar{\beta})$ связаны преобразованием (1.20), то $u = u \sum_i S(P_i)\alpha Q_i \beta S(R_i) = \sum_j \bar{S}(P_i)\bar{\alpha} Q_i \beta S(R_i)$, где $\sum_i P_i \otimes Q_i \otimes R_i = \Phi^{-1}$. Обратно, положим $u = \sum_i \bar{S}(P_i)\bar{\alpha} Q_i \beta S(R_i)$ и докажем (1.20). Если $a \in A$, то $uS(a) = \bar{S}(a)u$: достаточно к обеим частям равенства $(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a)) \cdot \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(a))$ применить k-линейное отображение $A \otimes A \otimes A \to A$, переводящее $b \otimes c \otimes d$ в $\bar{S}(b)\bar{\alpha} c \beta S(d)$. Далее, $u\alpha = \bar{\alpha}$ — достаточно к обеим частям равенства

$$(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(\Phi) \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Phi) \cdot (\Phi^{-1} \otimes 1) = (1 \otimes \Phi) \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\Phi), \tag{1.21}$$

эквивалентного (1.2), применить k-линейное отображение $V : A \otimes A \otimes A \otimes A \to A$, переводящее $b \otimes c \otimes d \otimes e$ в $\bar{S}(b)\bar{\alpha} c \beta S(d)\alpha e$, и воспользоваться тем, что $V((\Delta(a) \otimes 1 \otimes 1) \cdot T) = \varepsilon(a) V(T) = V((1 \otimes 1 \otimes \Delta(a)) \cdot T) = V(T \cdot (1 \otimes \Delta(a) \otimes 1))$ при $a \in A$, $T \in A \otimes A \otimes A$. Соот-

ношение $\bar{\beta}u = \beta$ следует из равенства $u\alpha = \bar{\alpha}$, если заменить умножение в A противоположной операцией и одновременно заменить Δ на Δ', а $\Phi(x, y, z)$ на $\Phi(z, y, x)$ (см. замечание 4 после определения квазихопфовой алгебры). Остается построить элемент, обратный u. Им является $v = \sum\limits_i S(P_i)\,\alpha Q_i \bar{\beta}\bar{S}(R_i)$. Действительно, $uv = \sum\limits_i uS(P_i)\,\alpha Q_i\bar{\beta}\bar{S}(R_i) = \sum\limits_i \bar{S}(P_i)\,u\alpha Q_i\bar{\beta}\bar{S}(R_i) = \sum\limits_i \bar{S}(P_i)\,\bar{\alpha} Q_i\bar{\beta}\bar{S}(R_i) = 1$ и аналогично $vu = 1$. ●

Замечание. Доказательство предложения 1.1 получено в результате анализа следующего доказательства единственности левого дуального объекта в моноидальной категории. Пусть $^*M$ и ^+M — левые дуальные объекты для M. Рассмотрим композицию $^+M \to {}^+M \otimes (M \otimes {}^*M) \xrightarrow{\sim} ({}^+M \otimes M) \otimes {}^*M \to {}^*M$ и аналогичный морфизм $^*M \to {}^+M$ (вычислив эти морфизмы в случае, когда M — модуль над алгеброй A, из предложения 1.1, а $^*M$ и ^+M соответствуют S и $\bar{S}$, нетрудно получить формулы для u и v из доказательства предложения). Остается доказать взаимную обратность построенных морфизмов и коммутативность диаграмм

$$\begin{tikzcd} {}^+M\otimes M \arrow[rr] \arrow[dr] & & {}^*M\otimes M \arrow[dl] \\ & k & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & k \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ M\otimes {}^+M \arrow[rr] & & M\otimes {}^*M \end{tikzcd} \tag{1.22}$$

Коммутативность, скажем, левой диаграммы (1.22) следует из рассмотрения диаграммы

$$\begin{tikzcd} ({}^+M\otimes(M\otimes {}^*M))\otimes M \arrow[rrr, "\sim"] \arrow[d, "\wr"] & & & (({}^+M\otimes M)\otimes {}^*M)\otimes M \arrow[dl] \arrow[ddd, "\wr"] \\ {}^+M\otimes((M\otimes {}^*M)\otimes M) \arrow[d, "\wr"] & {}^+M\otimes M \arrow[l] \arrow[dr] & {}^*M\otimes M \arrow[d] & \\ & & k & \\ {}^+M\otimes(M\otimes({}^*M\otimes M)) \arrow[rrr, "\sim"] & & & ({}^+M\otimes M)\otimes({}^*M\otimes M) \arrow[ul] \end{tikzcd} \tag{1.23}$$

Отметим, что вывод формулы $u\alpha = \bar{\alpha}$ (см. доказательство предложения 1.1) получен в результате анализа (1.23) (в частности, (1.21) соответствует 5-угольнику изоморфизмов в (1.23)). Наконец, тождественность композиции $^+M \to {}^*M \to {}^+M$ следует из рассмотрения диаграммы

$$\begin{tikzcd} {}^+M \arrow[r] \arrow[d] & {}^+M\otimes(M\otimes M^+) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & ({}^+M\otimes M)\otimes M^+ \arrow[d] \arrow[dr] & \\ {}^*M \arrow[r] & {}^*M\otimes(M\otimes M^+) \arrow[r, "\sim"] & ({}^*M\otimes M)\otimes M^+ \arrow[r] & M^+ \end{tikzcd}$$

Разумеется, было бы желательно доказать метатеорему, утверждающую, что из справедливости теоремы определенного типа о моноидальных категориях следует справедливость аналогичной теоремы о квазибиалгебрах.

Известно [12], что если (A, Δ) — алгебра Хопфа, то антипод $S: A \to A$ является антиавтоморфизмом относительно не только умножения, но и коумножения. Иначе говоря, $(S \otimes S)(\Delta'(S^{-1}(a))) = \Delta(a)$ при $a \in A$, где $\Delta': A \to A \otimes A$ — противоположное коумножение. Пусть теперь $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ — квазихопфова алгебра, а S, α, β удовлетворяют (1.17)—(1.19). Положим $\tilde{\Delta}(a) = (S \otimes S)(\Delta'(S^{-1}(a)))$, $\tilde{\Phi} = (S \otimes S \otimes S)(\Phi^{321})$, где Φ^{321} — образ Φ при отображении $a \otimes b \otimes c \mapsto c \otimes b \otimes a$. Тогда $(A, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \tilde{\Phi})$ — квазихопфова алгебра, изоморфная $(A^0, \Delta', \varepsilon, \Phi^{321})$,

где A^0 — алгебра, противоположная A (изоморфизмом $A^0 \xrightarrow{\sim} A$ является S).

Предложение 1.2. *$(A, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \tilde{\Phi})$ получается из $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ скручиванием.*

Приведенное ниже доказательство аналогично доказательству следующего утверждения о жестких моноидальных категориях: существует функториальный изоморфизм $({}^*N \otimes {}^*M)^* \xrightarrow{\sim} M \otimes N$, согласованный с морфизмом ассоциативности.

Доказательство. Определим γ, $\delta \in A \otimes A$ формулами

$$\gamma = \sum_i S(U_i)\,\alpha V_i \otimes S(T_i)\,\alpha W_i, \tag{1.24}$$

$$\delta = \sum_j K_j\beta S(N_j) \otimes L_j\beta S(M_j), \tag{1.25}$$

где $\sum_i T_i \otimes U_i \otimes V_i \otimes W_i = (1 \otimes \Phi^{-1})\cdot(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(\Phi)$, $\sum_j K_j \otimes L_j \otimes M_j \otimes N_j = (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Phi)\cdot(\Phi^{-1} \otimes 1)$. Смысл, например, формулы для γ состоит в том, что если M и N — модули над A, являющиеся свободными k-модулями конечного типа, то морфизм $({}^*N \otimes {}^*M) \otimes (M \otimes N) \to k$, который нетрудно определить в любой моноидальной категории, переводит $\lambda \otimes \mu \otimes x \otimes y$ в $(\mu \otimes \lambda)(\gamma(x \otimes y))$.

Лемма 1. 1) *$\gamma = \sum_i S(U'_i)\,\alpha V'_i \otimes S(T'_i)\,\alpha W'_i$, $\delta = \sum_j K'_j\beta S(N'_j) \otimes L'_j\beta S(M'_j)$, где $\sum_i T'_i \otimes U'_i \otimes V'_i \otimes W'_i = (\Phi \otimes 1)\cdot(\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id}) \times (\Phi^{-1})$, $\sum_j K'_j \otimes L'_j \otimes M'_j \otimes N'_j = (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(\Phi^{-1})\cdot(1 \otimes \Phi)$.*

2) *Если $a \in A$, $\Delta(a) = \sum_i b_i \otimes c_i$, то*

$$\sum_i (S \otimes S)(\Delta'(b_i))\cdot\gamma\cdot\Delta(c_i) = \varepsilon(a)\,\gamma, \tag{1.26}$$

$$\sum_i \Delta(b_i)\cdot\delta\cdot(S \otimes S)(\Delta'(c_i)) = \varepsilon(a)\,\delta. \tag{1.27}$$

3) *Если $\sum_i X_i \otimes Y_i \otimes Z_i = \Phi$, $\sum_j P_j \otimes Q_j \otimes R_j = \Phi^{-1}$, то*

$$\sum_i \Delta(X_i)\cdot\delta\cdot(S \otimes S)(\Delta'(Y_i))\cdot\gamma\cdot\Delta(Z_i) = 1, \tag{1.28}$$

$$\sum_j (S \otimes S)(\Delta'(P_j))\cdot\gamma\cdot\Delta(Q_j)\cdot\delta\cdot(S \otimes S)(\Delta'(R_j)) = 1. \tag{1.29}$$

Доказательство. 1) Введем на $A \otimes A$ структуру правого модуля над $A \otimes A \otimes A \otimes A$, положив $(a \otimes b) \circ (c \otimes d \otimes e \otimes f) = S(d)\,ae \otimes S(c)\,bf$. Тогда $\gamma = (\alpha \otimes \alpha) \circ [(1 \otimes \Phi^{-1})\cdot(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta) \times (\Phi)]$. В силу (1.2) $\gamma = (\alpha \otimes \alpha) \circ [(\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\Phi)\cdot(\Phi \otimes 1)\cdot(\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Phi^{-1})]$. Так как $(\alpha \otimes \alpha) \circ (a \otimes \Delta(b) \otimes c) = \varepsilon(b)(\alpha \otimes \alpha) \circ (a \otimes 1 \otimes c)$, то $\gamma = (\alpha \otimes \alpha) \circ [(\Phi \otimes 1)\cdot(\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Phi^{-1})]$, что и требовалось. Аналогично выводится формула для δ.

2) Левая часть (1.26) равна $\gamma \circ [(\Delta \otimes \Delta)(\Delta(a))]$, что равно $(\alpha \otimes \alpha) \circ [(1 \otimes \Phi^{-1})\cdot(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(\Phi)\cdot(\Delta \otimes \Delta)(\Delta(a))]$. Для доказательства (1.26) осталось заметить, что $(1 \otimes \Phi^{-1})\cdot(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(\Phi)\cdot(\Delta \otimes \Delta)(\Delta\cdot(a)) = [\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})\ (\mathrm{id} \otimes \Delta)\ (\Delta(a))]\ (1 \otimes \Phi^{-1})(\cdot\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(\Phi)$ в силу (1.1) и что $(\alpha \otimes \alpha) \circ [(\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(a))] = \varepsilon(a)(\alpha \otimes \alpha)$. Аналогично доказывается (1.27).

3) Левая часть (1.28) равна $\varphi(r)$, где $r = \left(1 \otimes 1 \otimes \sum_k T_k \otimes U_k \otimes \otimes V_k \otimes W_k\right) \cdot (\Delta \otimes \Delta \otimes \Delta)(\Phi) \cdot \sum_j K_j \otimes L_j \otimes M_j \otimes N_j \otimes 1 \otimes 1 \in A^{\otimes 6}$, а φ — это k-линейное отображение $A^{\otimes 6} \to A \otimes A$ такое, что $\varphi(a \otimes b \otimes \otimes c \otimes d \otimes e \otimes f) = (a \otimes b) \cdot (\beta \otimes \beta) \cdot (S(d) \otimes S(c)) \cdot (\alpha \otimes \alpha) \cdot (e \otimes f)$. Воспользовавшись системой обозначений (1.7)—(1.10), получим $r(x, y, z, u, v, w) = \Phi(u, v, w)^{-1} \Phi(z, u, v * w) \Phi(x * y, z * u, v * w) \Phi(x * y, z, u) \Phi(x, y, z)^{-1}$. Из (1.8) и (1.7) следует, что $r(x, y, z, u, v, w) = \Phi(u, v, w)^{-1} \Phi(x * y, z, u * (v * w)) \Phi((x * y) * z, u, v * w) \Phi(x, y, z)^{-1} = \Phi(x * y, z, (u * v) * w) \Phi(u, v, w)^{-1} \Phi(x, y, z)^{-1} \Phi(x * (y * z), u, v * w)$. Так как

$$\varphi(h \cdot \Delta^{23}(a)) = \varepsilon(a) h = \varphi(\Delta^{45}(a) \cdot h) \tag{1.30}$$

при $h \in A^{\otimes 6}$, $a \in A$, где $\Delta^{23}(a) = 1 \otimes \Delta(a) \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1$, $\Delta^{45}(a) = 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes \Delta(a) \otimes 1$, то $\varphi(r) = \varphi(s)$, где $s(x, y, z, u, v, w) = \Phi(x * y, z, w) \Phi(x, y, z)^{-1} \Phi(u, v, w)^{-1} \Phi(x, u, v * w)$. Из (1.8) следует, что $s(x, y, z, u, v, w) = \Phi(x, y, z * w)^{-1} \Phi(y, z, w) \Phi(x, y * z, w) \Phi(x, u * v, w) \Phi(x, u, v) \Phi(x * u, v, w)^{-1}$. Из (1.30) и аналогичной формулы $\varphi(\Delta^{36}(a) \cdot h) = \varepsilon(a) h = \varphi(h \cdot \Delta^{14}(a))$ вытекает, что $\varphi(s) = \varphi(t)$, где $t(x, y, z, u, v, w) = \Phi(y, z, w) \Phi(x, u, v)$. Из (1.18) следует, что $\varphi(t) = 1$. Итак, (1.28) доказано.

Если $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ заменить на $(A, \Delta', \varepsilon, (\Phi^{321})^{-1})$, то γ и δ заменяется на $(S^{-1} \otimes S^{-1})(\gamma)$ и $(S^{-1} \otimes S^{-1})(\delta)$ (это нетрудно вывести из утверждения 1 леммы), а S заменится на S^{-1}. Поэтому (1.29) следует из (1.28). ●

Лемма 2. *Пусть заданы k-алгебра B, гомоморфизм $f: A \to B$, антигомоморфизм $g: A \to B$ и элементы $\rho, \sigma \in B$ такие, что*

$$\sum_i g(b_i) \rho f(c_i) = \varepsilon(a) \rho, \quad \sum_i f(b_i) \sigma g(c_i) = \varepsilon(a) \sigma \tag{1.31}$$

при $a \in A$, $\sum_i b_i \otimes c_i = \Delta(a)$ и

$$\sum_i f(X_i) \sigma g(Y_i) \rho f(Z_i) = 1, \text{ где } \sum_i X_i \otimes Y_i \otimes Z_i = \Phi, \tag{1.32}$$

$$\sum_j g(P_j) \rho f(Q_j) \sigma g(R_j) = 1, \text{ где } \sum_j P_j \otimes Q_j \otimes R_j = \Phi^{-1}. \tag{1.33}$$

Пусть, кроме того, заданы $\bar\rho, \bar\sigma \in B$ и антигомоморфизм $\bar g: A \to B$, удовлетворяющие (1.31)—(1.33). Тогда существует ровно один обратимый элемент $F \in B$ такой, что $\bar\rho = F\rho$, $\bar\sigma = \sigma F^{-1}$, $\bar g(a) = Fg(a) F^{-1}$ при $a \in A$. Кроме того, $F = \sum_i \bar g(P_i) \bar\rho f(Q_i) \sigma g(R_i)$, $F^{-1} = \sum_i g(P_i) \rho f(Q_i) \times \times \bar\sigma \bar g(R_i)$.

Доказательство леммы аналогично доказательству предложения 1.1, где рассмотрен случай $B = A$, $f = \mathrm{id}$. ●

Применив лемму 2 при $B = A \otimes A$, $f = \Delta$, $g(a) = \Delta(S(a))$, $\rho = \Delta(\alpha)$, $\sigma = \Delta(\beta)$, $\bar g(a) = (S \otimes S)(\Delta'(a))$, $\bar\rho = \gamma$, $\bar\sigma = \delta$, получим обратимый элемент $F \in A \otimes A$ такой, что

$$F\Delta(S(a)) F^{-1} = (S \otimes S)(\Delta'(a)), \tag{1.34}$$

$$\gamma = F \cdot \Delta(\alpha). \tag{1.35}$$

При этом

$$F = \sum_i (S \otimes S)(\Delta'(P_i))\cdot\gamma\cdot\Delta(Q_i\beta S(R_i)), \tag{1.36}$$

$$F^{-1} = \sum_i \Delta(S(P_i)\,\alpha Q_i)\cdot\delta\cdot(S \otimes S)(\Delta'(R_i)).$$

Из (1.34) следует, что $\tilde{\Delta}(a) = F\,\Delta(a)\,F^{-1}$. Остается доказать равенство (1.12), которое можно переписать в виде

$$(S \otimes S \otimes S)(\Phi^{321})\cdot(F \otimes 1)\cdot(\Delta \otimes \mathrm{id})(F) = (1 \otimes F)\cdot(\mathrm{id} \otimes \Delta)(F)\cdot\Phi. \tag{1.37}$$

Из (1.36) и (1.34) следует, что $(F \otimes 1)\cdot(\Delta \otimes \mathrm{id})(F) = (F \otimes 1)\cdot\sum_i (\Delta S \otimes \otimes S)(\Delta'(P_i))\cdot(\Delta \otimes \mathrm{id})(\gamma)\cdot(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(Q_i\beta S(R_i))) = \sum_i (S \otimes S \otimes S) \times \times (\Delta' \otimes \mathrm{id})(\Delta'(P_i))\cdot(F \otimes 1)\cdot(\Delta \otimes \mathrm{id})(\gamma)\cdot(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(Q_i\beta S(R_i)))$. Поэтому $(S \otimes S \otimes S)(\Phi^{321})\cdot(F \otimes 1)\cdot(\Delta \otimes \mathrm{id})(\gamma) = \sum_i (S \otimes S \otimes S)(\mathrm{id} \otimes \otimes \Delta')(\Delta'(P_i))(S \otimes S \otimes S)(\Phi^{321})\cdot(F \otimes 1)\cdot(\Delta \otimes \mathrm{id})(\gamma)\cdot(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta \times \times (Q_i\beta S(R_i)))$. Преобразовав аналогично правую часть (1.37), сведем доказательство (1.37) к проверке равенства

$$(S \otimes S \otimes S)(\Phi^{321})\cdot(F \otimes 1)\cdot(\Delta \otimes \mathrm{id})(\gamma) = (1 \otimes F)\cdot(\mathrm{id} \otimes \Delta)(\gamma)\cdot\Phi. \tag{1.38}$$

Из (1.24), (1.34), (1.35) следует, что $(F \otimes 1)\cdot(\Delta \otimes \mathrm{id})(\gamma) = \sum_i F\cdot\Delta \times \times (S(U_i))\cdot\Delta(\alpha)\cdot\Delta(V_i) \otimes S(T_i)\,\alpha W_i = \sum_{i,j} (S \otimes S)(\Delta'(U_i))\,(S(U_j) \otimes \otimes S(T_j))\,(\alpha \otimes \alpha)\,(V_j \otimes W_j)\cdot\Delta(V_i) \otimes S(T_i)\,\alpha W_i$. Поэтому левая часть (1.38) равна $\varphi(r)$, где φ — это k-линейное отображение $A^{\otimes 6} \to A^{\otimes 3}$, переводящее $a \otimes b \otimes c \otimes d \otimes e \otimes f$ в $S(c)\,\alpha d \otimes S(b)\,\alpha e \otimes S(a)\,\alpha f$, а $r = \left(\sum_j 1 \otimes T_j \otimes U_j \otimes V_j \otimes W_j \otimes 1\right)\cdot\sum_i (T_i \otimes \Delta(U_i) \otimes \Delta(V_i) \otimes W_i) \times \times (\Phi \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1)$ или, в других обозначениях, $r(x, y, z, u, v, w) = = \Phi(z, u, v)^{-1}\,\Phi(y, z, u * v)\,\Phi(y * z, u * v, w)^{-1}\,\Phi(x, y * z, (u * * v) * w)\,\Phi(x, y, z)$. Аналогично правая часть (1.38) равна $\varphi(s)$, где $s(x, y, z, u, v, w) = \Phi(y, v, w)^{-1}\cdot\Phi(x, y, v * w)\cdot\Phi(z, u, v * w)^{-1}\cdot\Phi(x * y, z, u * (v * w))\,\Phi(u, v, w)$. Так как $\varphi((1 \otimes 1 \otimes \Delta(a) \otimes 1 \otimes 1)\,h) = = \varepsilon(a)\,\varphi(h)$ при $a \in A$, $h \in A^{\otimes 6}$, то для доказательства (1.38) достаточно показать, что $r = \tilde{s}$, где $\tilde{s}(x, y, z, u, v, w) = \Phi(y, (z * u) * v, w)^{-1}\,\Phi(x, y, ((z * u) * v) * w)\,\Phi(z * u, v, w)^{-1}\,\Phi(z, u, v * w)^{-1} \times \times \Phi(x * y, z, u * (v * w))\,\Phi(u, v, w)$. Равенство $r = \tilde{s}$ можно вывести из теоремы Маклейна [10], утверждающей, что коммутативность (1.5) влечет коммутативность любой диаграммы, составленной из морфизмов ассоциативности. Вот прямое доказательство: $r(x, y, z, u, v, w) = \Phi(z, u, v)^{-1}\,\Phi(y, z, u * v)\,\Phi(y * z, u * v, w)^{-1}\,\Phi(y, z, (u * v) * w)^{-1}\,\Phi(x, y, z * ((u * v) * w))\,\Phi(x * y, z, (u * v) * w) = \Phi(z, u, v)^{-1}\,\Phi(y, z * * (u * v), w)^{-1}\,\Phi(z, u * v, w)^{-1}\,\Phi(x, y, z * ((u * v) * w))\,\Phi(x * y, z, (u * v) * w) = \Phi(z, u, v)^{-1}\,\Phi(y, z * (u * v), w)^{-1}\,\Phi(x, y, (z * (u * * v)) * w)\,\Phi(z, u * v, w)^{-1}\,\Phi(x * y, z, (u * v) * w) = \Phi(y, (z * u) * * v, w)^{-1}\,\Phi(x, y, ((z * u) * v) * w)\,\Phi(z, u, v)^{-1}\,\Phi(z, u * v, w)^{-1}\,\Phi(x * * y, z, (u * v) * w) = \Phi(y, (z * u) * v, w)^{-1}\,\Phi(x, y, ((z * u) * v) * * w)\,\Phi(z * u, v, w)^{-1}\,\Phi(z, u, v * w)^{-1}\,\Phi(u, v, w)\,\Phi(x * y, z, (u * v) * * w) = \tilde{s}(x, y, z, u, v, w)$. ●

Предложения 1.3—1.5 будут использованы при доказательстве теоремы 1.6, утверждающей, что деформация квазихопфовой алгебры как квазибиалгебры квазихопфова.

Предложение 1.3. *Пусть $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ — квазибиалгебра, а антиавтоморфизм S алгебры A и элементы α, $\beta \in A$ удовлетворяют* (1.17). *Тогда левые части* (1.18) *и* (1.19) *принадлежат центру A, причем если одна из них равна* 1, *то и другая равна* 1.

Доказательство (ср. с доказательством предложения 1.1). Положим $g = \sum_i X_i \beta S(Y_i) \alpha Z_i$, $h = \sum_j S(P_j) \alpha Q_j \beta S(R_j)$, где $\sum_i X_i \otimes \otimes Y_i \otimes Z_i = \Phi$, $\sum_j P_j \otimes Q_j \otimes R_j = \Phi^{-1}$. Применив к обеим частям равенства $(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a)) \cdot \Phi^{-1} = \Phi^{-1} \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(a))$, $a \in A$, k-линейное отображение $A \otimes A \otimes A \to A$, переводящее $b \otimes c \otimes d$ в $S(b) \alpha c \beta S(d)$, получим, что h централен. Применив к равенству $\Phi \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a)) = (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(a)) \cdot \Phi$ отображение $b \otimes c \otimes d \mapsto b \beta S(c) \alpha d$, получим, что g централен. Применив к (1.21) отображение $b \otimes c \otimes d \otimes e \mapsto S(b) \times \times \alpha c \beta S(d) \alpha e$, получим, что $\alpha g = h \alpha$. Отсюда и из центральности g, h следует, что $fg = fh$ при $f \in A \alpha A$. Полагая $f = g$ и $f = h$, получим $g^2 = = gh = h^2$. Поэтому $g = 1 \Leftrightarrow h = 1$. ●

Предложение 1.4. *Пусть $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ — квазибиалгебра. Предположим, что существуют антиавтоморфизмы S, $\bar{S}$ алгебры A и элементы $\bar{\alpha}$, $\beta \in A$ такие, что* 1) *если $a \in A$, $\Delta(a) = \sum_i b_i \otimes c_i$, то $\sum_i \bar{S}(b_i) \bar{\alpha} c_i = = \varepsilon(a) \bar{\alpha}$, $\sum_i b_i \beta S(c_i) = \varepsilon(a) \beta$;* 2) *элемент $u = \sum_i \bar{S}(P_i) \bar{\alpha} Q_i \beta S(R_i)$ обратим, где $\sum_i P_i \otimes Q_i \otimes R_i = \Phi^{-1}$. Тогда $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ — квазихопфова алгебра.*

Доказательство. Рассуждая, как при доказательстве предложения 1.1, получим, что $uS(a) = \bar{S}(a)u$ при $a \in A$, откуда $S(a) u^{-1} = = u^{-1} \bar{S}(a)$. Положим $\alpha = u^{-1} \bar{\alpha}$. Тогда $\sum_i S(P_i) \alpha Q_i \beta S(R_i) = 1$, а если $a \in A$, $\Delta(a) = \sum_i b_i \otimes c_i$, то $\sum_i S(b_i) \alpha c_i = \varepsilon(a) \alpha$. Итак, S, α, β удовлетворяют (1.17) и (1.19), а значит, и (1.18) (см. предложение 1.3). ●

Предложение 1.5. *Пусть $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ — квазихопфова алгебра, а S, α, β удовлетворяют* (1.17) — (1.19). *Определим w, $\tilde{w} \in A \otimes A$ формулами $w = \sum_j S(P_j) \alpha Q_j \otimes R_j$, $\tilde{w} = \sum_i Y_i S^{-1}(\beta) S^{-1}(X_i) \otimes Z_i$, где $\sum_j P_j \otimes Q_j \otimes R_j = \Phi^{-1}$, $\sum_i X_i \otimes Y_i \otimes Z_i = \Phi$. Обозначим через J_l и J_r левый и правый идеалы в $A \otimes A$, натянутые на $\Delta(\mathrm{Ker}\, \varepsilon)$. Тогда* 1) *$k$-линейные отображения φ, $\tilde{\varphi} : A \otimes A \to A \otimes A$, заданные формулами $\varphi(a \otimes \otimes b) = (a \otimes 1) w \Delta(b)$, $\tilde{\varphi}(a \otimes b) = \Delta(b) \tilde{w}(a \otimes 1)$, биенктивны;* 2а) *отображение $a \otimes b \mapsto (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\varphi^{-1}(a \otimes b))$ индуцирует биекцию $(A \otimes \otimes A)/J_l \to A$;* 2б) *$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\varphi^{-1}(a \otimes b)) = a \beta S(b)$;* 3а) *отображение $a \otimes \otimes b \mapsto (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\tilde{\varphi}^{-1}(a \otimes b))$ индуцирует биекцию $(A \otimes A)/J_r \to A$;* 3б) *$(\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(\tilde{\varphi}^{-1}(a \otimes b)) = S^{-1}(b) S^{-1}(\alpha) a$.*

Доказательство. Утверждения 2а) и 3а) вытекают из 1), а 1), 2б) и 3б) легко выводятся из формул

$$(S \otimes \mathrm{id}) \tilde{\varphi} (S^{-1} \otimes \mathrm{id}) \varphi = \mathrm{id}, \tag{1.39}$$

$$(S^{-1} \otimes \mathrm{id}) \varphi (S \otimes \mathrm{id}) \tilde{\varphi} = \mathrm{id}, \tag{1.40}$$

(1.40) следует из (1.39), так как если умножение в A заменить противоположной операцией, то S заменится на S^{-1}, а φ на $\tilde{\varphi}$ (см. замечание 4 после

определения квазихопфовой алгебры). Остается доказать (1.39). Легко проверить, что $((S \otimes \mathrm{id})\, \tilde{\varphi}\, (S^{-1} \otimes \mathrm{id}))\,(u) = ((\mathrm{id} \otimes \Delta)\,(u) \cdot \Phi) \circ (\beta \otimes 1)$, где $u \in A \otimes A$, а $\circ$ обозначает следующую структуру $(A \otimes A \otimes A)$-модуля на $A \otimes A$: $(a \otimes b \otimes c) \circ (d \otimes e) = adS\,(b) \otimes ce$. Поэтому $(S \otimes \otimes \mathrm{id})\, \tilde{\varphi}\, (S^{-1} \otimes \mathrm{id})\, \varphi\, (a \otimes b) = ((a \otimes 1 \otimes 1) \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta)\,(w) \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta) \times \times (\Delta\,(b)) \cdot \Phi) \circ (\beta \otimes 1) = ((a \otimes 1 \otimes 1) \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta)\,(w) \cdot \Phi \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id}) \times \times (\Delta\,(b))) \circ (\beta \otimes 1) = ((a \otimes 1 \otimes 1) \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta)\,(w) \cdot \Phi) \circ (\beta \otimes b) = (a \otimes 1) \times \times v \cdot (1 \otimes b)$, где $v = ((\mathrm{id} \otimes \Delta)\,(w) \cdot \Phi) \circ (\beta \otimes 1)$. Имеем $v = \psi\,((\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \otimes \Delta)\,(\Phi^{-1}) \cdot (1 \otimes \Phi))$, где $\psi : A \otimes A \otimes A \otimes A \to A \otimes A$ переводит $c \otimes \otimes d \otimes e \otimes f$ в $S\,(c)\, \alpha\, d\beta S\,(e) \otimes f$. Так как $(\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)\,(\Phi^{-1}) \cdot (1 \otimes \Phi) = (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})\,(\Phi) \cdot (\Phi^{-1} \otimes 1) \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})\,(\Phi^{-1})$, то $v = 1$. ●

Теорема 1.6. *Пусть A — квазибиалгебра над k, являющаяся плоским k-модулем, I — нильпотентный идеал в k. Если A/IA — квазихопфова алгебра над k/I, то A — квазихопфова алгебра над k.*

Доказательство. Положим $B = A/IA$. Антиавтоморфизм B, о котором идет речь в определении квазихопфовой алгебры, обозначим S_B. Аналогичный смысл имеют α_B, $\beta_B \in B$. Определим, как в предложении 1.5, w_B, $\tilde{w}_B \in B \otimes B$. Поднимем w_B, $\tilde{w}_B$ до v, $\tilde{v} \in A \otimes A$. Тогда k-линейные отображения ψ, $\tilde{\psi} : A \otimes A \to A \otimes A$, заданные формулами $\psi\,(a \otimes b) = (a \otimes 1)\, v\Delta\,(b)$, $\tilde{\psi}\,(a \otimes b) = \Delta\,(b)\, \tilde{v}\,(a \otimes 1)$, биективны. Это вытекает из предложения 1.5 и следующей леммы.

Лемма. *Пусть $f : M \to N$ — морфизм плоских k-модулей, индуцирующий изоморфизм $\bar{f} : M/IM \to N/IN$. Тогда f биективен.*

Доказательство. Сюръективность f очевидна. Так как N плосок, то $(\mathrm{Ker}\, f)/I \cdot (\mathrm{Ker}\, f) = \mathrm{Ker}\, \bar{f} = 0$, откуда $\mathrm{Ker}\, f = 0$. ●

Отображение $a \otimes b \mapsto (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)\ (\psi^{-1}\,(a \otimes b))$ индуцирует биекцию $g : (A \otimes A)/J_l \to A$, где J_l означает то же, что в предложении 1.5. С помощью g перенесем на A структуру $(A \otimes A)$-модуля, имеющуюся на $(A \otimes A)/J_l$. Так как $a \otimes 1 \in A \otimes A$ действует на A, как умножение слева на a, то $1 \otimes b \in A \otimes A$ действует на A, как умножение справа на $S\,(b)$, где S — некоторый антигомоморфизм $A \to A$. Так как $S\,(\mathrm{mod}\ IA) = S_B$ (см. утверждение 2б) предложения 1.5), то из леммы следует биективность S. Положим $\beta = g\,(1)$. Тогда $\sum\limits_i b_i \beta S\,(c_i) = \varepsilon\,(a)\, \beta$, если $a \in A$, $\sum\limits_i b_i \otimes c_i = \Delta\,(a)$, а из утверждения 2б) предложения 1.5 следует, что $\beta\,(\mathrm{mod}\ IA) = \beta_B$.

Аналогично, используя биективность $\tilde{\psi}$, строятся антиавтоморфизм $\sigma : A \to A$ и элемент $\gamma \in A$ такие, что $\sigma\,(\mathrm{mod}\ IA) = S_B^{-1}$, $\gamma\,(\mathrm{mod}\ IA) = S_B^{-1}\,(\alpha_B)$ и $\sum\limits_i \sigma\,(c_i)\, \gamma b_i = \varepsilon\,(a)\, \gamma$, если $a \in A$, $\sum\limits_i b_i \otimes c_i = \Delta\,(a)$. Положим $\bar{S} = \sigma^{-1}$, $\bar{\alpha} = \bar{S}\,(\gamma)$. Тогда $\bar{S}\,(\mathrm{mod}\ IA) = S_B$, $\bar{\alpha}\,(\mathrm{mod}\ IA) = \alpha_B$, $\sum\limits_i \bar{S}\,(b_i)\, \bar{\alpha} c_i = \varepsilon\,(a)\, \bar{\alpha}$ при $a \in A$, $\sum\limits_i b_i \otimes c_i = \Delta\,(a)$. Положим $u = \sum\limits_i \bar{S}\,(P_i)\, \bar{\alpha} Q_i \beta S\,(R_i)$, где $\sum\limits_i P_i \otimes Q_i \otimes R_i = \Phi^{-1}$. Так как $u \equiv 1$ $(\mathrm{mod}\ IA)$, то u обратим. Остается применить предложение 1.4. ●

§ 2. Квазилиевы биалгебры

В этом параграфе мы предполагаем для простоты, что k — поле характеристики 0.

Напомним (см. § 3 из [2]), что биалгебра Ли над k — это k-алгебра Ли $\mathfrak{g}$, снабженная 1-коциклом $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, определяющим на $\mathfrak{g}$

структуру коалгебры Ли. Последнее означает, что $\delta(\mathfrak{g}) \subset \bigwedge^2\mathfrak{g}$ и выполнено коякобиево тождество $\mathrm{Alt}(\delta \otimes \mathrm{id})\,\delta = 0$, где $\mathrm{Alt}: \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \otimes \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ — альтернирование. Слова «1-коцикл» означают, что δ линейно над k и $\delta([x, y]) = [x \otimes 1 + 1 \otimes x, \delta(y)] - [y \otimes 1 + 1 \otimes y, \mathfrak{g}(x)]$.

Биалгебры Ли — классические аналоги алгебр Хопфа. Чтобы объяснить (частично) смысл этих слов, введем некоторые определения. Назовем QUE-алгеброй Хопфа над $k[[h]]$ топологическую алгебру Хопфа A над $k[[h]]$ такую, что 1) алгебра Хопфа A/hA является универсальной обертывающей алгеброй; 2) A, как топологический $k[[h]]$-модуль, изоморфен $V[[h]]$ для некоторого векторного пространства V над k (базу окрестностей нуля в $V[[h]]$ образуют $h^nV[[h]]$, $n \in \mathbb{N}$). Поясним, что а) QUE — сокращение от «quantized universal enveloping»; б) в [2] QUE-алгебры Хопфа называются просто QUE-алгебрами; в) слова «топологическая алгебра Хопфа» означают, в частности, что коумножение Δ отображает A в *пополненное* тензорное произведение $A \hat{\otimes} A$; г) так как $\mathrm{char}\, k = 0$, то алгебра Ли $\mathfrak{g}$ над k такая, что $A/hA = U\mathfrak{g}$, единственна, а именно $\mathfrak{g} = \{a \in A/hA \mid \Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a\}$. Оказывается [2], что если A — это QUE-алгебра Хопфа, $A/hA = U\mathfrak{g}$, то на $\mathfrak{g}$ возникает структура биалгебры Ли: кокоммутатор $\delta: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ определяется формулой $\delta(x) = h^{-1}(\Delta(a) - \Delta'(a)) \bmod h$, где a — прообраз x в A, а $\Delta': A \to A \hat{\otimes} A$ — противоположное коумножение. Биалгебра Ли $(\mathfrak{g}, \delta)$ называется классическим пределом A, а A — квантованием $(\mathfrak{g}, \delta)$.

Введем теперь классические аналоги квазихопфовых алгебр.

О п р е д е л е н и е. Квазилиева биалгебра — это тройка $(\mathfrak{g}, \delta, \varphi)$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли, δ — это 1-коцикл $\mathfrak{g} \to \bigwedge^2\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, $\varphi \in \bigwedge^3\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, причем должны выполняться равенства

$$\frac{1}{2}\mathrm{Alt}(\delta \otimes \mathrm{id})\,\delta(x) = [x \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes x \otimes 1 + 1 \otimes 1 \otimes x, \varphi], \quad x \in \mathfrak{g}, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{Alt}(\delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\varphi) = 0. \tag{2.2}$$

Поясним, что в определение оператора $\mathrm{Alt}: \mathfrak{g}^{\otimes n} \to \mathfrak{g}^{\otimes n}$ мы не вводим множителя $(n!)^{-1}$.

З а м е ч а н и я. 1) Квазилиевы и лиевы биалгебры не являются биалгебрами в смысле § 1.

2) Для любого 1-коцикла $\delta: \mathfrak{g} \to \bigwedge^2\mathfrak{g}$ отображение $\mathrm{Alt} \circ (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \delta: \mathfrak{g} \to \bigwedge^3\mathfrak{g}$ тоже является 1-коциклом. (2.1) означает, что $\frac{1}{2}\mathrm{Alt} \circ (\delta \otimes \mathrm{id}) \circ \delta$ — кограница φ.

3) Пусть e_i — базис в $\mathfrak{g}$, $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, $\delta(e_i) = f_i^{jk} e^j \otimes e^k$, $\varphi = \varphi^{ijk} e_i \otimes e_j \otimes e_k$ (здесь и в дальнейшем подразумевается суммирование по повторяющимся индексам). Тогда аксиомы квазилиевой биалгебры означают, что

$$c_{ij}^k = -c_{ji}^k, \; f_i^{jk} = -f_i^{kj}, \; \varphi^{ijk} = -\varphi^{jik} = -\varphi^{ikj}, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{Alt}_{i,j,k}\, c_{ij}^r c_{rk}^l = 0, \; c_{rs}^k f_k^{ij} = \mathrm{Alt}_{r,s}\, \mathrm{Alt}_{i,j}\, c_{ar}^i f_s^{ja}, \tag{2.4}$$

$$\mathrm{Alt}_{i,j,k}\left(f_r^{ij} f_l^{rk} - c_{lm}^k \varphi^{ijm}\right) = 0, \quad \mathrm{Alt}_{i,j,k,l}\, f_r^{ij}\varphi^{rkl} = 0. \tag{2.5}$$

Пусть $(\mathfrak{g}, \delta, \varphi)$ — квазилиева биалгебра, $r \in \bigwedge^2\mathfrak{g}$. Положим

$$\bar{\delta}(x) = \delta(x) + [x \otimes 1 + 1 \otimes x, r], \tag{2.6}$$

$$\bar{\varphi} = \varphi + \frac{1}{2}\operatorname{Alt}(\delta \otimes \mathrm{id})\, r - \langle r, r\rangle, \tag{2.7}$$

где $\langle r, r\rangle = [r^{12}, r^{13}] + [r^{12}, r^{23}] + [r^{13}, r^{23}]$ — левая часть классического уравнения Янга—Бакстера (см. § 4 из [2]). Тогда нетрудно проверить, что $(\mathfrak{g}, \bar{\delta}, \bar{\varphi})$ — квазилиева биалгебра. Будем говорить, что $(\mathfrak{g}, \bar{\delta}, \bar{\varphi})$ получается из $(\mathfrak{g}, \delta, \varphi)$ *скручиванием посредством* r. Скручивание посредством $r_1 + r_2$ равносильно скручиванию посредством сначала r_1, а затем r_2.

Определение. Квазихопфова QUE-алгебра над $k[[h]]$ — это топологическая квазихопфова алгебра $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ над $k[[h]]$ такая, что 1) $\Phi \equiv 1 \bmod h$, 2) алгебра Хопфа A/hA является универсальной обертывающей алгеброй, 3) A, как топологический $k[[h]]$ — модуль, изоморфен $V[[h]]$ для некоторого векторного пространства V над k, 4) $\operatorname{Alt}\Phi \equiv \equiv 0 \bmod h^2$. Скручивание квазихопфовых QUE-алгебр определяется формулами (1.11), (1.12), где $F \equiv 1 \bmod h$, $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(F) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(F) = 1$.

Легко видеть, что условие $\operatorname{Alt}\Phi \equiv 0 \bmod h^2$ сохраняется при скручивании.

Предложение 2.1. *Пусть $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ — квазихопфова QUE-алгебра, $A/hA = U\mathfrak{g}$. Тогда*

1) *скручиванием можно добиться, чтобы $\Phi \equiv 1 \bmod h^2$;*

2) *если $\Phi \equiv 1 \bmod h^2$, то, положив $\varphi = h^{-2}\operatorname{Alt}\Phi \bmod h$ и определив $\delta: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ так же, как в случае, когда A является QUE-алгеброй Хопфа, получим на $\mathfrak{g}$ структуру квазилиевой биалгебры;*

3) *если $(A, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \tilde{\Phi})$ получается из $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ скручиванием посредством F, причем $\tilde{\Phi} \equiv \Phi \equiv 1 \bmod h^2$, то квазилиева биалгебра $(\mathfrak{g}, \tilde{\delta}, \tilde{\varphi})$, соответствующая $(A, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \tilde{\Phi})$, получается из $(\mathfrak{g}, \delta, \varphi)$ скручиванием посредством $r = -h^{-1}\operatorname{Alt} F \bmod h$.*

Для доказательства предложения 2.1 нам понадобятся сведения о когомологиях H^n комплекса

$$0 \to k \xrightarrow{d_0} U\mathfrak{g} \xrightarrow{d_1} U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \xrightarrow{d_2} U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \xrightarrow{d_3} \ldots, \tag{2.8}$$

где $d_n = d_n^0 - d_n^1 + \ldots + (-1)^{n+1} d_n^{n+1}$, $d_n^i(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = a_1 \otimes \ldots \otimes a_{i-1} \otimes \Delta(a_i) \otimes a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n$ при $1 \leqslant i \leqslant n$, $d_n^0(x) = 1 \otimes x$, $d_n^{n+1}(x) = x \otimes 1$. Отметим, что H^n являются также когомологиями комплекса

$$0 \to B^0 \xrightarrow{d_0} B^1 \xrightarrow{d_1} B^2 \xrightarrow{d_2} B^3 \xrightarrow{d_3} \ldots, \tag{2.8a}$$

где $B^n = \operatorname{Ker} s_n^1 \cap \ldots \cap \operatorname{Ker} s_n^n$, $s_n^i(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \varepsilon(a_i)\, a_1 \otimes \ldots \ldots a_{i-1} \otimes a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n$ (это следует из того, что k-модули $(U\mathfrak{g})^{\otimes n}$ образуют косимплициальный k-модуль, в котором d_n^i — операторы граней, а s_n^i — операторы вырождения). Так как $d_n(\mathfrak{g}^{\otimes n}) = 0$, то возникает отображение $\mathfrak{g}^{\otimes n} \to H^n$. Его ограничение на $\bigwedge^n\mathfrak{g}$ обозначим μ.

Предложение 2.2. 1) *μ — изоморфизм.*

2) *$\operatorname{Alt}: (U\mathfrak{g})^{\otimes n} \to (U\mathfrak{g})^{\otimes n}$ отображает коциклы в $\bigwedge^n\mathfrak{g}$, а кограницы в 0. Возникающее в силу этого отображение $H^n \to \bigwedge^n\mathfrak{g}$ равно $n!\mu^{-1}$.*

Схема доказательства. Нетривиальна лишь сюръективность μ. Так как $U\mathfrak{g}$, как коалгебра, изоморфна (см. [15], гл. II, § 1, предложение 9) симметрической алгебре $\mathrm{Sym}^*\,\mathfrak{g}$ с обычным коумноже-

нием, то доказательство сюръективности сводится к аналогичному утверждению о комплексе

$$0 \to k \to \mathrm{Sym}^* \mathfrak{g} \to \mathrm{Sym}^* \mathfrak{g} \otimes \mathrm{Sym}^* \mathfrak{g} \to \ldots, \tag{2.9}$$

которое хорошо известно (в сущности это основная лемма теории формальных групп над кольцом характеристики 0). Его можно доказать, например, заметив, что m-я однородная компонента комплекса (2.9) (относительно градуировки, индуцированной обычной градуировкой $\mathrm{Sym}^* \mathfrak{g}$) изоморфна $\mathfrak{g}^{\otimes m} \otimes_{S_m} \mathrm{Ker}\,(C^*(I^m) \to C^*(\partial I^m))$, где S_m — симметрическая группа, I — отрезок, рассматриваемый как симплициальное множество (см. [16], гл. II, § 2.5), ∂I^m — граница куба I^m, а C^* обозначает коцепной комплекс симплициального множества. ●

Доказательство предложения 2.1. Утверждение 1) следует из предложения 2.2. Докажем 2). Из предложения 2.2 следует, что $\varphi \in \bigwedge^3 \mathfrak{g} \subset U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$. Покажем, что $\delta(\mathfrak{g}) \subset \bigwedge^2 \mathfrak{g}$, так что δ корректно определено как отображение $\mathfrak{g} \to \bigwedge^2 \mathfrak{g}$. Формула $\delta(x) = h^{-1}(\Delta(a) - \Delta'(a)) \bmod h$, где a — прообраз x в A, определяет δ как отображение $U\mathfrak{g} \to \bigwedge^2 (U\mathfrak{g})$. Так как $\Phi \equiv 1 \bmod h^2$, то Δ коассоциативно $\bmod h^2$. Поэтому $(\Delta \otimes \mathrm{id})\,\delta(x) = (\mathrm{id} \otimes \delta)\,\Delta(x) + \sigma_{23}(\delta \otimes \mathrm{id}) \times \Delta(x)$, $x \in U\mathfrak{g}$, где σ_{23} переставляет второй и третий сомножители в $U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$. В частности, если $x \in \mathfrak{g}$, то $(\Delta \otimes \mathrm{id})\,\delta(x) = 1 \otimes \delta(x) + \sigma_{23}(\delta(x) \otimes 1)$, т. е. $\delta(x) \in \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$. Итак, $\delta(\mathfrak{g}) \subset (\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}) \cap \bigwedge^2 (U\mathfrak{g}) = \bigwedge^2 \mathfrak{g}$. Если $x, y \in U\mathfrak{g}$, то $\delta(xy) = \delta(x)\,\Delta(y) + \Delta(x)\,\delta(y)$, откуда $\delta([x, y]) = [\Delta(x), \delta(y)] - (\Delta(y), \delta(x)]$. Поэтому $\delta : \mathfrak{g} \to \bigwedge^2 \mathfrak{g}$ является 1-коциклом. (2.1) следует из равенства $\frac{1}{2}\,\mathrm{Alt}\,(\delta \otimes \mathrm{id})\,\delta(\bar a) = h^{-2}\,\mathrm{Alt}\,((\Delta \otimes \mathrm{id})\,\Delta(a) - (\mathrm{id} \otimes \Delta)\,\Delta(a)) \bmod h$, где $a \in A$, $\bar a$ — образ a в $U\mathfrak{g}$. Наконец, для доказательства (2.2) достаточно проальтернировать по x, y, z, u вытекающее из (1.8) равенство $\psi(x, y, z * u) + \psi(x * y, z, u) = \psi(y, z, u) + \psi(x, y * z, u) + \psi(x, y, z)$, где $\psi = h^{-2}(\Phi - 1) \bmod h^2$, а x, y, z, u, $*$ означают то же, что в (1.8).

Докажем 3). Пусть $v = h^{-1}(F - 1)$, $\bar v$ — класс вычетов $v \bmod h$. Тогда $r = -\mathrm{Alt}\,\bar v$. Так как $\Phi \equiv \tilde\Phi \bmod h^2$, то

$$v(y, z) + v(x, y * z) - v(x * y, z) - v(x, y) \equiv 0 \bmod h, \tag{2.10}$$

т. е. $\bar v$ является 2-мерным коциклом комплекса (2.8). Поэтому из предложения 2.2 следует, что $r \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}$. Равенство (2.6) проверяется без труда. Учитывая (2.10), получим $\tilde\Phi(x, y, z) - \Phi(x, y, z) \equiv h\,\{v(y, z) + v(x, y * z) - v(x * y, z) - v(x, y)\} + h^2\,\{v(y, z)\,v(x, y * z) - v(x, y) \times v(x * y, z)\} \bmod h^3$, так что $\tilde\varphi(x, y, z) - \varphi(x, y, z) = \frac{1}{2} \mathop{\mathrm{Alt}}\limits_{x, y, z} \{h^{-1} \times [v(x, y * z) - v(x, z * y)] - h^{-1}[v(x * y, z) - v(y * x, z)]\} \times \bmod h + \mathop{\mathrm{Alt}}\limits_{x, y, z} \{\bar v(y, z)\,\bar v(x, y * z) - \bar v(x, y)\,\bar v(x * y, z)\}$. Отсюда нетрудно вывести (2.7). ●

В ситуации предложения 2.1 будем называть $(\mathfrak{g}, \delta, \varphi)$ *классическим пределом* $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$, а $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ — *квантованием* $(\mathfrak{g}, \delta, \varphi)$.

Напомним взаимно однозначное соответствие между биалгебрами Ли и тройками Манина [2]. Для простоты ограничимся сначала конечномерным случаем. Тройка Манина — это набор $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$, где $\mathfrak{p}$ — метризованная алгебра Ли (т. е. алгебра Ли, на которой задана невырожденная инвариантная симметричная билинейная форма), а $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}$ — изотропные подалгебры Ли такие, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \otimes \mathfrak{p}_2$. В этой ситуации $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2$ —

лагранжевы подпространства в $\mathfrak{g}$ (т. е. $\mathfrak{p}_i^\perp = \mathfrak{p}_i$), причем $\mathfrak{p}_2$ канонически изоморфно $\mathfrak{p}_1^*$. Если $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ — тройка Манина, а $\delta : \mathfrak{p}_1 \to \mathfrak{p}_1 \otimes \mathfrak{p}_1$ — отображение, двойственное коммутаторному отображению $\mathfrak{p}_2 \otimes \mathfrak{p}_2 \to \mathfrak{p}_2$, то $(\mathfrak{p}_1, \delta)$ — биалгебра Ли. Обратно, если $(\mathfrak{g}, \delta)$ — биалгебра Ли, то положим $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}_2 = \mathfrak{g}^*$, введем в $\mathfrak{p}$ естественное скалярное произведение и возьмем $\delta^* : \mathfrak{g}^* \otimes \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ в качестве коммутатора в $\mathfrak{g}^*$. Тогда можно единственным образом определить $[x, l]$ при $x \in \mathfrak{g}$, $l \in \mathfrak{g}^*$ так, чтобы $\mathfrak{p}$ была алгеброй Ли, а скалярное произведение в $\mathfrak{p}$ было инвариантным. Если e_i — базис в $\mathfrak{g}$, e^i — двойственный базис в $\mathfrak{g}^*$, $[e_i, e_j] = c_{ij}^k e_k$, $\delta(e_i) = f_i^{jk} e^j \otimes e^k$, то базис в $\mathfrak{p}$ образуют e_i и e^i, причем

$$(e_i, e^j) = \delta_i^j, \ (e_i, e_j) = 0, \ (e^i, e^j) = 0, \tag{2.11}$$

$$[e^i, e^j] = f_k^{ij} e^k, \tag{2.12}$$

$$[e_i, e^j] = f_i^{jk} e_k + c_{li}^j e^l. \tag{2.13}$$

Пусть теперь $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$ имеют прежний смысл, а $\mathfrak{p}_2 \subset \mathfrak{p}$ — лагранжево подпространство (но, вообще говоря, не подалгебра) такое, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2$. Коммутатор $\mathfrak{p}_2 \otimes \mathfrak{p}_2 \to \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 \oplus \mathfrak{p}_2$ имеет 2 компоненты: $\mathfrak{p}_2 \otimes \mathfrak{p}_2 \to \mathfrak{p}_2$ и $\mathfrak{p}_2 \otimes \mathfrak{p}_2 \to \mathfrak{p}_1$. Первая компонента, как и прежде, определяет отображение $\delta : \mathfrak{p}_1 \to \mathfrak{p}_1 \otimes \mathfrak{p}_1$, а вторая — элемент $\psi \in \mathfrak{p}_1 \otimes \mathfrak{p}_1 \otimes \mathfrak{p}_1$. Положим $\varphi = -\psi$. Нетрудно проверить, что 1) $(\mathfrak{p}_1, \delta, \varphi)$ — квазилиева биалгебра; 2) построенное соответствие между тройками $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ указанного вида и квазилиевыми биалгебрами взаимно однозначно; 3) изменение $\mathfrak{p}_2$ при фиксированных $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}_1$ эквивалентно скручиванию соответствующей квазилиевой биалгебры; 4) в квазилиевых случаях (2.11) и (2.13) остаются в силе, а (2.12) заменяется формулой

$$[e^i, e^j] = f_k^{ij} e^k - \varphi^{ijl} e_l, \tag{2.14}$$

где f_k^{ij}, φ^{ijl} означают то же, что в (2.3) — (2.5). Так как лагранжево подпространство всегда обладает лагранжевым дополнением, то задание квазилиевой биалгебры с точностью до скручивания эквивалентно заданию *пары Манина*, т. е. пары $(\mathfrak{p}, \mathfrak{g})$, где $\mathfrak{p}$ — метризованная алгебра Ли, $\mathfrak{g}$ — ее лагранжева подалгебра.

До сих пор все алгебры Ли предполагались конечномерными. Если же $\dim \mathfrak{g} = \infty$, то $\mathfrak{g}^*$ естественно рассматривать как топологическое векторное пространство, в котором базу окрестностей нуля образуют $W^\perp$, где $W \subset \mathfrak{g}$ — конечномерные подпространства. При этом $\mathfrak{g}^*$ линейно компактно (т. е. $\mathfrak{g}^*$ — проективный предел конечномерных дискретных пространств), а $\mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$ локально линейно компактно (т. е. обладает открытым линейно компактным подпространством). Нетрудно показать, что если $\mathfrak{p}$ предполагать локально линейно компактным, $\mathfrak{p}_1$ дискретным, $\mathfrak{p}_2$ открытым, а невырожденность скалярного произведения в $\mathfrak{p}$ понимать в топологическом смысле ($\mathfrak{p} \to \mathfrak{p}^*$ — топологический изоморфизм), то сформулированные выше утверждения о связи между квазилиевыми (соответственно лиевыми) биалгебрами и парами (соответственно тройками) Манина останутся в силе и в бесконечномерном случае.

Пример. Пусть X — связная компактная риманова поверхность, E — поле мероморфных функций на X, A — кольцо аделей E. Зафиксируем абсолютно простую конечномерную алгебру Ли $\mathfrak{g}$ над E и мероморфный дифференциал ω на X, $\omega \neq 0$. Положим $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \underset{E}{\otimes} A$. Рассмотрим $\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{p}$ как алгебры над $\mathbb{C}$ и введем в $\mathfrak{p}$ скалярное произведение $(u,$

$v) = \sum_{x \in X} \mathrm{res}_x \{\omega \cdot \mathrm{Tr}\, \rho(u_x)\, \rho(v_x)\}$, где $u, \ v \in \mathfrak{p} = \mathfrak{g} \underset{E}{\otimes} A, \quad \rho: \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}l \times \times (n, \ E)$ — точное представление, а u_x — это x-компонента u. Тогда $(\mathfrak{p}, \mathfrak{g})$ — пара Манина. Как объяснено в § 4 из [2], ее нельзя дополнить до тройки Манина, если род X больше 1 (это связано с тем, что тройки Манина рассматриваемого вида соответствуют невырожденным решениям классического уравнения Янга—Бакстера).

Полученный класс пар Манина можно несколько расширить, заметив, что если $(\mathfrak{p}, \mathfrak{g})$ — пара Манина, а $\mathfrak{c}$ — открытая подалгебра в $\mathfrak{p}$ такая, что $\mathfrak{c} \supset \mathfrak{c}^{\perp}$, то, положив $\mathfrak{p}' = \mathfrak{c}/\mathfrak{c}^{\perp}$, $\mathfrak{g}' = ((\mathfrak{g} \cup \mathfrak{c}) + \mathfrak{c}^{\perp})/\mathfrak{c}^{\perp}$, мы снова получим пару Манина. В приведенном выше примере можно, например, положить $\mathfrak{c} = (\mathfrak{g} \underset{E}{\otimes} A_S) \times L$, где L — открытая лагранжева подалгебра в $\mathfrak{g} \underset{E}{\otimes} A_S$ (здесь $S \subset X$, $S \neq \varnothing$, A^S — кольцо аделей без S-компонент, $A_S = A^{X/S}$). Тогда $\mathfrak{p}' = \mathfrak{g} \underset{E}{\otimes} A_S$, $\mathfrak{g}' \simeq \mathfrak{g} \cap \mathfrak{c}$. Конечно, надо еще позаботиться о существовании L. Для этого достаточно, чтобы $S \supset \supset S_1 \cup S_2$, где S_1 — множество нулей и полюсов ω, а S_2 — множество точек ветвления наименьшего расширения $E' \supset E$ такого, что алгебра $\mathfrak{g} \underset{E}{\otimes} E'$ расщепима. Действительно, в этом случае существует изоморфизм $f: \mathfrak{g} \underset{E}{\otimes} A^S \xrightarrow{\sim} \mathfrak{a} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} A^S$, где $\mathfrak{a}$ — конечномерная простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, и можно положить $L = f^{-1}(\mathfrak{a} \underset{\mathbb{C}}{\otimes} O^S)$, где $O^S \subset A^S$ — кольцо целых аделей.

Следовало бы изучить вопрос о квантовании квазилиевых биалгебр, соответствующих парам Манина описанного выше типа. Этот класс квазилиевых биалгебр, в частности, содержит (см. [2], § 3, 4) алгебры $\mathfrak{a}[u]$ (где $\mathfrak{a}$ — простая алгебра Ли над $\mathbb{C}$, $\dim \mathfrak{a} < \infty$) со структурой биалгебры Ли, определяемой рациональными решениями классического уравнения Янга—Бакстера, и аффинные алгебры Ли со структурой биалгебры Ли, определяемой тригонометрическими решениями. Для этих биалгебр квантование известно (см. [2], § 6).

§ 3. Квазитреугольные, треугольные и когранйчные квазихопфовы алгебры

Напомним определения квазитреугольной, треугольной и когранйчной алгебр Хопфа, предложенные в § 10 из [2]. Во всех трех случаях речь идет о паре (A, R), где A — алгебра Хопфа, R — обратимый элемент $A \otimes A$ такой, что

$$\Delta'(a) = R\Delta(a) R^{-1}, \quad a \in A, \tag{3.1}$$

где Δ' — противоположное коумножение. При этом R должен обладать некоторыми дополнительными свойствами: в квазитреугольном случае должны выполняться равенства

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = R^{13}R^{23}, \ (\mathrm{id} \otimes \Delta)(R) = R^{13}R^{12}, \tag{3.2}$$

в треугольном случае наряду с (3.2) должно выполняться «условие унитарности» $R^{21} = R^{-1}$, а в когранйчном случае должны выполняться равенства $R^{21} = R^{-1}$, $(\varepsilon \otimes \varepsilon)(R) = 1$, а также

$$R^{12} \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id})(R) = R^{23} \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta)(R). \tag{3.3}$$

Здесь используется следующая система обозначений: если $R = \sum_i a_i \otimes b_i$, то $R^{12} = \sum_i a_i \otimes b_i \otimes 1$, $R^{13} = \sum_i a_i \otimes 1 \otimes b_i$, $R^{23} = \sum_i 1 \otimes a_i \otimes b_i$, $R^{21} = \sum_i b_i \otimes a_i$. Термины «треугольная», «квазитреугольная» объясняются тем, что в квазитреугольном случае R удовлетворяет (см. ниже) квантовому уравнению Янга—Бакстера

$$R^{12}R^{13}R^{23} = R^{23}R^{13}R^{12}, \tag{3.4}$$

называемому также квантовым уравнением треугольников. Термин «кограничная» мотивирован рассмотрением классического предела (см. [2], § 4, 10).

Что можно сказать о моноидальной категории A-mod для перечисленных выше типов алгебр Хопфа A? Если M и N — модули над A, то (3.1) позволяет определить изоморфизм A-модулей $c = c_{M,N} : M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M$, естественный по M и N, а именно $c_{M,N} = \sigma \circ R_{M,N}$, где $R_{M,N}$ — образ R в $\mathrm{End}_k (M \otimes N)$, а $\sigma : M \otimes N \xrightarrow{\sim} N \otimes M$ — обычный изоморфизм k-модулей. Если $R^{21} = R^{-1}$, то c инволютивен, т. е. $c_{N,M} \circ c_{M,N} = \mathrm{id}$. Если выполнено (3.2), то коммутативны диаграммы

$$\begin{tikzcd}
(M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & M_3 \otimes (M_1 \otimes M_2) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & (M_3 \simeq M_1) \otimes M_2 \\
M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3) \arrow[r, "\sim"] & M_1 \otimes (M_3 \otimes M_2) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & (M_1 \otimes M_3) \otimes M_2 \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd} \tag{3.5а}$$

$$\begin{tikzcd}
M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & (M_2 \otimes M_3) \otimes M_1 \arrow[r, phantom, "\simeq"] & M_2 \otimes (M_3 \otimes M_1) \\
(M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \arrow[r, "\sim"] & (M_2 \otimes M_1) \otimes M_3 \arrow[r, phantom, "\simeq"] & M_2 \otimes (M_1 \otimes M_3), \arrow[u, "\wr"']
\end{tikzcd} \tag{3.5б}$$

где $\xrightarrow{\sim}$ и $\simeq$ обозначают соответственно морфизм ассоциативности и морфизм коммутативности c. Если выполнено (3.3), то коммутативны диаграммы вида

$$\begin{tikzcd}
(M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & M_3 \otimes (M_1 \otimes M_2) \arrow[r, "\sim"] & M_3 \otimes (M_2 \otimes M_1) \arrow[d, "\wr"] \\
M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3) \arrow[r, "\sim"] & (M_2 \otimes M_3) \otimes M_1 \arrow[r, "\sim"] & (M_3 \otimes M_2) \otimes M_1.
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

Если $(\varepsilon \otimes \varepsilon)(R) = 1$, то $c_{k,k} = \mathrm{id}$. Наконец, если выполнено (3.4), то коммутативна диаграмма

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
M_1 \otimes (M_2 \otimes M_3) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d, "\wr"'] & M_1 \otimes (M_3 \otimes M_2) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & (M_1 \otimes M_3) \otimes M_2 \arrow[r, "\sim"] & (M_3 \otimes M_1) \otimes M_2 \arrow[d, "\wr"] \\
(M_1 \otimes M_2) \otimes M_3 \arrow[d, "\wr"'] & & & M_3 \otimes (M_1 \otimes M_2) \arrow[d, "\wr"] \\
(M_2 \otimes M_1) \otimes M_3 \arrow[d, "\wr"'] & & & M_3 \otimes (M_2 \otimes M_1) \arrow[d, "\wr"] \\
M_2 \otimes (M_1 \otimes M_3) \arrow[r, "\sim"] & M_2 \otimes (M_3 \otimes M_1) \arrow[r, phantom, "\simeq"] & (M_3 \otimes M_2) \otimes M_1 \arrow[r, "\sim"] & (M_3 \otimes M_2) \otimes M_1
\end{tikzcd} \tag{3.7}$$

Итак, если (A, R) — треугольная алгебра Хопфа, то диаграммы (3.5) коммутативны, а c инволютивен, т. е. A-mod является симметрической моноидальной категорией [9] или, в терминологии [14], тензорной категорией (отметим, что если c инволютивен, то коммутативность (3.5а) эквивалентна коммутативности (3.5б), аналогично, если $R^{21} = R^{-1}$, то левое

равенство (3.2) эквивалентно правому). Моноидальную категорию вместе с необязательно инволютивным морфизмом коммутативности таким, что (3.5а) и (3.5б) коммутативны, назовем квазитензорной категорией. К этому классу относятся категории модулей над квазитреугольными алгебрами Хопфа. Наконец, если (A, R) — кограничная алгебра Хопфа, то c инволютивен, $c_{k,k} = \mathrm{id}$, а диаграммы вида (3.6) коммутативны. Такие категории назовем *кограничными*.

Далее мы будем употреблять систему обозначений, использованную в (1.7)—(1.10). При этом (3.1) перепишется в виде

$$a\,(y * x) = R\,(x, y)\,a\,(x * y)\,R\,(x, y)^{-1}, \quad a \in A. \tag{3.8}$$

Определение. Квазитреугольная квазихопфова алгебра — это набор $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$, где $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ — квазихопфова алгебра, R — обратимый элемент $A \otimes A$, удовлетворяющий (3.8) и равенствам

$$R\,(x * y, z) = \Phi\,(z, x, y)\,R\,(x, z)\,\Phi\,(x, z, y)^{-1}\,R\,(y, z)\,\Phi\,(x, y, z), \tag{3.9а}$$

$$R\,(x, y * z) = \Phi\,(y, z, x)^{-1}\,R\,(x, z)\,\Phi\,(y, x, z)\,R\,(x, y)\,\Phi\,(x, y, z)^{-1}. \tag{3.9б}$$

Кограничные квазихопфовы алгебры определяются аналогично, но (3.9а) и (3.9б) заменяются равенством

$$R\,(x, y)\,R\,(x * y, z) = \Phi\,(z, y, x)\,R\,(y, z)\,R\,(x, y * z)\,\Phi\,(x, y, z) \tag{3.10}$$

вместе с соотношениями $R\,(y, x) = R\,(x, y)^{-1}$, $R\,(0, 0) = 1$. Квазитреугольная квазихопфова алгебра называется треугольной, если $R\,(y, x) = R\,(x, y)^{-1}$. Скручивание квазитреугольных, треугольных и кограничных квазихопфовых алгебр определяется формулами (1.11), (1.12) и формулой

$$\tilde{R}\,(x, y) = F\,(y, x)\,R\,(x, y)\,F\,(x, y)^{-1}, \tag{3.11}$$

где F — обратимый элемент $A \otimes A$ такой, что $F\,(x, 0) = 1 = F\,(0, y)$.

Нетрудно проверить, что категория модулей над квазитреугольной (соответственно треугольной, кограничной) квазихопфовой алгеброй является квазитензорной (соответственно тензорной, кограничной) категорией, если морфизм коммутативности определить так же, как в рассмотренном выше хопфовом случае. Нетрудно также проверить, что определение скручивания корректно (т. е. $(A, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \tilde{\Phi}, \tilde{R})$ удовлетворяет тем же аксиомам, что $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$) и что построенная в § 1 эквивалентность между моноидальными категориями C и $\tilde{C}$, соответствующими $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ и $(A, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \tilde{\Phi})$, согласована с морфизмами коммутативности.

Замечания. 1) если $R\,(y, x) = R\,(x, y)^{-1}$, то (3.9а) эквивалентно (3.9б).

2) Для всех трех типов квазихопфовых алгебр $R\,(x, 0) = 1 = R\,(0, y)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно в квазитреугольном случае положить в (3.9) $y = 0$, а в кограничном случае положить в (3.10) $y = 0$ и воспользоваться равенством $R\,(0, 0) = 1$. Аналогично доказывается, что в квазитензорных и кограничных категориях диаграммы вида

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\ k \otimes M \arrow[rr, "\sim"] & & M \otimes k \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & M \arrow[dl, "\sim"'] \arrow[dr, "\sim"] & \\ k \otimes M & & M \otimes k \arrow[ll, "\sim"'] \end{tikzcd}$$

коммутативны (квазитензорный случай рассмотрен в теореме 8 из [11]).

3) Если $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ — квазитреугольная алгебра Хопфа, то выполнено (3.10) и равенство

$$R(x, y)\,\Phi(z, x, y)\,R(x, z)\,\Phi(x, z, y)^{-1}\,R(y, z)\,\Phi(x, y, z) =$$

$$= \Phi(z, y, x)\,R(y, z)\,\Phi(y, z, x)^{-1}\,R(x, z)\,\Phi(y, x, z)\,R(x, y), \quad (3.12)$$

обобщающее (3.4) (в частности, треугольная квазихопфова алгебра является кограничной). Чтобы доказать (3.12), достаточно, воспользовавшись (3.9а), записать левую часть (3.12) в виде $R(x, y)\;R(x * y, z)$, правую — в виде $R(y * x, z)\;R(x, y)$, а затем применить (3.8). Равенство (3.10) непосредственно следует из (3.9) и (3.12).

4) У предыдущего замечания есть категорный аналог: в квазитензорной категории диаграммы (3.6) и (3.7) коммутативны.

В оставшейся части параграфа предполагается, что k — поле характеристики 0.

Определение. Квазитреугольная квазихопфова QUE-алгебра над $k[[h]]$ — это набор $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$, где $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ — квазихопфова QUE-алгебра (см. § 2), а $R \in A \hat{\otimes} A$ удовлетворяет (3.8), (3.9) и сравнимо с $1 \bmod h$.

Аналогично определяются треугольная и кограничная квазихопфовы QUE-алгебры. В определение скручивания в QUE-случае, конечно, включается условие $F \equiv 1 \bmod h$. Отметим, что сравнение $\mathrm{Alt}\,\Phi \equiv 0 \bmod h^2$, входящее в определение квазихопфовой QUE-алгебры, вытекает (при условии, что $\Phi \equiv 1 \bmod h$, $R \equiv 1 \bmod h$) из равенств (3.9), входящих в определение квазитреугольности. Отметим также, что в определение кограничной квазихопфовой QUE-алгебры можно не включать условие $R(0, 0) = 1$, так как оно следует из равенства $R(0, 0)^2 = 1$, вытекающего из условия $R(y, x) = R(x, y)^{-1}$.

Предложение 3.1. *Пусть* $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ — *квазитреугольная квазихопфова* QUE-*алгебра над* $k[[h]]$, $A/hA = U\mathfrak{g}$. *Положим* $t = h^{-1} \times (R^{21}R - 1) \bmod h \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$. *Тогда*

1) t — *симметричный* $\mathfrak{g}$-*инвариантный элемент* $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, *не меняющийся при скручивании* $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$;

2) *скручиванием* $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ *можно добиться, чтобы* $h^{-1}(R - 1) \times \bmod h = t/2$, $\Phi \equiv 1 \bmod h^2$; *при этих условиях* $h^{-2}\,\mathrm{Alt}\,\Phi \bmod h = [t^{12}, t^{23}]/4$, $\Delta' \equiv \Delta \bmod h^2$.

Доказательство. Симметричность t очевидна. Из (3.9б) следует, что

$$R(z, x * y)^{-1} = \Phi(z, x, y)\,R(z, x)^{-1}\,\Phi(x, z, y)^{-1}\,R(z, y)^{-1}\,\Phi(x, y, z). \quad (3.13)$$

Из (3.9а) и (3.13) следует, что $t(x * y, z) = t(x, z) + t(y, z)$, т. е. $t \in \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$. Итак, $t \in \mathrm{Sym}^2\,\mathfrak{g} \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. Из (3.1) следует, что $[R^{21}R, \Delta(a)] = 0$ при $a \in A$. Отсюда вытекает $\mathfrak{g}$-инвариантность t.

2) Сначала добьемся, чтобы $\Phi \equiv 1 \bmod h^2$ (см. предложение 2.1). Тогда из (3.9) следует, что $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, где $r = h^{-1}(R - 1) \bmod h$. Скручиванием посредством элемента $F \in A \hat{\otimes} A$ такого, что $F \equiv 1 + h(r - r^{21})/2 \bmod h^2$, добьемся, чтобы $h^{-1}(R - 1) \bmod h = t/2$ и по-прежнему $\Phi \equiv 1 \bmod h^2$. При этих условиях (3.12) позволяет найти $h^{-2}\,\mathrm{Alt}\,\Phi \bmod h$, а из (3.1) следует, что $\Delta' \equiv \Delta \bmod h^2$. ●

В ситуации предложения 3.1 будем называть $(\mathfrak{g}, t)$ *классическим пределом* $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$, а $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ — *квантованием* $(\mathfrak{g}, t)$. Если $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ — *треугольная* квазихопфова QUE-алгебра, то $t = 0$, так что

классическим пределом $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ естественно назвать $\mathfrak{g}$ (без дополнительных структур).

Предложение 3.2. *Пусть* $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ — *когранична квазихопфова* QUE-*алгебра над* $k[[h]]$, $A/hA = U\mathfrak{g}$. *Тогда после подходящего скручивания* $R \equiv 1 \bmod h^2$, $\Phi \equiv 1 \bmod h^2$. *При этих условиях* $\Delta' \equiv \equiv \Delta \bmod h^2$, *а* $\varphi \overset{\text{def}}{=} h^{-2} \operatorname{Alt} \Phi \bmod h$ *является* $\mathfrak{g}$-*инвариантным элементом* $\bigwedge^3 \mathfrak{g} \subset (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, *не зависящим от произвола в выборе скручивания.*

Доказательство. Сначала добьемся, чтобы $\Phi \equiv 1 \bmod h^2$ (см. предложение 2.1). Затем положим $r = h^{-1}(R - 1) \bmod h \in U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ и заметим, что в силу (3.10) r является 2-мерным коциклом комплекса (2.8). Так как $R^{21} = R^{-1}$, то $r^{21} = -r$ и в силу утверждения 2) предложения 2.2 $r \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}$. Скручиванием посредством $F \in A \hat{\otimes} A$ такого, что $F \equiv 1 + hr/2 \bmod h^2$, добьемся, чтобы $\tilde{R} \equiv 1 \bmod h^2$, $\Phi \equiv 1 \bmod h^2$. Если эти условия выполнены, а $\tilde{R}$ и $\tilde{\Phi}$ определяются формулами (3.11) и (1.12), то сравнения $R \equiv 1 \bmod h^2$, $\tilde{\Phi} \equiv 1 \bmod h^2$ означают, что $h^{-1}(F - 1) \bmod h$ симметричен и является 2-мерным коциклом комплекса (2.8а). В силу предложения 2.2 $h^{-1}(F - 1) \bmod h$ — кограница, т. е. $F = F_1 \cdot (u^{-1} \otimes u^{-1}) \cdot \Delta(u)$, где $u \in A$, $F_1 \in A \otimes A$, $u \equiv 1 \bmod h$, $F_1 \equiv \equiv 1 \bmod h^2$. Если $F = (u^{-1} \otimes u^{-1}) \Delta(u)$, то $\tilde{\Phi} = (u^{-1} \otimes u^{-1} \otimes u^{-1}) \times \times \Phi \cdot (u \otimes u \otimes u) \equiv \Phi \bmod h^3$, а если $F \equiv 1 \bmod h^2$, то $\operatorname{Alt} \tilde{\Phi} \equiv \equiv \operatorname{Alt} \Phi \bmod h^3$. Итак, φ не зависит от произвола в выборе скручивания. Если $R \equiv 1 \bmod h^2$, $\Phi \equiv 1 \bmod h^2$, то $\Delta' \equiv \Delta \bmod h^2$ в силу (3.1), так что в квазилиевой биалгебре $(\mathfrak{g}, \delta, \varphi)$, являющейся классическим пределом $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$, кокоммутатор δ равен 0. Поэтому из (2.1) следует $\mathfrak{g}$-инвариантность φ. ●

В ситуации предложения 3.2 будем называть $(\mathfrak{g}, \varphi)$ *классическим пределом* $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$, а $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ — *квантованием* $(\mathfrak{g}, \varphi)$. В треугольном случае, т. е. если выполнены равенства (3.9), $\varphi = 0$.

Классическим пределом квазитреугольной (соответственно треугольной, когряничной) QUE-алгебры Хопфа (A, R) назовем пару $(\mathfrak{g}, r)$, где $\mathfrak{g}$ — классический предел A (см. § 2), а $r = h^{-1}(R - 1) \bmod h$. Легко видеть, что $(\mathfrak{g}, r)$ — квазитреугольная (соответственно треугольная, кограничная) биалгебра Ли в смысле § 4 из [2], т. е. $\mathfrak{g}$ — биалгебра Ли, $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$, кокоммутатор $\delta : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ является кограницей r и, кроме того, в квазитреугольном случае $\langle r, r \rangle = 0$, в кограничном случае $r \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}$, а в треугольном случае $\langle r, r \rangle = 0$ и $r \in \bigwedge^2 \mathfrak{g}$. Здесь $\langle r, r \rangle = = [r^{12}, r^{13}] + [r^{12}, r^{23}] + [r^{13}, r^{23}]$. Нетрудно показать, что если $(\mathfrak{g}, r)$ — классический предел квазитреугольной (соответственно кограничной) QUE-алгебры Хопфа (A, R), то классический предел (A, R) как квазитреугольной (соответственно кограничной) *квазихопфовой* QUE-алгебры равен $(\mathfrak{g}, r + r^{21})$ (соответственно $(\mathfrak{g}, \langle r, r \rangle)$).

Замечание. Рассматриваемые «классические» объекты естественно интерпретируются в терминах троек и пар Манина. Для простоты ограничимся конечномерным случаем. Пусть $\mathfrak{g}$ — биалгебра Ли, а $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2)$ — соответствующая тройка Манина, т. е. $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{g}^*$, $\mathfrak{p}_1 = \mathfrak{g}$, $\mathfrak{p}_2 = = \mathfrak{g}^*$. Элементу $r \in \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ поставим в соответствие график $\mathfrak{a}$ отображения $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}$, переводящего $l \in \mathfrak{g}^*$ в $(\mathrm{id} \otimes l)(r)$. В результате получим биекцию $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \to \{$подпространства $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{p}$ такие, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1 + + \mathfrak{a}\}$. Нетрудно показать, что $(\mathfrak{g}, r)$ — квазитреугольная (соответственно кограничная, треугольная) биалгебра Ли тогда и только тогда, когда $\hat{\mathfrak{a}}$ — идеал (соответственно $(\operatorname{ad} \mathfrak{p}_1)$ — инвариантное лагранжево подпространство, лагранжев идеал). Рассмотрим теперь наборы $(\mathfrak{p}, \mathfrak{g}, \mathfrak{a})$, где $(\mathfrak{p}, \mathfrak{g})$ —

пара Манина, а $\mathfrak{a}$ — подпространство в $\mathfrak{p}$ такое, что $\mathfrak{p} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{a}$ и выполнено одно из трех условий: 1) $\mathfrak{a}$ — идеал, 2) $\mathfrak{a}$ — лагранжево пространство и $[\mathfrak{g}, \mathfrak{a}] \subset \mathfrak{a}$, 3) $\mathfrak{a}$ — лагранжев идеал. Легко проверить, что: в случае 1) задание $(\mathfrak{p}, \mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ равносильно заданию пары $(\mathfrak{g}, t)$, где t является $\mathfrak{g}$-инвариантным элементом $\mathrm{Sym}^2\,\mathfrak{g}$; в случае 2) задание $(\mathfrak{p}, \mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ равносильно заданию пары $(\mathfrak{g}, \varphi)$, где φ является $\mathfrak{g}$-инвариантным элементом $\bigwedge^3 \mathfrak{g}$; в случае 3) задание $(\mathfrak{p}, \mathfrak{g}, \mathfrak{a})$ равносильно заданию $\mathfrak{g}$ (без дополнительных структур). Поясним, что t соответствует ограничению на $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{g}^*$ скалярного произведения в $\mathfrak{p}$, а φ соответствует ограничению на $\mathfrak{a} \simeq \mathfrak{g}^*$ трилинейной формы $([x, z], y)$.

Если $(\mathfrak{g}, r)$ — квазитреугольная биалгебра Ли, то $(\mathfrak{g}, (r - r^{21})/2)$ — кограничная биалгебра Ли. Обсудим теперь квантовый аналог этой конструкции. Пусть $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi)$ — квазихопфова QUE-алгебра над $k[[h]]$, $R \in A \mathbin{\widehat{\otimes}} A$, $R \equiv 1 \bmod h$, причем выполнено (3.1). Положим $\overline{R} = R \times (R^{21}R)^{-1/2}$. Тогда $\overline{R}^{21}\overline{R} = R^{21}\cdot(R\cdot R^{21})^{-1/2}\cdot R\cdot(R^{21}\cdot R)^{-1/2} = R^{21}\cdot(R \times R^{21})^{-1}\cdot R = 1$, т. е. $\overline{R}$ удовлетворяет условию «унитарности». Так как из (3.1) следует, что $[R^{21}R, \Delta(a)] = 0$ при $a \in A$, то $\overline{R}$ удовлетворяет (3.1). Переход от R к $\overline{R}$ назовем *унитаризацией*. Унитаризация коммутирует со скручиванием (3.11).

П р е д л о ж е н и е 3.3. *Если R удовлетворяет* (3.10), *то и $\overline{R}$ удовлетворяет* (3.10).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно показать, что

$$\overline{R}(x, y)\,\overline{R}(x*y, z) = R(x, y)\,R(x*y, z)\cdot\{R(y, x) \times R(z, y*x)\,R(x, y)\,R(x*y, z)\}^{-1/2}, \tag{3.14а}$$

$$\overline{R}(y, z)\,\overline{R}(x, y*z) = R(y, z)\,R(x, y*z)\cdot\{R(z, y) \times R(z*y, x)\,R(y, z)\,R(x, y*z)\}^{-1/2}. \tag{3.14б}$$

Докажем, например, (3.14а). Так как $[a(x*y), R(y, x)\,R(x, y)] = 0$ при $a \in A$, то $\overline{R}(x, y)\,\overline{R}(x*y, z) = R(x, y)\cdot(R(y, x)\,R(x, y))^{-1/2} \times R(x*y, z)\cdot(R(z, x*y)\,R(x*y, z))^{-1/2} = R(x, y)\,R(x*y, z) \times \{R(y, x)\,R(x, y)\,R(z, x*y)\,R(x*y, z)\}^{-1/2} = R(x, y)\,R(x*y, z)\cdot\{R(y, x)\,R(z, y*x)\,R(x, y)\,R(x*y, z)\}^{-1/2}$. ●

Из предложения 3.3 следует, что унитаризация $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, \overline{R})$ квазитреугольной квазихопфовой QUE-алгебры $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ является кограничной. Треугольной эта унитаризация, вообще говоря, не является. Действительно, если $(\mathfrak{g}, t)$ — классический предел $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$, то из утверждения 2) предложения 2.1 следует, что классический предел $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, \overline{R})$ равен $(\mathfrak{g}, [t^{12}, t^{23}]/4)$. Поэтому если $[t^{12}, t^{23}] \neq 0$, то $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, \overline{R})$ не является треугольной. В частности, не является треугольной унитаризация квазитреугольной QUE-алгебры Хопфа $U_h\mathfrak{g}$ (см. [2], § 6, 13), где $\mathfrak{g}$ — конечномерная простая алгебра Ли.

П р е д л о ж е н и е 3.4. *Если $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ — кограничная квазихопфова* QUE-*алгебра, то из* (3.12) *следует* (3.9).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Достаточно воспользоваться следующей леммой, справедливой не только в QUE-случае.

Л е м м а. *Пусть $u(x, y, z) = \{$правая часть (3.9а)$\}^{-1} \times \{$левая часть (3.9а)$\}$, $v(x, y, z) = \{$правая часть (3.12)$\}^{-1} \times \{$левая часть (3.12)$\}$. Тогда $v = u^{-2}$.*

Доказательство. Так как $R(x*y,\ z)=\Phi(z,\ x,\ y)\,R(x, z)\,\Phi(x, z, y)^{-1}R(y, z)\,\Phi(x, y, z)\,u(x, y, z)$, $R(x,\ y*z)=R(y*z,\ x)^{-1}=u(y,\ z,\ x)^{-1}\Phi(y, z, x)^{-1}R(x, z)\,\Phi(y, x, z)\,R(x, y)\,\Phi(x, y, z)^{-1}$, то (3.10) перепишется в виде $u(x, y, z)=b(z, x, y)\,b(y, z, x)\,u(y, z, x)^{-1}b(x, y, z)$, где $b(x,\ y,\ z)=\Phi(y, z, x)^{-1}\cdot R(x, z)\,\Phi(y, x, z)\,R(x, y)$. Итерируя, получим $u(x\ y, z)=b(z,\ x, y)\,b(y, z, x)\,b(x, y, z)\,u(x, y, z)^{-1}$, т. е. $u^2=v^{-1}$. ●●

Предложение 3.4 можно доказать проще, сведя его к случаю $R=1$ с помощью утверждения 1) следующего предложения.

Предложение 3.5. 1) *Любую квазитреугольную или кограничную квазихопфову QUE-алгебру можно подходящим скручиванием привести к симметричному виду, т. е. такому, что $R^{21}=R$. В кограничном случае $R^{21}=R\Leftrightarrow R=1$.*

2) *Скручивание посредством F сохраняет симметричный вид квазитреугольной или кограничной квазихопфовой QUE-алгебры тогда и только тогда, когда $F^{21}=F$.*

3) *Пусть $(A,\ \Delta,\ \varepsilon,\ \Phi,\ R)$ — квазитреугольная или кограничная квазихопфова QUE-алгебра, причем $R^{21}=R$. Тогда $\Delta'=\Delta$ и Φ удовлетворяет соотношению*

$$\Phi(z,\ y,\ x)=\Phi(x,\ y,\ z)^{-1}. \tag{3.15}$$

Доказательство. Уравнение $\tilde{R}^{21}=\tilde{R}$, где $\tilde{R}=F^{21}RF^{-1}$, можно переписать в виде $R^{21}R=(F^{-1}F^{21}R)^2$. Поэтому его общее решение имеет вид $F=F_0\cdot\left(R\cdot(R^{21}R)^{-1/2}\right)^{1/2}$, где $F_0^{21}=F_0$. Докажем 3). Из (3.1) следует, что $[R^{21}R,\ \Delta(a)]=0$ при $a\in A$. Так как $R^{21}=R$, то $[R,\ \Delta(a)]=0$. Поэтому из (3.1) следует, что $\Delta'=\Delta$. Перепишем теперь (3.10) в виде

$$\Phi(x,\ y,\ z)=\{R(y,\ z)\,R(x,\ y*z)\}^{-1}\,\Phi(z,\ y,\ x)^{-1}\,R(x,\ y)\,R(x*y,\ z).$$

Проитерировав это соотношение и воспользовавшись равенствами $R(y, x)=R(x,\ y)$, $\Delta'=\Delta$, получим, что $\Phi(x,\ y,\ z)=\{R(y,\ z)\,R(x,\ y*z)\}^{-2}\,\Phi(x, y, z)\,\{R(x,\ y)\,R(x*y, z)\}^2$. Отсюда $\Phi(x,\ y,\ z)\,\{R(x,\ y)\times R(x*y, z)\}^2\,\Phi(x, y, z)^{-1}=\{R(y,\ z)\,R(x,\ y*z)\}^2$ и, следовательно, $\Phi(x,\ y,\ z)\,R(x,\ y)\,R(x*y,\ z)\,\Phi(x,\ y,\ z)^{-1}=R(y,\ z)\,R(x,\ y*z)$. Из последнего равенства и (3.10) вытекает (3.15). ●

Замечание. Можно было бы доказать равенство (3.15) по-другому, заметив, что в кограничном случае оно непосредственно следует из (3.10), так как $R=1$, а квазитреугольный случай сводится к кограничному с помощью предложения 3.3. Можно, наоборот, доказать предложение 3.3, сведя его с помощью утверждения 1) предложения 3.5 к частному случаю $R^{21}=R$ и заметив, что в этом случае оно сводится к (3.15).

Построим теперь биекции между классами изоморфизма треугольных, квазитреугольных и кограничных квазихопфовых QUE-алгебр с точностью до скручивания и классами изоморфизма соответствующих классических объектов. Автор не знает, существуют ли естественные биекции такого типа для квазихопфовых QUE-алгебр, не удовлетворяющих (3.1), или для QUE-алгебр Хопфа (в том числе треугольных, квазитреугольных и кограничных).

Предложение 3.6. *Любую треугольную квазихопфову QUE-алгебру над $k\,[[h]]$ можно подходящим скручиванием привести к виду $R=1$, $\Phi=1$.*

Доказательство. Можно считать (см. предложение 3.5), что с самого начала $R=1$, и, следовательно, $\Phi(z,\ y,\ x)=\Phi(x,\ y,\ z)^{-1}$. Покажем, что если $\Phi\equiv 1 \bmod h^n$, то найдется $F\in A\,\hat{\otimes}\,A$ такое, что

$F \equiv 1 \bmod h^n$, $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(F) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(F) = 1$, $\widetilde{\Phi} \equiv 1 \bmod h^{n+1}$, $\widetilde{R} = 1$, где $\widetilde{\Phi}$, $\widetilde{R}$ определяются формулами (1.12), (3.11). Равенство $\widetilde{R} = 1$ эквивалентно симметричности F, а сравнение $\widetilde{\Phi} \equiv 1 \bmod h^{n+1}$ означает, что кограница элемента $h^{-n}(F - 1) \bmod h \in B^2$ (см. (2.8a)) равна α, где $\alpha = h^{-n}(1 - \Phi) \bmod h \in B^3$. Остается доказать, что α — кограница симметричного элемента B^2. Из (1.2) следует, что α — коцикл, а из (3.9), (3.15) и равенства $R = 1$ следует, что α принадлежит ядру $\mathrm{Alt} : (U\mathfrak{g})^{\otimes 3} \to (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$. Поэтому в силу предложения 2.2 α — кограница некоторого $\beta \in B^2 \subset U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$. Из (3.15) следует, что кограница элемента $\beta^{21} \in B^2$ тоже равна α. Поэтому, заменив β на $(\beta + \beta^{21})/2$, можно добиться, чтобы $\beta^{21} = \beta$. ●

Треугольная квазихопфова QUE-алгебра такая, что $R = 1$, $\Phi = 1$, это то же, что кокоммутативная QUE-алгебра Хопфа.

Предложение 3.7. *Кокоммутативные* QUE-*алгебры Хопфа имеют вид* $U\mathfrak{g}$, *где* $\mathfrak{g}$ — *алгебра Ли над* $k[[h]]$, *которая как* $k[[h]]$-*модуль изоморфна* $V[[h]]$ *для некоторого векторного пространства* V *над* k.

Условие на $\mathfrak{g}$ в предложении 3.7 означает, что $\mathfrak{g}$ — деформация алгебры Ли $\mathfrak{g}_0$ над k, где $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{g}/h\mathfrak{g}$. Такие $\mathfrak{g}$ будем называть *деформационными*. Для деформационных алгебр Ли $\mathfrak{g}$ мы обозначаем через $U\mathfrak{g}$ не алгебраическую универсальную обертывающую, а ее h-адическое пополнение.

Доказательство. Пусть A — кокоммутативная QUE-алгебра Хопфа, $A/hA = U\mathfrak{g}_0$, $\varphi : A \to A$ — композиция коумножения $\Delta : A \to A \hat{\otimes} A$ и умножения $A \hat{\otimes} A \to A$. Имеем $\varphi(I) \subset I$, где $I = \mathrm{Ker}\left(A \xrightarrow{\varepsilon} k[[h]]\right)$. На образе канонического отображения $\mathrm{Sym}^n \mathfrak{g}_0 \to I/hI \subset U\mathfrak{g}_0$ оператор $\varphi \bmod h$ действует как умножение на 2^n. Поэтому I — топологическая прямая сумма φ-инвариантных $k[[h]]$-подмодулей W_n, $n = 1, 2, \ldots$, таких, что $\varphi - 2^n \cdot \mathrm{id}$ действует в W_n топологически нильпотентно. Положим еще $W_0 = k[[h]] \cdot 1 \subset A$. Тогда $A = W_0 \oplus I$, $\varphi|_{W_0} = \mathrm{id}$. Из кокоммутативности Δ следует, что φ — гомоморфизм коалгебр. Поэтому $\Delta(W_1) \subset (W_0 \otimes W_1) \oplus (W_1 \otimes W_0)$, т. е. если $a \in W_1$, то $\Delta(a) = b \otimes 1 + 1 \otimes b$ для некоторого $b \in W_1$. Фактически $b = (\varepsilon \otimes \mathrm{id})(\Delta(a)) = a$, т. е. $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$. Обратно, если $\Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a$, то $\varphi(a) = 2a$, откуда $a \in W_1$. Итак, $W_1 = \{a \in A \mid \Delta(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a\}$ и, следовательно, W_1 — алгебра Ли. Эта алгебра деформационная, так как W_1 — прямое слагаемое в A. Естественный гомоморфизм $U\mathfrak{g} \to A$ биективен, так как биективна его редукция $\bmod h$. ●

Предложение 3.8. *Пусть* $A = U\mathfrak{g}$, *где* $\mathfrak{g}$ — *деформационная алгебра Ли над* $k[[h]]$. *Рассмотрим* A *как треугольную квазихопфову* QUE-*алгебру, определив обычным образом* Δ, ε *и положив* $R = 1$, $\Phi = 1$. *Пусть* $(A, \widetilde{\Delta}, \varepsilon, \widetilde{\Phi}, \widetilde{R})$ *получается из* $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ *скручиванием посредством* F. *Тогда равенства* $\widetilde{R} = 1$, $\widetilde{\Phi} = 1$ *эквивалентны представимости* F *в виде*

$$F = (u \otimes u)\Delta(u)^{-1}, \quad u \in A, \quad u \equiv 1 \bmod h, \quad \varepsilon(u) = 1. \tag{3.16}$$

Если существует u, *удовлетворяющее* (3.16), *то оно единственно с точностью до замены на* ue^{hv}, $v \in \mathfrak{g}$. *Если выполнено* (3.16), *то* $\mathrm{Ad}\, u$ *изоморфно отображает* $\mathfrak{g}$ *на* $\widetilde{\mathfrak{g}} = \{a \in A \mid \widetilde{\Delta}(a) = a \otimes 1 + 1 \otimes a\}$.

Доказательство. Покажем, что если $\tilde{R} = 1$, $\tilde{\Phi} = 1$ и $F \equiv 1 \bmod h^n$, то найдется $w \in A$ такое, что $w \equiv 1 \bmod h^n$, $\varepsilon(w) = 1$, $(w^{-1} \otimes w^{-1}) \cdot F \cdot \Delta(w) \equiv 1 \bmod h^{n+1}$ (остальное очевидно). Действительно, элемент $h^{-n}(F - 1) \in B^2$ (см. (2.8a)) симметричен и является коциклом. В силу предложения 2.2 он является кограницей некоторого $\gamma \in B^1$. Остается выбрать w так, чтобы $\varepsilon(w) = 1$, $w \equiv 1 + h^n\gamma \bmod h^{n+1}$. ●

Треугольные квазихопфовы QUE-алгебры $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ и $(\bar{A}, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon}, \bar{\Phi}, \bar{R})$ назовем эквивалентными, если набор $(\bar{A}, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon}, \bar{\Phi}, \bar{R})$ изоморфен набору $(A, \tilde{\Delta}, \varepsilon, \tilde{\Phi}, \tilde{R})$, получающемуся из $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ посредством скручивания. Предложения 3.6—3.8 показывают, что классы эквивалентности треугольных квазихопфовых QUE-алгебр взаимно-однозначно соответствуют классам изоморфизма деформационных алгебр Ли $\mathfrak{g}$. Отметим, что треугольной квазихопфовой QUE-алгебре соответствует, строго говоря, не алгебра Ли $\mathfrak{g}$, а класс таких алгебр, причем изоморфизм между алгебрами $\mathfrak{g}$ и $\bar{\mathfrak{g}}$ из этого класса определен не канонически, а с точностью до автоморфизмов вида $\exp(h \cdot \mathrm{ad}\, v)$, $v \in \mathfrak{g}$.

Опишем теперь категорию C треугольных квазихопфовых QUE-алгебр над $k[[h]]$. Под морфизмом $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R) \to (\bar{A}, \bar{\Delta}, \bar{\varepsilon}, \bar{\Phi}, \bar{R})$ понимается гомоморфизм алгебр $f : A \to \bar{A}$ такой, что

$$\bar{\Delta} \circ f = (f \otimes f) \circ \Delta, \quad \bar{\varepsilon} \circ f = \varepsilon, \quad \bar{\Phi} = (f \otimes f \otimes f)(\Phi), \quad \bar{R} = (f \otimes f)(R)$$

(при желании можно было бы расширить класс морфизмов, включив в него скручивания). Если $\mathfrak{g}$ — деформационная алгебра Ли, $F \in U\mathfrak{g} \hat{\otimes} U\mathfrak{g}$, $F \equiv 1 \bmod h$, $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(F) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(F) = 1$, то обозначим через $A_{\mathfrak{g}, F}$ треугольную квазихопфову QUE-алгебру, получающуюся скручиванием посредством F из алгебры $U\mathfrak{g}$ с тривиальной структурой треугольной квазихопфовой QUE-алгебры. Из предложений 3.6, 3.7 следует, что каждый объект C изоморфен объекту вида $A_{\mathfrak{g}, F}$, так что остается описать морфизмы $A_{\mathfrak{g}, F} \to A_{\bar{\mathfrak{g}}, \bar{F}}$.

Предложение 3.9. *Пусть* λ — *гомоморфизм* $\mathfrak{g} \to \bar{\mathfrak{g}}$, $u \in U\bar{\mathfrak{g}}$, $\varepsilon(u) = 1$, $u \equiv 1 \bmod h$, $\bar{F} = (u \otimes u) \cdot (\tilde{\lambda} \otimes \tilde{\lambda})(F) \cdot \Delta(u)^{-1}$, *где* $\tilde{\lambda}$ — *продолжение* λ *до гомоморфизма* $U\mathfrak{g} \to U\bar{\mathfrak{g}}$, *а* $\Delta : U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g} \hat{\otimes} U\mathfrak{g}$ — *стандартное (нескрученное) коумножение. Тогда отображение* $(\mathrm{Ad}\, u) \circ \tilde{\lambda} : U\bar{\mathfrak{g}} \to U\mathfrak{g}$ *является морфизмом* $A_{\mathfrak{g}, F} \to A_{\bar{\mathfrak{g}}, \bar{F}}$. *Так получаются все морфизмы* $A_{\mathfrak{g}, F} \to A_{\bar{\mathfrak{g}}, \bar{F}}$. *Пары* (λ, u) *и* (λ_1, u_1) *определяют один и тот же морфизм* $A_{\mathfrak{g}, F} \to A_{\bar{\mathfrak{g}}, \bar{F}}$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda_1 = \exp(-h \cdot \mathrm{ad}\, v) \circ \lambda$, $u_1 = ue^{hv}$ *для некоторого* $v \in \bar{\mathfrak{g}}_1$.

Доказательство. Покажем, что любой морфизм $f : A_{\mathfrak{g}, F} \to A_{\bar{\mathfrak{g}}, \bar{F}}$ соответствует некоторой паре (λ, u) (остальное очевидно). Действительно, f является также морфизмом $A_{\mathfrak{g}, 1} \to A_{\bar{\mathfrak{g}}, \tilde{F}}$, где $\tilde{F} = (f \otimes f) \times (F^{-1}) \cdot \bar{F}$. Это, в частности, означает, что в треугольной квазихопфовой QUE-алгебре $A_{\bar{\mathfrak{g}}, \tilde{F}}$ выполнены равенства $\Phi = 1$ и $R = 1$. Поэтому из предложения 3.8 следует, что $\tilde{F} = (u \otimes u) \cdot \Delta(u)^{-1}$ для некоторого $u \in U\bar{\mathfrak{g}}$ такого, что $\varepsilon(u) = 1$, $u \equiv 1 \bmod h$. При этом $\mathrm{Ad}\, u$ является изоморфизмом $A_{\bar{\mathfrak{g}}, 1} \to A_{\bar{\mathfrak{g}}, \tilde{F}}$, так что $(\mathrm{Ad}\, u)^{-1} f$ — морфизм $A_{\mathfrak{g}, 1} \to A_{\bar{\mathfrak{g}}, 1}$, т. е. $(\mathrm{Ad}\, u)^{-1} f = \tilde{\lambda}$ для некоторого гомоморфизма $\lambda : \mathfrak{g} \to \tilde{\mathfrak{g}}$. Так как $(f \otimes f) \times$

$\times (F^{-1})\cdot \bar{F} = \tilde{F} = (u \otimes u)\cdot \Delta (u)^{-1}$ и $f = (\mathrm{Ad}\, u)\circ\tilde{\lambda}$, то $\bar{F} = (u \otimes u)\cdot(\tilde{\lambda} \otimes \otimes \tilde{\lambda}) (F)\, \Delta (u)^{-1}$. ●

З а м е ч а н и е. $A_{\mathfrak{g}, F}$ является QUE-алгеброй Хопфа тогда и только тогда, когда $F (x, y)\, F (x * y, z) = F (y, z)\, F (x, y * z)$. Это уравнение (с заменой F на F^{-1}) изучено в [17].

Перейдем к кограничным квазихопфовым QUE-алгебрам. В отличие от рассмотренного выше треугольного случая здесь возникает *проблема существования квантования пар* $(\mathfrak{g}, \varphi)$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над k, а $\varphi \in \in \bigwedge^3 \mathfrak{g} \subset \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$ является $\mathfrak{g}$-инвариантным тензором. К счастью, она решается положительно. Именно возьмем $(U\mathfrak{g})\,[[h]]$ в качестве A, определим обычным образом Δ, ε и положим $R = 1$. После этого остается построить $\mathfrak{g}$-инвариантный элемент $\Phi \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})\,[[h]]$, удовлетворяющий (1.8), (1.10), (3.15) и сравнениям $\Phi \equiv 1 \bmod h^2$, $\mathrm{Alt}\, \Phi \equiv \equiv h^2\varphi \bmod h^3$.

П р е д л о ж е н и е 3.10. *Такое Φ существует.*

Прежде чем доказывать предложение 3.10, заметим, что комплекс (2.8) обладает инволюцией σ, переводящей $a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \in (U\mathfrak{g})^{\otimes n}$ в $(-1)^{n(n+1)/2}\, a_n \otimes \ldots \otimes a_1$. Подкомплекс (2.8а) σ отображает в себя. Рассмотрим комплекс

$$0 \to C^0 \to C^1 \to C^2 \to \ldots, \tag{3.17}$$

где $C^n = \{x \in B^n \mid \sigma (x) = -x\}$, а B^n означает то же, что в (2.8а).

П р е д л о ж е н и е 3.11. 1) *Пространство n-мерных когомологий комплекса* (3.17) *при четном n равно* 0, *а при нечетном n изоморфно* $\bigwedge^n \mathfrak{g}$ (*изоморфизм индуцируется естественным вложением* $\bigwedge^n \mathfrak{g} \to C^n$).

2) $\mathfrak{g}$ — *инвариантный элемент* C^n, *являющийся кограницей, является когранцией $\mathfrak{g}$-инвариантного элемента* C^{n-1}.

Д о к а з а т е л ь с т в о. На когомологиях H^n комплекса (2.8*а*) (т. е. на $\bigwedge^n \mathfrak{g}$) σ действует, как умножение на $(-1)^n$ (действительно, знак перестановки $(n, n-1, \ldots, 1)$ равен $(-1)^{n(n-1)/2} = (-1)^{n(n+1)/2}\, (-1)^n$). Отсюда следует утверждение 1). Для доказательства 2) достаточно показать, что дифференциал $d : C^{n-1} \to D^n$, где $D^n \subset C^n$ — подпространство кограниц, обладает $\mathfrak{g}$-эквивариантным сечением $D^n \to C_{n-1}$. Комплекс (2.8а) канонически изоморфен (см. доказательство предложения 2.2) прямой сумме комплексов $\mathfrak{g}^{\otimes m} \otimes_{S_m} \bar{C}^* (I^m, \partial I^m)$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, где I^m — это m-мерный симплициальный куб, а $\bar{C}^*$ обозначает нормализованный коцепной комплекс с коэффициентами в $\mathbb{Q}$ (нормализованность означает, что рассматриваются коцепи, обращающиеся в 0 на вырожденных симплексах). Инволюция σ происходит из инволюций τ_m комплексов $\bar{C}^* (I^m, \partial I^m)$ (τ_m индуцируется автоморфизмом «геометрического» куба $[0, 1]^m$, переводящим $(x_1, \ldots, x_m)$ в $(1 - x_1, \ldots, 1 - x_m)$). Через K_m обозначим τ_m-антиинвариантную часть комплекса $\bar{C}^* (I^m, \partial I^m)$. Пусть K_m^n обозначает n-й член K_m, а $D_m^n \subset K_m^n$ — подпространство кограниц. Дифференциал $d : K_m^{n-1} \to D_m^n$ обладает S_m-эквивариантным сечением $s_m^n : D_m^n \to K_m^{n-1}$. Сечения s_m^n, $m = n, n + 1, \ldots$, индуцируют искомое сечение $D^n \to C^{n-1}$. ●

Д о к а з а т е л ь с т в о п р е д л о ж е н и я 3.10. Пусть уже построено $\mathfrak{g}$-инвариантное $\Phi_n \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})\,[[h]]$ такое, что $\Phi_n \equiv \equiv 1 \bmod h^2$, $\mathrm{Alt}\, \Phi_n \equiv h^2\varphi \bmod h^3$ и Φ_n удовлетворяет по модулю h^n уравнениям (1.8), (1.10), (3.15) (в качестве Φ_3 или даже Φ_4 можно взять $1 + h^2\varphi/6$). Тогда $\Phi_n (x, y, 0) \equiv 1 \equiv \Phi_n (0, y, z) \bmod h^n$ (см. замечание после формул (1.7) — (1.10)). Нетрудно построить $\mathfrak{g}$-инвариант-

ное Φ'_n такое, что $\Phi'_n \equiv \Phi_n \bmod h^n$, $\Phi'_n(0, y, z) \equiv \Phi'_n(x, 0, z) \equiv \Phi'_n(x, y, 0) \equiv 1 \bmod h^{n+1}$, $\Phi'_n(z, y, x) \equiv \Phi'_n(x, y, z)^{-1} \bmod h^{n+1}$ (достаточно положить $\Phi'_n = e^L$, где L получается из $\ln \Phi_n \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ отбрасыванием членов, содержащих h^n). Φ'_n удовлетворяет (1.8) по модулю h^n, но, вообще говоря, не по модулю h^{n+1}. Определим $\mathfrak{g}$-инвариантный элемент $\mu \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 4}$ из соотношения

$$\Phi'_n(x, y, z*u)\,\Phi'_n(x*y, z, u) \equiv \Phi'_n(y, z, u)\,\Phi'_n(x, y*z, u) \times \\ \times \Phi'_n(x, y, z) + h^n\mu(x, y, z, u) \bmod h^{n+1}. \qquad (3.18а)$$

Будем искать Φ'_{n+1} в виде $\Phi'_n + h^n\psi$, $\psi \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$. Элемент ψ должен быть $\mathfrak{g}$-инвариантным и удовлетворять уравнениям

$$\psi(x, 0, z) = 0,\ \psi(z, y, x) = -\psi(x, y, z),\ \psi(y, z, u) - \psi(x*y, z, u) + \\ + \psi(x, y*z, u) - \psi(x, y, z*u) + \psi(x, y, z) = \mu(x, y, z, u).$$

Предложение 3.11. показывает, что такое ψ существует, если μ является σ-антиинвариантным коциклом комплекса (2.8а). Покажем, что это действительно так. Равенства $\mu(0, y, z, u) = \mu(x, 0, z, u) = \mu(x, y, 0, u) = \mu(x, y, z, 0) = 0$, $\mu(u, z, y, x) = -\mu(x, y, z, u)$ проверяются без труда. Остается доказать, что μ — коцикл, т. е.

$$\mu(x, y, z, u) + \mu(x, y, z*u, v) + \mu(x*y, z, u, v) = \\ = \mu(y, z, u, v) + \mu(x, y*z, u, v) + \mu(x, y, z, u*v). \qquad (3.19)$$

Для этого воспользуемся наряду с (3.18а) сравнениями (3.18б) — (3.18е), получающимися из (3.18а) заменой x, y, z, u на $x, y, z*u, v$ в случае б), на $x*y, z, u, v$ в случае в), на y, z, u, v в случае г), на $x, y*z, u, v$ в случае д) и на $x, y, z, u*v$ в случае е). Вычислим произведения

$$\{\Phi'_n(x, y*z, u)\,\Phi'_n(x, y, z)\}\cdot\{\Phi'_n(x*y*z, u, v)^{-1} \times \\ \times \Phi'_n(x*y, z, u*v)^{-1}\,\Phi'_n(z, u, v)\} \times \{\Phi'_n(x, y, z*u*v)^{-1} \times \\ \times \Phi'_n(y, z*u, v)\,\Phi'_n(x, y*z*u, v)\}\cdot\Phi'_n(y, z, u), \qquad (3.20)$$

$$\{\Phi'_n(x, y*z, u)\,\Phi'_n(x*y*z, u, v)^{-1}\}\cdot\{\Phi'_n(x, y, z) \times \\ \times \Phi'_n(x*y, z, u*v)^{-1}\,\Phi'_n(x, y, z*u*v)^{-1}\}\cdot\{\Phi'_n(z, u, v) \times \\ \times \Phi'_n(y, z*u, v)\,\Phi'_n(y, z, u)\}\cdot\Phi'_n(x, y*z*u, v). \qquad (3.21)$$

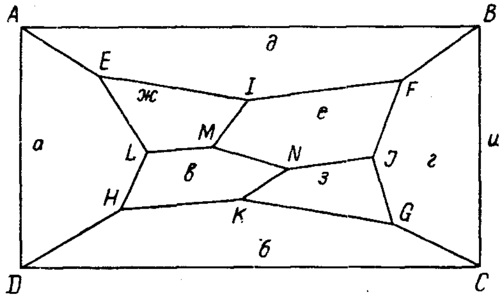
Преобразовав фигурные скобки (3.20) с помощью (3.18а), (3.18в), (3.18б), а фигурные скобки (3.21) с помощью (3.18д), (3.18е), (3.18г), получим, что $(3.20) \equiv 1 - h^n(\mu(x, y, z, u) + \mu(x, y, z*u, v) + \mu(x*y, z, u, v)) \bmod h^{n+1}$, $(3.21) \equiv 1 - h^n(\mu(y, z, u, v) + \mu(x, y*z, u, v) + \mu(x, y, z, u*v)) \bmod h^{n+1}$. С другой стороны, равенства

$$\Phi'_n(x, y, z)\,\Phi'_n(x*y*z, u, v) = \Phi'_n(x*y*z, u, v)\,\Phi'_n(x, y, z), \qquad (3.18ж)$$

$$\Phi'_n(z, u, v)\,\Phi'_n(x, y, z*u*v) = \Phi'_n(x, y, z*u*v)\,\Phi'_n(z, u, v), \qquad (3.18з)$$

$$\Phi'_n(y, z, u)\,\Phi'_n(x, y*z*u, v) = \Phi'_n(x, y*z*u, v)\,\Phi'_n(y, z, u), \qquad (3.18и)$$

вытекающие из $\mathfrak{g}$-инвариантности Φ'_n, показывают, что $(3.20) = (3.21)$. Отсюда следует (3.19).



Отметим, что вывод (3.19) можно сделать наглядным, рассмотрев границу L_5 комплекса K_5, построенного Дж. Д. Сташеффом [18]. L_5 — это сфера S^2, разбитая на 4-угольные и 5-угольные грани. Стереографическая проекция этого разбиения изображена на рисунке (грань «и» содержит бесконечно удаленную точку). Вершины A, B, ..., N соответствуют 14 способам расстановки скобок в произведении пяти сомножителей x, y, z, u, v, а именно

$$A = (x\,((yz)\,u))\,v,\ B = x\,(((yz)\,u)\,v),\ C = x\,((y\,(zu))\,v),\ D = (x\,(y\,(zu)))\,v,$$
$$E = ((x\,(yz))\,u)\,v,\ F = x\,((yz)\,(uv)),\ G = x\,(y\,((zu)\,v)),\ H = ((xy)\,(zu))\,v,$$
$$I = (x\,(yz))\,(uv),\ J = x\,(y\,(z\,(uv))),\ K = (xy)\,((zu)\,v),\ L = (((xy)\,z)\,u)\,v,$$
$$M = ((xy)\,z)\,(uv),\quad N\,(xy)\,(z\,(uv)).$$

Две вершины соединены ребром, если соответствующие расстановки скобок получаются друг из друга однократным применением ассоциативного закона. Каждому ориентированному ребру сопоставим элемент группы G_1/G_{n+1}, где G_k — это $\{a \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})\,[[h]]\,|\,a \equiv 1 \bmod h^k\}$ с операцией умножения. Правило сопоставления станет понятным из следующего примера: ребро AE соответствует соотношению ассоциативности $x\,((yz)\,u) = (x\,(yz))\,u$, причем A соответствует «правой» расстановке скобок $x\,((yz)\,u)$, а E — «левой» расстановке $(x\,(yz))\,u$; в связи с этим ребру **AE** сопоставляется $\Phi'_n\,(x,\ y * z,\ u)$, а ребру **EA** сопоставляется $\Phi'_n\,(x,\ y * z,\ u)^{-1}$. Соотношения (3.18а)—(3.18и) показывают, что для каждой из граней «а», «б», ..., «и» произведение элементов G_1/G_{n+1}, соответствующих ребрам этой грани при их обходе в одном направлении, принадлежит подгруппе G_n/G_{n+1}, содержащейся в центре группы G_1/G_{n+1}. Назовем это произведение невязкой. Согласно (3.18ж)—(3.18и), невязки, соответствующие 4-угольным граням, равны 1. Поэтому произведение невязок, соответствующих 5-угольным граням (при их обходе, скажем, по часовой стрелке), равно 1, что эквивалентно (3.19). ●

Зафиксируем сечения s^4_m, $m = 4,\ 5, \ldots$ (см. конец доказательства предложения 3.11). Тогда доказательство предложения 3.10 доставляет вполне конкретное Φ, выражающееся через $h^2\varphi$ с помощью «универсальной формулы», которую мы будем сокращенно записывать в виде $\Phi = \mathscr{E}\,(h^2\varphi)$. Слова «универсальная формула» означают, что если записать Φ в виде

$$\sum_{m,\,n,\,p=0}^{\infty} a_{(m,\,n,\,p)}^{i_1,\,\ldots,\,i_m j_1,\,\ldots,\,j_n k_1,\,\ldots,\,k_p}\, e_{i_1}, \ldots, e_{i_m} \otimes e_{j_1}, \ldots, e_{j_n} \otimes e_{k_1}, \ldots, e_{k_p},$$

где e_i — базис в $\mathfrak{g}$, а тензоры $a_{(m,\,n,\,p)}$ симметричны по каждой из групп индексов i, j, k, то $a_{(m,\,n,\,p)}$ выражаются через структурные константы c^t_{rs} алгебры $\mathfrak{g}$ и координаты ψ^{uvw} тензора $\psi = h^2\varphi$ по правилам ацикличного тензорного исчисления с коэффициентами из $\mathbb{Q}$, а соотношения между тензорами $a_{(m,\,n,\,p)}$, эквивалентные (1.8), (1.10) и (3.15), вытекают по правилам ацикличного тензорного исчисления из соотношений $c^k_{ij} = -c^k_{ji}$, $c^r_{ij}c^l_{kr} + c^r_{jk}c^l_{ir} + c^r_{ki}c^l_{jr} = 0$, $\psi^{ijk} = -\psi^{jik} = -\psi^{ikj} = -\psi^{jiu}$, $c^i_{rs}\psi^{sjk} + c^j_{rs}\psi^{isk} + c^k_{rs}\psi^{ijs} = 0$. Ацикличность (означающая, например, запрет

выражения $c^j_{ri}c^k_{sj}c^i_{tk}$, где i, j, k образуют «цикл») обеспечивает осмысленность формулы $\mathscr{E}$ в бесконечномерном случае и в случае, когда k не поле, а k-модуль $\mathfrak{g}$ несвободен. Отметим, что $\mathscr{E}(\psi)$ имеет вид $1 + \psi/6 + o(\psi)$, где $o(\psi)$ обозначает члены, содержащие ψ в степени, большей 1.

Предложение 3.12. *Пусть задано $\mathfrak{g}$-инвариантное $\Phi \in (U\mathfrak{g} \otimes \otimes U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$, удовлетворяющее* (1.8), (1.10), (3.15) *и сравнениям $\Phi \equiv 1 \bmod h$, $\operatorname{Alt}\Phi \equiv h^2\varphi \bmod h^3$, $\varphi \in \bigwedge^3 \mathfrak{g}$. Тогда найдется $\mathfrak{g}$-инвариантное симметричное $F \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ такое, что $F \equiv 1 \bmod h$, $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(F) = 1 = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(F)$, а Φ, определяемое формулой* (1.12), *равно $\mathscr{E}(\psi)$, где ψ является $\mathfrak{g}$-инвариантным элементом $(\bigwedge^3 \mathfrak{g})[[h]]$, сравнимым с $h^2\varphi \bmod h^3$. При этом ψ определен однозначно, а F — с точностью до умножения на элементы вида $(u^{-1} \otimes u^{-1})\Delta(u)$, где u принадлежит центру $(U\mathfrak{g})[[h]]$, $u \equiv 1 \bmod h$, $\varepsilon(u) = 1$.*

Доказательство. Достаточно воспользоваться предложением 3.11 (при $n = 3$ для доказательства существования и при $n = 2$ для доказательства единственности). ●

Замечание. Пусть $\overline{\mathscr{E}}(\psi)$ — произвольное «универсальное» решение уравнений (1.8), (1.10), (3.15) вида $\overline{\mathscr{E}}(\psi) = 1 + \psi/6 + o(\psi)$ (есть такие $\overline{\mathscr{E}}$, которые не менее «естественны», чем $\mathscr{E}$; например, можно сечения s^4_m, участвующие в определении $\mathscr{E}$, заменить другими сечениями или строить Φ'_n по Φ_n не так, как указано в доказательстве предложения 3.10). Тогда, рассуждая, как при доказательстве предложения 3.12, получим, что $\overline{\mathscr{E}}(\psi)$ можно скручиванием посредством симметричного «универсального» $F(\psi)$ вида $1 + o(\psi)$ привести к виду $\mathscr{E}(\tilde{\psi})$, где $\tilde{\psi}$ выражается через ψ с помощью «универсальной формулы» вида $\tilde{\psi} = \psi + o(\psi)$. При этом $\tilde{\psi}$ определяется по $\overline{\mathscr{E}}$ однозначно, а $F(\psi)$ — с точностью до умножения на $(u^{-1} \otimes u^{-1})\Delta(u)$, где u выражается через ψ с помощью «универсальной формулы» вида $u = 1 + o(\psi)$. Примером нетривиальной «перенормировки» ψ может служить $\tilde{\psi}^{ijk} = \psi^{ijk} + a \operatorname*{Alt}\limits_{i,j,k} \psi^{ilm}\psi^{jpq}c^n_{lm}c^r_{pq}c^k_{nr}$, где c — тензор структурных констант $\mathfrak{g}$, $a \in \mathbb{Q}$.

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — деформационная алгебра Ли над $k[[h]]$, а φ является $\mathfrak{g}$-инвариантным элементом $\bigwedge^3 \mathfrak{g}$, где $\bigwedge^3 \mathfrak{g}$ обозначает кососимметрическую часть $\mathfrak{g} \hat{\otimes} \mathfrak{g} \hat{\otimes} \mathfrak{g}$. Превратим $U\mathfrak{g}$ в кограничную квазихопфову QUE-алгебру, введя в $U\mathfrak{g}$ обычное коумножение и положив $R = 1$, $\Phi = \mathscr{E}(h^2\varphi)$. После скручивания посредством элемента $F \in U\mathfrak{g} \hat{\otimes} U\mathfrak{g}$ такого, что $F \equiv 1 \bmod h$ и $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(F) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(F) = 1$, получим снова кограничную квазихопфову QUE-алгебру, которую мы обозначим $A_{\mathfrak{g},\varphi,F}$.

Предложение 3.13. *Любая кограничная квазихопфова QUE-алгебра изоморфна $A_{\mathfrak{g},\varphi,F}$ для некоторых $\mathfrak{g}$, φ, F.*

Доказательство. Все сводится к следующей лемме.

Лемма. *Пусть $\bar{\mathfrak{a}}$ — алгебра Ли над $k[h]/(h^n)$, $n \geqslant 1$, являющаяся свободным модулем над $k[h]/(h^n)$, $\bar{\psi} \in \bigwedge^3 \bar{\mathfrak{a}}$ инвариантен относительно присоединенного представления, $\bar{\psi} \equiv 0 \bmod h$. Пусть $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ — кограничная квазихопфова алгебра над $k[h]/(h^{n+1})$, являющаяся свободным модулем над $k[h]/(h^{n+1})$, и такая, что после редукции $\bmod h^n$ набор (A, Δ, ε) превращается в $U\bar{\mathfrak{a}}$ с обычной хопфовой структурой, а Φ и R превращаются в $\mathscr{E}(\bar{\psi})$ и 1. Тогда скручиванием $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ с помощью некоторого $F \in A \otimes A$ такого, что $F \equiv 1 \bmod h^n$, $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(F) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(F) = 1$, можно добиться, чтобы $(A, \Delta, \varepsilon) = U\mathfrak{a}$, $\Phi = \mathscr{E}(\psi)$, $R = 1$, где $\mathfrak{a}$ — алгебра Ли над $k[h]/(h^{n+1})$, являющаяся свободным моду-*

лем над $k[h]/(h^{n+1})$, *и такая, что* $\mathfrak{a}/h^n\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}$, $\psi \in \bigwedge^3 \mathfrak{a}$ *инвариантен относительно присоединенного представления* $\mathfrak{a}$, $\psi \bmod h^n = \bar{\psi}$.

Доказательство. Положим $L = k[h]/(h^n)$, $I_r = h^r k[h]/h^{n+r-1}k[h]$, $\tilde{I}_1 = hk[h]/h^{n+1}k[h]$. Выберем у $\bar{\psi} \in (\bigwedge^3 \bar{\mathfrak{a}}) \otimes_L I_1$ прообраз $\tilde{\psi} \in (\bigwedge^3 \bar{\mathfrak{a}}) \otimes_L \tilde{I}_1$ (не являющийся, вообще говоря, $\bar{\mathfrak{a}}$-инвариантным) и покажем, что можно корректно определить $\Phi_1 = \mathscr{E}(\tilde{\psi}) \in A \otimes A \otimes A$, удовлетворяющее (1.8), (1.10), (3.15). Для этого рассмотрим L-алгебры $B = L \oplus I_1 t \oplus I_2 t^2 \oplus \ldots$, $\tilde{B} = L \oplus \tilde{I}_1 t \oplus I_2 t^2 + I_3 t^3 \oplus \ldots$ (где t — формальная переменная) и элемент $\bar{\psi} t \in (\bigwedge^3 \bar{\mathfrak{a}}) \otimes_L B$. Имеем $\mathscr{E}(\bar{\psi} t) \in (U\bar{\mathfrak{a}} \otimes U\bar{\mathfrak{a}} \otimes U\bar{\mathfrak{a}}) \otimes_L B$, $\mathscr{E}(\bar{\psi} t) - \bar{\psi} t - 1 \in (U\bar{\mathfrak{a}} \otimes U\bar{\mathfrak{a}} \otimes U\bar{\mathfrak{a}}) \otimes_L J$, где $J = I_2 t^2 \oplus I_3 t^3 \oplus \ldots$ Это позволяет определить $\mathscr{E}(\tilde{\psi} t) \in (U\bar{\mathfrak{a}} \otimes U\bar{\mathfrak{a}} \otimes U\bar{\mathfrak{a}}) \otimes_L \tilde{B}$ формулой $\mathscr{E}(\tilde{\psi} t) = (\mathscr{E}(\bar{\psi} t) - \bar{\psi} t) + \tilde{\psi} t$ и проверить, что $\mathscr{E}(\tilde{\psi} t)$ удовлетворяет (1.8), (1.10), (3.15). Наконец, положим $\Phi_1 = 1 + (f_1 \circ f_2)(\mathscr{E}(\tilde{\psi} t) - 1)$, где f_1 — естественное отображение $(U\bar{\mathfrak{a}} \otimes U\bar{\mathfrak{a}} \otimes U\bar{\mathfrak{a}}) \otimes_L \tilde{I}_1 \to A \otimes A \otimes A$, а $f_2 : (U\bar{\mathfrak{a}} \otimes U\bar{\mathfrak{a}} \otimes U\bar{\mathfrak{a}}) \otimes_L (\tilde{I}_1 t \oplus I_2 t^2 \oplus \oplus I_3 t^3 \oplus \ldots) \to (U\bar{\mathfrak{a}} \otimes U\bar{\mathfrak{a}} \otimes U\bar{\mathfrak{a}}) \otimes_L \tilde{I}_1$ индуцировано естественным отображением $\tilde{I}_1 t \oplus I_2 t^2 \oplus I_3 t^3 \oplus \ldots \to \tilde{I}_1$ (t полагается равным 1). Ясно, что $\Phi_1 \equiv \Phi \bmod h^n$.

Приступим теперь к скручиванию $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$. Сначала добьемся, чтобы $R = 1$. Тогда Φ наряду с (1.8) и (1.10) удовлетворяет (3.15), так что $h^{-n}(\Phi - \Phi_1) \bmod h$ является 3-мерным коциклом комплекса (3.17). Дальнейшее скручивание $(A, \Delta, \varepsilon, \Phi, R)$ с помощью симметричных $F \in A \otimes A$ таких, что $F \equiv 1 \bmod h^n$, $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(F) = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(F) = 1$, позволяет менять этот коцикл на кограницу, не нарушая условия $R = 1$. Поэтому можно добиться (см. предложение 3.11), чтобы

$$\Phi = \Phi_1 + h^n \chi, \quad \chi \in \Lambda^3(\mathfrak{A}/h\mathfrak{A}). \tag{3.22}$$

Так как $R = 1$, то Δ кокоммутативно. Отсюда

$$\mathrm{Alt}\,\{(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a)) - (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(a))\} = 0, \quad a \in A. \tag{3.23}$$

С другой стороны, из (1.1), (3.22) и определения Φ_1 следует, что если образ a в $A/h^n A = U\bar{\mathfrak{a}}$ равен $\alpha \in \bar{\mathfrak{a}}$, то

$$(\Delta \otimes \mathrm{id})(\Delta(a)) - (\mathrm{id} \otimes \Delta)(\Delta(a)) = [\alpha \otimes 1 \otimes 1 + 1 \otimes \alpha \otimes 1 + \\ + 1 \otimes 1 \otimes \alpha, \ \tilde{\psi} + h^n \chi]. \tag{3.24}$$

Из (3.23) и (3.24) вытекает, что обе части (3.24) равны 0. Поэтому Δ коассоциативно. Рассуждая, как при доказательстве предложения 3.7, получим, что $(A, \Delta, \varepsilon) = U\mathfrak{a}$ для некоторой алгебры Ли $\mathfrak{a}$ над $k[h]/(h^{n+1})$ такой, что $\mathfrak{a}$ — свободный модуль над $k[h]/(h^{n+1})$ и $\mathfrak{a}/h^n\mathfrak{a} = \bar{\mathfrak{a}}$. Отождествим $(\bigwedge^3 \bar{\mathfrak{a}}) \otimes_L I_1$ с $h \cdot \bigwedge^3 \mathfrak{a}$ и положим $\psi = \tilde{\psi} + h^n \chi \in h \cdot \bigwedge^3 \mathfrak{a}$. Так как правая часть (3.24) равна 0, то ψ является $\mathfrak{a}$-инвариантным. Ясно, что $\mathscr{E}(\psi) = \Phi$. ●●

Опишем теперь морфизмы $A_{\mathfrak{g},\varphi,F} \to A_{\bar{\mathfrak{g}},\bar{\varphi},\bar{F}}$ в духе предложения 3.9.

Предложение 3.14. *Пусть* λ — *гомоморфизм* $\mathfrak{g} \to \bar{\mathfrak{g}}$ *такой, что* $(\lambda \otimes \lambda \otimes \lambda)(\varphi) = \bar{\varphi}$, $u \in U\bar{\mathfrak{g}}$, $\varepsilon(u) = 1$, $u \equiv 1 \bmod h$, $\bar{F} = (u \otimes u) \cdot (\tilde{\lambda} \otimes \tilde{\lambda})(F) \cdot \Delta(u)^{-1}$, *где* $\tilde{\lambda}$ — *продолжение* λ *до гомоморфизма* $U\mathfrak{g} \to U\bar{\mathfrak{g}}$, *а* $\Delta : U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g} \hat{\otimes} U\mathfrak{g}$ — *стандартное (нескрученное) коумножение. Тогда отображение* $(\mathrm{Ad}\, u) \circ \tilde{\lambda} : U\mathfrak{g} \to U\bar{\mathfrak{g}}$ *является морфизмом*

$A_{\mathfrak{g},\varphi,F} \to A_{\bar{\mathfrak{g}},\bar{\varphi},\bar{F}}$. *Так получаются все морфизмы* $A_{\mathfrak{g},\varphi,F} \to A_{\bar{\mathfrak{g}},\bar{\varphi},\bar{F}}$. *Пары* (λ, u) *и* (λ_1, u_1) *определяют один и тот же морфизм* $A_{\mathfrak{g},\varphi,F} \to A_{\bar{\mathfrak{g}},\bar{\varphi},\bar{F}}$ *тогда и только тогда, когда* $\lambda_1 = \exp(-h\cdot \mathrm{ad}\, v)\circ\lambda$, $u_1 = ue^{hv}$ *для некоторого* $v \in \bar{\mathfrak{g}}$.

Доказательство. Как и при доказательстве предложения 3.9, достаточно убедиться, что если существует гомоморфизм $A_{\mathfrak{g},\varphi,1} \to A_{\bar{\mathfrak{g}},\bar{\varphi},\bar{F}}$, то $\bar{F}$ имеет вид $(u\otimes u)\cdot\Delta(u^{-1})$, где $u \in U\bar{\mathfrak{g}}$, $\varepsilon(u) = 1$, $u \equiv 1 \bmod h$. Для этого в свою очередь достаточно построить $u_n \in U\bar{\mathfrak{g}}$, $n \geqslant 1$, такие, что $\varepsilon(u_n) = 1$, $u_n \equiv 1 \bmod h$, $\bar{F} \equiv (u_n \otimes u_n)\cdot\Delta(u_n^{-1}) \times \bmod h^n$, $u_{n+1} \equiv u_n \bmod h^n$. В качестве u_1 можно взять 1. Пусть u_n уже построено. Положим $\tilde{F} = (u_n^{-1}\otimes u_n^{-1})\cdot\bar{F}\cdot\Delta(u_n)$. Тогда $\tilde{F} \equiv 1 \bmod h^n$, а $\mathrm{Ad}\, u_n$ — изоморфизм $A_{\bar{\mathfrak{g}},\bar{\varphi},\tilde{F}} \to A_{\bar{\mathfrak{g}},\bar{\varphi},\bar{F}}$. Поэтому существует гомоморфизм $f: A_{\mathfrak{g},\varphi,1} \to A_{\bar{\mathfrak{g}},\bar{\varphi},\tilde{F}}$. Отсюда следует, что в кограничной квазихопфовой QUE-алгебре $A_{\bar{\mathfrak{g}},\bar{\varphi},\tilde{F}}$ элемент R равен 1, так что $\tilde{F}$ симметричен. Положим $\theta = h^{-n}(\tilde{F} - 1) \bmod h$. θ принадлежит члену C^2 комплекса (3.17). Доказательство существования u_{n+1} сводится к проверке того, что θ — кограница. В силу предложения 3.11 достаточно доказать, что $d\theta = 0$, где d — дифференциал комплекса (3.17).

Редукция f по модулю h^n является гомоморфизмом алгебр Хопфа $U\mathfrak{g}/h^nU\mathfrak{g} \to U\bar{\mathfrak{g}}/h^nU\bar{\mathfrak{g}}$ и, следовательно, отображает $\mathfrak{g}/h^n\mathfrak{g}$ в $\bar{\mathfrak{g}}/h^n\bar{\mathfrak{g}}$. Образ φ в $\Lambda^3(\bar{\mathfrak{g}}/h^n\bar{\mathfrak{g}})$ обозначим $\boldsymbol{\varphi}$. Тогда $(f\otimes f\otimes f)(\mathscr{E}(h^2\varphi)) \bmod h^{n+2} = \mathscr{E}(h^2\boldsymbol{\varphi})$. С другой стороны, $(f\otimes f\otimes f)(\mathscr{E}(h^2\varphi))$ получается из $\mathscr{E}(h^2\bar{\varphi})$ скручиванием посредством $\tilde{F}$. Поэтому $\mathscr{E}(h^2\boldsymbol{\varphi}) - \mathscr{E}(h^2\varphi) \equiv h^n\cdot d\theta \bmod h^{n+1}$. Отсюда $h^2(\boldsymbol{\varphi} - \bar{\varphi}) \equiv h^n\, d\theta \bmod h^{n+1}$, так что $d\theta \in \bigwedge^3(\mathfrak{g}/h\mathfrak{g})$. Это возможно только, если $d\theta = 0$. ●

Перейдем к квазитреугольным квазихопфовым QUE-алгебрам. Оказывается, любую пару $(\mathfrak{g}, t)$, где $\mathfrak{g}$ — алгебра Ли над k, а t является $\mathfrak{g}$-инвариантным элементом $\mathrm{Sym}^2\,\mathfrak{g}$, можно проквантовать. Для этого возьмем $(U\mathfrak{g})[[h]]$ в качестве A, определим обычным образом Δ, ε положим $R = e^{ht/2}$ и будем искать $\mathfrak{g}$-инвариантный элемент $\Phi \in (U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g})[[h]]$, удовлетворяющий (1.8), (1.10), (3.9а), (3.15) (тогда выполнено и (3.9б), так как $R(x, y * z) = R(z * y, x)$).

Теорема 3.15. *Такое* Φ *существует и единственно с точностью до скручивания посредством симметричных* $\mathfrak{g}$-*инвариантных* $F \in (U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g})[[h]]$. Φ *можно выразить через* $\tau = ht$ *с помощью «универсальной формулы»* $\Phi = \mathscr{M}(\tau) = 1 + o(\tau)$, *которая единственна с точностью до скручивания посредством симметричного «универсального»* $F(\tau)$ *вида* $1 + o(\tau)$. *Аналоги предложений* 3.13 *и* 3.14 *справедливы в квазитреугольном случае.*

Чтобы объем статьи не превысил установленной нормы, автор вынужден отложить доказательство теоремы до следующей публикации. Здесь мы покажем, что при $k = \mathbb{C}$ можно определить Φ из соотношения $G_1 = G_2\Phi$, где G_1 и G_2 — решения дифференциального уравнения

$$G'(x) = \hbar\left(\frac{t^{12}}{x} + \frac{t^{23}}{x-1}\right)G(x),\quad \hbar = h/2\pi i, \tag{3.25}$$

заданные при $0 < x < 1$ и обладающие асимптотикой $G_1(x) \sim x^{\hbar t^{12}}$ при $x \to 0$, $G_2(x) \sim (1-x)^{\hbar t^{23}}$ при $x \to 1$. Поясним, что $t^{12} = t\otimes 1 \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, $t^{23} = 1\otimes t \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}$, $G(x) \in (U\mathfrak{g})^{\otimes 3}[[h]]$, $x^{\hbar t^{12}}$ следует понимать как $\exp(\hbar \ln x\cdot t^{12}) = 1 + \hbar\ln x\cdot t^{12} + \ldots$, а запись $G_1(x) \sim x^{\hbar t^{12}}$ означает, что $G_1(x) = (1 + f_1(x)h + f_2(x)h^2 + \ldots)x^{\hbar t^{12}}$, где f_i аналитичны при

$x = 0$ и $f_i(0) = 0$. Для доказательства (1.2) и (3.9а) рассмотрим систему

$$\frac{\partial W}{\partial z_i} = \hbar \sum_{j \neq i} \frac{t^{ij}}{z_i - z_j} \cdot W, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.26}$$

где $W(z_1, \ldots, z_n) \in (U\mathfrak{g})^{\otimes n}[[h]]$, t^{ij} — образ t при (i, j)-м вложении $U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \to (U\mathfrak{g})^{\otimes n}$. Эта система возникла [19] в связи с конформной теорией поля, соответствующей алгебре токов, и исследовалась в [5—8]. Для нас существенно, что, как указано в [19], система (3.26) самосогласованна, т. е. кривизна соответствующей связности равна 0. Отметим еще, что $\frac{\partial W}{\partial z_1} + \ldots + \frac{\partial W}{\partial z_n} = 0$, так что W зависит только от разностей $z_i - z_j$.

Решения системы (3.26) при $n = 3$ имеют вид $(z_1 - z_3)^{\hbar(t^{12}+t^{13}+t^{23})} \times G((z_1 - z_2)/(z_1 - z_3))$, где G удовлетворяет (3.25). Поэтому Φ можно определить из соотношения $W_1 = W_2\Phi$, где W_1, W_2 — решения (3.26) при $n = 3$ в области $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{R}^3 \mid z_1 > z_2 > z_3\}$ с асимптотикой $W_1 \sim (z_1 - z_2)^{\hbar t^{12}} (z_1 - z_3)^{\hbar(t^{13}+t^{23})}$ при $z_1 - z_2 \ll z_1 - z_3$, $W_2 \sim (z_2 - z_3)^{\hbar t^{23}} (z_1 - z_3)^{\hbar(t^{12}+t^{13})}$ при $z_2 - z_3 \ll z_1 - z_3$. Для доказательства (1.2) рассмотрим (3.26) при $n = 4$ в области $\{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{R}^4 \mid z_1 > z_2 > z_3 > z_4\}$ и выделим 5 зон:

1) $z_1 - z_2 \ll z_1 - z_3 \ll z_1 - z_4$, 2) $z_2 - z_3 \ll z_1 - z_3 \ll z_1 - z_4$,
3) $z_2 - z_3 \ll z_2 - z_4 \ll z_1 - z_4$, 4) $z_3 - z_4 \ll z_2 - z_4 \ll z_1 - z_4$,
5) $z_1 - z_2 \ll z_1 - z_4$, $z_3 - z_4 \ll z_1 - z_4$. Эти зоны соответствуют способам расстановки скобок в произведении символов x_1, x_2, x_3, x_4:

1) $((x_1x_2)\,x_3)\,x_4$, 2) $(x_1\,(x_2x_3))\,x_4$, 3) $x_1\,((x_2x_3)\,x_4)$,
4) $x_1\,(x_2\,(x_3x_4))$, 5) $(x_1x_2)(x_3x_4)$. Нетрудно показать, что существуют решения $W_1, \ldots, W_5$, обладающие в соответствующих зонах асимптотиками $W_1 \sim (z_1 - z_2)^{\hbar t^{12}} (z_1 - z_3)^{\hbar(t^{13}+t^{23})} (z_1 - z_4)^{\hbar(t^{14}+t^{24}+t^{34})}$, $W_2 \sim (z_2 - z_3)^{\hbar t^{23}} (z_1 - z_3)^{\hbar(t^{12}+t^{13})} (z_1 - z_4)^{\hbar(t^{14}+t^{24}+t^{34})}$, $W_3 \sim (z_2 - z_3)^{\hbar t^{23}} (z_2 - z_4)^{\hbar(t^{24}+t^{34})} (z_1 - z_4)^{\hbar(t^{12}+t^{13}+t^{14})}$, $W_4 \sim (z_3 - z_4)^{\hbar t^{34}} (z_2 - z_4)^{\hbar(t^{23}+t^{24})} (z_1 - z_4)^{\hbar(t^{12}+t^{13}+t^{14})}$, $W_5 \sim (z_1 - z_2)^{\hbar t^{12}} \times (z_3 - z_4)^{\hbar t^{34}} (z_1 - z_4)^{\hbar(t^{13}+t^{14}+t^{23}+t^{24})}$. Поясним, что асимптотику, скажем, для W_5 следует понимать как равенство $W_5 = (1 + f_1(u, v)\,h + f_2(u, v)\,h^2 + \ldots)(z_1 - z_2)^{\hbar t^{12}} (z_3 - z_4)^{\hbar t^{34}} (z_1 - z_4)^{\hbar(t^{13}+t^{14}+t^{23}+t^{24})}$, где $u = (z_1 - z_2)/(z_1 - z_4)$, $v = (z_3 - z_4)/(z_1 - z_4)$, f_i аналитичны в окрестности $(0, 0)$, $f_i(0, 0) = 0$. Нетрудно показать, что $W_1 = W_2 \cdot (\Phi \otimes 1)$, $W_2 = W_3 \cdot (\mathrm{id} \otimes \Delta \otimes \mathrm{id})(\Phi)$, $W_3 = W_4 \cdot (1 \otimes \Phi)$, $W_1 = W_5 \cdot (\Delta \otimes \mathrm{id} \otimes \mathrm{id})(\Phi)$, $W_5 = W_4 \cdot (\mathrm{id} \otimes \mathrm{id} \otimes \Delta)(\Phi)$. Отсюда следует (1.2).

Для доказательства (3.9а) рассмотрим (3.26) при $n = 3$ в области $\{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 \mid \operatorname{Im} z_1 \geqslant \operatorname{Im} z_2 \geqslant \operatorname{Im} z_3,\ z_1 \neq z_2 \neq z_3 \neq z_1\}$. Пусть $W_1, \ldots, W_6$ — решения, имеющие асимптотику $W_1 \sim (z_1 - z_2)^{\hbar t^{12}} (z_1 - z_3)^{\hbar(t^{13}+t^{23})}$ при $|z_1 - z_2| \ll |z_1 - z_3|$, $W_2 \sim (z_2 - z_3)^{\hbar t^{23}} (z_1 - z_3)^{\hbar(t^{12}+t^{13})}$ при $|z_2 - z_3| \ll |z_1 - z_3|$, $W_3 \sim (z_3 - z_2)^{\hbar t^{23}} (z_1 - z_2)^{\hbar(t^{12}+t^{13})}$ при $|z_2 - z_3| \ll |z_1 - z_2|$, $W_4 \sim (z_1 - z_3)^{\hbar t^{13}} (z_1 - z_2)^{\hbar(t^{12}+t^{23})}$ при $|z_1 - z_3| \ll |z_1 - z_2|$, $W_5 \sim (z_3 - z_1)^{\hbar t^{13}} (z_3 - z_2)^{\hbar(t^{12}+t^{23})}$ при $|z_3 - z_1| \ll |z_3 - z_2|$, $W_6 \sim (z_1 - z_2)^{\hbar t^{12}} (z_3 - z_2)^{\hbar(t^{13}+t^{23})}$ при $|z_1 - z_2| \ll |z_1 - z_3|$. Пусть сначала $z_i \in \mathbb{R}$. Рассмотрев W_1 и W_2 при $z_1 > z_2 > z_3$, W_3 и W_4 при $z_1 > z_3 > z_2$, W_5 и W_6 при $z_3 > z_1 > z_2$, получим, что $W_1 = W_2\Phi$, $W_4 = W_3 \cdot \Phi^{132}$, $W_5 = W_6 \cdot \Phi^{312}$. С другой стороны, рассмотрев комплексные значения z_i, получим, что $W_2 = W_3 e^{ht^{23}/2}$, $W_4 = W_5 e^{ht^{13}/2}$, $W_1 = W_6 e^{h(t^{13}+t^{23})/2}$. Отсюда следует (3.9а).

Замечание об инвариантах узлов. Пусть $\mathfrak{g}$ и t имеют прежний смысл. Согласно теореме 3.15 паре $(\mathfrak{g}, t)$ соответствует

квазитреугольная квазихопфова алгебра (A, Δ, Φ, R), где $A = (U\mathfrak{g}) \times [[h]]$, Δ — обычное коумножение, $R = e^{ht/2}$, а Φ выражается через $\tau = ht$ «универсальной» формулой $\Phi = \mathcal{M}(\tau)$. Применив теперь квазихопфову модификацию конструкции Решетихина (см. введение), получим, что каждому узлу γ в $\mathbb{R}^3$ соответствует элемент $p_\gamma \in (U\mathfrak{g})[[h]]$, выражающийся «универсальной» формулой $p_\gamma = \mathcal{P}_\gamma(\tau)$. «Универсальный инвариант узла» $\mathcal{P}_\gamma$ не зависит от произвола в выборе $\mathcal{M}$ и содержит в себе все инварианты R-матричного типа, соответствующие R-матрицам, которые принадлежат неприводимым компонентам многообразия решений уравнения (3.4), содержащим единичную матрицу. Обозначим через V_r пространство симметрических тензоров ранга r, образованных из τ, и тензора структурных констант $\mathfrak{g}$ по правилам ацикличного тензорного исчисления с коэффициентами из $\mathbb{Q}$. Такие тензоры удобно изображать с помощью графов (см. приложение к [20]). Обозначим через U_{rk} подпространство в V_r, соответствующее связным графам с первым числом Бетти, равным k. Если выбрать в U_{rk} базис x_{rki}, $1 \leqslant i \leqslant \dim U_{rk}$, то $\mathcal{P}_\gamma(\tau)$ запишется в виде формального ряда с рациональными коэффициентами от x_{rki}, где $r = 1, 2, \ldots, k = 0, 1, \ldots, 1 \leqslant i \leqslant \dim U_{rk}$. Если Φ определять с помощью (3.25), то рациональность коэффициентов неочевидна, но вытекает из утверждения о единственности теоремы 3.15. Автор надеется подробно рассмотреть эти вопросы в следующей публикации.

Пусть теперь $\mathfrak{g}$ — простая конечномерная алгебра Ли над $\mathbb{C}$ с фиксированным инвариантным скалярным произведением, t — соответствующий элемент $\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}$. По этим данным с одной стороны строится квазитреугольная квазихопфова QUE-алгебра $((U\mathfrak{g})[[h]], \Delta, \Phi, R)$, где Δ — обычное коумножение, $R = e^{ht/2}$, Φ определяется указанным выше образом с помощью (3.25), а с другой стороны — квазитреугольная QUE-алгебра Хопфа $(U_h\mathfrak{g}, \overline{R})$, где $U_h\mathfrak{g}$ означает то же, что в примере 6.3 из [2], $\overline{R}$ — то же, что в § 13 из [2].

Предложение 3.16. *$((U\mathfrak{g})[[h]], \Delta, \Phi, R)$ можно скручиванием превратить в квазитреугольную QUE-алгебру Хопфа, изоморфную $(U_h\mathfrak{g}, \overline{R})$.*

Доказательство. Как объяснено в § 4 из [21], существует изоморфизм алгебр $\varphi : U_h\mathfrak{g} \xrightarrow{\sim} (U\mathfrak{g})[[h]]$, тождественный $\mathrm{mod}\, h$, причем φ переводит коумножение $\Delta_h : U_h\mathfrak{g} \to U_h\mathfrak{g} \hat{\otimes} U_h\mathfrak{g}$ в гомоморфизм $\tilde{\Delta}_h : (U\mathfrak{g})[[h]] \to (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ вида $\tilde{\Delta}_h(a) = F^{-1}\Delta(a) F$, $F \in (U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$, $F \equiv 1 \bmod h$. Без ограничения общности можно считать, что $(\varepsilon \otimes \mathrm{id})(F) = 1 = (\mathrm{id} \otimes \varepsilon)(F)$. Положим $\tilde{R} = (\varphi \otimes \varphi) \times (\overline{R})$. Квазитреугольная QUE-алгебра Хопфа $((U\mathfrak{g})[[h]], \tilde{\Delta}_h, \tilde{R})$ скручиванием посредством F превращается в квазитреугольную квазихопфову QUE-алгебру вида $((U\mathfrak{g})[[h]], \Delta, \Phi, \mathrm{R})$. Из (1.1) и (3.1) следует $\mathfrak{g}$-инвариантность R и Φ. Скручиванием $((U\mathfrak{g})[[h]], \Delta, \Phi, \mathrm{R})$ посредством $\mathfrak{g}$-инвариантного элемента $(U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g})[[h]]$ можно добиться, чтобы $\mathrm{R}^{21} = \mathrm{R}$. В § 5 из [21] доказано равенство $\overline{R}^{21}\overline{R} = \Delta_h(e^{hC_h/2}) \times (e^{-hC_h/2} \otimes e^{-hC_h/2})$, где C_h — образ в $U_h\mathfrak{g}$ элемента Казимира $C \in U\mathfrak{g}$. Поэтому $\tilde{R}^{21}\tilde{R} = \tilde{\Delta}_h(e^{hC/2})(e^{-hC/2} \otimes e^{-hC/2})$, откуда $\mathrm{R}^{21}\mathrm{R} = \Delta(e^{hC/2})(e^{-hC/2} \otimes e^{-hC/2}) = e^{ht}$, т. е. $\mathbf{R} = e^{ht/2}$. Остается воспользоваться утверждением о единственности теоремы 3.15, которое легко выводится из предложения 3.11 и формулы (3.12). ●

Из предложения 3.16 следует теорема Т. Коно [5], утверждающая, что если ρ — конечномерное представление $\mathfrak{g}$, а ρ_h — соответствующее пред-

ставление $U_h\mathfrak{g}$, то представление группы кос B_n, соответствующее R-матрице $(\rho_h \otimes \rho_h)(\overline{R})$, эквивалентно представлению B_n как группы монодромии уравнения, получающегося из (3.26) заменой t^{ij} на $\rho^{\otimes n}(t^{ij})$. Правда, в [5] утверждается эквивалентность для всех $h \notin \pi i\mathbb{Q}$, а из предложения 3.16 вытекает эквивалентность для почти всех $h \in \mathbb{C}$ (без уточнения множества «исключений»).

Список литературы

[1] *Faddeev L. D.* Integrable models in (1 + 1)-dimensional quantum field theory//Recent advances in field theory and statistical mechanics (Lectures in Les Houches, 1982). Amsterdam: Elsevier, *1984*. P. 563—608.

[2] *Drinfeld V. G.* Quantum groups//Proc. Internat. Congress of Mathematicians (Berkeley, 1986). Vol. 1. Providence: Amer. Math. Soc. *1987*. P. 798—820. (Рус. пер.: Дринфельд В. Г. Квантовые группы//Зап. научн. семинаров ЛОМИ. *1986*. Т. 155. С. 18—49).

[3] *Решетихин Н. Ю.* Квазитреугольные алгебры Хопфа, решения уравнения Янга—Бакстера и инварианты связок//Алгебра и анализ. *1989*. Т. 1, вып. 2. С. 30—47.

[4] *Jones V. F. R.* A polynomial invariant for knots via von Neumann algebras//Bul. Amer. Math. Soc. *1985*. Vol. 12, N 1. P. 103—111.

[5] *Kohno T.* Quantized universal enveloping algebras and monodromy of braid groups. Preprint Nagoya University. *1988*. 70 p.

[6] *Kohno T.* Monodromy representations of braid groups and Yang—Baxter equations// An. Inst. Fourier de Grenoble. *1987*. Vol. 37, N 4. P. 139—160.

[7] *Kohno T.* Linear representations of braid groups and classical Yang—Baxter equations// Proc. of the conference on Artin's braid groups (Santa Cruz, 1986). Contemporary Mathematics 78. Providence: Amer. Math. Soc. *1988*. P. 339—363.

[8] *Tsuchiya A., Kanie Y.* Vertex operators in two dimensional conformal field theory on $\mathbb{P}^1$ and monodromy representations of braid groups//Conformal field theory and solvable lattice models. Advanced Studies in Pure Mathematics 16. Tokyo: Kinokuniya, *1988*. P. 297—372.

[9] *Mac Lane S.* Categories for the working mathematician. Berlin; Heidelberg; New York: Springer—Verlag, *1971*. 302 p.

[10] *Mac Lane S.* Natural associativity and commutativity//Rice Univ. Studies. *1963*. Vol. 49. P. 28—46.

[11] *Kelly G. M.* On Mac Lane's conditions for coherence of natural associativities, commutativities, etc.//J. of Algebra. *1964*. Vol. 1. P. 397—402.

[12] *Sweedler M. E.* Hopf algebras. New York: Benjamin, *1969*. 341 p.

[13] *Radford D. E.* A free rank 4 Hopf algebra with antipode of order 4//Proc. Amer. Math. Soc. *1971*. Vol. 30, N 1. P. 55—58.

[14] *Deligne P., Milne J.* Tannakian categories//Hodge cycles, motives, and Shimura varieties. Lecture Notes in Math. Vol. 900. Berlin; Heidelberg; New York: Springer—Verlag, *1982*. P. 101—228. (Рус. пер.: Делинь П., Милн Дж. С. Категории Таннаки//Ходжевы циклы и мотивы. М.: Мир, *1985*. С. 94—201).

[15] *Бурбаки Н.* Группы и алгебры Ли. Гл. 1—3. М.: Мир, *1976*. 496 с.

[16] *Габриэль П., Цисман М.* Категории частных и теория гомотопий. М.: Мир, *1971*. 295 с.

[17] *Дринфельд В. Г.* О постоянных квазиклассических решениях квантового уравнения Янга—Бакстера//ДАН СССР. *1983*. Т. 273, № 3. С. 531—535.

[18] *Stasheff J. D.* Homotopy associativity of H-spaces. I//Transactions Amer. Math. Soc. *1963*. Vol. 108, N 2. P. 275—292.

[19] *Knizhnik V. G., Zamolodchikov A. B.* Current algebra and Wess—Zumino models in two dimensions//Nucl. Phys. *1984*. Vol. B247. P. 83—103.

[20] *Пенроуз Р., Риндлер В.* Спиноры и пространство-время. Т. 1. М.: Мир, *1987*. 528 с.

[21] *Дринфельд В. Г.* О почти кокоммутативных алгебрах Хопфа//Алгебра и анализ. *1989*. Т. 1, вып. 2. С. 30—46.

Физико-технический институт
низких температур АН УССР
310164, Харьков, пр. Ленина, 47

Поступило 23 мая 1989 г.